

18.05.2013
22.12.2021

Temat

XII

Tensory

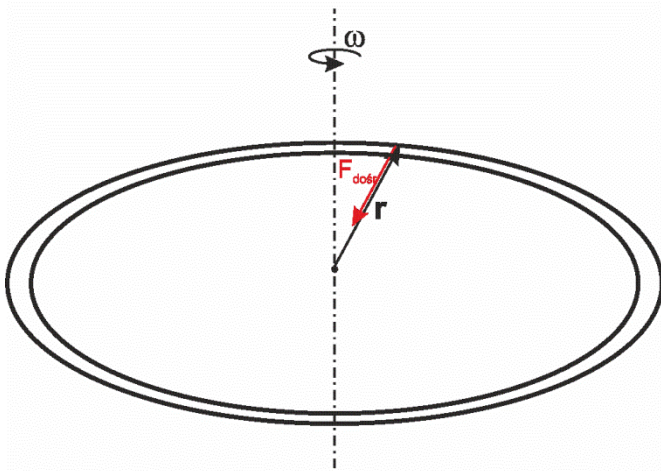
1. Moment bezwładności ♦

Ostrzegam: tytuł tego tematu „Tensory” nie jest przypadkowy. Czekają nas duża dawka matematyki. Rachunek na tensorach jest dla fizyki absolutnie podstawowy. I nie chodzi tylko o zawansowaną postać kwantowej teorii pola czy ogólnej teorii względności. Tensory są powszechnie stosowane w mechanice klasycznej. Jest ich również pełno w klasycznej elektrodynamice. Krótko mówiąc bez tensorów nie da się głębiej wejść w fizykę. Na szczęście tensory nie gryzą. Podstawy rachunku tensorowego nie są wiele trudniejsze od rachunku na wektorach. Zresztą tensory są ich bliskim krewnymi, nieco bardziej rozbudowanymi, a przez to mogącymi więcej. Nie będzie to jednak wykład wyłącznie matematyczny. Na taką stratę czasu nie możemy sobie pozwolić, więc spotkanie z tensorami będzie biegło równoległe z omówieniem kilku istotnych tematów z fizyki. Zaczę od fizyki bryły sztywnej.

Do tej pory analizowaliśmy ruch punkt materialnego lub ruch ciał, które można sprowadzić do punktu. Wiemy już, że rozciągnięte ciało można podzielić na mniejsze fragmenty i każdy z nich reprezentować poprzez punkt. Wiemy również, że podział możemy prowadzić aż do nieskończenia małych kawałków, pod warunkiem, że jesteśmy w stanie obliczyć pojawiające się wówczas całki. Istnieje jednak ważna, z punktu widzenia modelowania zachowania ciał rozciągniętych, klasa ciał, kryjąca się pod nazwą „bryła sztywna”. O bryle sztywnej mówimy wtedy kiedy kształt ciała nie zmienia się w czasie ruchu. Nie oznacza to, że możemy traktować bryłę sztywną jak pojedynczy punkt. Kiedy działamy siłą na koniec sztywnego pręta, to pręt ten zaczyna się obracać. I choć nie możemy w takiej sytuacji traktować sztywnego pręta jak punktu, to można zapisać prawa dynamiki tak, by można było bryłę sztywną traktować jako zwartą całość. To bardzo ułatwia analizę dynamiki konkretnych ciał. Bardziej ogólnym przypadkiem jest ruch ciał niesztywnych, czyli takich, w których oddziaływania między cząsteczkami są za słabe aby utrzymać je w tym samym względnym położeniu. Dzieje się tak na przykład dla cieczy. Uwzględnienie tej wewnętrznej dynamiki cząstek wymaga bardziej złożonego modelu; są to najtrudniejsze zagadnienia fizyki ciał materialnych. Co nieco będzie na ten temat w temacie (TXIV). Gdy cząstki nie oddziałują ze sobą inaczej jak tylko przez zderzenia sprężyste (mamy wtedy tzw. gaz doskonały), sprawa ponownie robi się prostsza. Nie jesteśmy w stanie co prawda opisać ruchu każdej cząstki z osobna (jest ich stanowczo za dużo), ale opis statystyczny daje bardzo dobre wyniki. Zajmę się tym w temacie (TXIX).

Budując opis dynamiki bryły sztywnej trafimy na obiekty matematyczne bardziej złożone od wektorów. Obiekty te to tensory. Naszą drogę ku tensorom zaczniemy od analizy ruchu obrotowego cienkiej obręczy, przy czym oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny obręczy i przechodzi przez jej środek (rys.1.1).

To zapewnia wysoką symetrię całego układu, to jest obręczy i osi obrotu. A wysoka symetria znacznie upraszcza analizę.



Rysunek 1.1. Obracająca się cienka obręcz, może być traktowana jako zbiór punktów materialnych równo oddalonych od środka obrotu.

To, że obręcz jest cienka sugeruje, że możemy uznać, iż jej wszystkie punkty są jednakowo odległe od osi obrotu. Niech obręcz obraca się wokół osi obrotu ze stałą prędkością kątową ω . Skoro każdy punkt obręczy krąży wokół jej środka, to musi na niego działać siła dośrodkowa $\mathbf{F}_d$, taka że

$$\mathbf{F}_d = -m_p \mathbf{r} \omega^2 \quad 1.1$$

m_p jest masą punktu; znak minus powoduje, że kierunek siły dośrodkowej jest przeciwny do kierunku wektora $\mathbf{r}$. Obliczę moment pędu dowolnego punktu obręczy. Wartość prędkości liniowej takiego punktu wynosi

$$v_p = |\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}| = r\omega \quad 1.2$$

Ponieważ wektory $\mathbf{r}$ i $\boldsymbol{\omega}$ są prostopadłe ich iloczyn wektorowy wyraża się w prosty sposób. Moment pędu punktu obręczy wyliczę bezpośredni z definicji (TV 1.1.1)

$$\mathbf{K}_p = \mathbf{r} \times m_p \underbrace{(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega})}_{\mathbf{v}_p} \quad 1.3$$

Skorzystamy teraz z zależności (DA 2.5.6) pozwalającej zamienić podwójny iloczyn wektorowy na różnicę iloczynów skalarnych. Po jej zastosowaniu i uproszczeniu otrzymanych wyrażeń moment pędu punktu obręczy wyrazi się wzorem

$$\mathbf{K}_p = m_p r^2 \boldsymbol{\omega} \quad 1.4$$

Jak należało się spodziewać wektor momentu pędu $\mathbf{K}_p$ jest równoległy do wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$. Zauważ, że dla każdego punktu obręczy moment pędu jest dany dokładnie takim samym wektorem.

Gdybyśmy związek między momentem pędu a prędkością kątową chcieli zapisać w postaci takiej jak ma to miejsce dla pędu i prędkości liniowej (droga wiadra)

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad 1.5$$

To musielibyśmy przyjąć, że wielkość

$$I_p = m_p r^2 \quad 1.6$$

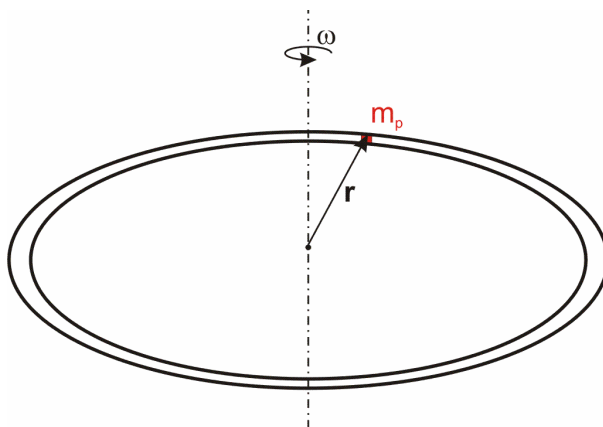
pełni rolę masy. Wtedy wzór (1.4) przejdzie w

$$\mathbf{K}_p = I_p \boldsymbol{\omega} \quad 1.7$$

Dla całej obręczy kręt $\mathbf{K}_o$ jest sumą krętów $\mathbf{K}_p$ wszystkich punktów. Ponieważ obręcz jest ciągła sumowanie powinno zostać zastąpione całkowaniem. W tym jednak wypadku całkowanie jest trywialne. Suma stałych wyrazów postaci (1.4) jest po prostu równa

$$\mathbf{K}_o = \underbrace{m_o r^2}_{I_o} \boldsymbol{\omega} \quad 1.8$$

Trochę się jednak nad tym problemem musimy zatrzymać. Obliczyliśmy moment pędu punktu materialnego będącego częścią obręczy. Uznaliśmy przy tym, że punkt ma masę m_p . Ale masa punktu nie może być równa m_p . Punkt ma zerową objętość i jeżeli miałby niezerową masę, to wtedy gęstość masy tego punktu ρ_p byłaby nieskończenie wielka i mielibyśmy czarną dziurę. Jednak gęstość obręczy nie jest nieskończenie wielka. Unikając skrótów myślowych zastosowanych w powyższym rozumowaniu, do sprawy powinniśmy podejść tak: Z obręczy wyciąć bardzo, bardzo mały kawałek o skończonej masie m_p (rys. 1.2)



Rysunek 1.2. Na obręczy wybieramy bardzo mały (najlepiej nieskończenie mały) fragment

Zróbmy teraz ten mały kawałek obręczy nieskończenie małym. Przechodząc do granicy nieskończenie małego kawałka musimy przyjąć, że kawałek ten ma nieskończenie małą masę dm i w efekcie nieskończenie mały moment pędu $d\mathbf{K}$. Teraz możemy obliczyć moment pędu całkując po wszystkich takich nieskończenie małych kawałkach z jednej strony równości będą to elementarne wkłady momentu pędu a z drugiej strony te same równości elementarne wkłady masy.

$$\mathbf{K}_o = \int_C d\mathbf{K} = \int_C r^2 \boldsymbol{\omega} dm = r^2 \boldsymbol{\omega} \int_C dm \quad 1.9$$

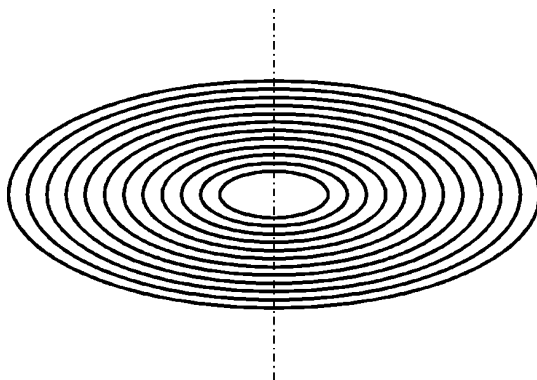
Litera C oznacza granice całkowania, w tym wypadku wzdłuż obręczy. Ze względu na symetrię obręczy (wszystkie punkty są tak samo odległe od osi obrotu), r jest takie same dla każdej elementarnej masy dm i możemy je przenieść przed znak całki. W efekcie całkowanie staje się trywialne i daje w wyniku masę obręczy

$$\mathbf{K}_o = mr^2 \boldsymbol{\omega} \quad 1.10$$

W pierwszym podejściu posłużyłem się skrótami myślowymi typu „punkt materialny”, teraz obliczyłem moment pędu obręczy jak należy.

Wielkość (1.6) oznaczoną jako „ I ” będziemy nazywali momentem bezwładności ciała.

A co będzie, jeżeli obracać się będzie nie obręcz a dysk? Dysk możemy podzielić na sumę bardzo, bardzo dużej liczby wąskich pierścieni, w granicy nieskończenie wąskich pierścieni (rys. 1.3).



Rysunek 1.3. Płaski dysk możemy podzielić na nieskończenie cienkie pierścienie.

Masa pojedynczego nieskończenie wąskiego pierścienia to

$$dm = 2\pi\sigma r dr \quad 1.11$$

gdzie σ jest gęstością powierzchniową dysku, r promieniem pierścienia, a dr jego szerokością. Masa pierścienia jest nieskończenie mała, gdyż pierścień jest nieskończenie cienki. Kręt takiego pojedynczego pierścienia (obróczy) to, zgodnie z (1.10)

$$d\mathbf{K} = r^2 \boldsymbol{\omega} dm = 2\pi\sigma \boldsymbol{\omega} r^3 dr \quad 1.12$$

Musimy zsumować kręty wszystkich pierścieni. Mamy tu do czynienia z funkcją typu

$$f(x) = ax^3 \quad 1.13$$

$$a = 2\pi\sigma\boldsymbol{\omega}, \quad x = r \quad 1.13a$$

Całkowity kręt to pole powierzchni pod tą krzywą na przedziale $[0, r_d]$.

$$2\pi\sigma\omega \int_0^{r_d} r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\sigma\omega r_d^4 \quad 1.14$$

r_d jest promieniem dysku. Zatem dla dysku mamy

$$\mathbf{K}_d = \frac{2}{4}\pi\sigma r_d^4 \omega = \frac{1}{2}m_d r_d^2 \omega \quad 1.15$$

Skorzystałem z faktu, że masa dysku $m = \pi r_d^2 \sigma$. Od razu będziemy mogli zapisać wyrażenie na moment pędu (kręt) walca. Walec to zbiór nieskończenie wielu nieskończenie cienkich dysków położonych jeden nad drugim. Ponieważ każdy dysk jest taki sam i każdy jest tak samo symetrycznie położony względem osi symetrii walca, wystarczy, że masę dysku m_d zamieniamy we wzorze (1.15) na masę walca m_w .

$$\mathbf{K}_w = \frac{1}{2}m_w r_w^2 \omega \quad 1.16$$

Oczywiście moglibyśmy to policzyć porządnie, to jest całkując po wszystkich nieskończenie cienkich dyskach; może warto żebyście spróbowali. Jeżeli chcemy nasze wzory napisać w postaci (1.7), to wzór na moment bezwładności dysku i walca przyjmie postać

$$I_d = \frac{1}{2}m_d r_d^2 \quad 1.17a$$

$$I_w = \frac{1}{2}m_w r_w^2 \quad 1.17b$$

Choć wzory na moment bezwładności dysku i walca są takie same, to różnią się one od wzoru na moment bezwładności obręczy. Musimy się liczyć z faktem, że dla różnych ciał będziemy mieli różne wzory na moment bezwładności. Co więcej dla tego samego ciała wzory na moment bezwładności będą zależeć od wyboru osi obrotu.

Wróćmy jeszcze na moment do wzoru (1.11). Mamy tam wyrażenie $2\pi r$, które wyznacza długość obwodu obręczy. Wyrażenie to mnożone jest przez dr , które wyznacza szerokość nieskończenie cienkiego pierścienia. Całość $2\pi r dr$ wyznacza zatem pole nieskończenie cienkiego pierścienia, które przemnożone przez gęstość powierzchniową σ , daje nieskończenie małą masę tego pierścienia. Czy jednak możemy tak obliczać pole nieskończenie cienkiego pierścienia? Pole koła wynosi πr^2 . Jak zmieni się to pole, jeżeli zwiększymy promień koła o dr ?

$$\pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2rdr + (dr)^2) - \pi r^2 = 2\pi r dr + (dr)^2 \quad 1.18$$

Zmieni się o $2\pi r dr$ plus wyraz dr do potęgi drugiej. Jak wiemy, przy całkowaniu, nieskończenie małe w nadmiarowych potęgach odrzucamy (rys. (TII 6.6)). Zatem

pole koła możemy policzyć sumując pola nieskończenie cienkich pierścieni, dane wzorem $2\pi r dr$.

Wracamy do przypadku obręczy. Do obręczy przykładamy siłę F styczną do jej obwodu. Zakładamy, że pod działaniem tej siły ani obręcz ani oś obrotu nie deformuje się. Zgodnie z drugim prawem Newtona stała siła działająca w czasie Δt skutkuje zmianą pędu

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t \quad 1.19$$

Biorąc pod uwagę związek między prędkością liniową i kątową w ruchu po okręgu $\Delta v = \Delta \omega r$ mamy

$$mr \Delta \omega = F \Delta t \Rightarrow \Delta \omega = \frac{F \Delta t}{mr} \quad 1.20$$

Z drugiej strony wartość krętu dla obręczy wynosi (1.10)

$$K_o = m_o r_o^2 \omega \quad 1.21$$

Podstawiając tu wyrażenie na $\Delta \omega$ otrzymujemy wzór na przyrost momentu pędu, pod wpływem siły o wartości F .

$$\Delta K_o = m_o r_o^2 \frac{F \Delta t}{mr} = r F \Delta t = M \Delta t \quad 1.22$$

Przez M oznaczyłem wartość momentu siły. To co jest w tym wzorze istotne to fakt, że wygląda on tak samo jak wzór łączący siłę i przyrost pędu. Zatem w przypadku obracającej się obręczy otrzymaliśmy zależność (1.21), która w zapisie wektorowym przyjmie postać

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta t} \quad 1.23a$$

Przechodząc do wielkości nieskończenie małych możemy zapisać

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} \quad 1.23b$$

Wyrażenie (1.23b) jest ogólną zależnością między krętem a momentem siły. W ogólny sposób można je wyprowadzić analizując moment pędu punktu materialnego.

Obliczmy jeszcze energię kinetyczną obracającej się obręczy. Dla jednego punktu obręczy mamy wzór

$$E_{kp} = \frac{1}{2} m_p v^2 = \frac{1}{2} m_p r_p^2 \omega^2 \quad 1.24$$

Ponieważ wszystkie punkty obręczy mają tą samą masę, prędkość kątową i są tak samo odległe od osi obrotu, dla całej obręczy mamy taki sam wzór, z tym, że masę pojedynczego punktu zastępujemy masą całej obręczy.

$$E_{ko} = \frac{1}{2} m_o v^2 = \frac{1}{2} m_o r_o \omega^2 = \frac{1}{2} I_o \omega^2 \quad 1.25$$

Tutaj dodatkowo skorzystaliśmy ze wzoru na moment bezwładności obręczy (1.10). Gdy korzystamy z momentu bezwładności, energia kinetyczna ruchu obrotowego obręczy wyraża się wzorem o tej samej postaci co energia kinetyczna w ruchu postępowym punktu materialnego, dla dysku (koła) walca i innych brył obowiązuje taka sama zależność, tyle że do wzoru (1.25) trzeba podstawić wyrażenie na odpowiedni moment bezwładności

Skoro nam tak dobrze idzie to przyjmijmy następującą definicję.

Definicja 1.1: moment bezwładności

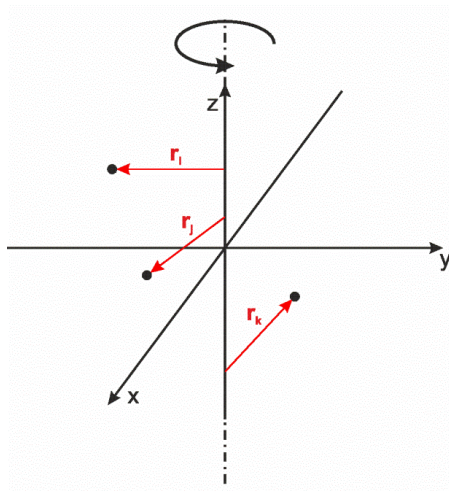
Niech S wyznacza oś przechodzącą przez pewien dowolny punkt O w przestrzeni, który przyjmujemy za początek układu współrzędnych. Momentem bezwładności danej bryły sztywnej względem tej osi nazywamy wielkość określoną wzorem; dla dyskretnego rozkładu mas

$$I = \sum_{i=1}^N r_i^2 m_i \quad 1.26$$

dla ciągłego rozkładu mas

$$I = \int_V \mathbf{r}^2 dm = \int_V \mathbf{r}^2 \rho(\mathbf{r}) dv \quad 1.27$$

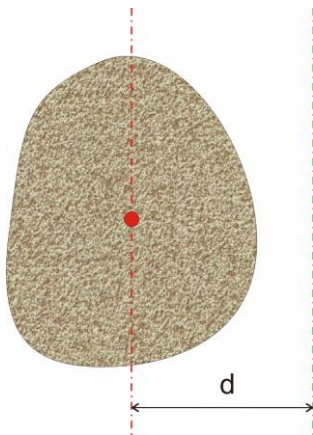
Wielkość r_i (rys. 1.4) jest odległością i tego punktu od osi obrotu (a nie od początku układu współrzędnych). Podobnie wielkość r jest odległością elementu dm od osi obrotu.



Rysunek 1.4. Rysunek pokazuje trzy wybrane punkty z jakiegoś układu punktów materialnych oraz ich odległości od osi obrotu, która pokrywa się z osią z .

Naszym celem było znalezienie ścieżki dla zapisania momentu pędu bryły sztywnej w postaci (1.7). W tym celu zdefiniowaliśmy odpowiednik masy, czyli moment bezwładności. Moment bezwładności ma bogatszą strukturę niż masa. Zależy od masy bryły ale również od rozłożenia tej masy względem osi obrotu. Tabela (1.1) zawiera przykładowe bryły wraz momentami bezwładności obliczonymi z definicji (def. 1.1) dla różnych osi obrotu. Wszystkie wybrane osie przechodzą przez środek masy bryły i są jedną z osi symetrii przykładowych brył. Niedługo okaże się, że taki wybór osi ma istotne znaczenie.

Gdy mamy obliczony moment bezwładności względem osi symetrii przechodzącej przez środek masy, to w prosty sposób można obliczyć wartość momentu bezwładności względem jakiejkolwiek osi równoległej. Powiedzmy, że mamy ciało, o masie M , takie że oś obrotu przechodzi przez jego środek masy. Rozważmy inną oś obrotu, równoległą do tej pierwszej; przy czym nowa równoległa oś niech będzie przesunięta na odległość d względem osi pierwszej (rys. 1.5).



Rysunek 1.5. Gdy znamy wartość momentu pędu dla osi przechodzącej przez środek masy ciała, to łatwo możemy wyznaczyć moment bezwładności względem dowolnej innej osi przesuniętej równolegle w stosunku do pierwotnej.

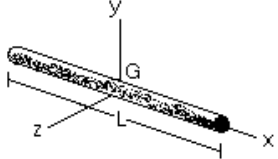
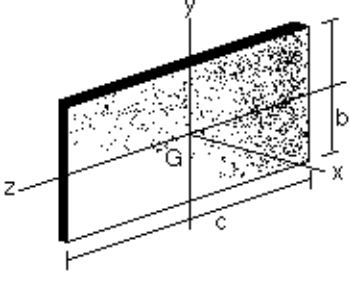
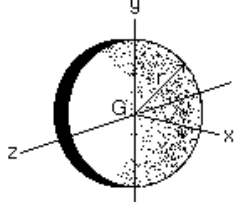
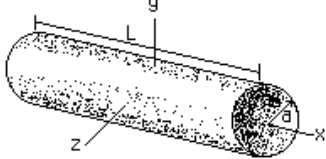
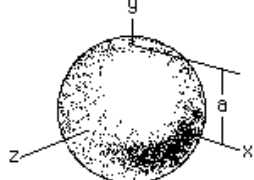
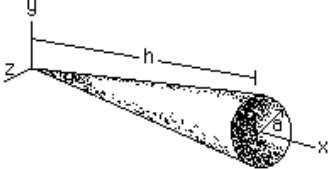
Jeżeli przez I oznaczmy moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy, to moment bezwładności I_d względem osi przesuniętej równolegle o d wynosi

$$I_d = I + M d^2 \quad 1.28$$

Powyższy fakt nazywa się twierdzeniem Steinera lub twierdzeniem o osiach równoległych. Jego dowód jest prosty. Przeprowadzimy go dla ciał składających się z dyskretnego rozkładu N punktów (rys. 1.6). Zgodnie z definicją (1.1) moment bezwładności takiego ciała, względem danej osi przechodzącej przez środek masy wynosi

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad 1.29$$

Tutaj m_i i r_i , to odpowiednio masa i -tego punktu oraz odległość i -tego punktu od osi obrotu. Gdy przesuniemy oś obrotu równolegle o odcinek d , to wtedy zmieniają się odnośne odległości

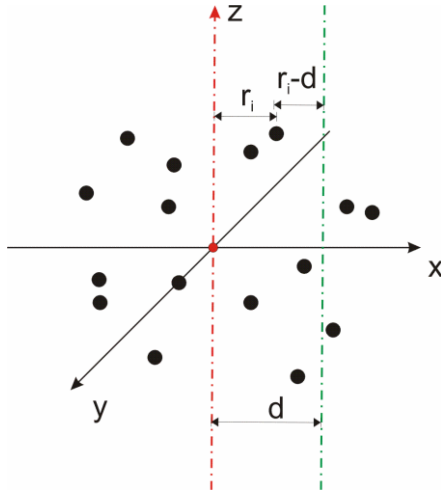
	Oś y i z: $\frac{1}{12} m L^2$
	Oś x: $\frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$ Oś y: $\frac{1}{12} m c^2$ Oś z: $\frac{1}{12} m b^2$
	Oś x: $\frac{1}{2} m r^2$ Oś y i z: $\frac{1}{4} m r^2$
	Oś x: $\frac{1}{2} m a^2$ Oś y i z: $\frac{1}{12} m (3 a^2 + L^2)$
	Oś x i y i z: $\frac{2}{5} m a^2$
	Oś x: $\frac{3}{10} m a^2$ Oś y i z: $\frac{3}{5} m \left(\frac{1}{4} a^2 + h^2 \right)$
Tabela 1.1. Momenty bezwładności wybranych brył, względem osi obrotu pokrywających się z osiami symetrii tych brył. Dla różnych orientacji osi momenty bezwładności mogą być różne.	

$$r_i \rightarrow r_i - d$$

1.30

Wstawiając to do poprzedniego równania mamy

$$I_d = \sum_{i=1}^N m_i (r_i - d)^2 = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 - 2d \sum_{i=1}^N m_i r_i + d^2 \sum_{i=1}^N m_i \quad 1.31$$



Rysunek 1.6. Mamy ciało złożone z N punktów o masie m_i każdy. Czerwona oś obrotu przechodzi przez środek masy tego układu punktów a oś z zorientowana jest zgodnie z osią obrotu.

Ponieważ oś obrotu przechodzi przez środek masy to wyrażenie

$$\frac{\sum_{i=1}^N m_i r_{xi}}{M} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^N m_i r_{xi} = 0 \quad 1.32$$

Oraz

$$\frac{\sum_{i=1}^N m_i r_{yi}}{M} = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^N m_i r_{yi} = 0 \quad 1.33$$

Przez M oznaczyłem masę całego ciała. Wynika z tego, że

$$\sum_{i=1}^N m_i r_i = 0 \quad 1.34$$

a równanie na moment bezwładności względem osi przesuniętej przyjmuje pożądaną formę

$$I_d = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 + d^2 \sum_{i=1}^N m_i = I + Md^2 \quad 1.35$$

Podsumowując tą część wykładu proponuję przyjrzeć się analogii pomiędzy wzorami uzyskanymi dla ruchu postępowego a wzorami jakie mamy dla ruchu obrotowego bryły sztywnej (tab. 1.2). Od strony technicznej wzorami z prawej strony posługujemy się dokładnie tak samo jak wzorami z lewej strony. Zilustrują to na przykładzie. Zanim to jednak zrobię pozwolę sobie na uwagę. Można spotkać się z sformułowaniem, że zależności typu $M=I\varepsilon$, to prawo Newtona dla bryły sztywnej. Takie sformułowanie należy traktować jako skrót myślowy.

Prawa dynamiki Newtona poznaliśmy w temacie (TVI). Prawa strona tabeli nie wnosi do praw Newtona niczego nowego, jest po prostu zbiorem użytecznych wniosków wyciągniętych z tych praw dla bryły sztywnej. A, że część tych wniosków ma taką samą postać jak prawa dynamiki Newtona, to wcale nie oznacza, że są to prawa dynamiki Newtona; one są tylko sformułowane w analogiczny sposób (droga wiadra).

Poz.	Ruch postępowy	Ruch obrotowy
1	$\mathbf{r}$	φ
2	$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$	$\boldsymbol{\omega} = d\varphi/dt$
3	$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$	$\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\omega}/dt = d^2\varphi/dt^2$
4	m	I
5	$\mathbf{p} = m \mathbf{v}$	$\mathbf{J} = I \boldsymbol{\omega}$
6	$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$	$\mathbf{M} = I \boldsymbol{\varepsilon}$
7	$\mathbf{F} = m d^2\mathbf{r}/dt^2$	$\mathbf{M} = I d^2\varphi/dt^2$
8	$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$	$\mathbf{M} = d\mathbf{J}/dt$
9	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$
Tabela 1.2. Analogia pomiędzy wzorami na ruch postępowych punktu materialnego i ruch obrotowy bryły sztywnej		

Tabela (1.3) zawiera dwa zadania, w lewej kolumnie mamy zadanie z ruchu postępowego punktu materialnego, a z prawej z bryły sztywnej. Zadania te jak również ich rozwiązania są analogiczne, w sensie analogii z tabeli (1.2). Jak widać, w obu zadaniach, stosujemy dokładnie taką samą matematykę do znalezienia rozwiązania. Różnica polega na tym, że poszczególnym symbolom nadajemy inną interpretację fizyczną. Na przykład w ruchu postępowym mamy masę m i siłę $\mathbf{F}$, a w ruchu obrotowym zastępujemy je momentem bezwładności I i momentem sił $\mathbf{M}$.

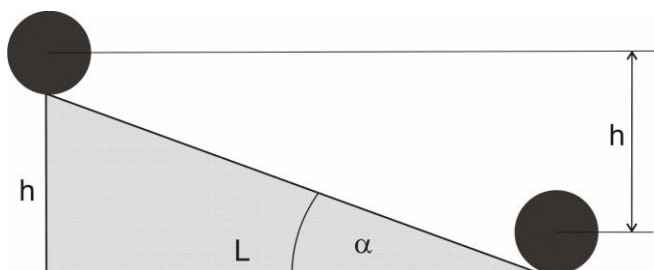
Zadanie: ruch postępowy	Zadanie: ruch obrotowy
Klocek o masie $m=250\text{kg}$ ślizga się z prędkością $v=20\text{m/s}$. Klocek ten zatrzymuje się przesunięciu się o $s=1000\text{m}$. Oblicz wartość siły tarcia, oraz czas ruchu klocka	Koło zamachowe o momencie bezwładności $I=250\text{kg m}^2$ obraca się z prędkością $\omega=20\text{obr/sek}$. Koło zamachowe zatrzymuje się po wykonaniu $\varphi=1000$ obrotów. Oblicz wartość momentu sił tarcia i czas ruchu koła.
Obliczamy przyspieszenie z jakim klocek hamuje. Wykorzystamy następujące dwie zależności ruchu liniowego jednostajnie przyspieszonego. $t=v/a$; $s=at^2/2$. Stąd mamy $s=av^2/2a^2 \rightarrow s=v^2/2a$. Obliczamy przyspieszenie liniowe a : $a=v^2/2s$. Zatem siła tarcia ma wartość: $F=mv^2/2s$; $F=50\text{N}$. Czas ruchu to: $t^2=2s/a \rightarrow t^2=4s^2/v^2$, stąd $t=2s/v$; $t=100\text{s}$.	Obliczamy przyspieszenie kątowe z jakim koło zamachowe hamuje. Wykorzystamy następujące dwie zależności ruchu obrotowego jednostajnie przyspieszonego. $t=\omega/\varepsilon$; $\varphi=\varepsilon t^2/2$. Stąd mamy $\varphi=\varepsilon\omega^2/2\varepsilon^2 \rightarrow \varphi=\omega^2/2\varepsilon$. Obliczamy przyspieszenie liniowe ε : $\varepsilon=\omega^2/2\varphi$. Zatem moment sił tarcia ma wartość: $M=I\omega^2/2\varphi$; $M=50\text{Nm}$. Czas ruchu to: $t^2=2\varphi/\varepsilon \rightarrow t^2=4\varphi^2/\omega^2$, stąd $t=2\varphi/\omega$; $t=100\text{s}$.
Tabela 1.3. Dwa zadania, z lewej z ruchu postępowego punktu materialnego, z prawej z ruchu obrotowego bryły sztywnej. Od strony formalnej rozwiązania obu zadań przebiegają analogicznie.	

Poniżej podaję jeszcze trzy przykładowe zadania

1.1. Zadania

Zadanie 1.1.1: Staczający się walec

Walec stacza się, bez poślizgu, po równi pochyłej o kącie nachylenia $\alpha=\pi/6$ i długości podstawy $L=3\text{m}$. Oblicz prędkość ruchu tego walca przy podstawie równi. Zaniedbaj opory ruchu.



Rysunek 1.1.1. Ilustracja do zadania (1.1.1).

Przy rozwiązywaniu zadania musimy uwzględnić fakt, że każdy punkt walca uczestniczy w dwóch ruchach. Jeden z nich to zsuwanie się w dół równi wynikający z ruchu postępowego w dół walca, a drugi to obrót wokół środka walca. Energia ruchu postępowego wyraża się wzorem

$$E_{kp} = \frac{m v^2}{2} \quad 1.1.1$$

Energia kinetyczna ruchu obrotowego wynosi

$$E_{ko} = \frac{I \omega^2}{2} \quad 1.1.2$$

I jest tu momentem bezwładności walca

$$I = \frac{1}{2} m r^2 \quad 1.1.3$$

Walec obniża swój środek masy o wysokość równi h

$$h = L \tan(\alpha) \quad 1.1.4$$

Traci przy tym energię potencjalną równą

$$\Delta E_p = m g h = m g L \tan(\alpha) \quad 1.1.5$$

Przy braku tarcia stracona energia zamienia się w energię kinetyczną ruchu obrotowego i posuwistego

$$E_{ko} + E_{kp} = \Delta E_p \quad 1.1.6$$

Stąd mamy równanie

$$m g L \tan(\alpha) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad 1.1.7$$

Ponieważ ruch jest bez poślizgu mamy prosty związek między prędkością obrotu a prędkością v .

$$v = r \omega \quad 1.1.8$$

Stąd

$$m g L \tan(\alpha) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{r^2} \quad 1.1.9$$

Wykorzystując wzór na moment bezwładności walca mamy

$$m g L \tan(\alpha) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4} m r^2 \frac{v^2}{r^2} \quad 1.1.10$$

Po przekształceniach mamy

$$g L \tan(\alpha) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} v^2 = \frac{3}{4} v^2 \quad 1.1.11$$

Szukana prędkość wynosi

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} g L \tan(\alpha)} = 4.76 \frac{m}{s} \quad 1.1.12$$

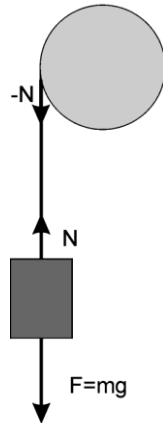
Gdyby nie było ruchu obrotowego prędkość wynosiłaby

$$v = \sqrt{2 g L \tan(\alpha)} = 5.82 \frac{m}{s} \quad 1.1.13$$

Jak widać ruch obrotowy spowalnia ruch postępowy ciała. Nie ma w tym nic dziwnego, gdyż część energii potencjalnej zostaje zużyta na zwiększenie prędkości obrotowej walca. Zauważ również, że wynik nie zależy ani od masy walca ani od jego promienia. Niezależność od masy, w zagadnieniach gdy źródłem energii jest grawitacja nie jest niczym nowym. Niezależność od promienia dotyczy wszystkich brył o symetrii kołowej i osiach obrotu zgodnych z tą symetrią.

Zadanie 1.1.2: Krążek

Z jakim przyspieszeniem a opada bloczek o masie m przewieszony przez krążek o masie M (rys. 1.1.2). Nitka nie ślizga się po bloczku. Przyjmij, że krążek ma kształt idealnego dysku. Pomijamy opory ruchu.



Rysunek 1.1.2. Ilustracja do zadania (1.1.2)

Musimy zapisać równanie ruchu dla bloczka. Korzystamy z drugiej zasady dynamiki

$$ma = mg - N \quad 1.1.14$$

Gdzie m jest masą bloczka, a N wartością siły naciągu nici. Skąd się bierze siła naciągu nici? Ciężarek poprzez nitkę ciągnie krążek, który zaczyna się obracać. Siła wywierana przez ciężarek musi pokonać bezwładność krążka, co oznacza, że krążek działa na nić z siłą reakcji równą co do wartości i przeciwnie skierowaną do siły z jaką ciągnie bloczek. Ponieważ mamy do czynienia z obrotem krążka wygodnie jest skorzystać z analogu drugiego prawa Newtona dla bryły sztywnej (tab. 1.2. poz. 6); dostajemy drugie równanie ruchu

$$I\varepsilon = NR \quad 1.1.15$$

Gdzie I moment bezwładności krążka względem osi obrotu, R promień krążka, a ε przyspieszenie kątowe krążka. Ponieważ nitka nie ślizga się po krążku mamy

$$a = \varepsilon R \quad 1.1.16$$

Układ równań (1.1.14 i 1.1.15) zawiera dwie niewiadome a i N . Obliczamy przyspieszenie bloczka a

$$a = \frac{mgR^2}{I + mR^2} \quad 1.1.17$$

Oś obrotu przechodzi przez środek krążka i jest prostopadła do powierzchni krążka. Moment bezwładności dysku dla takiej osi obrotu został już przez nas obliczony (wzór 1.17a); korzystając z niego mamy

$$a = \frac{mgR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2} = \frac{mg}{\frac{1}{2}M + m} = \frac{2m}{M + 2m}g \quad 1.1.18$$

Zauważ, że gdy $I=0$ to ze wzoru (1.1.17) mamy $a=g$, czyli bloczek spada z przyspieszeniem ziemskim. Nie ma w tym nic dziwnego – jedynym oporem na jaki zwracamy uwagę przy analizie tego zadania jest opór związany z bezwładnością krążka. Gdy $I=0$ opór ten jest równy zeru. Gdy $I \neq 0$ ułamek stojący przed g z prawej strony (1.1.18) jest mniejszy od jedności; opory związane z bezwładnością zmniejszają przyspieszenie z jakim spada bloczek.

Możecie zarzucić mi, że prawdziwe krążki nie są idealnymi dyskami. Mają na przykład, na swojej krawędzi rowek, dzięki któremu lina z nich nie spada. Mają też otwór na oś. To prawda, ale pamiętaj o sztuce tworzenia modeli (§TI 1). Najpierw zaczynamy od możliwie prostego modelu i patrzymy czy jest wystarczająco dokładny dla naszych celów, jeżeli nie jest, to model komplikujemy. Dla naszych celów ten pierwszy model krążka jest wystarczający, gdyż celem zadania było pokazanie, że sam fakt przyspieszającego obrotu bryły sztywnej generuje bezwładnościowy opór. Gdybyśmy mieli problem związany z konkretnym krążkiem używanym w praktyce wtedy za I we wzorze (1.1.17) trzeba byłoby podstawić dokładniej obliczony, lub zmierzony moment bezwładności krążka, jeżeli okazałoby się, że model krążka jako idealnego dysku nie jest wystarczający. Być może trzeba byłoby również uwzględnić siły tarcia.

Zadanie 1.1.3: Wahadło fizyczne

Rysunek (1.1.3) przedstawia wahadło fizyczne. Ciało o masie m waha się na osi zawieszony w punkcie O. Odległość między punktem zawieszenia a punktem środka masy P wynosi L . Wyznacz częstość drgań wahadła. Moment bezwładności wahadła względem osi wahań wynosi I .

Moment sił działający na wahadło wyraża się wzorem

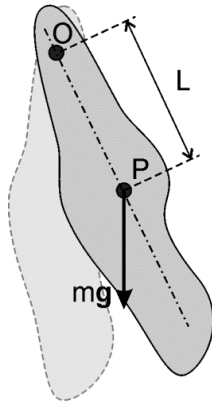
$$\mathbf{M} = m\mathbf{g} \times \mathbf{L} \Rightarrow N = -mgL\sin(\alpha) \quad 1.1.19$$

Korzystając z (1.23) mamy

$$I\ddot{\alpha} = -mgL\sin(\alpha) \quad 1.1.20$$

Dla małych kątów korzystamy z przybliżenia $\sin(\alpha) \approx \alpha$, omówionego w (DB 3.3) i zastosowanego również w zagadnieniu wahadła matematycznego (§TVIII 1.2)

$$I\ddot{\alpha} = -mgL\alpha \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{mgL}{I} = 0 \quad 1.1.21$$



Rysunek 1.1.3. Przykład wahadła fizycznego

Otrzymaliśmy równanie ruchu dla oscylatora harmonicznego w postaci (TVIII 1.9b). Częstość drgań własnych tego oscylatora wyrazi się wzorem

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \quad 1.1.22$$

Wahadło matematyczne o długości danej wzorem

$$L_m = \frac{I}{mL} \quad 1.1.23$$

Oscyluje z taką samą częstością (1.1.22) jak analizowane tu wahadło fizyczne.

$$\omega_{0m} = \sqrt{\frac{g}{L_m}} = \sqrt{\frac{mgL}{I}} = \omega_0 \quad 1.1.24$$

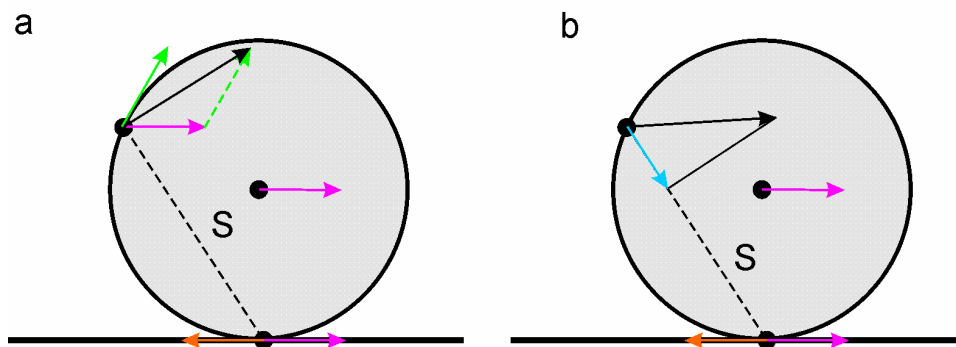
Wielkość (1.1.23) nazywa się długością zredukowaną wahadła fizycznego.

Definicja 1.1.1: Długość zredukowana wahadła fizycznego

Długość zredukowana wahadła fizycznego jest to taka długość dla jakiej wahadło matematyczne oscyluje z taką samą częstością jak dane wahadło fizyczne

1.2. Chwilowa oś obrotu

W rozwiązywaniu problemów z zakresu dynamiki bryły sztywnej ważnym pojęciem jest chwilowa oś obrotu (rys. 1.2.1). Przedstawiony na rysunku walec toczy się po równej powierzchni. Ośią obrotu jest oś symetrii walca. Jeżeli jednak żądamy od osi obrotu aby była zbiorem nieruchomych punktów ciała, to oś symetrii walca jest osią obrotu w układzie związanym z walcem. Gdy staniemy na podłożu, to oś walca przestaje być nieruchoma. Warunek nieruchomości spełnia natomiast punkt styku walca z podłożem, gdzie prędkość związana z liniowym przesuwem całego walca dodaje się do zera z prędkością punktu styku (przy braku poślizgu).



Rysunek 1.2.1. a) punkt styku walca toczącego się bez poślizgu z podłożem wyznacza chwilową oś obrotu tego walca. W momencie styku prędkość tego punktu wynosi zero, gdyż prędkości walca jako całości (różowa strzałka) znosi się z prędkością punktu wynikającą z obrotu walca (pomarańczowa strzałka). Odcinek S prostopadły do chwilowej osi obrotu i kończący się na jakimś punkcie walca jest prostopadły do wektora prędkości tego punktu walca; b) Gdyby wektor prędkości danego punktu walca nie był prostopadły do odcinka S (tak jak to pokazuje czarna strzałka), to wtedy jego rzut na odcinek łączący go z chwilową osią obrotu miałby niezerową składową. Ruch tegoż punktu w kierunku punktu styku z podłożem wymusiłby ruch punktu styku, w przeciwnym razie, wbrew założeniu bryła nie byłaby sztywna. Ale punkt styku jest w danej chwili nieruchomy, zatem, dla bryły sztywnej, wektor prędkości musi być prostopadły do odcinka S.

Oczywiście w każdej następnej chwili dany punkt przestaje być punktem styku. Dlatego mówimy o chwilowej osi obrotu. Kiedy poprowadzimy prostą między wybranym punktem walca a chwilową osią obrotu, tak aby prosta ta była prostopadłą do tej osi, to będzie ona również prostopadła do chwilowego wektora prędkości każdego punktu walca (rys. 1.2.1a). W przeciwnym razie bryła nie byłaby bryłą sztywną (rys. 1.2.1b). Chwilowa oś obrotu może również leżeć poza ciałem. Zrobię przykładowe zadania, w których rozwiązaniu wygodnie jest odwołać się do chwilowej osi obrotu.

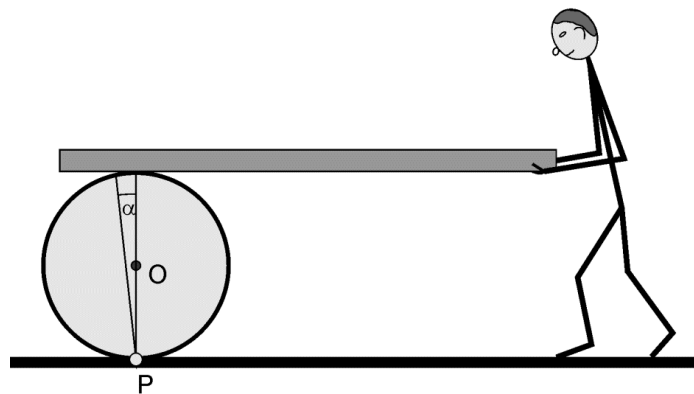
Zadanie 1.2.1.

Człowiek trzyma jeden koniec deski o długości L . Drugi koniec deski oparty jest o walec. Deska jest ustawiona poziomo do podłoża (rys. 1.2.2). Jaką drogę musi przejść człowiek, aby zbliżyć się do walca? W ruchu deski i walca nie występuje poślizg.

Przeanalizujemy ruch punktu styku belki z walcem zaczepiając układ współrzędnych w punkcie P, przez który przechodzi chwilowa oś obrotu. Z rysunku widać, że gdy walec obróci się o bardzo mały kąt α , to środek walca przesunie się o odcinek αr (r , to promień walca), a punkt styku z belką o odcinek $\alpha(2r)$. Oznacza to, że gdy oś walca przetoczy się o odległość L , to człowiek i deska przesuną się o odległość $2L$.

Uwaga: 1.2.1:

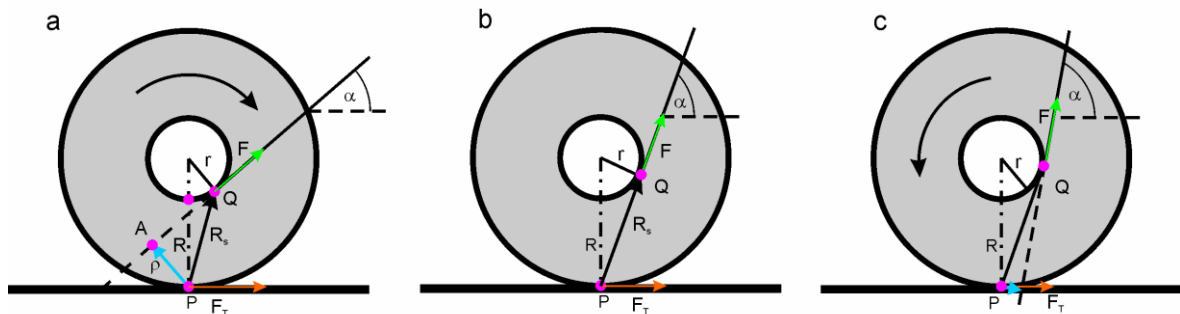
Wyrażenie αr daje długość łuku przy obrocie walca o kąt α . Ale dla bardzo małych kątów α jest ono równe z dokładnością do wielkości proporcjonalnych do wyższych potęg α , przesunięciu równoległemu do podłoża. W granicy nieskończenie małych przesunięć te dwie wielkości są sobie równe. Z takich nieskończenie małych przesunięć możemy złożyć przesunięcie skończone. Jeżeli teraz środek walca przesunie się o ds , to jego górny brzeg przesunie się o $2 ds$. Sumując (całkując) takie nieskończenie małe przesunięcia dostaniemy dla środka drogę Δs , a dla górnego punktu $2 \Delta s$



Rysunek 1.2.2. Ilustracja do zadania (1.2.1).

Zadanie 1.2.2.

Na szpulce o zewnętrznym promieniu R i wewnętrznym r nawinięta jest nić. Przeanalizuj ruch szpulki w zależności od kąta, pod którym ciągniemy nić (rys. (1.2.3)).



Rysunek 1.2.3. Ilustracja do zadania (1.2.2). a) kąt α mniejszy od kąta granicznego. Szpulka jest ciągnięta poziomo a siła tarcia powoduje, że zaczyna się obracać zgodnie z łukowatą strzałką; b) kąt α równy granicznemu. Ramię siły ρ (rzut wektora $\mathbf{R}_s$ na kierunek prostopadły do kierunku siły $\mathbf{F}$) względem chwilowego punktu obrotu jest równe zero, w efekcie moment sił jest równy zero i kulka nie obraca się. Jeżeli siła tarcia statycznego jest mała, szpulka może się ślizgać; c) kąt α większy od granicznego. Ramię siły ρ (niebieski wektor) zmienia zwrot, przez co zmienia zwrot moment sił i zmienia się kierunek obrotu szpulki.

W każdej chwili szpulka obraca się wokół chwilowej osi obrotu przechodzącej przez punkt P styku z podłożem. Siła $\mathbf{F}$ ciągnie za sznurek ustawiony do poziomu pod kątem α . Długość ramienia ρ tej siły, czyli rzut odcinka R_s na kierunek prostopadły do kierunku siły, jest równa

$$\rho = \overline{PA} = R\cos(\alpha) - r \quad 1.2.1$$

Wartość momentu siły $\mathbf{F}$ względem chwilowej osi obrotu jest równa

$$M = \rho F = (R\cos(\alpha) - r)F \quad 1.2.2$$

Gdy spełniony jest warunek

$$\cos(\alpha) = \frac{r}{R} \quad 1.2.3$$

Moment siły jest równy zero. W tym przypadku, gdy siła tarcia jest wystarczająco mała szpulka ślizga się bez po podłożu bez obrotu. Gdy

$$\cos(\alpha) < \frac{r}{R} \quad 1.2.4$$

wartość momentu siły jest ujemna, co oznacza, że wektor momentu siły wchodzi do kartki. Oznacza to obrót szpulki w kierunku działania siły, czyli nić jest nawijana na szpulkę. Można to łatwo zaobserwować w domu, trzeba tylko

uważać, żeby kąt α podczas nawijania pozostał stały, inaczej możemy przejść do przypadku gdy

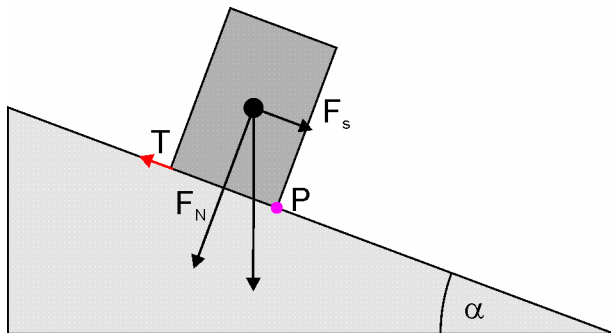
$$\cos(\alpha) > \frac{r}{R} \quad 1.2.5$$

Wtedy moment siły zmienia znak, co oznacza, że szpulka obraca się w drugą stronę, czyli nie się odwija.

Pewne wątpliwości może budzić punkt przyłożenia siły do szpulki. Nawinięta na szpulkę nić ciągnie na pewnej części swojej długości, ale w pierwszym przybliżeniu przyjmujemy, że siła działa w punkcie styku nici ze szpulką (model kulistej krowy). Zrobię jeszcze proste zadanie, które jak wynika z mojego doświadczenia, może sprawić problemy.

Zadanie 1.2.3.

Na równi pochyłej o kącie α stoi jednorodny walec o promieniu r i wysokości h (rys. 1.2.4). Współczynnik tarcia walca o równię wynosi f . Przy jakie wartości kąta α walec nie przewróci się?



Rysunek 1.2.4. Walec zsuwający się z równi;

Łatwo jest określić warunek, kiedy walec zacznie się zsuwać. Wartość siły tarcia T musi być mniejsza od wartości siły ściąągającej F_s . Stąd mamy

$$T < F_s \Rightarrow mgf\cos(\alpha) < mg\sin(\alpha) \Rightarrow f < \tan(\alpha) \quad 1.2.6$$

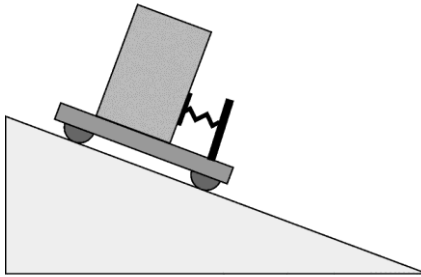
Gdzie m jest masą walca. Gdy walec się nie będzie zsuwał warunek na to by się przewrócił sprowadza się do tego by moment siły ściąągającej F_s był większy od momentu siły nacisku F_N . Moment siły liczymy względem osi obrotu przewracającego się walca, czyli względem osi przechodzącej przez punkt P. Zgodnie z rysunkiem (1.2.4) mamy

$$\frac{h}{2}mg\sin(\alpha) < rmg\cos(\alpha) \Rightarrow \tan(\alpha) > \frac{2r}{h} \quad 1.2.7$$

Sprawy się zmieniają gdy walec się zsuwa z przyspieszeniem, czyli gdy spełniony jest warunek (1.2.6). Na podstawie rysunku (1.2.5) mogę napisać wzór na zmniejszoną, w wyniku ruchu przyspieszonego walca, siłę ściąągającą. Gdy walec zsuwa się, to przy działaniu siły tarcia T przyspieszenie a walca wynosi

$$a = \frac{F_s - T}{m}$$

1.2.8



Rysunek 1.2.5. Walec jest ustawiony na wózku i opiera się o sprężynę przymocowaną do sztywnej ścianki. Powiedzmy, że siły tarcia wózka są zanedbywalnie małe. Wtedy walec i wózek wraz ze sprężynką zsuwają się z przyspieszeniem równym $g' = g \sin(\alpha)$. Walec nie ma powodów by naciskać na sprężynę. Gdy na wózek działa tarcie, wtedy jego przyspieszenie jest mniejsze od g' . Aby przyspieszenie walca było równe przyspieszeniu wózka walec musi być powstrzymywany przez sprężynę. Działa na nią siłą równą sile tarcia. Gdy siła tarcia będzie tak duża jak siła ściągająca (ruch jednostajny wózka), to przyspieszenie walca spadnie do zera i walec naciśnie na sprężynę pełną siłą F_s . Opisany tu efekt jest taki jaki doświadczamy w kabinie windy ruszającej w dół. Gdy przyspieszenie windy wynosi a , to wtedy nasz waga, mierzona w windzie, wynosi $m(g-a)$.

Zatem zredukowana siła ściągająca będzie miała wartość

$$F_s - ma = F_s - m \frac{F_s - T}{m} = T = m g f \cos(\alpha) \quad 1.2.9$$

Tak jak to już zostało powiedziane w podpisie rysunku (1.2.5) zredukowana siła ściągająca ma wartość siły tarcia. Zatem warunek na zerowanie momentów sił ma postać

$$T \frac{h}{2} - F_N r = \frac{1}{2} \left(f - 2 \frac{r}{h} \right) m g h \cos(\alpha) \quad 1.2.10$$

Gdy wyrażenie w nawiasie jest dodatnie, to moment

$$f > 2 \frac{r}{h} \quad 1.2.11$$

i walec przewróci się, w przeciwnym razie nie przewróci się.

Rozwiązując to zadanie w układzie nieinercyjnym (związanym z walcem) mamy prostszą drogę. Zgodnie z regułami, w układzie nieinercyjnym musimy, do siły ściągającej, dodać siłę bezwładności równą $-ma$. Otrzymamy taki sam wynik na siłę (1.2.9), tyle że bez podpierania się przykładem z windą. Prostota rozwiązania tego zadania w układzie nieinercyjnym wynika z zaskakującej cechy siły grawitacji. Siła grawitacji ma wszelkie cechy siły pozornej. Zauważ na przykład, że człowieka, który w kabinie stoi na wadze, a kabina przyspiesza do góry z przyspieszeniem g waży dwa razy więcej niż przy braku przyspieszenia. Człowiek ów czuje dodatkowy ciężar, którego nie sposób odróżnić od ciężaru

wywołanego przez grawitację. Ale ta wciskająca na skutek przyspieszenia siła, którą odczuwamy jest siłą pozorną (zobacz rys. TVII 2.1.2). Jeżeli w analizie posługujemy się jedną siłą pozorną, to powinniśmy konsekwentnie uwzględnić również inne siły pozorne. Ponieważ jednak uważam siłę grawitacji za rzeczywistą (przynajmniej w mechanice klasycznej) to przy robieniu zadań w układach inercjalnych mogą pojawić się trudności. Sprawę prostuje zasada d'Alemberta, którą omawiam w temacie (§TXV)

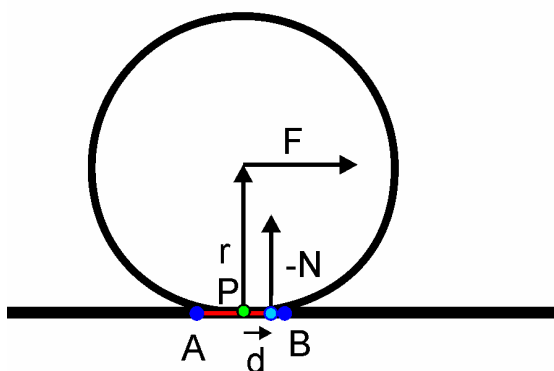
1.3. Tarcie toczne

W (§TVI 4) zapoznaliśmy się z opisem tarcia statycznego i poślizgowego. W przypadku toczących się ciał mówimy o działaniu tarcia tocznego. Przedstawię elementarny opis tego tarcia. Rysunek (1.3.1) pokazuje toczące się koło (może być też walec). Niech na koło działa siła ciągnąca $\mathbf{F}$. Niech przy tym współczynnik tarcia poślizgowego jest na tyle duży, że $F < fN$, gdzie N to wartość siły nacisku. Słowem tarcie poślizgowe jest zbyt duże aby wystąpił poślizg koła. Na koło, względem punktu styku P , działa niezerowy moment pędu

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

1.3.1

Moment ten powinien spowodować obrót ciała, wokół chwilowej osi obrotu, nawet gdy wartość siły ciągnącej jest bardzo, bardzo mała. Tak się jednak nie stanie. Koło w spoczynku wymaga siły o odpowiednio dużej wartości, aby zacząć się toczyć. Możemy to wytłumaczyć efektem oddziaływania koła z podłożem tak jak to miało miejsce w przypadku tarcia statycznego (§TVI 4.1).



Rysunek 1.3.1. W obszarze styku powierzchnia walca i podłoża uginają się. W efekcie walec styka się z podłożem wzdłuż pewnego odcinka AB. Wewnątrz tego odcinka styku możemy znaleźć punkt, w którym przykładamy wypadkową siłę reakcji podłoża $-N$ na nacisk N walca. Odległość tego punktu od punktu styczności nieodkształconego walca oznaczona jest literą d . Odległości tej przypisujemy wektor przesunięcia $\mathbf{d}$. W efekcie wypadkowa siła reakcji $-N$ wytwarza niezerowy moment sił $-\mathbf{d} \times \mathbf{N}$, który skierowany jest przeciwnie do momentu siły wytworzonego przez siłę $\mathbf{F}$.

Z doświadczenia wiadomo, że toczące się koło hamuje, co wskazuje na występowanie oporów ruchu. Oznacza to, że w rzeczywistym układzie działa moment sił przeciwnie skierowany do momentu danego wzorem (1.3.1). Moment ten wiążemy z siłą tarcia tocznego. Gdy obszar styku jest punktem, czyli w przypadku kuli i podłoża o idealnej sztywności, taki moment sił nie może się pojawić. Podobnie jest gdy styk jest linią tak jak ma to miejsce w przypadku

walca. Wynika z tego, że tarcie toczne związane jest z odkształceniem się kuli, (koła, walca) oraz podłoża w obszarze styku. Obecność tego odkształcenia powoduje, że toczące się ciało, styka się z podłożem wzdłuż pewnego skończonego odcinka AB (rys. 1.3.1). Gdy koło toczy się pod wpływem siły $\mathbf{F}$, nacisk koła rośnie w punkcie B i maleje w punkcie A.

Niech $-\mathbf{N}$ oznacza wypadkową siłę reakcji podłoża na nacisk ciała tocznego kuli (walca) działającą wzdłuż powierzchni styku. Możemy znaleźć punkt przyłożenia wypadkowej siły, tak aby powodował on ten sam efekt co rozkład sił wzdłuż odcinka AB. Punkt ten leży między punktami A i B. Moment sił reakcji względem punktu P (chwilowa oś obrotu) wynosi

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{d} \times (-\mathbf{N}) = -\mathbf{d} \times \mathbf{N} \quad 1.3.2$$

Ciało będzie się toczyć ruchem jednostajnym, gdy moment $\mathbf{M}$ wywołany przez siłę ciągnącą będzie równy momentowi sił tarcia (1.3.2).

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = -\mathbf{d} \times \mathbf{N} \quad 1.3.3$$

Gdy odpowiednie kąty między wektorami są proste mamy w zapisie skalarnym

$$rF = dN \quad 1.3.4$$

Stąd mamy

$$\mu_t = d = \frac{rF}{N} \quad 1.3.5$$

Wielkość μ_t nazywamy współczynnikiem tarcia tocznego. Jak widać, współczynnik tarcia tocznego jest równy wartości przesunięcia punktu przyłożenia wypadkowej siły reakcji podłoża w stosunku do punktu styku idealnego koła z podłożem. Ten punkt idealnego styku wypada zawsze pod środkiem kuli lub osią walca czy koła. Związek (1.3.5) możemy uznać za definicję współczynnika tarcia tocznego.

Definicja 1.3.1: Współczynnik tarcia tocznego μ_t

Współczynnikiem tarcia tocznego μ_t nazywamy wielkość zdefiniowaną zależnością (1.3.5).

Fakt 1.3.1.

Wymiarem współczynnika tarcia tocznego jest długość.

Fakt 1.3.2.

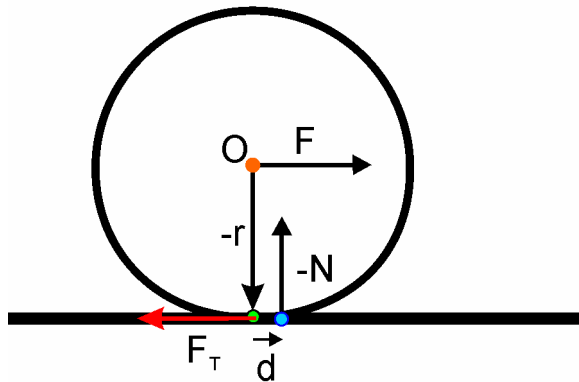
W układzie SI jednostką współczynnika tarcia tocznego jest metr

Przykładowe wartości współczynnika tarcia tocznego walca wykonanego z różnych materiałów przedstawia tabela (3.1.1).

Materiał walca	Materiał podłoża	Współczynnik tarcia tocznego w milimetrach
Drewno miękkie	Drewno miękkie	1.5
Drewno miękkie	Stal	0.8
Drewno twarde	Drewno twarde	0.8
Guma	Beton	15-35
Stal	Stal	0.05
Hartowana stal	Hartowana stal	0.01
Ebonit	Stal	7.7

Tabela 1.3.1. Przykładowe wartości współczynnika tarcia tocznego. Zwraca uwagę duża wartość współczynnika dla pary guma-beton, co w dużej mierze odpowiada za wychamowywanie prędkości przez samochody. Oras bardzo mała wartość tego tarcia dla pary hartowana stal – hartowana stal.

W podobny sposób możemy wyprowadzić wzór na współczynnik tarcia tocznego względem osi obrotu będącej osią symetrii walca (rys. 1.3.2). Przy założeniu, że nie ma poślizgu, siła tarcia poślizgowego działająca między podłożem a walcem musi być taka sama co do wartości jak siła ciągnąca, ale przeciwnie skierowana $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_T$.



Rysunek 1.3.2. Obliczanie współczynnika tarcia względem osi obrotu przechodzącej przez punkt O.

Równanie (1.3.3) przyjmie postać

$$-\mathbf{r} \times (-\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_T = -\mathbf{d} \times \mathbf{N} \quad 1.3.6$$

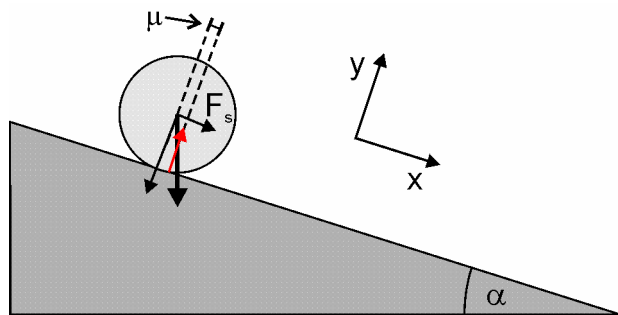
Co prowadzi do wzoru (1.3.5).

Podsumowując: do zaistnienia obrotu potrzebujemy tarcia związanego z poślizgiem. Jeżeli jednak pomyślimy o idealnie sztywnej kuli toczącej się po idealnie sztywnej powierzchni (ktoś mógł ją popchnąć nadając ruch obrotowy), to przy nieobecności tarcia będzie się ona toczyła w nieskończoność. Gdy dodamy tarcie toczne, to znaczy, gdy kula i/lub powierzchnia ugną się to, będzie to kosztem energii kinetycznej kuli. Ponieważ żadna powierzchnia nie jest idealnie sprężysta to przy ugięciu nie będzie równoważne powrotowi do stanu

pierwotnego i dojdzie do rozproszenia energii cieplnej, a w efekcie kula będzie hamowała. Efekt ten możemy skutecznie opisać wprowadzając pewien punkt (niebieski na rysunku (1.3.2)), do którego przykładamy siłę odpowiedzi podłoża na nacisk kuli (walca). Punkt jest zdefiniowany tak, aby związany z odpowiedzią walca moment sił działający na kulę hamował ją zgodnie z wynikami pomiarów dla danej pary powierzchni kula-podłoże. Zrobimy przykładowe zadanie

Zadanie 1.3.1:

Walec o promieniu r postawiony jest na równi pochyłej. Jaki powinien być kąt równi α by walec, mający pewną prędkość początkową, staczał się ruchem jednostajnym? Współczynnik tarcia tocznego wynosi μ .



Rysunek 1.3.3. Ilustracja do zadania (1.3.1). Czerwona strzałka oznacza wypadkową siłę reakcji podłoża na nacisk walca. Jest ona przesunięta względem linii styku idealnie sztywnego walca o wartość μ (wzór 1.3.5).

Znajdziemy kąt równi, przy którym moment siły ściąągającej F_s równoważy się z momentem siły reakcji N na nacisk walca na podłoże. Z (1.3.2) i (1.3.5) widać, że warunek równowagi przybiera postać

$$\mu N - mgr \sin(\alpha) = 0 \quad 1.3.7$$

W osi y , prostopadłej do powierzchni równi równoważyć się muszą siła nacisku na równię z siłą reakcji równi

$$N - mg \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow N = mg \cos(\alpha) \quad 1.3.8$$

Wstawiając (1.3.8) do (1.3.7) mamy

$$\mu - r \tan(\alpha) = 0 \Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\mu}{r} \quad 1.3.9$$

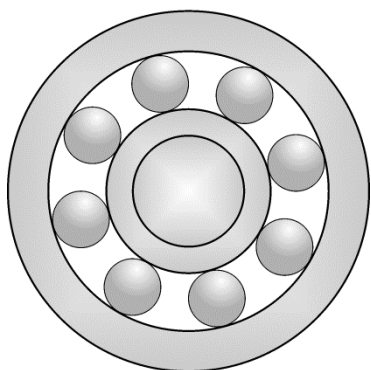
Zatem graniczny kąt α to

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\mu}{r}\right) \quad 1.3.10$$

Dla kąta równi α danego wzorem (1.3.10) walec będzie się staczał ruchem jednostajnym.

Warto w tym miejscu poczynić uwagę. W ruchu ciała tocznego wyróżniamy kilka czynników. Gdy jest nieruchome a chcemy wprowadzić je w ruch musimy zmierzyć się z tarcie statycznym. Działa ono jednak zwykle inaczej niż w przypadku ślizgania ciał. Gdy tarcie statyczne jest bardzo małe, możemy

przyjąć, że ciało pod wpływem niewielkiej siły ciągnącej zacznie się ślizgać a nie toczyć. Wtedy sytuacja jest analogiczna do ruchu poślizgowego ciała. Kiedy jednak siła tarcia statycznego jest duża (a wtedy większa jest też siła tarcia poślizgowego) ciało zacznie się toczyć – słowem ruszy przy mniejszej sile niż gdyby musiało się ślizgać. Podczas toczenia się ruchem jednostajnym działają dwie siły. Siła tarcia poślizgowego powoduje, że ciało toczy się. Bez tarcia poślizgowego między ciałem a podłożem nie byłoby obrotu ciała. Siła napędzająca nadaje ciału prędkości liniową. Gdy momenty generowane przez obie siły równoważą się ciało toczy się ruchem jednostajnym. Co się stanie gdy zwolnimy siłę napędzającą. Ciało zacznie zwalniać. Jednak siła tarcia tocznego nie powoduje hamowania ciała, tylko jego ruch obrotowy. Gdzie rozpraszana jest energia kinetyczna ciała? Wszystko wiąże się ze zjawiskiem ugięcia podłoża i toczącego się ciała. W kierunku ruchu powierzchnia walca ulega ugięciu (podobnie jak podłoża), a z tyłu powierzchnia ta rozpręża się. Zatem powierzchnia walca i podłoża zachowuje się, lokalnie, jak ściskana i zwalniana sprężyna. Podczas takiej pracy nieidealna sprężyna zawsze rozprasza energię na ciepło (dlatego drgania sprężyny gasną). Podobnie jest z toczącym się walcem, kulą czy kołem, jego powierzchnia pracuje jak sprężyna i rozprasza energię kinetyczną na ciepłą. Dlatego ciało będzie toczyło się coraz wolniej. Dla ciał takich jak stalowe kule, które toczą się po stalowej powierzchni ugięcie powierzchni jest bardzo małe, a właściwości sprężyste materiału bardzo dobre, stąd bardzo mały współczynnik tarcia tocznego (tab. 1.3.1). Dlatego kule wykonane z takiego materiału toczą się długo, powoli zwalniając swój obrót. W przypadku stalowych kul, istotniejszą rolę w hamowaniu jej toczenia odgrywają drobne nierówności jej powierzchni i powierzchni po której się toczą. Zauważ, że wysokiej jakości łożyska wykonane są z stalowych kul (lub walców), które toczą się po powierzchni stalowej zapewniając małe opory ruchu (rys. 1.3.4). Gdy powierzchnia kul stanie chropowata, na przykład na skutek korozji, jakość łożyska szybko spada i trzeba je wymienić.



Rysunek 1.3.4. Łożysko kulkowe zbudowane jest z dwóch stalowych walców, które obracają się względem siebie opierając się o układ stalowych kul. Toczenie się powierzchni walca po kulach skutkuje małym stratami energii.

Zagadnienie tarcia tocznego jest złożone, bo zależy od złożonego układu parametrów charakteryzujących materiał i podłoże. Ciekawa informacja na ten

temat możesz uzyskać w pozycjach¹. Z punktu widzenia mechaniki sprawa jest arcyważna. Dalsze drażnienie tematu tarcia tocznego nie doda nam wiedzy ogólnej z fizyki, co jest głównym zadaniem tego wykładu, więc tu się zatrzymam. Przedstawię jeszcze tylko jedno zadanie dotyczące tarcia tocznego.

Zadanie 1.3.2.

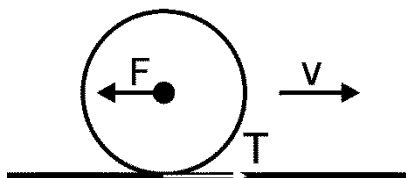
Walec o średnicy $r=1\text{m}$ i masie $m=100\text{kg}$ toczy się z prędkością $v=10\text{m/s}$ po poziomej powierzchni. Oblicz, korzystając ze związku między energią i pracą zasięg toczenia się walca. Przyjmij, że podczas toczenia się walca działa na niego siła oporu podłoża o wartości $F=100\text{N}$.

Rysunek (1.3.5) ilustruje sytuację z zadania. Przykładamy siłę oporu do środka masy walca i liczymy pracę wykonaną przez tą siłę na drodze hamowania s . Praca ta musi być równa początkowej wartości energii mechanicznej walca, stąd mamy równanie

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \left(\frac{v}{r} \right)^2 = F \cdot s \Rightarrow s = \frac{3}{4} \frac{m}{F} v^2 = 75\text{m} \quad 1.3.11$$

Poszło prosto, więc mamy czas na rozwiązanie tego zadania inną metodą. Skoro siła oporu jest przyłożona do środka masy (bo tam ją przenieśliśmy), to możemy uznać, że opóźnienie liniowe walca jest równe

$$a = \frac{F}{m} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad 1.3.12a$$



Rysunek 1.3.5. Ilustracja do zadania (1.3.2)

Czas ruchu (do zatrzymania) wynosi

$$t = \frac{v}{a} = 10\text{s} \quad 1.3.12b$$

Droga walca to

$$s = vt - \frac{at^2}{2} = 50\text{m} \quad 1.3.12$$

Rzut oka na wzór (1.3.11) pokazuje, że coś jest nie tak. Droga hamowania policzona drugą metodą jest krótsza o 25 metrów. Aby uzyskać ten sam wynik we wzorze (1.3.11) wartość siły F musiałaby być większa.

To zadanie stanowi piękny przykład na to, że nawet z pozoru proste problemy mogą zawierać w sobie pułapki. Co więcej tego typu zadanie pojawiło się na maturze z fizyki z 2008 roku, a rozwiązanie (1.3.11) było tym czego

¹ Rod Cross, *Origins of rolling friction*, Phys. Educ. **52**, 05501 (2017); Rod Cross, *Coulomb's law for rolling friction*, Am. J. Phys. **84**, 221-230 (2016)

komisja oczekiwała od uczniów. Prawie dziesięć lat później pokazała się krytyczna dyskusja rozwiązania uznanego przez komisję za poprawne. Warto się z nią zapoznać². Przykład ten pokazuje, że i grupie ekspertów zdarza się pomyłka. Nie wynika to z braku wykształcenia, ale raczej z tego, że w fizyce stosunkowo łatwo trafić na pozornie łatwy problem, który kryje w sobie subtelne kwestie, które można przeoczyć. W czym zatem tkwi problem z rozwiązaniem tego zadania?

Mniejsza wartość drogi policzonej drugą metodą budzi podjęcie, że w analizie problemu zgubiliśmy jakąś siłę. Rzeczywiście umknęła nam siła powodująca spowolnienie obrotu walca (walec obraca się bez poślizgu). Jest to siła tarcia skierowana przeciwnie do siły oporu ruchu (rys. 1.3.4). Jej wartość jest równa

$$\varepsilon = \frac{T \cdot r}{mr^2} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \varepsilon mr \quad 1.3.13a$$

Wzór (1.3.13a) został obliczony dla osi obrotu przechodzącej przez środek walca. Przyspieszenie kątowe ε , jakie ta siła powoduje, obliczone względem chwilowej osi obrotu (czyli punktu styku walca z podłożem), którego źródłem jest całkowita siła przyłożona F_c , wyrazi się wzorem

$$\varepsilon = \frac{F_c \cdot r}{\frac{mr^2}{2} + mr^2} = \frac{2}{3} \frac{F_c}{mr} \quad 1.3.13b$$

Wyrażenie w mianowniku z prawej strony pierwszego znaku „=” to oczywiście moment bezwładności walca względem chwilowej osi obrotu. Choć przyspieszenie (1.3.13a) obliczone było względem środka masy walca, a (1.3.13b) względem osi przechodzącej przez punkt P, to oba przyspieszenia muszą być takie same (rys. 1.3.7). Wstawiając (1.3.13b) do (1.3.13a) mamy

$$\frac{2}{3} \frac{F_c}{mr} = 2 \frac{T \cdot r}{mr^2} \Rightarrow T = \frac{1}{3} F_c \quad 1.3.14a$$

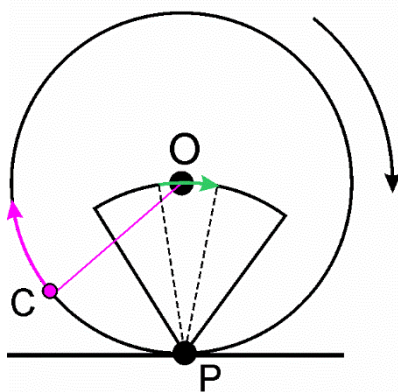
Siła tarcia T jest odwrotnie skierowana do siły hamującej umniejsza jej wartość. Ponieważ wartość siły hamującej wynosi $F_h = F = 100\text{N}$, to całkowita siła ciągnąca F_c to siła hamująca plus to czego wymaga siła tarcia, zatem

$$F_c = F + T \quad 1.3.14b$$

Ze wzorów (1.3.14) widać, że $T = 50\text{N}$, zatem $F_c = F_h + T = 150\text{N}$. Te dodatkowe 50N siły to jest to czego potrzebujemy na przezwyciężenie tarcia. We wzorze (1.3.11) powinniśmy zastąpić $F \rightarrow F_c$, co w wyniku da $s = 50\text{m}$, tak jak (1.3.12). Siła wyrażona przez wzór (1.3.12a) będzie miała taką samą wartość to jest 100N, dla porządku powinniśmy tylko zamienić oznaczenia $F \rightarrow F_h$. Możemy uznać, że sytuacja jest analogiczna do zagadnienia pracy w polu grawitacyjnym. Aby

² Quo vadis, maturalna beczko, Foton, 139, 2017, str. 23- 39.

podnieść ciężar z pewnym przyspieszeniem musimy najpierw zrównoważyć siłę grawitacji, co w naszym zagadnieniu odpowiada sile tarcia T . Siła nadająca podnoszonemu ciału przyspieszenie musi być większa od siły ciężenia, ta nadwyżka odpowiada sile hamującej F_h . Całkowita siła to siła równoważąca plus siła hamująca. Siła tarcia T nie zmienia stanu ruchu, tylko utrzymuje obrót walca, tak jak siła równoważąca siłę ciężenia pozwala utrzymać daną masę na zadanej wysokości.



Rysunek 1.3.7. Prędkość liniowa punktu C na obwodzie okręgu jest taka sama jak chwilowa prędkość liniowa punktu O (środek okręgu), gdy punkt P jest chwilową osią obrotu. Ponieważ okręgi mają ten sam promień to równe są też prędkości kątowe, jak i ich zmiany, czyli przyspieszenia kątowe

Wyznaczę jeszcze wartość współczynnika tarcia tocznego μ . Przy braku poślizgu mogę skorzystać z wzoru (1.3.13b) na przyspieszenie kątowe

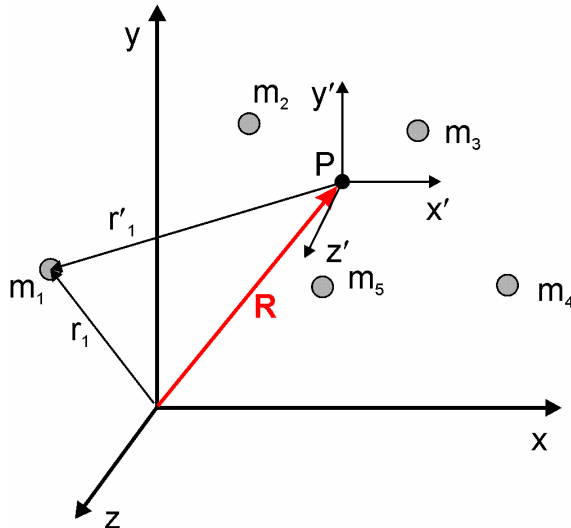
$$\frac{F_h}{m} = \varepsilon \cdot r = \frac{mg \cdot \mu}{\frac{mr^2}{2} + mr^2} r \Rightarrow \mu = \frac{3}{2} \frac{F_h}{mg} r = 0.075m \quad 1.3.15$$

Punkt przyłożenia wypadkowej siły reakcji podłoża jest przesunięty względem linii styku idealnego walca o 7.5mm. To sporo nawet jak na walec o promieniu jednego metra. Wynika z tego, że tak szybko hamujący walec, lub powierzchnia równi musi być wykonany ze stosunkowo miękkiego materiału.

Jak widać z powyższego zagadnienie tarcia tocznego jest bardziej złożone niż tarcia posuwistego. Zostało też później opracowane. Prawo postaci (1.3.5) podał Charles Coulomb (ten od prawa Coulomba w elektrostatyce) w rozprawie z 1785 roku. Za pracę tę dostał nagrodę francuskiej Królewskiej Akademii Nauk, co podkreśla tylko wagę problemu na nauki i techniki

1.4. Podsumowanie ♣

Zrobię krótkie podsumowanie dotyczące zagadnień ruchu bryły sztywnej. Rysunek (1.4.1) pokazuje układ N cząstek o masach m_i poruszających się z prędkością $\mathbf{v}'_i$ względem środka masy P tego układu. Ze środkiem masy związany jest układ współrzędnych $K'(x', y', z')$. Środek masy porusza się z prędkością $\mathbf{V}$ względem początku innego układu współrzędnych $K(x, y, z)$.



Rysunek 1.4.1. Układ punktów materialnych opisywany z układu odniesienia primowanego K' związanego z środkiem masy P i z wybranego układu odniesienia K. Układ środka masy porusza się względem układu K z prędkością $\mathbf{V}$.

Wyrażenie na całkowity moment pędu w układzie środka masy ma postać

$$\mathbf{K}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \quad 1.4.1$$

Odejmujemy od powyższego wyrażenia, wyrażenie (1.4.2), którego wartość jest równa zero (jako, że zawiera współrzędne środka masy, która wypada w początku układu K')

$$0 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \right)}_{=0} \times \mathbf{V} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V} \quad 1.4.2$$

Po odjęciu dostajemy

$$\mathbf{K}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i - \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{K}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i (\mathbf{v}'_i - \mathbf{V}) \quad 1.4.3$$

Ale w układzie K' prędkość układu K wynosi $-\mathbf{V}$, stąd dla obserwatora w układzie K' mamy następującą relację pomiędzy prędkościami

$$\mathbf{v}'_i + (-\mathbf{V}) = \mathbf{v}'_i - \mathbf{V} = \mathbf{v}_i \quad 1.4.4$$

Gdzie $\mathbf{v}_i$ jest prędkością i -tej cząstki w układzie K. Stąd mamy

$$\mathbf{K}' = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i \quad 1.4.5$$

Ze wzoru (1.4.5) wynika dość zaskakujący

Fakt 1.4.1:

Kręt (moment pędu) układu punktów materialnych liczony względem układu środka masy ale z pędami określonymi w innym układzie inercyjnym jest równy krętowi tego układu punktów materialnych liczonemu względem układu środka masy z pędami określonymi względem tegoż środka masy.

Znajdę związek między krętem względem dowolnego układu odniesienia a krętem względem układu związanego ze środkiem masy. Z rysunku (1.4.1) mamy

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}'_i + \mathbf{R} \quad 1.4.6$$

Wyrażenie na kręt ma postać

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad 1.4.7$$

Pierwsze wyrażenie z prawej strony równe jest, na mocy faktu (1.4.1), krętowi w układzie środka masy $\mathbf{K}'$. Suma w drugim wyrażeniu przedstawia pęd $\mathbf{P}$ układu punktów w danym układzie współrzędnych. Mając na uwadze, że relacja między prędkościami widziana w układzie K ma postać

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{V} \quad 1.4.8a$$

Mamy

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i + \mathbf{V} \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i + \frac{M}{M} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i}_{\mathbf{p}_s} + M \mathbf{R} \quad 1.4.8b$$

Gdzie $\mathbf{p}_s$ to pędu układu cząstek wyznaczony względem środka masy. Podstawiając to do prawej strony (1.4.7) mamy

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}' + \mathbf{R} \times \mathbf{p}_s \quad 1.4.8$$

Otrzymaliśmy następujący

Fakt 1.4.2:

Kręt (moment pędu) układu punktów materialnych względem początku dowolnego inercjalnego układu współrzędnych K, równy jest sumie krętu wyznaczonego względem środka masy tego układu punktów oraz momentu pędu środka masy układu tych punktów liczonego względem początku układu współrzędnych K, przy czym środkowi masy przypisujemy masę równą sumie mas układu punktów.

Pochodna krętu po czasie jest równa sumie momentów sił działających na dany układ punktów (1.23)

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i \quad 1.4.9$$

Podstawiając do tego wzoru wyrażenie (1.4.8) otrzymujemy

$$\frac{d(\mathbf{K}' + \mathbf{R} \times \mathbf{p}_s)}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i \Rightarrow \frac{d\mathbf{K}'}{dt} + \mathbf{R} \times m \mathbf{a}_s = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i \quad 1.4.10$$

Gdzie skorzystałem z faktów

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}_s \Rightarrow \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times m \mathbf{v}_s = \mathbf{0} \text{ oraz } \frac{d}{dt} \mathbf{v}_s = \mathbf{a}_s \quad 1.4.10a$$

Korzystając z (1.4.6) moment sił względem początku układu współrzędnych można przedstawić w postaci

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}_{iC} + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_i \quad 1.4.11$$

Gdzie $\mathbf{M}_{iC}$ oznacza moment sił działający na i -tą masę obliczony względem środka masy układu punktów. Korzystając z tego związku wzór (1.4.10) może być przekształcony do postaci

$$\frac{d\mathbf{K}'}{dt} + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_s = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{iC} + \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad 1.4.12$$

Gdzie $\mathbf{F}_s = m\mathbf{a}_s$ jest sumą wszystkich sił zewnętrznych wyznaczonych w układzie środka masy. Biorąc pod uwagę, że

$$\mathbf{F}_s = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad 1.4.12a$$

Otrzymujemy

$$\frac{d\mathbf{K}'}{dt} + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_s = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{iC} + \mathbf{R} \times \mathbf{F}_s \Rightarrow \frac{d\mathbf{K}'}{dt} = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_{iC} \quad 1.4.13$$

Wynika z tego

Fakt 1.4.3:

Pochodna po czasie krętu (momentu pędu) układu punktów materialnych wyznaczonego względem środka masy równa jest sumie wszystkich momentów sił wyznaczonych względem tegoż środka.

Bryła sztywna może się poruszać ruchem postępowym liniowym (bez obrotu). Jest to najprostszy przypadek. Gdy nie ma obrotu, to wypadkowy moment sił działający na bryłę sztywną musi być równy zeru. Gdy bryła sztywna nie obraca się siłę wypadkową możemy przyłożyć do środka masy; mamy wtedy

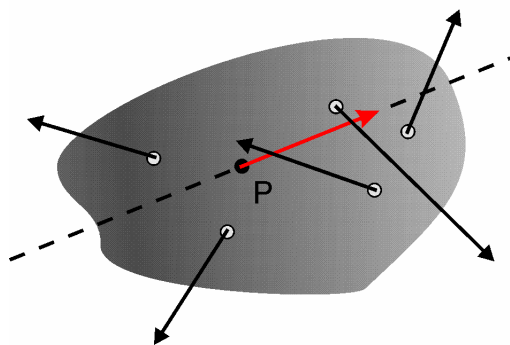
$$m\mathbf{a} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \quad 1.4.14$$

Symbol $\mathbf{a}$ oznacza przyspieszenie środka masy. Jest tak również w przypadku obrotu wokół osi przechodzącej przez środek masy. Możesz pokazać, że

Fakt 1.4.4:

Ruch bryły sztywnej możemy rozłożyć na ruch obrotowy względem osi przechodzącej przez środek masy i ruch postępowy środka masy zachodzący pod działaniem siły danej wzorem (1.4.14).

Wynika z tego, że gdy bryła sztywna porusza się tylko ruchem postępowym, to momenty sił muszą się sumować do zera. Oznacza to, że siły muszą sumować się tak, aby ich wypadkowa leżała na prostej przechodzącej przez środek masy układu punktów materialnych (rys. 1.4.2).



Rysunek 1.4.2. Gdy bryła sztywna porusza się ruchem postępowym, siły (czarne strzałki) muszą sumować się do wypadkowej (czerwona strzałka), która leży na osi przechodzącej przez punkt środka masy P

Fakt 1.4.5:

Gdy bryła sztywna porusza się ruchem wyłącznie postępowym, to siła wypadkowa musi leżeć na osi przechodzącej przez punkt środka masy tej bryły.

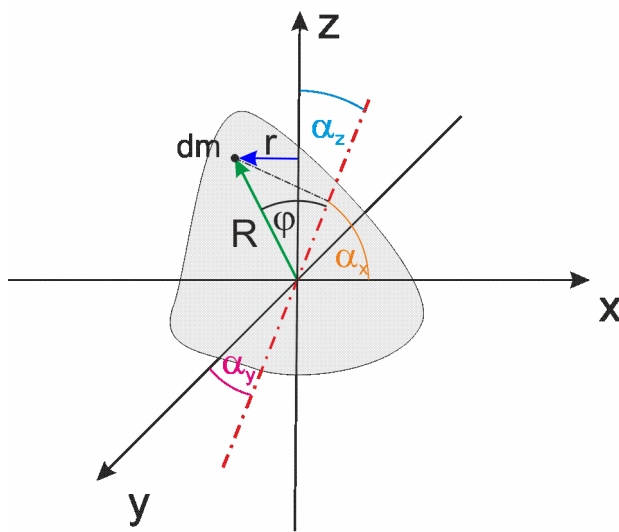
Reasumując, kiedy rozwiązujemy problemy związane z bryłą sztywną mamy dwie ścieżki postępowania. Pierwsza z nich odwołuje się do pojęcia chwilowej osi obrotu (§ 1.2). Korzystałem z niej rozwiązując zadanie z belką na walcu (1.2.1) i ze szpulą (1.2.2). Druga korzysta z możliwości rozłożenia ruchu bryły sztywnej na dwie składowe – ruch postępowy względem wybranego układu współrzędnych oraz ruch obrotowy względem układu środka masy. Z tej metody korzystałem rozwiązując zadanie (1.1.1) ze staczającym się walcem.

W przedstawionej tu analizie odwoływałem się do układu punktów materialnych. Całą analizę możemy powtórzyć dla ciągłego rozkładu masy, zamieniając w odpowiedni sposób sumy na całki. Przedstawione fakty nie zmieniają się. W temacie (TII 6) wprowadziłem pojęcie środka masy, zaznaczając, że jest to „magiczny” punkt często pojawiający się w mechanice. Teraz mieliście kolejne przykłady jego użyteczności.

Mamy trzydziestą trzecią stronę tematu „tensory” a nie widać jeszcze nawet cienia tensora. Zaraz to się zmieni, gdyż obrót bryły sztywnej daje doskonałą okazję tensorom do ujawnienia się.

2. Tensor momentu bezwładności ♣

Do tej pory analizowałem obrót bryły sztywnej względem osi przechodzącej przez jej środek masy, lub równoległej do takiej osi. Wiemy już, że symetria potrafi wiele spraw uprościć i możemy się spodziewać, że w ogólnym przypadku (to jest mniej symetrycznym) obliczanie momentu bezwładności może być bardziej kłopotliwe. Rozważmy nieregularną bryłę sztywną obracającą się wokół dowolnej osi. Wyznamy jej moment bezwładności względem tej osi. Zgodnie z rysunkiem (2.1) przyjmujemy, że kąty α_x , α_y i α_z są kosinusami kierunkowymi (§DA 2.6) osi obrotu S w układzie OXYZ.



Rysunek 2.1. Nieregularna bryła sztywna obracająca się wokół osi narysowanej na czerwono.

Korzystając z rysunku (2.1) możemy zapisać

$$r^2 = R^2 \sin^2(\varphi) = R^2 - (R \cos(\varphi))^2 \quad 2.1.$$

Wyrażenie $R \cos(\varphi)$ jest rzutem wektora R na osi S i może być zapisane jako iloczyn skalarny wektora $\mathbf{R}$ i wektora jednostkowego $\hat{\mathbf{e}}$ leżącego wzdłuż osi S .

$$R \cos(\varphi) = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{e}} = x \cos(\alpha_x) + y \cos(\alpha_y) + z \cos(\alpha_z) \quad 2.2$$

Biorąc pod uwagę, że

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad 2.3a$$

mamy

$$r^2 = R^2 - \left(x \cos(\alpha_x) + y \cos(\alpha_y) + z \cos(\alpha_z) \right)^2 \quad 2.3$$

Rozwinięcie nawiasu i pogrupowanie wyrażeń ze względu na współrzędne x , y , z prowadzi do wzoru

$$\begin{aligned}
 r^2 = & x^2 (1 - \cos^2(\alpha_x)) + y^2 (1 - \cos^2(\alpha_y)) \\
 & + z^2 (1 - \cos^2(\alpha_z)) - 2xy \cos(\alpha_x)\cos(\alpha_y) \\
 & - 2yz \cos(\alpha_y)\cos(\alpha_z) - 2xz \cos(\alpha_x)\cos(\alpha_z)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Korzystając z faktu, że suma kwadratów kosinusów kierunkowych jest równa jeden (DB 2.6.6) mamy związki

$$1 - \cos^2(\alpha_x) = \cos^2(\alpha_y) + \cos^2(\alpha_z) \tag{2.5a}$$

$$1 - \cos^2(\alpha_y) = \cos^2(\alpha_x) + \cos^2(\alpha_z) \tag{2.5b}$$

$$1 - \cos^2(\alpha_z) = \cos^2(\alpha_x) + \cos^2(\alpha_y) \tag{2.5c}$$

Wstawiając te zależności do równania (2.4) i porządkując wyrazy mamy

$$\begin{aligned}
 r^2 = & (y^2 + z^2)\cos^2(\alpha_x) + (x^2 + z^2)\cos^2(\alpha_y) \\
 & + (x^2 + y^2)\cos^2(\alpha_z) - 2xy \cos(\alpha_x)\cos(\alpha_y) \\
 & - 2yz \cos(\alpha_y)\cos(\alpha_z) - 2xz \cos(\alpha_x)\cos(\alpha_z)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Wyrażenie to wstawiamy do wzoru definiującego moment bezwładności (1.27). Dla większej czytelności wzoru zrezygnowałem z wypisywania granic całkowania po objętości bryły V.

$$\begin{aligned}
 I = & \cos^2(\alpha_x) \underbrace{\int (y^2 + z^2) \rho(\mathbf{r}) dv}_{I_{xx}} \\
 & + \cos^2(\alpha_y) \underbrace{\int (x^2 + z^2) \rho(\mathbf{r}) dv}_{I_{yy}} \\
 & + \cos^2(\alpha_z) \underbrace{\int (x^2 + y^2) \rho(\mathbf{r}) dv}_{I_{zz}} \\
 & - 2 \cos(\alpha_x)\cos(\alpha_y) \underbrace{\int xy \rho(\mathbf{r}) dv}_{-I_{xy} = -I_{yx}} \\
 & - 2 \cos(\alpha_y)\cos(\alpha_z) \underbrace{\int yz \rho(\mathbf{r}) dv}_{-I_{yz} = -I_{zy}} \\
 & - 2 \cos(\alpha_z)\cos(\alpha_x) \underbrace{\int zx \rho(\mathbf{r}) dv}_{-I_{xz} = -I_{zx}}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Korzystając z wprowadzonego w powyższym wzorze symbolu I_{qq} możemy go zapisać w postaci

$$I = \cos^2(\alpha_x) I_{xx} + \cos^2(\alpha_y) I_{yy} + \cos^2(\alpha_z) I_{zz} - 2 \cos(\alpha_x) \cos(\alpha_y) I_{xy} - 2 \cos(\alpha_y) \cos(\alpha_z) I_{yz} - 2 \cos(\alpha_z) \cos(\alpha_x) I_{xz} \quad 2.8$$

Jak się należało spodziewać, w ogólnym wypadku wzór na moment bezwładności bryły sztywnej istotnie się komplikuje. Zauważ, że we wzorze (2.7) wielkości I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} odpowiadają momentom bezwładności bryły odpowiednio względem osi x , y , z . Wielkości I z indeksami mieszanymi (np. I_{xy}) nazywane są momentami odśrodkowymi albo momentami zboczenia.

Z poszczególnych wielkości I_{pq} możemy utworzyć wielkość o dziewięciu składowych.

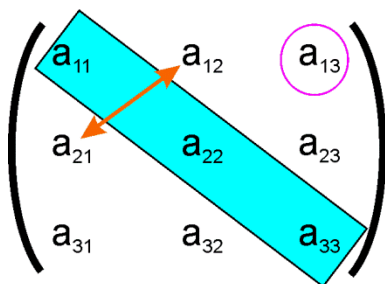
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad 2.9$$

Taką wielkość będziemy nazywali tensorem³; w naszym wypadku jest to tensor momentu bezwładności. Ważna uwaga:

Uwaga: 2.1:

Tensor $\mathbf{I}$ nie jest macierzą (3x3), tak jak wektor $\mathbf{v}$ nie jest trójką liczb (v_x , v_y , v_z). Natomiast macierz (2.9) jest reprezentacją, w danym układzie współrzędnych, tensora bezwładności $\mathbf{I}$.

Poszczególne wyrazy I_{pq} nazywamy współrzędnymi tensora. Wyrazy leżące na przekątnej opadającej w prawo nazywamy wyrazami przekątniowymi (rys. 2.2). Przekątna nazywa się też diagonalną tensora (macierzy), a odpowiednie wyrazy wyrazami diagonalnymi (przekątniowymi). Prawa strona wzoru (2.9) jest macierzą 3x3.



Rysunek 2.2. Tensor drugiego rzędu, w przestrzeni trójwymiarowej może być reprezentowany przez macierz 3x3. Na niebiesko zaznaczone są elementy diagonalne tensora. W fioletowym kółku znajduje się jedna z dziewięciu współrzędnych tensora. Pomarańczowa strzałka pokazuje dwie współrzędne wzajemnie symetryczne, to jest takie, które różnią się kolejnością indeksów. Współrzędne na diagonalu są symetryczne same do siebie.

Zatem tensor drugiego rzędu w trójwymiarowej przestrzeni reprezentowany jest przez taką macierz (o macierzach jest więcej w (§DE)).

³ Ściślej tensorem drugiego rzędu, ale o rzędach tensorów będzie później

Ze wzoru (2.7) widać, że wyrazy pozadiagonalne są symetryczne. To znaczy, że jeżeli zmienimy kolejność indeksów, to otrzymamy ten sam wyraz $I_{qp}=I_{pq}$

Definicja 2.1: Tensor symetryczny

Tensor jest symetryczny jeżeli reprezentująca go macierz spełnia warunek

$$I_{jk} = I_{kj} \quad 2.10$$

Od razu zdefiniuję tensor antysymetryczny

Definicja 2.2: Tensor antysymetryczny

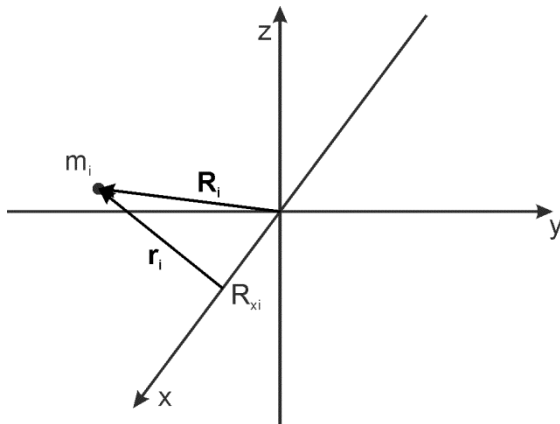
Tensor jest antysymetryczny jeżeli reprezentująca go macierz spełnia warunek

$$I_{jk} = -I_{kj} \quad 2.11$$

Przyjrzyj się bliżej współrzędnym przekątniowym tensora momentu bezwładności czyli I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} . Weźmy na przykład współrzędną I_{xx} .

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - x_i^2) \quad 2.12a$$

Wyrażenie w ostatnim nawiasie jest odległością i -tej masy od osi x (rys. 2.3).



Rysunek 2.3. Obliczanie współrzędnej przekątniowej I_{xx}

Podobnie wyrażą się dwie pozostałe współrzędne przekątniowe.

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - y_i^2) \quad 2.12b$$

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - z_i^2) \quad 2.12c$$

Otrzymaliśmy wyrażenia o znanej postaci (1.30). Możemy teraz stwierdzić, że w sytuacji gdy tensor momentu bezwładności ma tylko jedną niezerową

współrzedną (leżącą na przekątnej), czyli daje się reprezentować przez jedną niezerową liczbę, to mamy do czynienia z prostym przypadkiem podsumowany w tabeli (1.2). W innych przypadkach analogie z tabeli (1.2) nie działają lub kwestia ich użycia może być delikatnej natury.

Fakt 2.2:

Analogie z tabeli (1.2) możemy stosować, wtedy gdy tensor momentu bezwładności ma jedną diagonalną współrzedną.

Należy pamiętać, że moment bezwładności bryły sztywnej względem danej osi jest liczbą daną wzorem (2.8). Oprócz tej wielkości pojawiła się druga, związana z nią ale nie tożsama, to jest tensor momentu bezwładności. Po co nam w zasadzie ten tensor? Odpowiedź na to pytanie wiąże się z następującym problemem. Jak, mając moment bezwładności bryły, względem danej osi obrotu oraz jej prędkość kątową, można obliczyć moment pędu tej bryły? Czy dalej możemy stosować wzór (1.7), który się dobrze spisywał w przypadku problemów o dużej symetrii?

Niech ω będzie chwilową prędkością kątową ciała złożonego z N punktów, obracającego się względem osi przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Moment pędu tego ciała to suma momentów pędów poszczególnych jego części

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{r}_i) \quad 2.13$$

Wykorzystamy zależność wektorową (DA 2.6), która pozwala przekształcić (2.13) do postaci

$$\mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{r}_i) = \omega r_i^2 - \mathbf{r}_i (\omega \cdot \mathbf{r}_i) \quad 2.14$$

Teraz moment pędu wyraża się wzorem

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N m_i [\omega r_i^2 - \mathbf{r}_i (\omega \cdot \mathbf{r}_i)] \quad 2.15$$

Wypiszę kolejno współrzędne wektora momentu pędu $\mathbf{K}(K_x, K_y, K_z)$.

$$K_x = \omega_x \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 - \omega_x \sum_{i=1}^N m_i x_i^2 - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i r_{xi} r_{yi} - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i r_{xi} r_{zi} \quad 2.16a$$

$$K_y = \omega_y \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i y_i^2 - \omega_x \sum_{i=1}^N m_i r_{xi} r_{yi} - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i r_{yi} r_{zi} \quad 2.16b$$

$$K_z = \omega_z \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i z_i^2 - \omega_x \sum_{i=1}^N m_i r_{xi} r_{yi} - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i r_{yi} r_{zi} \quad 2.16c$$

W tym wzorze r_{qi} gdzie $q \in \{x, y, z\}$ oznacza współrzedną x, y lub z dla i -tej masy. Zajmę się współrzedną K_x ; pozostałe współrzedne możemy potraktować w taki sam sposób. Wzór (2.16a) na K_x możemy przepisać w postaci

$$K_x = \omega_x \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - r_{xi}^2) - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i r_{xi} r_{yi} - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i r_{xi} r_{zi} \quad 2.17$$

Wprowadzimy znane nam już oznaczenia

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - r_{xi}^2), \quad I_{xy} = -\sum_{i=1}^N m_i r_{xi} r_{yi}, \quad I_{xz} = -\sum_{i=1}^N m_i r_{xi} r_{zi} \quad 2.18a$$

Dla współrzędnych y i z dostajemy podobne wyrażenia

$$I_{yx} = -\sum_{i=1}^N m_i r_{yi} r_{xi}, \quad I_{yy} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - r_{yi}^2), \quad I_{yz} = -\sum_{i=1}^N m_i r_{yi} r_{zi}; \quad 2.18b$$

$$I_{zx} = -\sum_{i=1}^N m_i r_{zi} r_{xi}, \quad I_{zy} = -\sum_{i=1}^N m_i r_{zi} r_{yi}, \quad I_{zz} = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - r_{zi}^2) \quad 2.18c$$

Pamiętając, że

$$r_{xi} = x_i, \quad r_{yi} = y_i, \quad r_{zi} = z_i \quad 2.18d$$

Widać, że (2.18a-c) wyrażają współrzędne tensora momentu bezwładności bryły zdefiniowane równaniem (2.7); tyle, że teraz dla dyskretnego rozkładu punktów materialnych. Wyrażenia na współrzędne wektora momentu pędu przyjmują postać

$$K_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \quad 2.19a$$

$$K_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \quad 2.19b$$

$$K_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \quad 2.19c$$

Te trzy równania można przedstawić w postaci macierzowej (mnożenie wektora przez macierz omówione jest w (§DE 1.1.2))

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \quad 2.20$$

Zapisaaliśmy związek między momentem pędu a prędkością kątową w postaci (1.7) - no prawie, w tej postaci. Różnica polega na tym, że teraz moment bezwładności nie jest reprezentowany przez liczbę tylko przez tensor. Ma to swoje poważne konsekwencje fizyczne, o których opowiem za moment. Mam nadzieję, że teraz stało się jasne dlaczego zdefiniowałem tensor momentu bezwładności. Sam moment bezwładności (który jest reprezentowany przez pojedynczą liczbę) i prędkość kątowa bryły nie są wystarczające do wyznaczenia krętu (momentu pędu) bryły. Aby to zrobić musimy mieć głębszą wiedzę na temat momentu bezwładności – musimy znać współrzędne tensora momentu bezwładności.

Jeszcze uwaga techniczna, czy przykładowo, współrzędna I_{xy} ze wzoru (2.18a), to ta sama współrzędna co ze wzoru (2.7)? Zobaczmy jak to jest

$$I_{xy} = \int_V xy \underbrace{\rho(\mathbf{r}) dv}_{dm} = \int_V xy dm = \int_V r_x r_y dm \quad 2.21$$

Gdzie skorzystałem z (2.18d). Otrzymaliśmy tą samą postać, tyle że zamiast dyskretnego przypadku mamy przypadek ciągły; sumę zamieniamy na całkę.

Dla tensora momentu bezwładności zawsze można znaleźć układ współrzędnych, w którym jego macierz ma postać diagonalną. Jest to sytuacja analogiczna do wektora, dla którego można znaleźć taki układ współrzędnych, że wszystkie współrzędne tego wektora oprócz jednej są równe zero. W przypadku tensora momentu bezwładności odpowiednio dobrany układ współrzędnych zeruje jego współrzędne pozadiagonalne. Można zatem powiedzieć, że dla tensora momentu bezwładności istnieje układ współrzędnych, w którym jego pozadiagonalne współrzędne są równe zero. Osie takiego układu nazywamy osiami głównymi. Gdy układ obraca się wokół jednej i tylko jednej osi głównej, to tensor momentu bezwładności można traktować jako liczbę.

Definicja 2.3: Osie główne

Oś obrotu jest osią główną danego ciała, gdy postać diagonalna macierzy tensora momentu bezwładności tego ciała redukuje się do jednej liczby na diagonalu

Wynika z tego, że dla danej bryły sztywnej możemy tak wybrać układ współrzędnych, aby jego osie pokrywały się z osiami głównymi jej tensora momentu bezwładności. Mówimy, że są to osie główne danej bryły sztywnej. Dla osi głównych macierz tensora momentu bezwładności będzie miał postać diagonalną

Fakt 2.3.

Gdy układ współrzędnych zorientowany jest zgodnie z kierunkiem osi głównych bryły sztywnej, to macierz tensora momentu bezwładności ma postać diagonalną.

Uwaga:

Wzory (2.18) wyprowadziłem dla dyskretnego rozkładu punktów materialnych. W ten sam sposób możemy to jednak zrobić dla ciągłego rozkładu (tak jak wzory (2.7). Wtedy sumy zamieniamy na odpowiednie całki, jak to już nieraz robiliśmy.

Czas na przykłady

2.1. Zadania

W pierwszym zadaniu wykorzystam wzór (2.8) do znalezienia momentu bezwładności bryły wokół danej osi obrotu, gdy znane są momenty bezwładności względem osi głównych. W takim przypadku momenty dewiacji (pozaosiowe składowe tensora bezwładności) są równe zero.

Zadanie 2.1.1. Moment bezwładności stożka

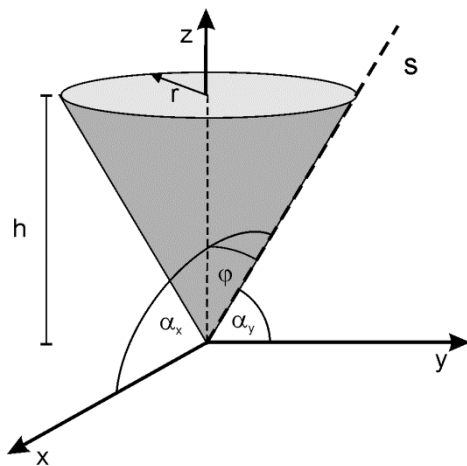
Niech będzie dany stożek o wysokości h i promieniu r (rys. 2.4). Momenty bezwładności stożka względem osi głównych dane są wzorami (tabela 1.1).

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{5}m \left(\frac{1}{4}r^2 + h^2 \right) \quad 2.1.1a$$

$$I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2 \quad 2.1.1b$$

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0 \quad 2.1.1c$$

Znajdź moment bezwładności względem osi s będącej tworzącą stożka.



Rysunek 2.1.1. Ilustracja do zadania (2.1.1).

Tworząca stożka to (to prosta łącząca wierzchołek stożka z dowolnym punktem jego podstawy). Niech między tworzącą stożka a osią z jest kąt φ . Z rysunku (2.1.1) widać, że

$$\alpha_x = \frac{\pi}{2} \quad 2.1.2a$$

$$\alpha_y = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad 2.1.b$$

$$\alpha_z = \varphi \quad 2.1.2b$$

Moment bezwładności względem tworzącej, obliczony w układzie współrzędnych zgodnym z układem osi głównych, uzyskamy ze wzoru (2.8) i z wzorów (2.1.1)

$$\begin{aligned} I &= \sin^2(\varphi) I_{yy} + \cos^2(\varphi) I_{zz} \\ &= \frac{3}{10}m \left(r^2 \cos^2(\varphi) + \frac{1}{2}(r^2 + 4h^2) \sin^2(\varphi) \right) \end{aligned} \quad 2.1.3$$

Mamy jednocześnie

$$\cos(\varphi) = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} \quad 2.1.4a$$

$$\sin(\varphi) = \frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}} \quad 2.1.4b$$

Wstawiając te wyrażenia do (2.1.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{10} m \left(r^2 \frac{h^2}{h^2 + r^2} + \frac{1}{2} (r^2 + 4h^2) \frac{r^2}{h^2 + r^2} \right) \\ &= \frac{3}{20} m r^2 \frac{r^2 + 6h^2}{r^2 + h^2} \end{aligned} \quad 2.1.5$$

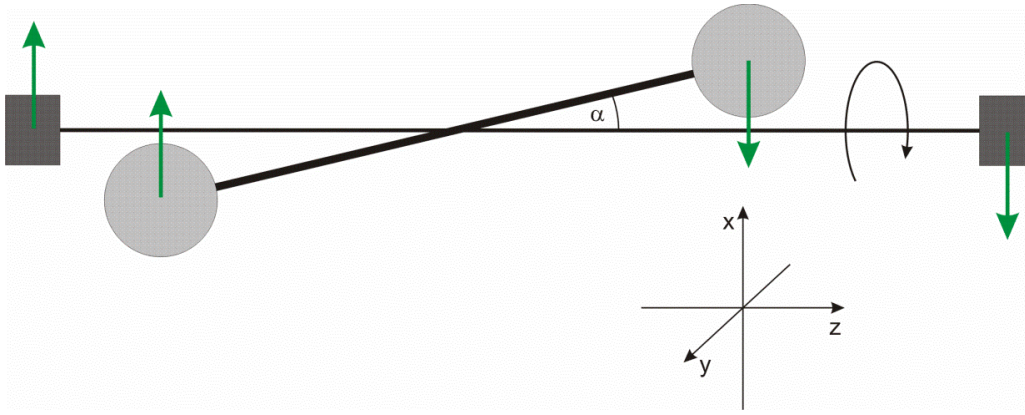
Wyrażenie (2.1.5) pozwala wyliczyć wartość momentu bezwładności stożka względem osi będącej jego tworzącą w układzie współrzędnych zgodnym z układem osi głównych.

Drugie zadanie pokaże co nowego wnosi tensorowa wersja wzoru na moment pędu (2.20). Przypominam, że w szczególnych przypadkach, gdy tensor momentu bezwładności można wyrazić przez pojedynczą liczbę, to moment pędu (kręt) równy jest iloczynowi momentu bezwładności i wektora prędkości kątowej. W innych przypadkach jest to iloczyn tensora bezwładności i wektora prędkości kątowej. Aby zobaczyć jakie ma to konsekwencje zrobimy następujące zadanie.

Zadanie 2.1.2: Hantle

Hantle to dwie takie same kuliste masy m , zawieszone symetrycznie po dwóch stronach pręta o długości L . Wyznaczyć tensor momentu bezwładności układu przedstawionego na rysunku (2.1.2), oraz wektor krętu. Zaniedbać moment bezwładności pręta.

W układzie pokazanym na rysunku (2.1.2) oś obrotu nie jest osią główną. Oś obrotu jest na sztywno zaczepiona, tak że nie może zmieniać swojego położenia. Ponieważ kule obiegają oś obrotu po okręgu na każdą z nich będzie działała siła dośrodkowa, tak jak jest to pokazane na rysunku. Siła ta wywoła niezerównoważony moment sił. Musimy zapytać o źródło tego momentu sił. Źródłem są tu siły reakcji osi, działające na hantle i na punkty zaczepienia osi. Jak wygląda tensor momentu bezwładności hantli względem tak wybranej osi? Ze względu na to, że oś obrotu nie jest osią główną spodziewamy się, że tensor momentu bezwładności hantli nie da się reprezentować w postaci liczby. Musimy policzyć poszczególne wartości poszczególnych współczynników tensora momentu bezwładności (2.9). Potraktujemy hantle jako układ dwóch mas punktowych oddległych od siebie o L .



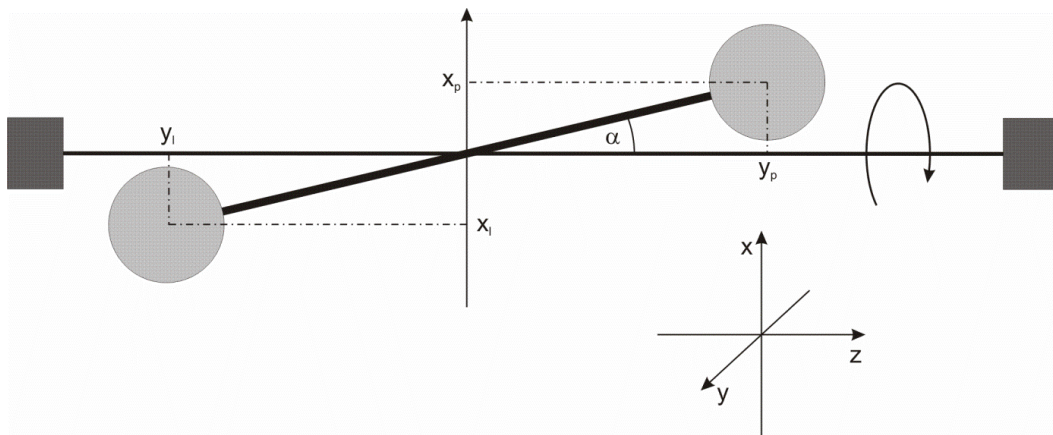
Rysunek 2.1.2. Hantle - układ dwóch kul, każda o masie m połączonych prętem o długości L , którego masę (a zatem moment bezwładności) zaniedbujemy. Układ obraca się wokół osi równoległej do osi z , która nie jest osią główną hantli (choć przechodzi przez środek masy hantli). Zielone strzałki zaczepione z obu stron hantli reprezentują siłę dośrodkową jaka musi się pojawić, gdy ciało porusza się po okręgu. Źródłem tej siły jest zawieszenie hantli, poprzez oś obrotu siła ta przenosi się na oś hantli a następnie na same hantle. Strzałki zielone narysowane przy zawieszeniu pokazują kierunek działania sił reakcji zawieszenia.

Zaczniemy od obliczenia składowej I_{xx} tensora momentu bezwładności (rys. 2.1.2). Korzystamy ze wzoru (2.12a). Odległość środka lewej kuli od osi x -ów r_{Lx} jest taka sama jak analogiczna odległość r_{Px} dla prawej kuli i wynosi

$$r_{Lx} = r_{Px} = r_x = \frac{L}{2} \cos(\alpha) \quad 2.1.1$$

Zgodnie z (2.12a) mamy

$$I_{xx} = mr_{Lx}^2 + mr_{Px}^2 = 2mr_x^2 = \frac{1}{2}mL^2 \cos^2(\alpha) \quad 2.1.2$$



Rysunek 2.1.2. Szkic do wyznaczenie współrzędnych tensora momentu bezwładności dla hantli

Korzystając ze wzoru (2.12b), w analogiczny sposób wyznaczmy współrzędną I_{yy} tensora momentu bezwładności. Z rysunku widać, że

$$r_{Ly} = r_{Py} = r_y = 0 \quad 2.1.3$$

Skąd

$$I_{yy} = 0 \quad 2.1.4$$

Korzystając ze wzoru (2.12c) wyznaczmy współrzędną I_{zz} tensora momentu bezwładności. Odległość środka lewej kuli od osi z-ów r_{Lz} jest taka sama jak analogiczna odległość r_{Pz} dla prawej kuli i wynosi

$$r_{Lz} = r_{Pz} = r_z = \frac{L}{2} \sin(\alpha) \quad 2.1.5$$

Zgodnie z (2.10c) mamy

$$I_{zz} = mr_{Lz}^2 + mr_{Pz}^2 = 2mr_z^2 = \frac{1}{2}mL^2 \sin^2(\alpha) \quad 2.1.6$$

Składowe $I_{xy} = I_{yx}$ i $I_{yz} = I_{zy}$ tensora momentu bezwładności są równa zero, gdyż współrzędne y-owe obu kul są równe zero. Obliczymy składowe $I_{xz} = I_{zx}$ tensora momentu bezwładności. Dla prawej kuli, zgodnie z rysunkiem (2.1.2) wkład do obliczanej składowej tensora momentu bezwładności jest taki sam jak wkład lewej kuli i wynosi

$$I_{xz} = I_{zx} = 2 \left(\underbrace{-m \frac{L}{2} \cos(\alpha)}_{r_x} \underbrace{\frac{L}{2} \sin(\alpha)}_{r_y} \right) = -m \frac{L^2}{4} \sin(2\alpha) \quad 2.1.7$$

Tensor momentu bezwładności dla hantli obracających się wokół osi pokazanej na rysunku (2.1.1) ma współrzędne

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mL^2 \cos^2(\alpha) & 0 & -m \frac{L^2}{4} \sin(2\alpha) \\ 0 & 0 & 0 \\ -m \frac{L^2}{4} \sin(2\alpha) & 0 & \frac{1}{2}mL^2 \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \quad 2.1.8$$

Mając dany tensor momentu bezwładności oraz wektor prędkości obrotowej ω , możemy obliczyć wartość wektora momentu pędu (2.20).

$$\mathbf{K} = \mathbf{I}\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mL^2 \cos^2(\alpha) & 0 & -m \frac{L^2}{4} \sin(2\alpha) \\ 0 & 0 & 0 \\ -m \frac{L^2}{4} \sin(2\alpha) & 0 & \frac{1}{2}mL^2 \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x = 0 \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = \omega \end{pmatrix} \quad 2.1.9$$

Mnożenie macierzy tensora momentu bezwładności przez macierz współrzędnych wektora prędkości kątowej daje

$$K_x = -m \frac{L^2}{4} \sin(2\alpha) \omega \quad 2.1.10a$$

$$K_y = 0 \quad 2.1.10b$$

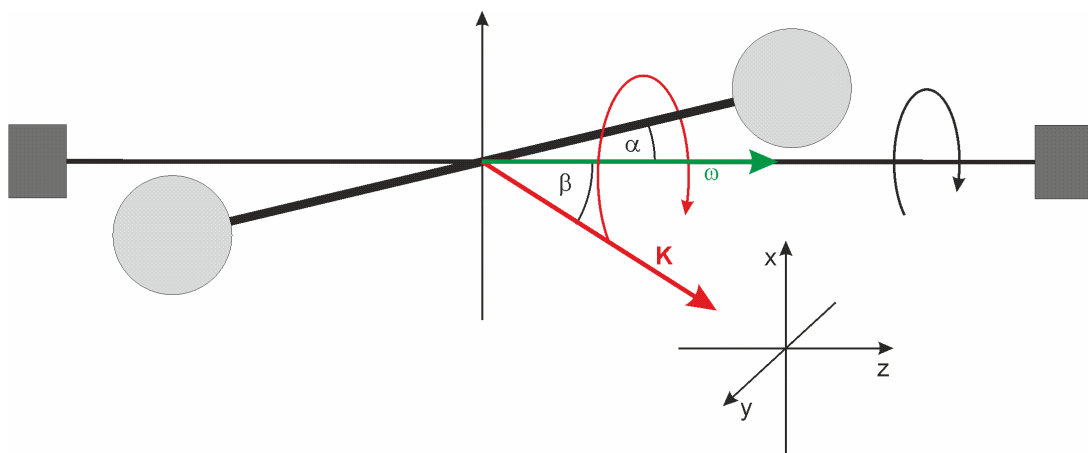
$$K_z = \frac{1}{2} m L^2 \sin^2(\alpha) \omega \quad 2.1.10c$$

Jeżeli podzieli się przez siebie współrzędne K_x i K_z , to określimy tangens kąta nachylenia β wektora momentu pędu względem osi z .

$$\tan(\beta) = \frac{K_x}{K_z} = -\frac{\cos(\alpha)}{2} \quad 2.1.11$$

Widać z tego, że wektor momentu pędu nie jest równoległy do wektora prędkości kątowej (rys. 2.1.3). Gdyby tensor momentu bezwładności był liczbą oba wektory musiałyby być równoległe (lub antyrównoległe) – wektor przemnożony przez liczbę daje wektor o tym samym kierunku.

Może Was niepokoić chwilowy charakter uzyskanych rozwiązań. Z rysunku (2.1.2) widać, że y -owe składowe położenia kul są równe zero tylko w tym momencie gdy hantle leżą w płaszczyźnie xz . Chwilę później na skutek obrotu pojawią się niezerowe składowe y -owe dla obu kul. Ale wnioski jakie wyciągam z tych chwilowych współrzędnych tensora momentu bezwładności hantli chwilowe nie są. Symetria obrotowa układu zapewnia, że wartość kąta nachylenia wektora momentu pędu do wektora prędkości kątowej jest przez cały czas taka sama. Owszem chwilę potem wszystko się obróci, ale kąt nachylenia obu wektorów się nie zmieni. Wniosek z tego jest taki, że wektor momentu pędu $\mathbf{K}$ obraca się wokół osi obrotu tak jak obracają się hantle (z tą samą częstością ω)



Rysunek 2.1.3. Wektor momentu pędu obraca się wokół osi obrotu hantli z częstością równą częstości obrotu hantli.

Obracający się wektor momentu pędu, jest zmieniającym się wektorem. Zgodnie z równaniem (1.23) w układzie musi działać niezerowy moment sił. Ale to, że taki moment działa, stwierdziliśmy już na podstawie rysunku (2.1.1).

Obliczmy wartości wyznaczonych tu wielkości dla przykładowych danych. Dla przykładu przyjmijmy, że $L=1\text{m}$, $\alpha=30^\circ$, $m=0,5\text{kg}$, $\omega_z=\omega=1\text{ rad/s}$, wtedy

$$K_x = -\frac{1}{2} \frac{1}{4} \sin(60^\circ) 1 \approx -0,108 \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad 2.1.12a$$

$$K_z = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sin^2(30^\circ) 1 \approx 0,062 \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad 2.1.12b$$

$$\tan(\beta) = \frac{K_x}{K_z} = \frac{-0,108}{0,062} \approx -1,74 \Rightarrow \beta \approx -60^\circ \quad 2.1.12c$$

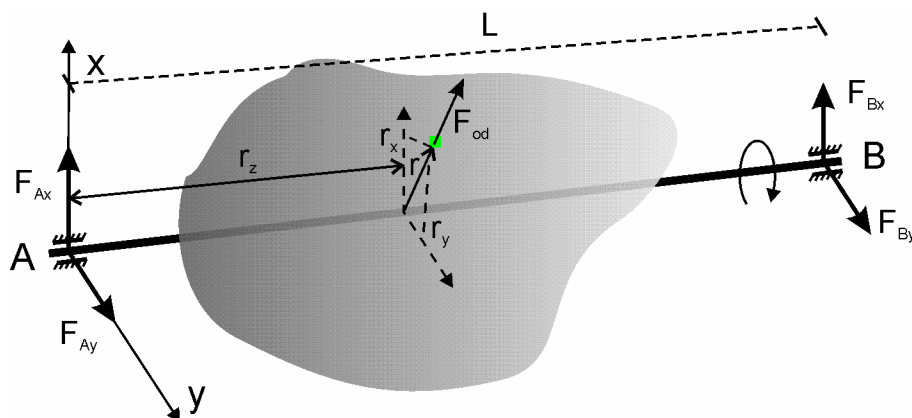
Znak minus oznacza, że kąt β zorientowany jest przeciwnie do kąta α . Omówiony tu przykład jest bardzo ważny z praktycznego punktu widzenia i z tego powodu warto do niego podejść w bardziej ogólny sposób.

Zadanie 2.1.3. Bryła sztywna na osi

Rozważmy ciało umocowane na osi obrotu, która jest na sztywno przymocowana tak, że nie może się poruszać. Wprawiamy ciało w ruch obrotowy i pytamy o siły działające na punkty, gdzie oś jest zamocowana (rys. 2.1.4)

Przy braku obrotu działa tylko siła ciężkości. Przykład hantli (2.1.2) pokazał, że obrót może być źródłem dodatkowych sił. Postaram się określić te siły w bardziej ogólny sposób. Rozważę element ciała o masie dm . W układzie związanym z ciałem (układ nieinercjalny – NUO (§TVII 1.1)), przy obrocie ciała z prędkością ω , wokół osi z , wprowadzamy siłę odśrodkową (siła pozorna (§TVII 3.2)).

$$\mathbf{F}_{od}(\omega^2 r_x dm, \omega^2 r_y dm, 0) \quad 2.1.13$$



Rysunek 2.1.4. Rysunek do zadania (2.1.3).

gdzie r jest odległością masy dm od osi obrotu. Działające siły muszą się równoważyć, inaczej cały układ, wraz z zawieszeniem musiałby się przesuwać z przyspieszeniem względem laboratoryjnego układu inercjalnego. Suma sił odśrodkowych, liczona w składowych ma postać

$$\omega^2 \int_V r_x dm \quad 2.1.14a$$

$$\omega^2 \int_V r_y dm \quad 2.1.14b$$

Całki we wzorach (2.1.14) pozwalają na przejście w prosty sposób do współrzędnych x_c i y_c środka masy ciała (TII 6.6), względem osi obrotu (początek układu współrzędnych leży na osi obrotu (rys. 2.1.4)). Przyjmując, że masa ciała wynosi M , współrzędne x_c i y_c środka masy tego ciała wynoszą

$$x_c = \frac{1}{M} \int_V r_x dm \quad 2.1.15a$$

$$y_c = \frac{1}{M} \int_V r_y dm \quad 2.1.15b$$

Wracając do (2.14) widać, że składowe wypadkowej siły odśrodkowej można wyrazić przez współrzędne środka masy bryły wzorem

$$\omega^2 x_c M \quad 2.1.16a$$

$$\omega^2 y_c M \quad 2.1.16b$$

W stanie równowagi siły reakcji ze strony zwieszenia muszą równoważyć siłę odśrodkową, stąd mamy

$$F_{Ax} + F_{Bx} + \omega^2 x_c M = 0 \quad 2.1.17a$$

$$F_{Ay} + F_{By} + \omega^2 y_c M = 0 \quad 2.1.17b$$

Podobnie zerować się muszą składowe momentów sił. Momenty sił odśrodkowych działających na element masy dm wynoszą

$$-r_z \omega^2 r_y dm = -\omega^2 r_y r_z dm \text{ dla osi } x \quad 2.1.17a$$

$$r_z \omega^2 r_x dm = \omega^2 r_x r_z dm \text{ dla osi } y \quad 2.1.17b$$

Stąd mamy dwa warunki na zerowanie się składowych momentu sił

$$-F_{By}L - \omega^2 \int_V r_y r_z dm = 0 \quad 2.1.18a$$

$$F_{Bx}L + \omega^2 \int_V r_x r_z dm = 0 \quad 2.1.18b$$

Wyrażenie podcałkowe są postaci takiej jak odpowiednie współczynniki tensora bezwładności

$$I_{xz} = \int_V r_x r_z dm \quad 2.1.19a$$

$$I_{yz} = \int_V r_y r_z dm \quad 2.1.19b$$

Wstawiając te wyrażenia do (2.1.18) mamy

$$-F_{By}L - \omega^2 I_{yz} = 0 \quad 2.1.18a$$

$$F_{Bx}L + \omega^2 I_{xz} = 0 \quad 2.1.18b$$

Z układu równań (2.1.16) i (2.1.18) otrzymujemy

$$F_{Bx} = -\omega^2 \frac{I_{xz}}{L} \quad 2.1.19a$$

$$F_{By} = -\omega^2 \frac{I_{yz}}{L} \quad 2.1.19b$$

$$F_{Ax} = \omega^2 \left(\frac{I_{xz}}{L} - Mx_c \right) \quad 2.1.19c$$

$$F_{Ay} = \omega^2 \left(\frac{I_{yz}}{L} - My_c \right) \quad 2.1.19d$$

Wartości reakcji wynoszą

$$F_A = \omega^2 \sqrt{\left(\frac{I_{xz}}{L} - mx_c \right)^2 + \left(\frac{I_{yz}}{L} - my_c \right)^2} \quad 2.1.20a$$

$$F_B = \frac{\omega^2}{L} \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2} \quad 2.1.20b$$

Siły działające na zawieszenie (na przykład na łożyska) są proporcjonalne do kwadratu prędkości kątowej. Widać z tego, że wraz ze wzrostem tej prędkości siły te mogą osiągnąć znaczne wartości. Gdy prędkość kątowa jest różna od zera siły działające na zawieszenie są równe zero gdy spełniony jest warunek

$$I_{xz} = I_{yz} = 0 \quad 2.1.21$$

Zerowanie się pozaprzekątniowych współrzędnych tensora bezwładności oznacza, że oś obrotu jest osią główną bryły, wynik który był do przewidzenia na podstawie analizy dynamiki hantli (zad. 2.1.2).

Z poruszonymi tu zagadnieniami spotykamy się podczas wymiany opon. Powinno temu towarzyszyć wyważenie kół samochodowych. Wyważenie kół oznacza, że koło spełnia warunki (2.1.21). W przeciwnym razie na zawieszenie działają siły opisane wzorami (2.1.20). Siły te obracają się wraz z kołem wprawiając cały układ w drgania. Gdy niewyważone są koła na przedzie pojazdu, kierowca odczuwa drgania kierownicy. Przy niewyważonych tylnych kołach mogą pojawić się wibracje karoserii i niestabilność samochodu na zakrętach. Wszystkie te efekty są tym silniejsze im większe jest odstępstwo od warunków (2.1.21) i im wyższa jest prędkość kątowa kół. Na skutek działania sił, spowodowanych niedostatecznym wyważeniem kół, szybciej zużywa się zawieszenie (np. łożyska), układ kierowniczy oraz opony. Duże niewyważenie kół jest zagrożeniem dla bezpieczeństwa ruchu. Podczas wyważania kół, wieszane jest ono na specjalnej maszynie (rys. 2.1.5). Po wprawieniu koła w ruch obrotowy czujniki rejestrują drgania osi, na której zawieszono jest koło (wyważone nie powoduje drgań). Następnie komputer oblicza masy i punkt przymocowania dodatkowych ciężarków na obręczy koła. Ciężarki te prowadzą do zmiany współczynników tensora momentu bezwładności i docelowo do redukcji pozaosiowych współczynników tegoż tensora do wartości bliskich zero.



Rysunek 2.1.5. Maszyna do wyważania kół (wyważarka), wraz z zamontowanym kołem

Warto jeszcze zatrzymać się nad wyrażeniami całkowitymi we wzorach (2.1.18). Z przebiegu zadania widać, że wyrażają one, po przemnożeniu przez kwadrat prędkości kątowej, składowe momentu siły odśrodkowej. Wyrażenia

$$I_{xy} = I_{yx} = \int r_x r_y dm; \quad I_{yz} = I_{zy} = \int r_y r_z dm; \quad I_{zx} = I_{xz} = \int r_z r_x dm; \quad 2.1.22$$

jak już wspominałem, nazywamy momentami odśrodkowymi lub momentami dewiacji (zboczenia).

Definicja 2.1.1: Momenty odśrodkowe (dewiacji, zboczenia)

Momentami odśrodkowe (dewiacji, zboczenia) nazywamy pozaprzekłtynowe współrzędne macierzy tensora momentu bezwładności (2.1.22)

Zatem momenty sił odśrodkowych, liczone względem środka masy układu dane są wzorami

$$F_{ox} = -\omega^2 I_{yz}; \quad F_{oy} = -\omega^2 I_{xz}; \quad F_{oz} = -\omega^2 I_{xy} \quad 2.1.23$$

2.2. Energia kinetyczna

Jak obliczyć energię kinetyczną ruchu obrotowego w ogólnym przypadku? Gdy mamy daną oś obrotu i wyznaczony względem niej moment bezwładności to dalej obowiązuje wzór (1.1.2)

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad 2.2.1$$

Korzystając z oznaczeń na rysunku (2.1) i wzoru (2.8) mamy

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\cos^2(\alpha_x) I_{xx} + \cos^2(\alpha_y) I_{yy} + \cos^2(\alpha_z) I_{zz} - 2 \cos(\alpha_x) \cos(\alpha_y) I_{xy} - 2 \cos(\alpha_y) \cos(\alpha_z) I_{yz} - 2 \cos(\alpha_z) \cos(\alpha_x) I_{xz} \right) \omega^2 \quad 2.2.2$$

Współrzędne wektora prędkości kątowej można wyrazić wzorami

$$\omega_x = \omega \cos(\alpha_x) \quad 2.2.3a$$

$$\omega_y = \omega \cos(\alpha_y) \quad 2.2.3b$$

$$\omega_z = \omega \cos(\alpha_z) \quad 2.2.3c$$

Współrzędne te pojawiają się we wzorze (2.2.2), na przykład

$$I_{xx} \omega^2 \cos^2(\alpha_x) = I_{xx} (\omega \cos(\alpha_x))^2 = I_{xx} \omega_x^2 \quad 2.2.4a$$

$$2 \cos(\alpha_x) \cos(\alpha_y) I_{xy} \omega^2 = 2 I_{xy} \omega_x \omega_y \quad 2.2.4b$$

Stąd mamy

$$E_k = \frac{1}{2} \left(I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 - 2 I_{xy} \omega_x \omega_y - 2 I_{xz} \omega_x \omega_z - 2 I_{yz} \omega_y \omega_z \right) \quad 2.2.5$$

W układzie osi głównych wzór (2.2.5) redukuje się do

$$E_k = \frac{1}{2} (I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2) \quad 2.2.6$$

Zatem, jeżeli chcemy w ogólnym przypadku obliczyć energię ruchu obrotowego, to niezbędny staje się tensor momentu bezwładności.

W zadaniu (2.1.2) pokazałem, że wektor momentu pędu obraca się wokół osi obrotu hantli. Jest to możliwe gdyż na wektor ten działa moment sił. Co się stanie, gdy uwolnimy hantle z uwięzi? Wtedy na układ nie będzie działał moment sił, co oznacza, że wektor momentu pędu nie będzie mógł się obracać. W zamian zacznie się obracać wektor prędkości kątowej, a co za tym idzie oś obrotu. W ogólnym wypadku wzory na energię kinetyczną są wyznaczone względem chwilowej osi obrotu. Jednak gdy układ jest izolowany, zasada zachowania energii gwarantuje, że zmiana osi obrotu nie zmienia energii kinetycznej układu. Przypadkiem, gdy oś obrotu nie jest nieruchoma zajmę się w temacie (TXVI)

2.3. Krótkie podsumowanie

Pierwsze spotkanie z tensorami mamy za sobą. Już teraz może zauważyć, że tensory uzupełniają niepokojącą lukę w naszej matematycznej narzędziowni. Bez nich prawa wiążące wielkości wektorowe mogliśmy zapisywać tylko w prosty sposób

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{v} \quad 2.3.1$$

Gdzie $\mathbf{w}$ to jedna wielkość wektorowa, $\mathbf{v}$ to druga wielkość wektorowa, a α to liczba. Tak zapisywaliśmy na przykład drugie prawo Newtona $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, lub związek między prędkością kątową a momentem pędu, gdy obrót ma miejsce wokół osi głównej lub równoległej do niej $\mathbf{K} = I\boldsymbol{\omega}$. Sam zapis (2.3.1) ogranicza nas do przypadków gdy oba wektory $\mathbf{w}$ i $\mathbf{v}$ są równoległe lub antyrównoległe (gdy $\alpha < 0$). Zależności, przy których oba wektory nie mają tego samego kierunku były poza naszym zasięgiem. Teraz to się zmieniło. Jeżeli $\mathbf{T}$ jest tensorem drugiego rzędu, to związek

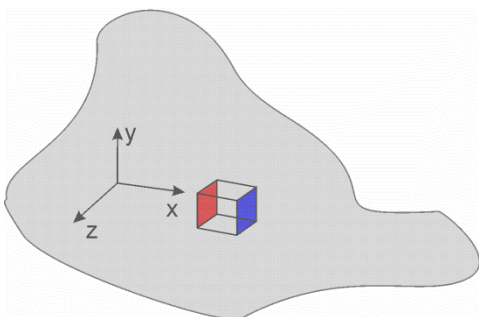
$$\mathbf{w} = \mathbf{T}\mathbf{v} \quad 2.3.2$$

Oznacza, że w typowym przypadku wektory $\mathbf{w}$ i $\mathbf{v}$ nie są równoległe. Teraz po prostu możemy więcej, więc z tej uciechy wprowadźmy sobie druga wielkość tensorową.

3. Tensor naprężeń ♣

Drugą ważną dla mechaniki wielkością tensorową jest naprężenie. Ciągłe wiemy mało o matematyce tensorów, ale na wykładzie z fizyki dobrze jest zacząć od podstawowych przykładów ich użycia, a dopiero potem przejść do matematycznych szczegółów.

Rozważmy kawałek ciała stałego. Choć wiemy, że ciała stałe składają się z atomów, to atomy są tak drobne, że z makroskopowego punktu widzenia możemy posłużyć się przybliżeniem ciągłego rozkładu materii zatem - przyjmujemy model ciała o ciągłym rozkładzie materii. Zanurkujemy do wnętrza ciała, wytniemy tam, ale tylko myślowo, mały sześcianik. Jakie siły działają na ten sześcianik (rys. 3.1)?

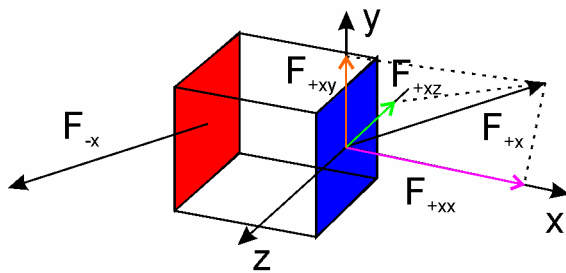


Rysunek 3.1. Mały sześcianik wewnątrz większego ciała. Ścianki niebieska i czerwona są prostopadłe do osi x -ów. Ściankę niebieską traktujemy jako leżącą po dodatniej stronie osi x -ów a czerwoną jako leżącą po ujemnej stronie osi x -ów.

Czy w ogóle jakieś działają? Wyobraź sobie płaszczyznę przechodzącą przez jakieś ciało. Gdyby wzdłuż tej płaszczyzny nie działały żadne siły, to można byłoby pociągnąć za obie części ciała w przeciwne strony i bez wysiłku rozdzielić je na dwie połowy. Jednak materia po obu stronach płaszczyzny jest ze sobą powiązana siłami, które spajają ją w całość. Działają one na poziomie atomowym, ale my nie chcemy schodzić do tak drobnych struktur jak atomy i opisujemy ciało jako strukturę ciągłą. Oznacza to, że nie będę wchodził w naturę sił wiążących cząsteczki ciała, tylko skoro już są, postaram się opisać skutki ich działania. Przypominam, że opierając się na takich założeniach wyznaczyłem ciśnienie wewnątrz bańki mydlanej, wywołane przez napięcie powierzchniowe (rys. TIII 2.3.5).

Zorientuję układ współrzędnych tak, aby jego osie były prostopadłe do poszczególnych ścian sześcianiku. Powiedzmy, że na niebieską ścianę naszego małego sześcianu, działa siła $\mathbf{F}_{+x}$, tak jak jest to pokazane na rysunku (3.2). Znak plus oznacza, że siła działa na ściankę znajdującą się po dodatniej stronie osi x . Siła $\mathbf{F}_{+x}$ towarzyszy równa jej co do wartości siła $\mathbf{F}_{-x}$. Siła $\mathbf{F}_{-x}$ przyłożona jest do czerwonej ścianki (tej po ujemnej stronie osi x) i pokazuje na zewnątrz sześcianu. Gdyby jej nie było to niebieska ścianka przesuwałaby się. Mamy zatem

$$\mathbf{F}_{-x} = -\mathbf{F}_{+x} \quad 3.1$$



Rysunek 3.2. Siły działające na jedną ze ścian małego sześcianu.

Możecie zapytać co to za siły działają na ścianki sześcianu? Myślowe moi drodzy. Odciągamy myślowo ściankę niebieską, a ta nie porusza się. Wnioskuje, że działające siły spójności powodują pojawienie się na ścianie czerwonej odpowiedniej siły reakcji.

W przyjętym modelu posługujemy się siłą średnią. W każdym małym obszarze niebieskiej czy czerwonej ścianki działa jakaś mała siła. Zamiast tej małej siły przykładamy do każdej ścianki siłę średnią (wypadkową). Aby to miało sens sześcianik musi być dostatecznie mały, tak aby siła wypadkowa działająca na daną ściankę była proporcjonalna do wartości pola powierzchni tej ścianki. Przykładowo, gdybyśmy z naszej ścianki wycięli płat o dwa razy mniejszej powierzchni, to wypadkowa siła działająca na ten płat musi mieć ten sam kierunek i zwrot co siła działająca na całą ściankę, ale przy tym jej wartość musi być dwa razy mniejsza. Przy bardzo małym sześcianiku pomijamy również fakt, że materia wewnątrz sześcianiku ma pewną masę i przez to, na skutek grawitacji, wywiera dodatkowy nacisk na jego dolną ściankę. Siły grawitacyjne są dla tak małej masy dużo, dużo, dużo mniejsze od sił spajających sześcianiki. Nadto możemy przyjąć, że sześcianik jest całkowicie jednorodny, to znaczy że jest tak mały, że można uznać go za wewnątrz całkowicie jednorodnym.

Dla trzech par ścian w ramach przyjętego modelu mamy

$$\mathbf{F}_{+x} = -\mathbf{F}_{-x}; \quad \mathbf{F}_{+y} = -\mathbf{F}_{-y}; \quad \mathbf{F}_{+z} = -\mathbf{F}_{-z} \quad 3.2a$$

Siłę działającą na każdą ze ścianek rozkładamy na składowe: normalną i dwie styczne do powierzchni ścianek. Przedstawia to rysunek (3.2). Przyjmę następującą konwencję indeksowania wektorów składowych. Pierwszy indeks będzie wskazywał oś, do której jest prostopadła dana ścianka, a drugi indeks będzie oznaczał składową wektora dla tej ścianki. Na przykład składowa z-owa wektora siły dla ścianki leżącej po ujemnej stronie osi z ma zapis $\mathbf{F}_{-zz}$. Oczywiście wszystkie składowe muszą się też równoważyć, to jest musi na przykład być

$$\mathbf{F}_{+xx} = -\mathbf{F}_{-xx}; \quad \mathbf{F}_{+yy} = -\mathbf{F}_{-yy}; \quad \mathbf{F}_{+zz} = -\mathbf{F}_{-zz} \quad 3.2b$$

Wzór (3.2b) oznacza równość odpowiednich składowych normalnych do powierzchni.

$$\mathbf{F}_{+xz} = -\mathbf{F}_{-xz}; \quad \mathbf{F}_{+xy} = -\mathbf{F}_{-xy} \quad 3.2c$$

Wzór (3.2c) oznacza równość składowych równoległych dla ścianek prostopadłych do osi x . Wynika on z faktu, że dla ciała w równowadze suma momentów sił musi się zerować. Podobnie jest dla pozostałych ścianek.

Założyliśmy, że sześcián jest tak mały, że siła jest proporcjonalna do jego powierzchni. Korzystając z tego warto uniezależnić się od wartości powierzchni ścianek sześciánu; będziemy posługiwali się wielkością siły dzielonej przez wartość małej powierzchni S , a w granicy $S \rightarrow dS$. Wygląda na to, że odwołaliśmy się do ciśnienia (siła na powierzchnię), ale nie jest to prawda. Zgodnie z definicją (TIII 2.1) ciśnienie jest wielkością skalarną. Teraz czas na mocniejszą wielkość – naprężenie. Naprężenie jest wielkością wektorową zdefiniowaną w następujący sposób

Definicja 3.1: naprężenie

Naprężenie s w dowolnym elemencie dS przekroju danego ciała jest proporcjonalne do siły dF jaką na ten element działa i odwrotnie proporcjonalne do pola elementu dS .

$$s = \frac{dF}{dS} \quad 3.3$$

W przeciwieństwie do ciśnienia naprężenie jest wielkością wektorową, jednak podobnie jak w przypadku ciśnienia jednostka ta ma wymiar siły przez powierzchnię. W układzie SI jednostką naprężenia jest paskal.

Fakt 3.1:

W układzie SI jednostką naprężenia jest paskal

Wektor naprężenia możemy rozłożyć, dla każdej ścianki na składowe, podobnie jak to uczyniliśmy dla wektora siły (rys. 3.2). Jest oczywiste, że dla ścianek z dodatnimi (można też wybrać ujemne) indeksami, naprężenie będzie miało dziewięć składowych, a to już zaczyna pachnieć tensorem

$$\sigma_{xx} = \frac{dF_{xx}}{dS_x}; \quad \sigma_{xy} = \frac{dF_{xy}}{dS_x}; \quad \sigma_{xz} = \frac{dF_{xz}}{dS_x} \quad 3.4a$$

$$\sigma_{yx} = \frac{dF_{yx}}{dS_y}; \quad \sigma_{yy} = \frac{dF_{yy}}{dS_y}; \quad \sigma_{yz} = \frac{dF_{yz}}{dS_y} \quad 3.4b$$

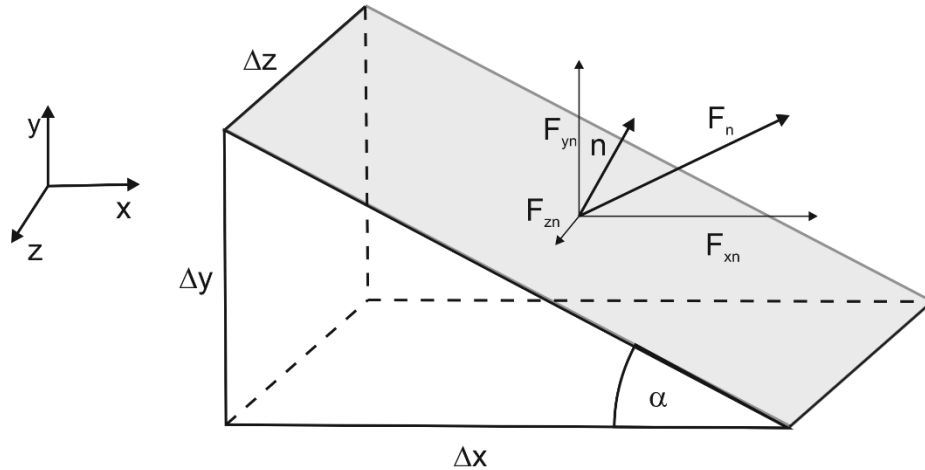
$$\sigma_{zx} = \frac{dF_{zx}}{dS_z}; \quad \sigma_{zy} = \frac{dF_{zy}}{dS_z}; \quad \sigma_{zz} = \frac{dF_{zz}}{dS_z} \quad 3.4c$$

Gdzie S_x, S_y, S_z oznacza pole powierzchni na którą działa siła odpowiednio F_x, F_y, F_z .

Zdeformuję sześciánik do postaci klina, tak jak to pokazuje rysunek (3.3). Pytanie brzmi: ile wynosi wektor naprężenia wyznaczony dla pochyłej ścianki

klina? Dla ścianek $+z$ i $-z$ mamy zachowaną symetrię, stąd (ciągle zakładamy, że klin jest tak mały, że sześcian jest jednorodny i ewentualne wewnętrzne efekty możemy pominąć)

$$\mathbf{F}_{+z} = -\mathbf{F}_{-z} \quad 3.5$$



Rysunek 3.3. Ilustracja do wyznaczenia składowych tensora naprężenia.

Co oznacza, że

$$F_{zx} = -F_{-zx}; F_{zy} = -F_{-zy}; F_{zz} = -F_{-zz} \quad 3.5a$$

Niestety ani ścianka $-x$ ani ścianka $-y$ nie mają swojego „plusowego” odpowiednika. Został on zastąpiony jedną pochyłą powierzchnią klina. Jeżeli ciało jest stabilne, to niezależnie od tego czy, myślowo, wytniemy z niego mały sześcian czy mały klin ów kawałek nie powinien się przesuwać. Oznacza to, że siły działające wzdłuż każdej osi x, y, z , muszą się znosić. Dla osi x -ów mamy

$$F_{-xx} + F_{-yx} + F_{xn} = 0 \Rightarrow F_{xn} = -F_{-xx} - F_{-yx} \quad 3.6$$

Przez $\mathbf{F}_n(F_{xn}, F_{yn}, F_{zn})$ oznaczyłem siłę działającą na pochyłą ściankę klina. Pozostałe siły to składowe x -owe dla ścianki prostopadłej do osi x -ów i y -ów, po ujemnej stronie. Korzystając z (3.2) mogę zapisać

$$F_{xn} = -F_{-xx} - F_{-yx} = F_{xx} + F_{yx} \quad 3.7$$

W ten sposób wyraziłem siłę działającą na powierzchnię klina przez składowe siły jakie działałyby na brakujące ścianki sześcianika. Korzystając z definicji (3.1) i wzorów (3.4) mamy

$$F_{xn} = \sigma_{xx}\Delta y\Delta z + \sigma_{xy}\Delta x\Delta z \quad 3.8$$

Jednocześnie, zgodnie z definicją naprężenia (3.1), wektor naprężenia $\mathbf{s}$ działający normalnie do skośnej powierzchni klina musi wiązać się z siłą $\mathbf{F}_n$.

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{s}S_k \quad 3.9$$

Gdzie S_k jest powierzchnią pochyłej powierzchni klina. W składowych mogą zapisać

$$F_{xn} = s_x S_k; F_{yn} = s_y S_k; F_{zn} = s_z S_k \quad 3.10$$

Porównując (3.8) z pierwszym wyrażeniem (3.10) mam

$$s_x S_k = \sigma_{xx} \Delta y \Delta z + \sigma_{xy} \Delta x \Delta z \Rightarrow s_x = \frac{\sigma_{xx} \Delta y \Delta z + \sigma_{xy} \Delta x \Delta z}{S_k} \quad 3.11$$

Z rysunku (3.3) widać, że powierzchnia klina jest równa

$$S_k = \Delta z \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad 3.12$$

Wstawiając to wyrażenie do (3.11) mam

$$s_x = \frac{\sigma_{xy} \Delta x + \sigma_{xx} \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \sigma_{xx} \cos(\alpha) + \sigma_{xy} \sin(\alpha) \quad 3.13$$

Korzystając z faktu, że $\cos(\alpha)$ i $\sin(\alpha)$ to współrzędne jednostkowego wektora normalnego do powierzchni klina wzór (3.13) przyjmie postać

$$s_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \quad 3.14$$

Składowa s_{xz} jest w rozważanym przypadku równa zeru. Nie mniej łatwo się domyślać że w ogólnym przypadku wyrażenie (3.13) przyjmie w postać

$$s_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z \quad 3.15a$$

Co więcej przez analogię możemy, dla pozostałych dwóch współrzędnych wektora naprężenia $\mathbf{s}$, zapisać

$$s_y = \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z \quad 3.15b$$

$$s_z = \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z \quad 3.15c$$

Ogólnie naprężenie $\mathbf{s}$ reprezentowane jest przez dziewięć wielkości wypisanych w trzech równaniach (3.15). Te dziewięć wielkości można zapisać w postaci tablicy (macierzy)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad 3.16$$

Wielkość (3.16) nazywana jest tensorem naprężeń. To drugi tensor, który spotykamy na naszej drodze.

Definicja 3.2: Tensor naprężeń

Tensor, którego współrzędne, w zadanym układzie współrzędnych, wyrażają się wzorami (3.4) nazywamy Tensorem naprężeń

Korzystając z notacji macierzowej równanie (3.15) na naprężenie $\mathbf{s}$ działające na daną powierzchnię można zapisać tak

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \quad 3.17$$

Zatem tensor naprężeń reprezentuje przekształcenie wektora normalnego do danej powierzchni w wektor naprężeń, który na tą powierzchnię działa. Do napisania związku między wektorem normalnym do powierzchni a wektorem naprężenia potrzebujemy tensora, gdyż oba wektory zwykle nie są do siebie równoległe. Z tego samego powodu, to jest braku równoległości dwóch wektorów moment bezwładności reprezentowany jest przez tensor momentu bezwładności (2.20).

Łatwo jest pokazać, że tensor naprężeń jest symetryczny, tak jak tensor momentu bezwładności. Korzystając z tego faktu, wprowadzę często stosowane oznaczenia dla składowych tensora naprężeń

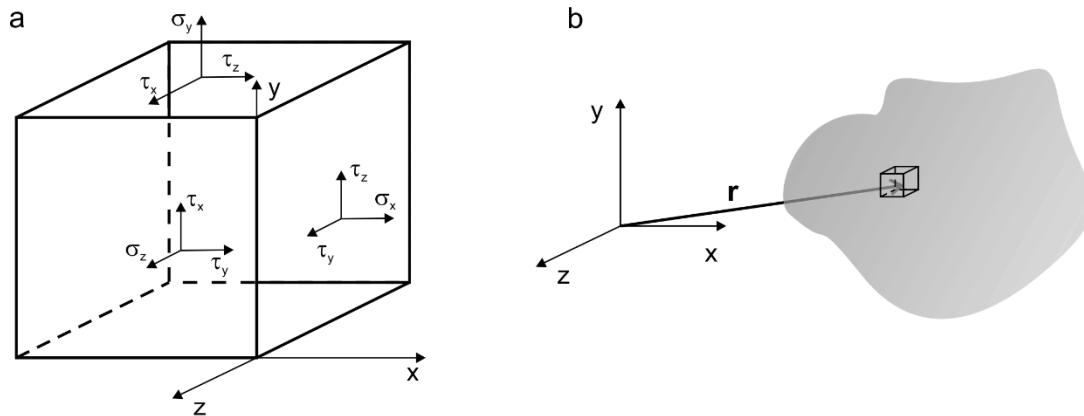
$$\sigma_{xx} = \sigma_x; \quad \sigma_{yy} = \sigma_y; \quad \sigma_{zz} = \sigma_z \quad 3.18a$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \tau_z; \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \tau_x; \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz} = \tau_y \quad 3.18b$$

Korzystając z tych oznaczeń tensor napięć przyjmie formę

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{bmatrix} \quad 3.19$$

Na przekątnej macierzy tego tensora znajdują się napięcia normalne, a poza przekątną napięcia styczne, które powodują, że wektor naprężenia nie jest prostopadły do powierzchni (rys. 3.4a). Na podstawie rysunku (3.4a) możemy lepiej zrozumieć indeksowanie współrzędnych tensora napięć. Weźmy współrzędną τ_z . Wstępuje ona na dwóch ściankach, gdyż zgodnie z (3.18b) odpowiada dwóm składowym σ_{yx} i σ_{xy} . Zatem wskazuje ona ściankę prostopadłą do osi x , na której leży wektor wzdłuż kierunku y albo ściankę prostopadłą do osi y , na której leży wektor wzdłuż kierunku osi x .



Rysunek 3.4. a) Składowe tensora naprężeń na elementarnym sześciacie; b) ciało rozciągle dzielimy na elementarne sześciany (najlepiej nieskończenie małe). Rozkład sił na każdym elementarnym sześciacie opisany jest przez przypisany mu tensor naprężeń, tak jak na rysunku (a).

Weźmy pod uwagę nieskończenie mały (infinitesimalny) sześcian wewnątrz jakiegoś ciała (rys. 3.4b). Składowe tensora opisują rozkład napięć dla tego sześcianu. Jeżeli podzielimy ciało na takie sześciany, a każdemu z nich przypiszemy odpowiedni tensor napięć to otrzymamy pole tensorowe. Uogólniając ten wniosek; pole tensorowe definiujemy jako odwzorowanie, które każdemu punktowi przestrzeni przyporządkowuje tensor, co jest definicją analogiczną do definicji pola wektorowego (def. TII 7.1) i skalarnego (def. TII 7.1).

Definicja 3.3: Pole tensorowe

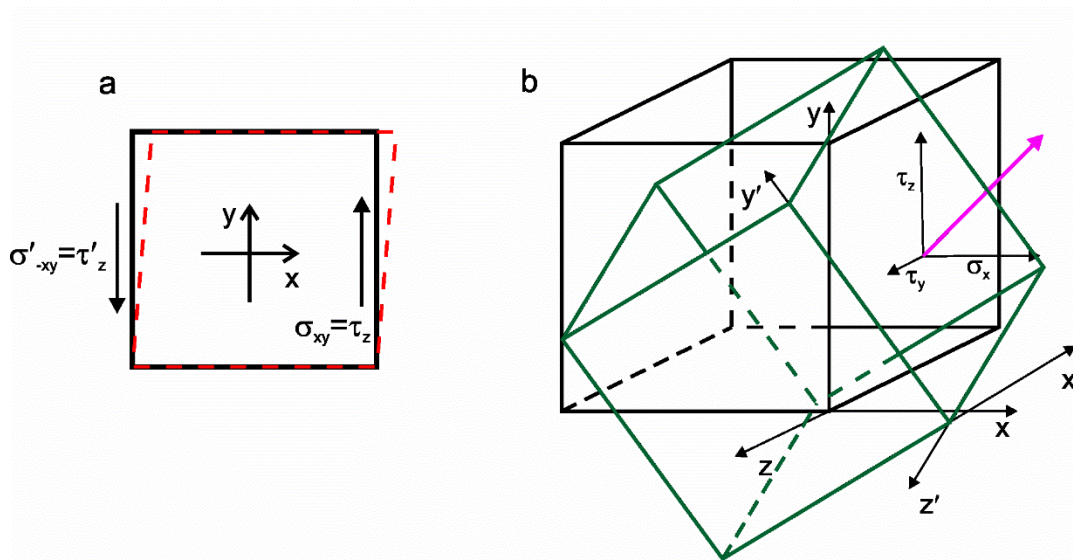
Pole tensorowe jest przyporządkowaniem, które każdemu punktowi przestrzeni przypisuje jeden i tylko jeden tensor

Ponieważ od strony matematycznej tensor naprężeń ma taką samą naturę co tensor momentu bezwładności musi mieć takie same właściwości matematyczne. W szczególności istnieje taki układ współrzędnych, w którym macierz tensora naprężeń ma postać diagonalną. Osie takiego układu nazywamy osiami głównymi, a płaszczyzny prostopadłe do tych osi płaszczyznami głównymi.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad 3.20$$

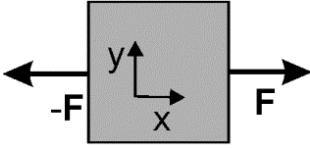
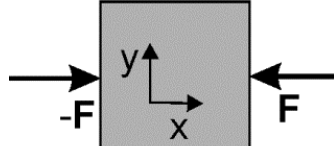
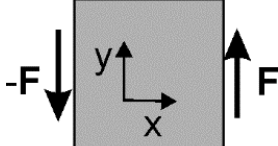
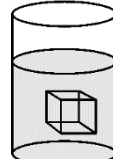
Trzeba pamiętać, że zmiana układu współrzędnych nie zmienia fizyki badanego układu, a jedynie może uprościć postać stosowanych wyrażeń matematycznych. Składowe oznaczane literami τ , na rysunku (3.4) są dla narysowanego tam sześcianu składowymi siły ścinającej (rys. 3.5a), to jest takimi, które z obu stron

sześcianu działają w przeciwne strony ale wzdłuż stycznej do jej powierzchni. Siła opisana składowymi σ ściska lub rozpręża sześcian. Kiedy zmienimy układ współrzędnych na pokrywający się z osiami głównymi, to składowe τ znikają. Nie oznacza to jednak, że na sześcian przestały działać siły ścinające. Składowe τ znikają dla innego myślowego sześcianu, którego ścianki są prostopadłe do osi głównych. Często korzystnie, jest z punktu widzenia obliczeń, przejść do układu osi głównych (jest to zawsze transformacja obrotu układu współrzędnych (§TV 3.2)), i obliczać problem przy zdiagonalizowanym tensorze, a po zakończeniu obliczeń, gdy jest taka potrzeba, przez obrót odwrotny powrócić do wyjściowego układu współrzędnych.



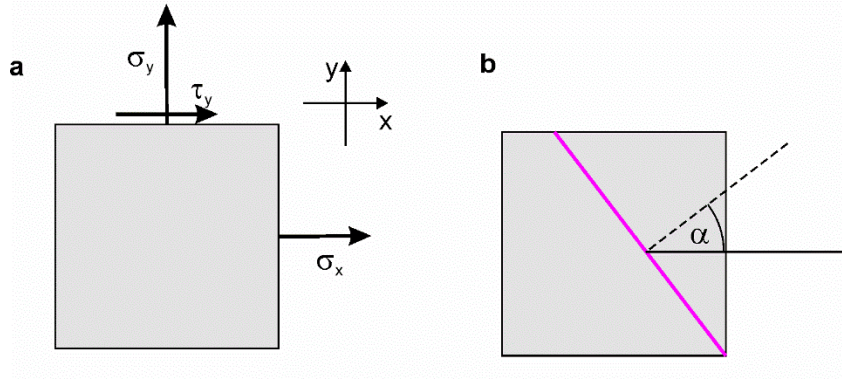
Rysunek 3.5. a) Składowe siły ścinających działających na ściankę sześcianu powodują jego zdeformowanie. Dla sześcianu tak małego, że można go uznać za jednorodny mamy $\tau_z = -\tau'_z$; b) Na ściankę $+x$ sześcianu działa siła naprężenia (różowa strzałka) którą możemy rozłożyć na składową normalną σ_x oraz składowe ścinające τ_y i τ_z . Istnieje taki układ współrzędnych, w którym ścianka $+x$ będzie normalna do wektora naprężeń (zielony sześcian). Jednak należy pamiętać, że zmiana układu współrzędnych nie zmienia położenia oryginalnego sześcianu. Zielony sześcian został wyrysowany tak by jego ścianki były prostopadłe do nowych osi x' , y' i z' , ale nie jest on tym samym co wyjściowy czarny sześcian.

Czas na kilka przykładów. Tabela (3.1) zawiera postać tensora naprężeń dla kilku prostych przypadków

Ilustracja przykładu	σ
	$\begin{bmatrix} \sigma_x > 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Tensor naprężeń dla rozciągania wzdłuż osi x	
	$\begin{bmatrix} \sigma_x < 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Tensor naprężeń dla ściskania wzdłuż osi x	
	$\begin{bmatrix} 0 & \tau_z & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Tensor dla ścinania ścianek prostopadłych do osi x wzdłuż osi y	
	$p \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
Sześcian jest zanurzony w wodzie, gdzie działa na niego ciśnienie p . Ciśnienie to ściska sześcian we wszystkich trzech osiach.	
Tabela 3.1. Tensory naprężeń dla trzech przykładów działania na elementarną kostkę.	

Sześciany pokazane w tabeli (3.1) muszą być tak małe, aby zawarty w nich materiał był jednorodny i można było napisać zależności (3.5a). Pod tymi warunkami stworzony zostały nasz tensorowy model opisu naprężeń. Używając tego modelu nie można o tych warunkach zapominać.

Zrobię prosty użytek z tensora naprężenia. Rysunek (3.6) przedstawia sześcian z zaznaczonymi naprężeniami. Sześcian jest jednorodny i możemy skorzystać z warunków (3.5a). Jakie naprężenie działa na myślowo wyciętą skośną ściankę sześcianu?



Rysunek 3.6. a) Na jednorodny sześcian (narysowana jest jego ściana +z) działają naprężenia określone pokazanymi niezerowymi współczynnikami tensora naprężeń. Jakie naprężenie działają na skośną ściankę (b) wewnątrz sześcianu?

Zgodnie z rysunkiem (3.6) tensor naprężeń będzie miał postać:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_y \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3.21$$

Jednostkowy wektor normalny do skośnej powierzchni ma współrzędne
 $\mathbf{n}(\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0)$ 3.22

Zgodnie ze wzorem (3.7) wektor naprężenia wyraża się wzorem

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_y \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \sin(\alpha) \\ \sigma_y \cos(\alpha) \\ \tau_y \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad 3.23$$

Wartość tego wektora wynosi

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{(\sigma_x^2 + \tau_y^2) \sin^2(\alpha) + \sigma_y^2 \cos^2(\alpha)} \quad 3.24$$

Siła jest równa iloczynowi wektora naprężenia i pola powierzchni skośnej ścianki. Obliczyliśmy w ten sposób siły spójności wewnątrz kostki wzdłuż wybranej płaszczyzny cięcia. Jest to sytuacja analogiczna do obliczania sił działających na klin z rysunku (3.3), tyle że teraz skorzystałem z narzędzi, które pod rysunkiem (3.3) dopiero definiowałem.

Warto jeszcze wskazać na prosty fakt. Każdy tensor naprężeń możemy rozłożyć na sumę dwóch czynników

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_0 \end{bmatrix} \quad 3.25$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad 3.25a$$

Pierwszy składnik sumy odpowiada ciśnieniu hydrostatycznemu (tabela (3.1)). W efekcie ciało zmienia objętość. Drugi składnik odpowiada za siły ścinające, co oznacza, zmianę kształtu, bez zmiany kształtu elementarnego sześcianu.

Fakt 3.1:

Każdy tensor naprężeń można rozłożyć na sumę składającą się z tensora naprężeń o postaci diagonalnej (odpowiadająca za ciśnienie wywierane na ścianki próbnego sześcianu) oraz dopełniającego tensora odpowiadającego za siły ścinające.

Poznaliśmy kolejny tensor, bynajmniej nie ostatni. Jeszcze w tym temacie spotkamy się z tensorem odkształceń. Tam gdzie mamy naprężenia pojawiają się również odkształcenia, które jak się okaże nie chcą być gorsze i też domagają się do opisu tensorów. Zanim to jednak nastąpi warto podsumować nasze dotychczasowe tensorowe doświadczenia w bardziej ogólny sposób.

3.1. Tensory pierwsza odsłona

Spotkaliśmy się już z tensorem bezwładności i z tensorem naprężeń. Czas na pierwsze podsumowanie matematyczne. Ze wzoru (2.20) widać, że tensor momentu bezwładności transformuje wektor prędkości kątowej w wektor momentu pędu. Zapomnijmy przez chwilę o interpretacji fizycznej występujących we wzorze (2.20) wektorów. Wtedy wzór ten reprezentuje transformację między dwoma wektorami. Przejdę do uogólnienia. Szukamy odwzorowania T między dwoma dowolnymi wektorami $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ należącymi do tej samej przestrzeni wektorowej V .

$$\mathbf{u} = T(\mathbf{v}) \quad 3.1.1$$

Żądamy przy tym by odwzorowanie to było liniowe, to znaczny

$$T(\alpha \mathbf{w} + \beta \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{w}) + \beta T(\mathbf{v}) \quad 3.1.2$$

gdzie α i β to liczby, a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ to wektory. Wektor $\mathbf{v}$ możemy przedstawić w zadanej bazie przez jego współrzędne (§TIV 3.1)

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \quad 3.1.3a$$

Wstawiając (3.1.3a) do (3.1.1) i korzystając z liniowości (3.1.2) mamy

$$\mathbf{u} = T(\mathbf{v}) = v_x T(\mathbf{e}_x) + v_y T(\mathbf{e}_y) + v_z T(\mathbf{e}_z) \quad 3.1.3$$

Wynika z tego, że wystarczy jak znamy wartości przekształcenia T na trzech wektorach bazowych. Odwzorowanie T przekształca każdy wektor bazowy w inny wektor, który zawsze możemy wyrazić we współrzędnych

$$T(\mathbf{e}_x) = T_{xx} \mathbf{e}_x + T_{yx} \mathbf{e}_y + T_{zx} \mathbf{e}_z \quad 3.1.4a$$

$$T(\mathbf{e}_y) = T_{xy}\mathbf{e}_x + T_{yy}\mathbf{e}_y + T_{zy}\mathbf{e}_z \quad 3.1.4b$$

$$T(\mathbf{e}_z) = T_{xz}\mathbf{e}_x + T_{zy}\mathbf{e}_y + T_{zz}\mathbf{e}_z \quad 3.1.4c$$

Podstawiając te wyrażenia do (3.1.3a) i je porządkując ze względu na wektory bazowe mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = T(\mathbf{v}) = & (T_{xx}v_x + T_{xy}v_y + T_{xz}v_z)\mathbf{e}_x \\ & + (T_{yx}v_x + T_{yy}v_y + T_{yz}v_z)\mathbf{e}_y \\ & + (T_{zx}v_x + T_{zy}v_y + T_{zz}v_z)\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad 3.1.4$$

Wyrażenie (3.1.4) możemy przedstawić w postaci macierzowej

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \mathbf{v} \quad 3.1.5$$

Wygląda na to, że liniowe odwzorowanie T przestrzeni V w przestrzeń V jest tensorem. Do tej pory takie liniowe odwzorowania wektora w wektor realizowaliśmy za pomocą liczby. Mnożenie wektora przez liczbę dawało wektor o tym samym kierunku. Aby poprzez liniowe odwzorowanie przejść od jednego wektora do innego nierównoległego wektora mnożenie przez liczbę nie wystarczy - potrzebujemy tensora.

3.1.1. Brakety i tensory

W tym miejscu dobrze jest zapisać działania na tensorach z użyciem braketu $\langle \quad | \quad \rangle$ (§TV 3.4.1). Działanie tensora T na wektor $\mathbf{v}$ zapisujemy tak

$$\mathbf{u} = T|\mathbf{v}\rangle \quad 3.1.6$$

A iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{w}$ i $\mathbf{u}$ możemy przedstawić tak

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \langle \mathbf{w} | T | \mathbf{v} \rangle \quad 3.1.7$$

Zapis z prawej strony należy czytać od strony prawej do lewej. Mamy więc: wektor $\mathbf{v}$ trafia na tensor T , który przekształca go w wektor $\mathbf{u}$ – ket $\mathbf{u}$, następnie obliczamy iloczyn skalarny wektora $\mathbf{w}$ i $\mathbf{u}$.

$$\langle \mathbf{w} | T | \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle \quad 3.1.8$$

Iloczyn skalarny jest operacją liniową co w notacji braketów oznacza, że

$$\langle \alpha \mathbf{w} + \beta \mathbf{z} | \mathbf{u} \rangle = \alpha \langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle + \beta \langle \mathbf{z} | \mathbf{u} \rangle \quad 3.1.9a$$

$$\langle \mathbf{w} | \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{w} | \mathbf{u} \rangle + \beta \langle \mathbf{w} | \mathbf{z} \rangle \quad 3.1.9b$$

Gdzie α i β są liczbami rzeczywistymi.

Obliczmy wyrażenie postaci

$$\langle \mathbf{e}_x | T | \mathbf{e}_x \rangle \quad 3.1.10$$

Zakładamy przy tym, że wektory bazy $\{\mathbf{e}_q\}$ są wzajemnie ortogonalne i jednostkowe (baza ortonormalna). Korzystając z (3.1.4) i z (3.1.9b) mamy

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{e}_x | T | \mathbf{e}_x \rangle &= \langle \mathbf{e}_x | T_{xx} \mathbf{e}_x + T_{yx} \mathbf{e}_y + T_{zx} \mathbf{e}_z \rangle \\ &= T_{xx} \underbrace{\langle \mathbf{e}_x | \mathbf{e}_x \rangle}_{=1} + T_{yx} \underbrace{\langle \mathbf{e}_x | \mathbf{e}_y \rangle}_{=0} + T_{zx} \underbrace{\langle \mathbf{e}_x | \mathbf{e}_z \rangle}_{=0} = T_{xx}\end{aligned}\quad 3.1.11a$$

Analogicznie obliczamy

$$\langle \mathbf{e}_y | T | \mathbf{e}_y \rangle = T_{yy} \quad 3.1.11b$$

$$\langle \mathbf{e}_z | T | \mathbf{e}_z \rangle = T_{zz} \quad 3.1.11c$$

Mamy przy tym

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{e}_x | T | \mathbf{e}_y \rangle &= \langle \mathbf{e}_x | T_{xy} \mathbf{e}_x + T_{yy} \mathbf{e}_y + T_{zy} \mathbf{e}_z \rangle \\ &= T_{xy} \underbrace{\langle \mathbf{e}_x | \mathbf{e}_x \rangle}_{=1} + T_{yy} \underbrace{\langle \mathbf{e}_x | \mathbf{e}_y \rangle}_{=0} + T_{zy} \underbrace{\langle \mathbf{e}_x | \mathbf{e}_z \rangle}_{=0} = T_{xy}\end{aligned}\quad 3.1.12$$

Analogicznie obliczając pozostałe iloczyny mieszane możemy wyliczyć pozostałe mieszane składowe tensora T . Widać z tego, że w zadanej bazie ortonormalnej związki (3.1.10) oraz związki typu (3.1.11 i 3.1.12) zadają wszystkie dziewięć składowych tensora T . Przy zmianie bazy na inną ortonormalną bazę związki te dadzą inne składowe tego samego tensora T .

Zwracam waszą uwagę na fakt, że wyprowadzone tu związki są w mocy tylko w bazach ortonormalnych. Zapewnia to nam dwie sprawy – pierwsza to fakt, że iloczyn wektora bazowego przez siebie (czyli jego długość) jest równy jeden, druga to zerowanie się iloczynu dwóch różnych wektorów bazy. Bazy przestrzeni wektorowej nie muszą być ortonormalne, ale wtedy rachunki się komplikują. Na własne życzenie gubimy możliwości analizy układu wzdłuż zadanego kierunku (przez wektor bazy) niezależnie od innych kierunków (zadanych przez inne wektory bazy).

W ogólnym przypadku wyrażenia typu $\langle \mathbf{u} | T | \mathbf{w} \rangle$ są nieprzemienne. Jeżeli jednak jest inaczej to tensor T jest symetryczny, mamy więc drugą, obok (def. 2.1), możliwą definicję tensora symetrycznego i przy okazji antysymetrycznego (def. 2.2)

Definicja 3.1.1: Tensor symetryczny

Jeżeli dla pewnego tensora T i dla każdej pary wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{w}$ mamy

$$\langle \mathbf{u} | T | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w} | T | \mathbf{u} \rangle \quad 3.1.13$$

To tensor T nazywamy tensorem symetrycznym.

Definicja 3.1.2: Tensor antysymetryczny

Jeżeli dla pewnego tensora T i dla każdej pary wektorów u i w mamy

$$\langle u|T|w\rangle = -\langle w|T|u\rangle \quad 3.1.14$$

to tensor T nazywamy tensorem antysymetrycznym. Ze związku (3.1.11) widać, że jeżeli tensor T jest symetryczny, to

Definicje (2.1 i 2.2) stają się teraz faktami wynikającymi z powyższych definicji; możesz spróbować je udowodnić

Fakt 3.1.1.

Dla tensora symetrycznego zachodzi

$$T_{ij} = T_{ji} \quad 3.1.15a$$

Fakt 3.1.2

Dla tensora antysymetrycznego zachodzi

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad 3.1.16a$$

Wynika z tego, że tensor symetryczny ma sześć niezależnych współrzędnych: trzy na przekątnej i trzy poza przekątną, a tensor antysymetryczny tylko trzy (leżące poza przekątną). Wyrazy przekątniowe tensora antysymetrycznego są równe zeru (zastanów się dlaczego?). Przypomnę, że tensor momentu bezwładności i tensor napięć są tensorami symetrycznymi.

Na zbiorze tensorów możemy uogólnić operację dodawania

Definicja 3.1.1: Suma tensorów

Sumą dwóch tensorów T^a i T^b nazywamy taką tensor T , że

$$T|u\rangle = T^a|u\rangle + T^b|u\rangle \quad 3.1.17$$

Łatwo pokazać, że dla danej bazy przestrzeni wektorowej V , na której wektory działa tensor T współrzędne sumy tensorów wyrażą się przez sumy ich współrzędnych

$$T_{ij} = T_{ij}^a + T_{ij}^b \quad 3.1.18$$

Podobnie możemy zdefiniować iloczyn tensora przez liczbę

Definicja 3.1.2: Iloczyn tensora przez liczbę

Iloczynem tensora T i liczby α nazywamy taką tensor T^α , że

$$T_{ij}^\alpha = \alpha T_{ij} \quad 3.1.19$$

Nasuwa to przypuszczenie, że tensory tworzą przestrzeń wektorową. I tak jest; nie trudno jest sprawdzić, że tensory wraz z operacją dodawania i operacją mnożenia przez liczbę spełniają wymagania definicji przestrzeni wektorowej (def. TIV 3.1).

Fakt 3.1.1.

Tensory tworzą przestrzeń wektorową.

Skoro tensory tworzą przestrzeń wektorową to mamy możliwość zdefiniowania bazy w tej przestrzeni (def. TIV 3.1.4). Intuicyjnie możemy stwierdzić⁴, że jednostkową bazą przestrzeni wektorowej tensorów, są macierze, które na jednej pozycji mają jedynkę a na pozostałych zera, na przykład:

$$\hat{\mathbf{e}}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3.1.20a$$

$$\hat{\mathbf{e}}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 3.1.20b$$

Dowolny tensor T możemy przedstawić w postaci kombinacji liniowej tensorów bazowych

$$T = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \hat{\mathbf{e}}_{ij} \quad 3.1.21$$

Zauważ, że zgodnie z (3.1.11) i (3.1.12) mamy

$$\langle \mathbf{e}_i | \hat{\mathbf{e}}_{ii} | \mathbf{e}_i \rangle = 1 \quad 3.1.22a$$

$$\langle \mathbf{e}_i | \hat{\mathbf{e}}_{kk} | \mathbf{e}_i \rangle = 0, k \neq i \quad 3.1.22b$$

Co robią tensory bazowe? Zobaczmy na przykładzie tensora $\hat{\mathbf{e}}_{23}$, reprezentowanego przez macierz (3.1.20b)

⁴ Dla matematyka stwierdzenie „intuicyjnie możemy stwierdzić” jest dopiero początkiem drogi do ścisłego dowodu danego stwierdzenia. Ale dla fizyka takie intuicyjne stwierdzanie zasad matematycznych jest do przyjęcia, tym bardziej że prędzej czy później jakiś matematyk dowiedzie poprawności takich intuicji i ewentualnie wskaże jej ograniczenia.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad 3.1.23$$

Widać, że tensor $\hat{\mathbf{e}}_{23}$ wybiera trzecią współrzędną wektora $\mathbf{v}$ i kładzie ją na miejsce drugiej współrzędnej. Pozostałe współrzędne są zerowane. Ogólnie tensor bazowy $\hat{\mathbf{e}}_{ij}$ wybiera j -tą współrzędną danego wektora i kładzie ją na miejsce i -tej współrzędnej tegoż wektora. Pozostałe współrzędne wektora są zerowane. Tensory o postaci $\hat{\mathbf{e}}_{ii}$ zerują wszystkie współrzędne danego wektora oprócz i -tej, którą pozostawiają na miejscu.

Tensor jest odwzorowaniem liniowym wektorów. Zapis macierzowy to jego reprezentacja, której postać zależy od przyjętych wektorów bazy. Jednak konkretny tensor jest niezależny od wybranej bazy, podobnie jak konkretny wektor jest niezależny od wyboru bazy, w którym go reprezentujemy. Jeżeli wektory reprezentujemy w określonej bazie to z (3.1.11-12) widać, że determinuje to bazę, w której reprezentujemy tensory będące liniowymi odwzorowaniami tych wektorów. Widać również, że wymiarem przestrzeni wektorowej tensorów działających na przestrzeń wektorową o wymiarze N jest N^2

Fakt 3.1.2

Wymiarem przestrzeni wektorowej tensorów działających na wektory z przestrzeni V , gdzie $\dim(V)=N$, jest N^2 .

Przy zmianie bazy, w której reprezentujemy wektory z przestrzeni wektorowej V musimy też zmienić bazę, w której reprezentujemy tensory odwzorowujące te wektory. Ponieważ tensory reprezentujemy przez macierze to na ich reprezentację przenoszą się reguły rachunku macierzy omówione w dodatku (DE). W szczególności mamy dwa ważne niezmienniki macierzowej reprezentacji tensorów: ślad (§DE 1.1.5) i wyznacznik (§DE 4). Przypomnę tu je

Twierdzenie 3.1.1: Ślad macierzy tensora

Ślad macierzy tensora T jest niezmiennikiem ze względu na zmianę bazy

$$\text{Tr}(T) = \text{const} \quad 3.1.24$$

Twierdzenie 3.1.2: Wyznacznik macierzy tensora

Wyznacznik macierzy tensora T jest niezmiennikiem ze względu na zmianę bazy

$$\det(T) = \text{const} \quad 3.1.25$$

Ślad macierzy różnych tensorów mają swoje fizyczne znaczenie, tak że fakt (3.1.1) okazuje się bardzo wygodny, gdyż wystarczy wyznaczyć ślad tensora w jednej bazie i mamy pewność, że w każdej innej będzie on taki sam. Z drugiej

strony nie jest to dziwne. Skoro ślad macierzy ma znaczenie fizyczne, to właściwości fizyczne nie powinny zależeć do wyboru bazy.

Ponieważ tensory są odwzorowaniem możemy je rozłożyć na część symetryczną i antysymetryczną

Twierdzenie 3.1.1: rozkład tensora na część symetryczną i antysymetryczną

Każdy tensor T można przedstawić jako sumę tensor symetrycznego T^s i antysymetrycznego T^a

Założmy, że tak jest, wtedy musi być

$$\langle \mathbf{u} | T | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | T^s + T^a | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} | T^s | \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{u} | T^a | \mathbf{w} \rangle \quad 3.1.26$$

Korzystając z (3.1.15) i (3.1.16) możemy przepisać (3.1.19a) w postaci

$$\langle \mathbf{u} | T | \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w} | T^s | \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{w} | T^a | \mathbf{u} \rangle \quad 3.1.27$$

Stąd wynika, że

$$\langle \mathbf{w} | T^s | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} | T | \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w} | T^a | \mathbf{u} \rangle \quad 3.1.28a$$

$$\langle \mathbf{w} | T^a | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{w} | T^s | \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u} | T | \mathbf{w} \rangle \quad 3.1.28b$$

Nadto z (3.1.19b) mamy

$$\langle \mathbf{w} | T^a | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{w} | T | \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{w} | T^s | \mathbf{u} \rangle \quad 3.1.29a$$

$$\langle \mathbf{w} | T^s | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{w} | T | \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u} | T^a | \mathbf{w} \rangle \quad 3.1.29b$$

wstawiając (3.1.28a) do (3.1.27a) oraz (3.1.28b) do (3.1.27b) mamy

$$\langle \mathbf{w} | T^s | \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \mathbf{u} | T | \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w} | T | \mathbf{u} \rangle) \quad 3.1.30a$$

$$\langle \mathbf{w} | T^a | \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \mathbf{w} | T | \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u} | T | \mathbf{w} \rangle) \quad 3.1.30b$$

Wzory (3.1.30a) i (3.1.30b) definiują odpowiednio współrzędne tensora symetrycznego i antysymetrycznego. Zgodnie z (3.1.26) sumują się one do tensora T , skąd wynika teza twierdzenia.

Jeżeli za wektory $\mathbf{w}$ i $\mathbf{u}$ wstawimy do (3.1.30) wektory bazy ortogonalnej to korzystając z relacji (3.1.10) i (3.1.11) otrzymamy wzory na współrzędne składowych symetrycznych i antysymetrycznych danego tensora T .

$$T^s = \begin{pmatrix} T_{xx} & \frac{1}{2}(T_{yx} + T_{xy}) & \frac{1}{2}(T_{zx} + T_{xz}) \\ \frac{1}{2}(T_{xy} + T_{yx}) & T_{yy} & \frac{1}{2}(T_{zy} + T_{yz}) \\ \frac{1}{2}(T_{xz} + T_{zx}) & \frac{1}{2}(T_{yz} + T_{zy}) & T_{zz} \end{pmatrix} \quad 3.1.30$$

$$T^a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(T_{xy} - T_{yx}) & \frac{1}{2}(T_{xz} - T_{zx}) \\ \frac{1}{2}(T_{xy} - T_{yx}) & 0 & \frac{1}{2}(T_{yz} - T_{zy}) \\ \frac{1}{2}(T_{xz} - T_{zx}) & \frac{1}{2}(T_{yz} - T_{zy}) & 0 \end{pmatrix} \quad 3.1.31$$

Tyle naszego pierwszego matematycznego podsumowania na temat tensorów. Ale to nie koniec całej matematyki tensorów. Czekają nas jeszcze kilka przygód. Aby jednak nie zatracić się w matematyce tensorów przejdę do podstaw teorii sprężystości, w której tensory odgrywają istotną rolę. Poznamy przy okazji jeszcze jeden tensor, bynajmniej nie ostatni ;)

4. Sprężystość ♦

Najprostsze wyrażenie teorii sprężystości już było przez nas wykorzystane. Obliczając siłę z jaką naciągnięta jest sprężyna przyjmowałem (§TII 5.1), że

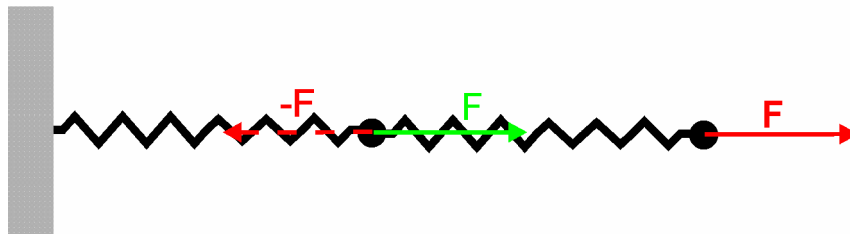
$$F = k\Delta x \quad 4.1$$

Wzór (4.1) wyraża prawo Hooke’a. Prawo to wydaje się nam dziś czymś prostym, ale w czasach Hooke’a nawet proste niegeometryczne modele matematyczne układów mechanicznych miały posmak metodologicznej nowości.

Określenie 4.1: Prawo Hooke’a

Odkształcenie ciała Δx od stanu równowagi, pod wpływem działającej siły F jest proporcjonalne do tej siły (4.1)

Rozciąganiu i ściskaniu podlegają nie tylko sprężyny. Każde ciało stałe, w pewnym zakresie działających na nie sił, zachowuje się jak sprężyna. Rozważmy pręt o długości l , który podlega rozciąganiu lub ściskaniu. Przy rozciąganiu długość pręta zwiększa się o $\Delta l > 0$, a przy ściskaniu zmniejsza się o $\Delta l < 0$. Rozciągnięcie pręta, o danym przekroju, o długość Δl jest tym łatwiejsze im dłuższy jest pręt. Pomyśl, że do ściany przyczepiona jest połączona para takich samych sprężyn, o stałej sprężystości k .



Rysunek 4.1. Dwie połączone szeregowo sprężyny o takim samym współczynniku sprężystości k . Siła F przyłożona jest do drugiej sprężyny (licząc od ściany). Poprzez drugą sprężynę ciągnie pierwszą sprężynę, zatem siła z jaką naciągana jest druga sprężyna jest również równa F (zasada akcji i reakcji).

Jeżeli za pierwszą sprężynę ciągniemy siłą F , to ciągnie ona drugą sprężynę tak, że ta druga, na mocy prawa akcji i reakcji, odpowiada siłą $-F$, co oznacza, że sama jest również naciągana siłą F . Obie sprężyny ulegną rozciągnięciu

$$\Delta x_1 = \frac{F}{k} = \Delta x_2 = \frac{F}{k} \Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 2\Delta x_1 = \frac{2}{k} F \quad 4.2.$$

Wynika z tego, że dwie takie same, połączone sprężyny można traktować, tak jak jedną sprężynę o stałej sprężystości $k/2$, która pod działaniem siły F ulega dwa razy większemu rozciągnięciu niż pojedyncza sprężyna. Zatem podwójna sprężyna przy tym samym rozciągnięciu całkowitym (co pojedyncza)

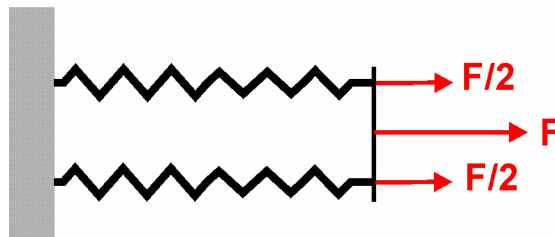
zmagazynuje dwa razy mniej energii potencjalnej niż pojedyncza sprężyna. Nawiasem mówiąc uogólniając wyrażenie (4.2) możesz pokazać, że układ N połączonych sprężyn o współczynnikach sprężystości $k_1, \dots, k_N$ działa tak jak jedna sprężyna o współczynniku sprężystości k danym wzorem

$$\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i} \quad 4.3$$

Wracając do pręta. Analogia ze sprężyną pokazuje, że dwa razy dłuższy pręt powinien, pod wpływem tej samej siły ulec dwa razy większemu wydłużeniu, stąd moje stwierdzenie, że im dłuższy pręt tym łatwiej go rozciągnąć o Δl . Ogólnie oznacz to, że

$$\frac{\Delta l}{l} \sim F \quad 4.4$$

Jeżeli jednocześnie chcemy rozciągać dwa równoległe pręty o Δl , to spodziewamy się konieczności użycia dwukrotnie większej siły, niż w przypadku pojedynczego pręta. Ponownie skorzystam z analogii ze sprężynami. Rysunek (4.2) pokazuje dwie równoległe sprężyny.



Rysunek 4.2. Dwie takie same sprężyny połączone równoległe. Na każdą z nich działa siła o wartości połowy siły działającej na cały układ.

Gdy ciągniemy za nie z siłą F to na każdą z nich działa siła $F/2$ i w efekcie każda z nich rozciąga się dwa razy mniej niż pojedyncza sprężyna. Aby osiągnąć to samo rozciągnięcie co dla jednej sprężyny musimy podzielić siłą $2F$. Sprężyny połączone równoległe rozciągają się o połowę mniej niż pojedyncza sprężyna przy tej samej przyłożonej sile. Oznacza to, że przy tym samym rozciągnięciu Δx podwójna sprężyna połączona równoległe magazynuje dwa razy większą energię niż pojedyncza. W prosty sposób możesz pokazać, że kiedy połączymy równoległe N sprężyn o współczynnikach sprężystości k_N to układ ten działa tak jak jedna sprężyna o współczynniku sprężystości k danym wzorem

$$k = \sum_{i=1}^N k_i \quad 4.5$$

Na tej podstawie możemy się spodziewać, że siła niezbędna do rozciągnięcia pręta jest tym większa im większe jest jego pole przekroju A . Dwie połączone równoległe sprężyny mają pole dwa razy większe od jednej, przy tej samej długości. Zatem (4.4) można zapisać w postaci

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \frac{F}{A} = \alpha s \quad 4.6.$$

α jest stałą proporcjonalności, nazywana współczynnikiem sprężystości, a F/A to znane nam już naprężenie s (ściśle wartość naprężenia). Zwykle zamiast współczynnikiem sprężystości α posługujemy się jego odwrotnością

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{F}{A} \frac{l}{\Delta l} = s \frac{l}{\Delta l} \quad 4.7$$

którą nazywamy modułem Younga. Widać, że jeżeli $\Delta l = l$, to wtedy $l/\Delta l = 1$ i w efekcie $E = s$, czyli moduł Younga jest równy wartości naprężenia. Stąd mamy

Definicja 4.1: Moduł Younga (moduł odkształcalności liniowej)

Moduł Younga jest równy wartości naprężenia powodującemu podwojenie długości danego ciała

Fakt: 4.1.

Wymiarem modułu Younga jest ciśnienie. W układzie SI jednostką dla modułu Younga jest Pascal.

W definicji modułu Younga (4.7) występuje wartość naprężenia, czyli siła dzielona przez pole powierzchni przekroju pręta (przy czym zakładamy, że siła działa w kierunku wyznaczonym przez pręt). Wiemy, że współczynnik sprężystości k zależy liniowo od powierzchni przekroju pręta. Dwa razy większa powierzchnia oznacza dwa razy większą siłę potrzebną dla uzyskania tego samego rozciągnięcia. Ponieważ moduł Younga jest proporcjonalny do siły dzielonej przez pole powierzchni jego wartość jest niezależna od pola przekroju pręta. Moduł Younga charakteryzuje zatem tylko własności sprężyste materiału. Przykładowe wartości modułu Younga przedstawia tabela (4.1).

Materiał	E [GPa]	Materiał	E [GPa]
Guma	0.01-0,1	Stal	190-210
Beton (ściskany)	>27	Wolfram	400-410
Miedź	110-135	Węglik Tytanu (TiC)	450-650
Tytan	105-120	Nanorurka Węglowa	>1000
Tabela 4.1. Przykładowe wartości modułu Younga			

Podane w tabeli (4.1) wartości modułu Younga są ogromne. Ale jak wiemy z definicji (4.1) moduł Younga jest równy wartości naprężenie przy którym pręt podwaja swoją długość. Tylko niewiele materiałów może nam na to pozwolić.

Większość z nich przed osiągnięciem takiego rozciągnięcia zerwała by się. Już rozciągnięcie stalowego pręta, o długości jednego metra, o $\Delta l = 1\text{cm}$, jest poważnym wyzwaniem. W praktyce, jeżeli nie chcemy doprowadzić do zniszczenia ciała przykładamy znacznie mniejsze naprężenia przez co uzyskujemy małe rozciągnięcia niż podwojenie długości (dotyczy to również ściśnięć).

Zgodnie z podanymi wzorami długość pręta zmienia się liniowo wraz z przyłożoną siłą, co wykażemy poniżej. Niech pręt o długości l_0 , ulegnie rozciągnięciu o Δl , pod wpływem naprężenia s ,

$$l = l_0 + \Delta l \quad 4.8$$

Zgodnie ze wzorem (4.6) mamy

$$\Delta l = \alpha l_0 s \quad 4.9$$

Co po wstawieniu do (4.8) daje szukaną zależność liniową

$$l = l_0(1 + \alpha s) \quad 4.10$$

Aby bezpośrednio nawiązać do prawa Hooke'a (4.1) wykorzystam (4.7) mamy

$$s = \frac{E}{l} \Delta l \Rightarrow F = \frac{EA}{l} \Delta l \quad 4.11$$

Związek (4.11), to w sumie prawo Hooke'a; siła rozciągająca (ściskająca) pręt jest proporcjonalna do wydłużenia. Zatem jeżeli ściskamy (wydłużamy pręt), to wykonana przy tym praca zostaje w nim zgromadzona w postaci energii potencjalnej o wartości (§TII 5.1)

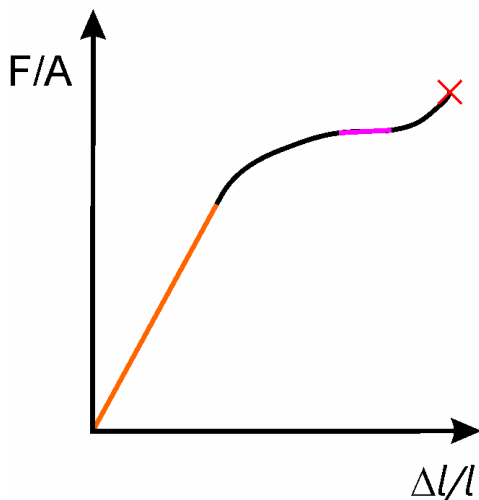
$$E_p = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} \Delta l^2 \quad 4.12$$

Funkcja opisująca wielkości naprężenia potrzebnego dla osiągnięcia względnego przyrostu długości $\Delta l/l$ może zostać przybliżona liniowo (to jest wzorem (4.6)), tylko w ograniczonym zakresie (rys. 4.3). W zakresie tym działa prawo Hooke'a. Poza obszarem liniowym zależności wyprowadzone wyżej przestają być wystarczająco dokładne. W końcu cząsteczki ciała oddalają się na odległość, na której oddziaływanie ustaje i pręt ulega rozerwaniu.

Rozciąganiu pręta towarzyszy efekt zmniejszenia się pola powierzchni jego przekroju, który do tej pory zaniedbywałem. Teraz czas to zmienić, czyli przejdziemy do dokładniejszego modelu opisującego proces rozciągania. Dla prętów wykonanych z materiałów jednorodnych i izotropowych możemy przyjąć, że takie zwężanie zachodzi proporcjonalnie we wszystkich kierunkach (w danym przekroju). Stąd możemy zapisać

$$\frac{\Delta d}{d} = -\sigma \frac{\Delta l}{l} \quad 4.13$$

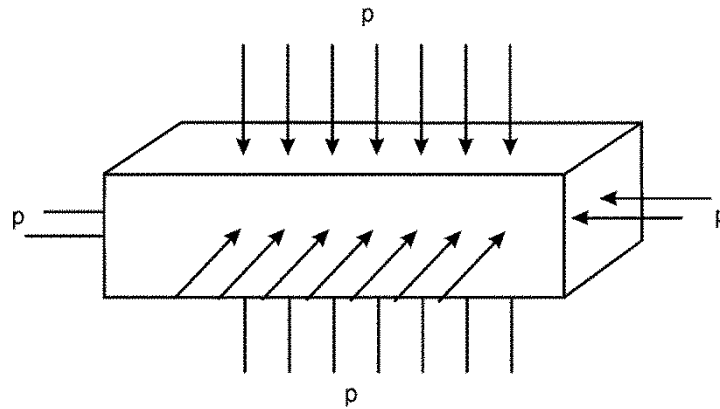
Tutaj d jest rozmiarem przekroju pręta wzdłuż wybranego kierunku. Parametr σ nazywany jest stałą Poissona i wyraża stosunek odkształcenia poprzecznego do odkształcenia podłużnego. Stała Poissona jest bezwymiarowa. Znak minus w (4.13) wynika z faktu, że stała Poissona jest dodatnia. Natomiast dla Δl dodatniego grubość pręta maleje, czyli Δd jest ujemne.



Rysunek. 4.3. Przykład przebiegu zależności naprężenia od rozciągnięcia względnego dla pręta. Część prawie liniowa, pomarańczowa kreska, odpowiada zakresowi stosowalności prawa Hooke’a. Poza tym zakresem zależności przestaje być liniowa. W pewnym obszarze (różowa kreska) wydłużenie może rosnać przy stałym naprężeniu. Następnie naprężenie rośnie wraz z wydłużeniem aż do punktu zerwania (czerwony krzyżyk). Przedstawiona krzywa oddaje typowy charakter zależności naprężenia w funkcji rozciągnięcia. Dokładny przebieg tej krzywej zależy od materiału i grubości pręta.

Pręt uważamy za jednorodny, gdy wykonany jest z jednolitego materiału. Sam materiał może mieć jednak wewnętrzną budowę o złamanej symetrii. Tak się dzieje w przypadku kryształów, których komórki mogą mieć ograniczoną symetrię. Materiał zbudowany z takich kryształów nie jest izotropowy i może ulegać różnym rozciągnięciom (zwężeniom) w zależności od kierunku działania siły względem orientacji komórek kryształu. W przypadku materiałów izotropowych i jednorodnych stałe E i σ dobrze określają własności sprężyste wykonanych z nich elementów. Ponieważ związki (4.13) i (4.11) są liniowe mamy dodatkowo zasadę superpozycji. To znaczy gdy mamy zbiór sił działających na dany element to efekty ich działania sumują się. Gdy materiał przestaje być izotropowy musimy przejść do wielkości tensorowych.

Zobaczmy, na prostych przykładach, co daje przedstawiony wyżej model w przypadku ciał jednorodnych i izotropowych. Powiedzmy, że na element pręta wykonanego z materiału jednorodnego i izotropowego działa ciśnienie hydrostatyczne p (rys. 4.4).



Rysunek 4.4. Na jednorodny pręt działa ciśnienie hydrostatyczne o wartości p . Pręt może być na przykład zanurzony na pewnej głębokości w cieczy. Nie mniej w atmosferze działa również na niego ciśnienie atmosferyczne. Możemy więc sobie wyobrazić, że początkowo pręt był trzymany pod kloszem próżniowym, do którego następnie wpuszczono powietrze.

Wzdłuż każdej z osi x , y , z pręt jest ściskany. Rozsądną rzeczą jest założyć, że dla jednorodnego i izotropowego pręta skutki sił działających wzdłuż osi x , y i z są niezależne. Zgodnie z tym założeniem będę je analizował niezależnie.

Ciśnienie działające wzdłuż osi x -ów spowoduje jego ścisnięcie, ale temu ścisnieniu będzie towarzyszyło zwiększenie długości pręta wzdłuż osi z -tów. Aby to wydłużenie wyliczyć, muszę policzyć ścisnięcie wzdłuż osi x -ów i y -ów. Liczymy je tak jak dla osi z -ów. Pręt ulegnie ścisnieniu wzdłuż osi x -ów o

$$-\frac{\Delta l_{1x}}{l_x} = \frac{p}{E} \quad 4.14$$

Jednocześnie zgodnie z (4.13) temu ścisnieniu wzdłuż osi x -ów będzie towarzyszyło rozciąganie wzdłuż osi z -ów równe

$$\frac{\Delta l_{2z}}{l_z} = -\sigma \frac{\Delta l_{1x}}{l_x} \quad 4.15$$

Podstawiając (4.14) do (4.15) mamy

$$\frac{\Delta l_{2z}}{l_z} = \sigma \frac{p}{E} \quad 4.15$$

Jak widać znak minus we wzorze (4.13) skompensował się. Teraz ściskaniu pręta wzdłuż osi x -ów odpowiada jego rozciąganie wzdłuż osi z -tów. Podobnie dla ciśnienia działającego wzdłuż osi y -ów mamy

$$\frac{\Delta l_{3z}}{l_z} = \sigma \frac{p}{E} = \frac{\Delta l_{2z}}{l_z} \quad 4.16$$

Całkowite wydłużenie jest równe, zgodnie z zasadą superpozycji, sumie przyczynków. Stąd mamy

$$\begin{aligned}\Delta l_z &= \Delta l_{1z} + 2\Delta l_{2z} \Rightarrow \frac{\Delta l_z}{l} = \frac{\Delta l_{1z}}{l} + 2\frac{\Delta l_{2z}}{l} = -\frac{p}{E} + 2\sigma\frac{p}{E} \\ &= -\frac{p}{E}(1 - 2\sigma)\end{aligned}\quad 4.17$$

Wszystkie trzy kierunki traktujemy to tak samo, więc dla dowolnego promienia przekroju mamy również

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{p}{E}(1 - 2\sigma) \quad 4.18$$

Możemy wyznaczyć zmianę objętości pręta pod wpływem ciśnienia p . Mamy

$$\frac{\Delta V}{V} = -3\frac{p}{E}(1 - 2\sigma) \quad 4.19$$

Zależność (4.19) zapisuje się również w postaci

$$p = -K\frac{\Delta V}{V} \quad 4.20$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)} \quad 4.20a$$

Parametr K jest nazywany modułem ściśliwości. Jeszcze dwie uwagi: pierwsza to fakt, że związek (4.20) jest związkiem liniowym podobnie jak prawo Hooke'a. To oczywiście nie jest prawo Hooke'a, bo dotyczy objętości, ale należy jak prawo Hooke'a do klasy związków liniowych. Druga uwaga wynika z równania (4.20a). Stała Poissona musi być mniejsza od $\frac{1}{2}$, w przeciwnym razie moduł ściśliwości K byłby mniejszy od zera. Wtedy z (4.20) wynika, że dla $K < 0$ ciało pod ciśnieniem p zwiększałoby swoją objętość. To ciekawy efekt, ale wiązałby się z możliwością złamania zasady zachowania energii, więc go odrzucamy.

Poszło nam całkiem gładko. Ale to dopiero początek. Trudności zaczną się teraz, gdy weźmiemy się za ciała niejednorodne lub/i nieizotropowe.

4.1. Tensor przesunięć ♣

W pierwszym kroku zobaczmy czy do rozwiązania problemu z rysunku (4.4) możemy użyć rachunku tensorowego. Dla ciśnienia hydrostatycznego tensor naprężeń przyjmie postać (tabela 3.1)

$$\boldsymbol{\sigma} = p \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad 4.1.1$$

Na każdą ze ścianek pręta siły działają tak samo i prostopadle do powierzchni nie ma więc pozadiagonalnych składowych. Prawdę mówiąc nie wiadomo co dalej. Jak powiązać tensor naprężeń z odkształceniem pręta? Znalezienie powiązania

wymaga wysiłku związanego z uogólnieniem opisu odkształcenia ciała. Do tego celu zdefiniujemy jeszcze jeden tensor - tensor odkształceń.

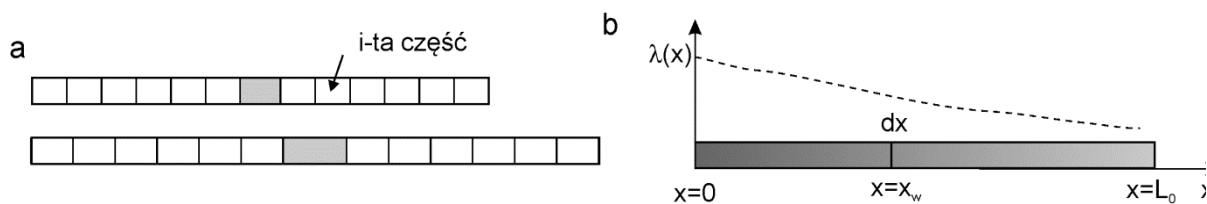
Definiowanie tensora opisującego odkształcenie zaczynamy od czegoś łatwego. Rozpatrzmy niejednorodny pręt (rys. 4.1.1a). Jego niejednorodność polega na tym, że obszar wyróżniony na szaro rozciąga się bardziej niż pozostałe, oczywiście pod działaniem tej samej siły. Niech współczynnik λ opisuje rozciągliwości pręta, tak że dla i -tego kawałka mamy

$$\lambda_i = \frac{L_i}{L_{0i}} \quad 4.1.2$$

Gdzie L_i jest długością i -tego kawałka po rozciągnięciu, a L_{0i} przed rozciągnięciem. Długość pręta po rozciągnięciu jest równa sumie rozciągnięć każdego kawałka

$$L = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N \lambda_i L_{0i} \quad 4.1.3$$

Możemy tu odwołać się do przykładu sprężyn połączonych szeregowo (rys. 4.1). Gdy jedna z nich jest słabsza musi się mocniej naciągnąć aby zrównoważyć siły oddziaływania przez sąsiadów (prawo akcji i reakcji)



Rysunek 4.1.1. a) Dzielimy pręt na kawałki, jeden z nich (szary) ma inną wartości współczynnika λ , niż pozostałe. Taki pręt jest niejednorodny, szary kawałek pod działaniem tej samej siły rozciąga się inaczej niż pozostałe; b) w tym przykładzie pręt jest niejednorodny na całej swojej długości, co jest symbolizowane przez spadający stopień szarości. Współczynnik rozciągliwości λ staje się funkcją zmiennej x . Przykładowy przebieg takiej funkcji pokazuje przerywana linia. Wybrany nieskończenie mały kawałek pręta dx w położeniu x_w pokazuje ciemna kreska. Każdy taki kawałek, pod wpływem tej samej siły rozciąga się inaczej – to jest zgodnie z lokalną wartością funkcji $\lambda(x)$.

Jeżeli z długością kawałków przejdziemy do wielkości nieskończenie małych, to mamy

$$L = \int_{x=0}^{x=L_0} \lambda(x) dx \quad 4.1.4$$

Przypominam co oznacza ten zapis. Lokujemy pręt tak, że jego początek jest w położeniu $x=0$. Wyrażenie $\lambda(x)$ jest wartością współczynnika λ dla przekroju pręta o współrzędnej x . Wielkość $\lambda(x)dx$ jest rozciągnięciem nieskończenie małego kawałka, który zawiera punkt x (rys. 4.1.1b). Granice całki oznaczają, że należy wysumować wszystkie takie rozciągnięcia od $x=0$ do $x=L_0$. Jak widzisz przy zapisie (4.1.4) pręt może mieć różną wartość współczynnika λ dla różnych

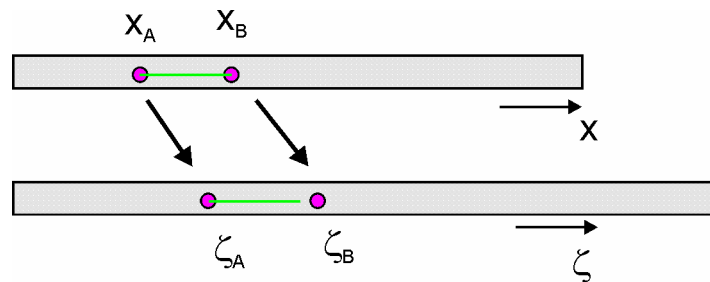
x -ów, stąd λ przestaje być liczbą a staje się funkcją zmiennej x (rys. 4.1.1b), przy czym zmienna x identyfikuje kolejne przekroje pręta.

Współrzędne punktów na nierozciągniętym pręcie oznaczyłem przez x . Na rozciągniętym pręcie punkty zmieniają swoje położenie. Wprowadzę nową zmienną ζ , która będzie określała położenie punktów na pręcie rozciągniętym. Możemy również określić funkcję.

$$\zeta = \varphi(x) \quad 4.1.5$$

która łączy punkty przed (o współrzędnej x) i po (o współrzędnej ζ) rozciągnięciu pręta (rys. 4.1.2). Rozpatrzmy dwa bliskie sobie punkty A i B na nierozciągniętym pręcie. Niech ich współrzędna x -owa będzie równa x i $x+\Delta x$. Długość odcinak AB jest równa Δx . Po rozciągnięciu współrzędne tych punktów będą równe $\zeta_A = \varphi(x)$ i $\zeta_B = \varphi(x+\Delta x)$, a długość rozciągniętego odcinak AB wynosi $\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$. Pewnie domyślasz się co się teraz stanie – obliczmy pochodną

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx} \quad 4.1.6$$



Rysunek 4.1.2. Współrzędne punktów na pręcie nierozciągniętym oznaczamy przez x a na pręcie rozciągniętym przez ζ . Po rozciągnięciu zmienia się odległość między wybranymi punktami co pokazuje zielony odcinek.

Zauważ, że obliczam różnicę wartości funkcji φ (położenia dwóch punktów po deformacji) i dzielę ją przez różnicę współrzędnej x -owej tych punktów, ale przed deformacją. Z (4.1.6) wynika, że dla bardzo małych Δx , długość rozciągniętego kawałka pręta jest, z dobrym przybliżeniem, funkcją liniową różnicy współrzędnych Δx , przed rozciągnięciem

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) \approx \varphi'(x)\Delta x \quad 4.1.7$$

Lewa strona (4.1.7) opisuje długość odcinka AB po rozciągnięciu. Na mocy (4.1.2) widać, że w granicy nieskończenie małych rozciągnięć współczynnik λ jest równy pochodnej (4.1.6). Stąd mając (4.1.4) możemy napisać

$$\lambda(x) = \varphi'(x) \Rightarrow L = \int_{x=0}^{x=L_0} \varphi'(x) dx \quad 4.1.8$$

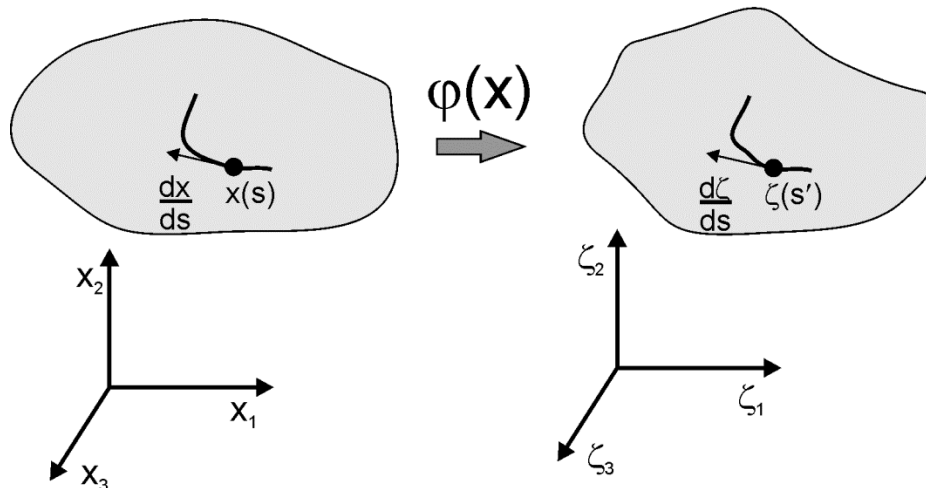
Funkcja $\lambda(x)$ pozwoliła na lokalizację opisu deformacji pręta. Wyrażenie (4.6) dotyczyło całego pręta, nakładało to wysokie wymagania na jego jednorodność.

Wraz z lokalizacją opisu własności mechaniczne pręta mogą się zmieniać od punktu do punktu.

Uwaga 4.1.1.

Możesz mieć zastrzeżenia co do funkcji (4.1.5). Wydaje się, że rozciągnięty pręt ma więcej punktów niż nierozciągnięty. Ale od strony matematycznej jest to nieprawda. Przypominam, że nie operujemy na realnym pręcie tylko na jego matematycznym modelu, w postaci odcinka na osi liczb rzeczywistych. Każdy taki skończony odcinek ma taką samą liczbę punktów jak cała oś liczb rzeczywistych, przynajmniej w tym sensie, że istnieje odwzorowanie $1 \leftrightarrow 1$ (bijekcja) takiego odcinka w całą prostą. Jako przykład podam funkcję tangens, która punkty z odcinka od $-\pi/2$ do $\pi/2$ odwozrowuje na oś $-\infty, +\infty$ i jest to bijeKCja. Jak ten model ma się do rzeczywistości? Bardzo dobrze, przynajmniej w tym sensie, że świetnie stosuje się do dużej liczby praktycznych problemów z mechaniką. Patrząc mikroskopowo przy rozciąganiu pręta zmieniają się odległości między atomami. W obrazie mikroskopowym funkcja (4.1.5) może być zdefiniowana tak by opisywać przesunięcia poszczególnych atomów. Ale taką mikroskopowy obraz jest niemożliwie skomplikowany. Więc jeśli model ciągły zachowuje się poprawnie od strony fizycznej i matematycznej, to niech żyje model ciągły.

Przejdę do trójwymiarowego obrazu. Rysunek (4.1.3) przedstawia bryłę, która ulega deformacji. By znaleźć się możliwie blisko przykładu z prętem z rysunku (4.1.2) wybrałem krzywą należącą do bryły (nie musi leżeć na jej powierzchni), której deformacje będziemy śledzić. Bryła przed odkształceniem opisana jest w układzie (x_1, x_2, x_3) a po odkształceniu w układzie $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$. Krzywą na bryle sparametryzuję przez jej długość. Przypomnę, że krzywą możemy rozprostować zachowując odległości pomiędzy jej punktami i na takiej prostej wprowadzić parametr s . Jeden koniec krzywej uznajemy za jej początek, a drugi za jej koniec. Na początku parametr $s=0$, a na końcu $s=L$, gdzie L jest długością krzywej. W każdym punkcie parametr s mówi nam jak daleko jesteśmy od początku krzywej. W tym momencie sytuacja staje się analogiczna do tej z rysunku (4.1.2). Jak widzisz, gdzie się da idę drogą wiadra. Funkcja $x(s)$ powie nam jakie są współrzędne (x_1, x_2, x_3) dla punktu krzywej o parametrze s . Po deformacji wzajemne położenie punktów zmienia się. Zdeformowaną krzywą opisujemy w układzie $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, a funkcja $\zeta(s)$ powie nam jakie są współrzędne $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ dla punktu krzywej o parametrze s' . Znak prim przy s oznacza, że na zdeformowanej krzywej dany punkt może mieć inną wartość parametru s , w stosunku do wartości tego parametru na nierozciągniętej krzywej. Funkcja $\phi(x)$ określa deformację bryły, w szczególności wybranej krzywej.



Rysunek 4.1.3. Odształcenie bryły przedstawiamy w dwóch układach współrzędnych. W jednym przedstawiona jest bryła przed odkształceniem, w drugim po odkształceniu. Odształcenie opisane jest funkcją φ . Wybieramy krzywą biegnącą przez wybrane punkty bryły przed odkształceniem. Określamy wektor styczny do wybranego punktu tej krzywej. Po odkształceniu bieg krzywej ulega zmianie. Zmianie ulega również wektor styczny do wybranego punktu.

Oczywiście, gdy ograniczymy się do krzywej funkcja φ jest również zależna od parametru s : $\varphi(x(s))$. Pochodna dx/ds określa jednostkowy wektor styczny do krzywej w punkcie o parametrze s . Ile wynosi pochodna $d\zeta/ds$? Zauważ, że chcę obliczyć pochodną po ds , a nie po ds' . Czyli ponownie biorę różnicę położenia (mierzoną wzdłuż krzywej) między dwoma punktami na krzywej zdeformowanej i dzielę ją przez różnicę wartości parametru s dla tych punktów, ale przed deformacją, tak jak we wzorze (4.1.6). Ta zmiana parametryzacji spowoduje, że pochodna $d\zeta/ds$ nie będzie równa jedności, tylko wartości przeskalowania odległości między punktami, czyli funkcji $\lambda(s)$, tak jak to miało miejsce we wzorach (4.1.6-8).

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\zeta(s' + \Delta s') - \zeta(s')|}{\Delta s} = \lambda(s) \quad 4.1.9$$

Tego typu „machlojka” ze zmianą zmiennej, po której liczymy granicę nie jest groźna, gdyż s jest jednoznacznie związane z s' oraz gdy $\Delta s' \rightarrow 0$, to $\Delta s \rightarrow 0$. Następuje tylko przeskalowanie wartości pochodnej, którego miarą jest właśnie $\lambda(s)$. Wartość bezwzględna bierze się z tego, że współczynnik przeskalowania uznajemy za dodatni. Znak współczynnika nie niesie potrzebnej informacji. Na podstawie rysunku (4.1.3), oraz własności funkcji zdefiniowanych na wielkościach wektorowych możemy zapisać funkcje na poszczególne współrzędne punktu po odkształceniu

$$\zeta_i(s') = \varphi_i(x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \quad 4.1.10$$

Z reguły obliczania pochodnej funkcji złożonej mamy

$$\frac{d\zeta_i}{ds} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{ds} \quad 4.1.11$$

Zbierzmy pochodne φ_i w tablicę Ξ

$$\Xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad 4.1.12$$

Stąd wynika, że

$$\frac{d\zeta(s')}{ds} = \Xi \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad 4.1.13$$

Rozpiszę to wyrażenie

$$\frac{d\zeta(s')}{ds} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{ds} \\ \frac{dx_2}{ds} \\ \frac{dx_3}{ds} \end{bmatrix} \quad 4.1.14$$

Tensory określaliśmy jako przekształcenia liniowe wektorów w wektory. Jak widać ze wzoru (4.1.14) macierz Ξ mnoży wektor styczny do danej krzywej utworzonej z punktów bryły przed deformacją i przekształca go na wektor styczny do tej krzywej po deformacji, czyli zachowuje się jak tensor. Po przemnożeniu macierzy reprezentującej tensor Ξ przez kolumnę reprezentującą wektor $d\mathbf{x}/ds$ mamy

$$\frac{d\zeta(s')}{ds} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} \end{bmatrix} \quad 4.1.15$$

Jest to kolumna reprezentująca współrzędne wektora stycznego do danej krzywej po deformacji bryły. Z drugiej strony każdy wiersz tej macierzy reprezentuje sumę (4.1.11) dla danej funkcji φ_i .

Fakt 4.1.1.

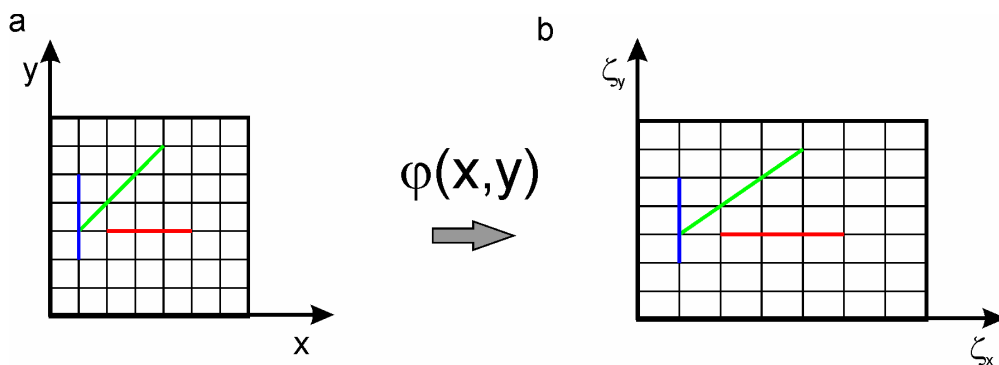
Deformację bryły w danym punkcie opisaliśmy poprzez relację określającą związek między wektorem stycznym krzywej przechodzącej przez ten punkt przed i po deformacji.

Definicja 4.1: Tensor przesunięć

Tensor przesunięć ciała stałego jest tensorem, którego macierzowa reprezentacja ma postać (4.1.12)

4.1.1. Przykład 1

Podajmy prostą bryłę deformacji polegającej na jej rozciągnięciu wzdłuż osi x -ów (rys. 4.1.4).



Rysunek 4.1.4. Przekształcenie bryły polega na jej rozciągnięciu wzdłuż osi x . Współrzędne y i z bryły pozostają niezmiennicze, to jest $\zeta_y = y$ oraz $\zeta_z = z$. Współrzędna x zmienia się zgodnie z zależnością $\zeta_x = x + \beta x$. Odcinek leżący wzdłuż osi x -ów (czerwony) ulega tylko rozciągnięciu (skurczeniu jeżeli $\beta < 1$). Odcinek leżący pod kątem do osi x -ów (zielony) ulega rozciągnięciu (skurczeniu) i obróceniu. Odcinek prostopadły do kierunku rozciągania (niebieski) nie ulega zmianie.

Odwzorowanie φ we wzorze (4.1.10) zależy tylko od x -ów, zatem nie musimy jawnie wypisywać zależności od parametru s . Dla naszego przypadku ma ono postać

$$\varphi(\mathbf{r}) = ((1 + \beta)x, y, z) \quad 4.1.16$$

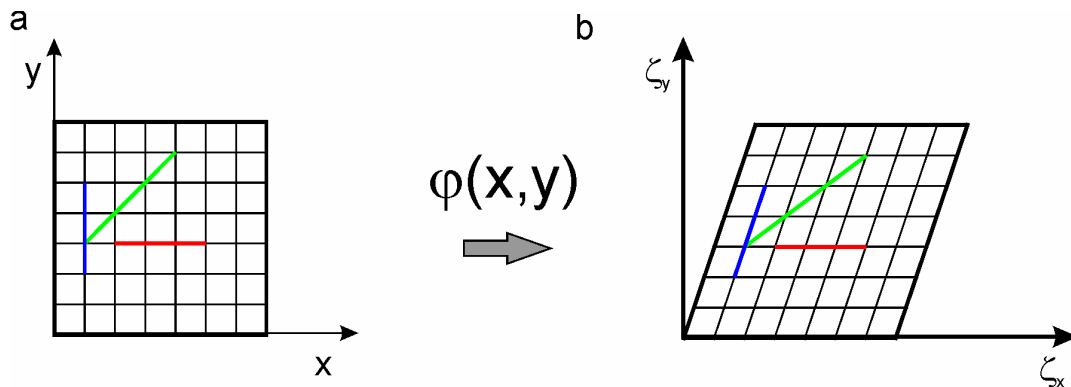
Jak widać rozciągnięcie jest tym większe im większe jest x , co nie dziwi, biorąc pod uwagę, że dochodzi do kumulacji rozciągnięć; im dalej od początku odcinka tym większa kumulacja. Dla przykładu, jeżeli punkt przed deformacją miał współrzędne $\mathbf{r}(2,1,1)$, to po rozciągnięciu mamy $\mathbf{r}'(2+2\beta,1,1)$. Tensor przesunięć, obliczony ze wzoru (4.1.12), ma postać

$$\Xi = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 4.1.17$$

Zgodnie z (4.1.14) widać, że wektor styczny do krzywej w danym punkcie transformuje się w wektor stycznych do krzywej po deformacji, który ma przeskalowaną β razy współrzędną x . Słowem wektor styczny nie zmienia kierunku, tylko wartość. Dla rozciągania wektor będzie miał zwiększoną wartość, a dla ściskania jego wartość będzie zmniejszona.

4.1.2. Przykład 2

Poddamy teraz naszą bryłę przekształceniu nazywanemu ścięciem (rys. 4.1.5)



Rysunek 4.1.5. Pod wpływem ścięcia przesuwają się między sobą płaszczyzny prostopadłe do kierunku ścięcia. Odcinek równoległy (czerwony) do kierunku ścięcia nie ulega zmianie. Odcinek prostopadły (niebieski) do tego kierunku zmienia kąt nachylenia i długość. Odcinek idący pod kątem ostrym do kierunku przesunięcia (zielony) ulega rozciągnięciu i pochyleniu.

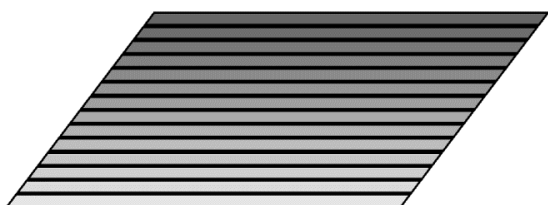
Odwzorowanie φ dane jest wzorem

$$\varphi(\mathbf{r}) = ((x + \beta y), y, z) \quad 4.1.18$$

Jak widać rozciągnięcie w kierunku osi x -ów jest tym większe im większe jest y . Przypomina to rozsuniecie talii kart (rys. 4.1.6).

Dla przykładu, jeżeli punkt przed deformacją miał współrzędne $\mathbf{r}(1,3,1)$, to po rozciągnięciu mamy $\mathbf{r}'(1+3\beta, 3, 1)$. Tensor przesunięć ma postać

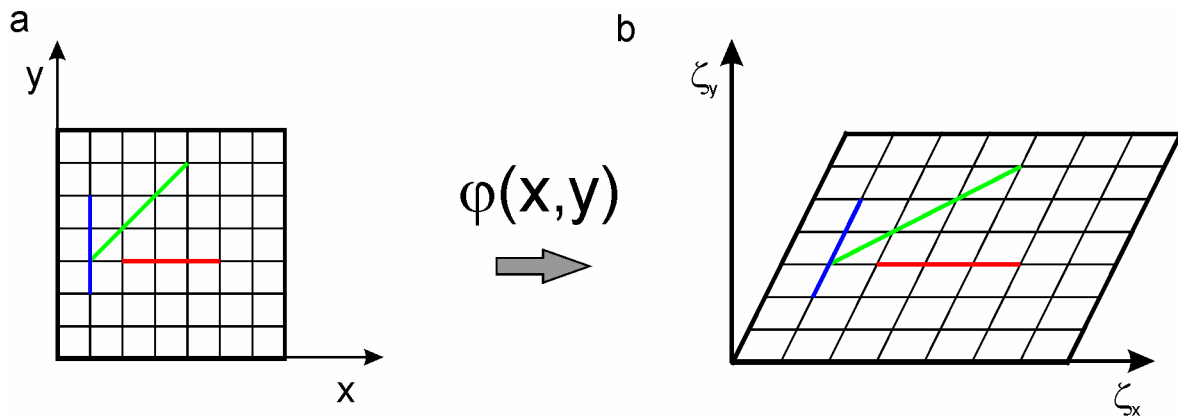
$$\mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 4.1.19$$



Rysunek 4.1.6. Odkształcenie poprzeczne (ścięcie) w danym kierunku odkształca ciało tak, jakby składało się z szeregu cienkich wzajemnie poprzemieszczanych płaszczyzn.

4.1.3. Przykład 3

Następny przykład obejmuje złożenie rozciągnięcia i ścięcia wzdłuż osi x -ów (rys. 4.1.7).



Rysunek 4.1.7. Pod wpływem ścięcia i przesunięcia przesuwały się między sobą płaszczyzny prostopadłe do kierunku ścięcia. Odcinek równoległy (czerwony) do osi x -ów ulega wydłużeniu (skurczeniu gdy $\beta < 1$). Odcinek prostopadły do tego kierunku (niebieski) zmienia kąt nachylenia i ulega wydłużeniu. Odcinek idący pod kątem ostrym do kierunku przesunięcia (zielony) ulega rozciągnięciu i pochyleniu.

Odwzorowanie φ dane jest wzorem

$$\varphi(\mathbf{r}) = ((1 + \beta x \varepsilon y), y, z) \quad 4.1.20$$

Jak widać rozciągnięcie w kierunku osi x -ów jest tym większe im większe jest x i y . Współczynnik rozciągnięcia przy x wynosi β , a przy y wynosi ε . Jeżeli punkt przed deformacją miał współrzędne $\mathbf{r}(2,3,1)$, to po rozciągnięciu mamy $\mathbf{r}'(1+6\beta\varepsilon, 3, 1)$. Tensor przesunięć ma postać

$$\mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} \beta\varepsilon y & \beta\varepsilon x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 4.1.21$$

4.2. Tensor przesunięcia względnego ♣

Przy rozwiązywaniu zagadnień praktycznych często używa się tensora przesunięcia względnego. W tym przypadku ciało przed i po deformacji rozpatrujemy w jednym układzie współrzędnych, tak jak to jest przedstawione na rysunku (rys. 4.2.1). Parze punktów PQ możemy przypisać wektor $\Delta \mathbf{r}$ (tak jak to czyniliśmy przy definicji przestrzeni afinicznej (§TIV 3.2))

$$\overline{PQ} \rightarrow \Delta \mathbf{r} \quad 4.2.1$$

Tak, że

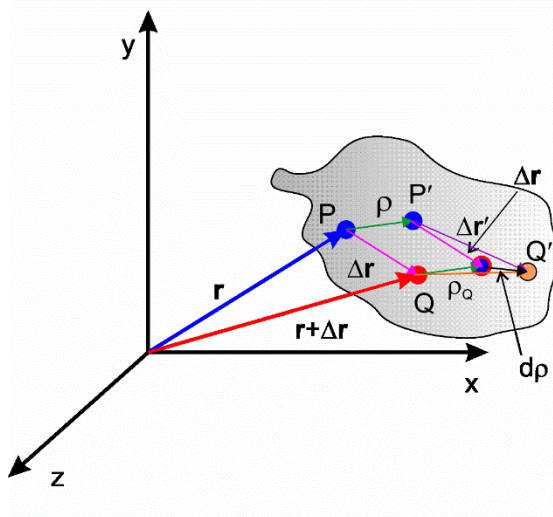
$$\mathbf{Q} = \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$$

4.2.2

Niech teraz ciało ulega deformacji tak, że punkty P i Q zmieniają położenie – punkty w nowym położeniu oznaczmy jako P' i Q'; wprowadzę wektory przesunięcia

$$\overline{PP'} \rightarrow \boldsymbol{\rho}; \quad \overline{QQ'} \rightarrow \boldsymbol{\rho}_Q$$

4.2.3



Rysunek 4.2.1. Podczas odkształcenia ciała punkty P i Q przemieszczają się do nowych położen P' i Q'. Jeżeli wektory przemieszczeń nie są sobie równe $\boldsymbol{\rho} \neq \boldsymbol{\rho}_Q$, to różnicę między nimi możemy reprezentować przez wektor przesunięcia względnego ξ . Gdy $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_Q$, wtedy $\xi = 0$.

Z rysunku (4.2.1) widać nadto, że

$$\overline{P'Q'} \rightarrow \Delta \mathbf{r}' = \Delta \mathbf{r} + d\boldsymbol{\rho}$$

4.2.4

Jeżeli teraz

$$|\Delta \mathbf{r}| \neq |\Delta \mathbf{r}'|$$

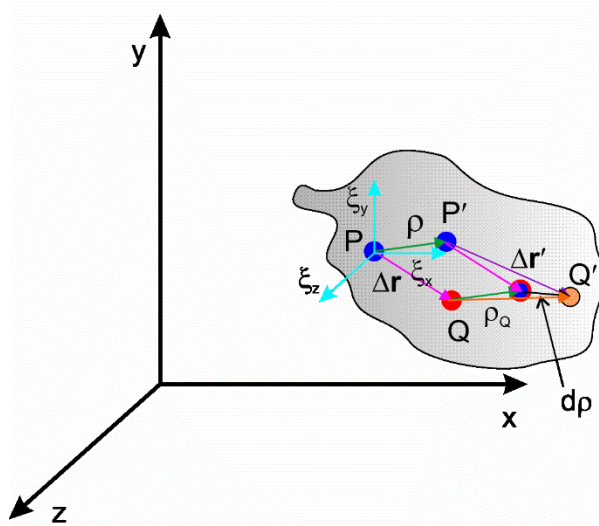
4.2.5

To mówimy, że ciało uległo odkształceniu. Zauważ, że w (4.2.5) porównujemy długości wektorów. Gdyby ciało uległo obrotowi jak bryła sztywna, to wektory $\Delta \mathbf{r}$ i $\Delta \mathbf{r}'$, byłyby różne, ale miałyby tę samą długość. Obrót nie jest odkształceniem ciała, gdyż nie zmienia wzajemnego rozłożenia punktów wewnątrz ciała. Porównując długości eliminujemy wpływ obrotu.

Wektor przemieszczenia $\boldsymbol{\rho}$ jest różny dla różnych punktów P (inaczej ciało ulegnie przesunięciu a nie odkształceniu). Aby go wyznaczyć ustawię w punkcie P lokalny układ współrzędnych (ξ_x, ξ_y, ξ_z) (rys. 4.2.2). Niech w tym lokalnym układzie współrzędne wektora przemieszczeń $\boldsymbol{\rho}$ punktu P wynoszą

$$\boldsymbol{\rho}(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$$

4.2.6



Rysunek 4.2.2. Przesunięcie względne punktów bliskich punktowi P opiszemy w lokalnym układzie współrzędnych zaczepionym w punkcie P; Dla dostatecznie bliskich punktów możemy przyjąć, że funkcja opisująca przesunięcie względne jest liniowa.

Oczywiście dla różnych wyborów początkowego punktu P współrzędne (ξ_x , ξ_y , ξ_z) reprezentujące jego wektor przesunięcia będą na ogół różne; czyli będą funkcjami współrzędnych punktu P(x,y,z).

$$\xi_x = \xi_x(x, y, z); \quad \xi_y = \xi_y(x, y, z); \quad \xi_z = \xi_z(x, y, z) \quad 4.2.7$$

Ponieważ każdy punkt ciała ma wektor określający jego przesunięcie, zbiór tych wektorów nazywamy polem przesunięć. Pole przesunięć jest polem wektorowym. Współrzędne wektorów pola przesunięć opisane są w lokalnych układach współrzędnych, związanych z punktem przed przesunięciem. W zasadzie każde pole wektorowe ma taki charakter. Pokazuje to rysunek (4.2.3). My jednak chcemy opisać w lokalnym układzie współrzędnych związanych z punktem P ruch punktów w jego bliskim otoczeniu. Przy niewielkim odkształceniu ciała wektor przesunięcia punktu Q powinien różnić się niewiele od przesunięcia punktu P i wektor ρ_Q powinien dać się opisać zależnością liniową postaci (rys. 4.2.2)

$$\mathbf{e}_Q = \mathbf{e} + d\mathbf{e} \quad 4.2.8$$

Biorąc pod uwagę (4.2.6) mamy

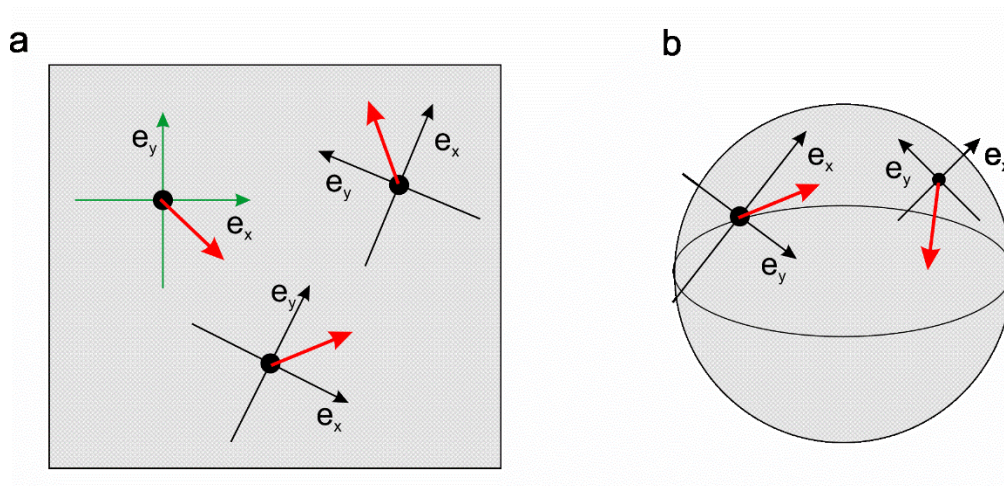
$$d\mathbf{e} = (d\xi_x, d\xi_y, d\xi_z) \quad 4.2.9$$

Uwzględniając (4.2.7) i reguły różniczkowania funkcji złożonej mamy

$$d\xi_x = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi_x}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi_x}{\partial z} dz \quad 4.2.10a$$

$$d\xi_y = \frac{\partial \xi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi_y}{\partial z} dz \quad 4.2.10b$$

$$d\xi_z = \frac{\partial \xi_z}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi_z}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} dz \quad 4.2.10c$$



Rysunek 4.2.3. Pola wektorowe na powierzchniach; a) na płaskiej powierzchni definiujemy wektory opisując je w lokalnych układach współrzędnych zaczepionych w poszczególnych punktach. W przypadku płaskiej powierzchni sytuacja jest o tyle prosta, że do wszystkich punktów możemy skopiować układ zielony, przez proste przesunięcie w ramach płaszczyzny. Wtedy wszystkie wektory są opisane w kopii tego samego układu współrzędnych i łatwo je porównywać. Kiedy przejdziemy do powierzchni krzywych sytuacja jest bardziej skomplikowana. Opisanie wektorów zaczepionych w poszczególnych punktach sfery, w układach współrzędnych, które możemy uznać za te same, przestaje być prostym zadaniem. Dla porównania wektorów potrzebna nam jest operacja przesunięcia równoległego (to będzie w temacie TXV). Jesteśmy na dobrej drodze do sformułowania pojęcia różniczkowej, która jest zbiorem lokalnie zdefiniowanych układów współrzędnych (tzw. map), tworzących tzw. atlas, wraz ze zbiorem reguł na przechodzenie od układu do układu. Ale na dojście do pojęcia różniczkowej mamy jeszcze czas.

Różniczka $d\mathbf{p}$ (4.2.9) nazywana jest wektorem przesunięcia względnego i opisuje na ile różnią się od siebie nieskończenie małe przesunięcia bliskich sobie punktów P i Q . Wyrażenia (4.2.10) można zapisać jako iloczyn macierzy Υ o rozmiarach 3×3 i wektora $d\mathbf{r}$

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_x}{\partial x} & \frac{\partial \xi_x}{\partial y} & \frac{\partial \xi_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_y}{\partial x} & \frac{\partial \xi_y}{\partial y} & \frac{\partial \xi_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_z}{\partial x} & \frac{\partial \xi_z}{\partial y} & \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad 4.2.11$$

$$d\mathbf{q} = \Upsilon d\mathbf{r} \quad 4.2.12$$

Jak się pewnie domyślasz tablica (4.2.11) reprezentuje tensor, który nazywamy tensorem przesunięcia względnego.

Definicja 4.2.1: Tensor przesunięcia względnego

Wielkość zdefiniowaną wzorem (4.2.11) w zadanym układzie współrzędnych reprezentuje tensor przesunięcia względnego

Działa on na wektor $d\mathbf{r}$ ($\Delta\mathbf{r}$ dla przybliżenia skończonych ale bardzo małych przyrostów), który określa przemieszczenie między punktem P i bliskim punktem Q. W wyniku jego działania na wektor $d\mathbf{r}$ powstaje wektor przesunięcia względnego $d\mathbf{p}$ ($\Delta\mathbf{p}$), który mówi o ile różni się przesunięcie punktu Q względem przesunięcia punktu P. Widać również, że wektor elementarnego przesunięcia względnego $\mathbf{p}_Q$ (4.2.8) jest wyrażony jako suma wektora przesunięcia $\mathbf{p}$ punktu P i iloczynu tensora przesunięcia względnego i wektora $d\mathbf{r}$.

$$\mathbf{p}_Q = \mathbf{p} + \Upsilon d\mathbf{r} \quad 4.2.13$$

Trzeba pamiętać, że mnożenie przez tensor jest operacją liniową, co oznacza, że nie daje poprawnych rezultatów dla efektów nieliniowych. Dlatego we wzorze (4.2.13) operujemy na wielkościach nieskończenie małych, dla których przybliżenie liniowe jest dokładne. Gdy punkty P i Q są sobie bliskie wyrażenia nieskończenie małe możemy zamienić na małe ale skończone przyrosty. Wtedy popełniamy błąd, który zwykle jest wystarczająco mały by go pominąć.

Wzór (4.2.12) pokazuje, że wektor przesunięcia względnego nie jest na ogół równoległy do wektora $d\mathbf{r}$, pokazującego przesunięcie między punktem P i Q (rys. 4.2.2), czego można się było spodziewać. Ponownie widać, że gdy wchodzi w grę postawienie znaku równości między dwiema wektorowymi wielkościami, to w ogólnym przypadku potrzebny jest tensor.

Tensor przesunięcia względnego możemy rozłożyć na część symetryczną i antysymetryczną (3.1.30, 3.1.31). Część symetryczną zapiszemy w postaci

$$\Upsilon^{(s)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & \varepsilon_y & \gamma_x \\ \gamma_y & \gamma_x & \varepsilon_z \end{bmatrix} = T \quad 4.2.14$$

Składową symetryczną tensora przesunięć względnych będę oznaczał literą T. Na mocy (3.1.30) mamy

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \xi_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \quad 4.2.15a$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial z} + \frac{\partial \xi_z}{\partial y} \right) \quad 4.2.15b$$

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_z}{\partial x} + \frac{\partial \xi_x}{\partial z} \right) \quad 4.2.15c$$

$$\gamma_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial y} + \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right) \quad 4.2.15d$$

Część symetryczna tensora przesunięcia jest tensorem, który nazywany jest tensorem odkształceń.

Definicja 4.2.2: Tensor odkształceń T

Część symetryczna tensora przesunięcia względnego nazywamy tensorem odkształceń

Nietrudno jest wskazać na znaczenie składników diagonalnych tensora odkształceń. Przykładowo składowa ε_x jest pochodną współrzędnej ξ_x po zmiennej x . Mamy zatem

$$\xi_x(x + \Delta x) \approx \xi_x(x) + \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \Delta x = \xi_x(x) + \varepsilon_x \Delta x \quad 4.2.16$$

Im mniejsze Δx , tym lepiej pracuje to przybliżenie; najlepiej w granicy $\Delta x \rightarrow dx$. Zatem składowa ε_x wyznacza współczynnik kierunkowy dla stycznej w punkcie x funkcji $\xi_x(x)$. Niech teraz tensor przesunięć ma jedną niezerową współrzędną - ε_x . Korzystając z (4.2.12), dla odkształcenia skierowanego prostopadle do ściany yz sześcianu mamy

$$d\mathbf{q} = \gamma d\mathbf{r} = \frac{\partial \xi_x}{\partial x} \Delta x \mathbf{e}_x = \varepsilon_x \Delta x \mathbf{e}_x \quad 4.2.17$$

Trzeba pamiętać, że Δx , jest składową wektora $\mathbf{p}$ oznaczającego przesunięcie punktu odniesienia P w wyniku deformacji (rys. 4.2.1). Natomiast $d\mathbf{p}$ jest różnicą takiego przesunięcia między punktem P i Q. Zatem przesunięcie punktu Q po deformacji, zgodnie z (4.2.13) wynosi

$$\Delta x + \varepsilon_x \Delta x \mathbf{e}_x = \Delta x (1 + \varepsilon_x) \mathbf{e}_x \quad 4.2.18$$

Współczynnik ε_x określa, wzdłuż osi x , względną zmianę odległości (po przesunięciu) między dwoma bliskimi sobie punktami.

Składowe pozadiagonalne tensora odkształceń wyznaczają odkształcenia ścinające, w zakresie, w którym te odkształcenia można uznać za liniowe. Odkształcenie ścinające analizowałem w przykładzie (4.1.2). Widać, że we wzorze (4.1.18), że współrzędna x -owa zależy od współrzędnej y -owej. To właśnie robią pozadiagonalne składowe tensora - mieszają współrzędne.

Dla części antysymetrycznej, na mocy (3.1.31), mamy

$$\Upsilon^{(a)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial y} - \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial y} - \frac{\partial \xi_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_y}{\partial z} - \frac{\partial \xi_z}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad 4.2.19$$

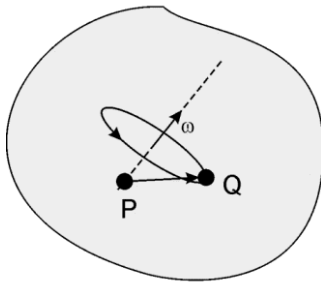
Mając to na uwadze wektor przesunięcia względnego (4.2.12) możemy zapisać w postaci

$$d\mathbf{p} = \underbrace{\Upsilon^{(s)}}_T d\mathbf{r} + \Upsilon^{(a)} d\mathbf{r} = \underbrace{\Upsilon^{(s)}}_T d\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r} \quad 4.2.20$$

Gdzie $\boldsymbol{\omega}$ jest wektorem prędkości kątowej z jaką punkt Q obraca się względem osi przechodzącej przez punkty P (rys. 4.2.4). Ze wzoru (4.2.20) wynika, że

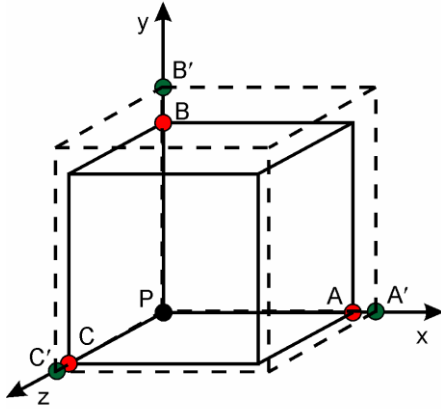
$$\Upsilon^{(a)} d\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r} \quad 4.2.21$$

Z uzasadnieniem wzoru (4.2.21) poczekam do tematu (TXV), tu go po prostu przyjmijmy.



Rysunek 4.2.4. Antysymetryczna część tensora przemieszczeń względnych odpowiada za opis przesunięcia punktu Q względem punktu P na skutek obrotu wokół chwilowej osi obrotu przechodzącej przez punkt P. Nie wyznacza zatem rzeczywistego odkształcenia ciała.

Poniżej podaję kilka przykładów tensora odkształceń. W pierwszym przykładzie rozważmy rozciągany mały sześciąt (rys. 4.2.5). Niech sześciąt będzie zaczepiony, w układzie współrzędnych o początku w punkcie P. Po rozciągnięciu tak, że punkty A, B i C przejdą w punkty A', B', C' długość krawędzi sześciątku wyniesie



Rysunek 4.2.5. Tensor odkształceń pozwala powiedzieć jak przesuwają się punkty w małym otoczeniu danego punktu P. Przez małe otoczenie rozumiemy tu mały obszar ciała (małe otoczenie punktu P), dla którego odkształcenie jest liniową funkcją współrzędnych. Na rysunku wyróżniono trzy punkty sześcianu odległe o l od punktu P. Punkty te oddalają się od punktu P o wielkości proporcjonalne do l , przy czym dla trzech osi współczynniki proporcjonalności wynoszą odpowiednio ε_x , ε_y i ε_z . W efekcie sześcian zostaje zdeformowany, a jego nowe rozmiary wynoszą l_x , l_y i l_z , które są dane wzorami (4.2.22).

$$l_x = l + \varepsilon_x l = l(1 + \varepsilon_x) \quad 4.2.22a$$

$$l_y = l + \varepsilon_y l = l(1 + \varepsilon_y) \quad 4.2.22b$$

$$l_z = l + \varepsilon_z l = l(1 + \varepsilon_z) \quad 4.2.22c$$

Współczynniki ε_x , ε_y i ε_z są diagonalnymi współrzędnymi tensora odkształceń, które opisują względne wydłużenie wzdłuż osi, odpowiednio x , y i z . Przy takim odkształceniu i tak zorientowanym układzie współrzędnych tensor odkształceń ma postać

$$T = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad 4.2.23$$

Dla małych odkształceń objętość sześcianu można wyrazić wzorem

$$V' = l_x l_y l_z \approx l^3 (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = V(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad 4.2.24$$

Dlaczego wygląda to tak prosto? Dla małych odkształceń pominąłem wszystkie wyraz składające się z wielokrotnych iloczynów współczynników ε , na przykład ε_x^2 , lub $\varepsilon_x \varepsilon_y$, lub $\varepsilon_y \varepsilon_z$. Albo mówiąc inaczej odkształcenie uznajemy za małe, kiedy możemy uznać, że wszystkie wartości, oprócz liniowych są wystarczająco małe by można je było pominąć. Stąd obliczamy względny przyrost objętości sześcianu

$$\frac{V' - V}{V} = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{Tr}(T) \quad 4.2.25$$

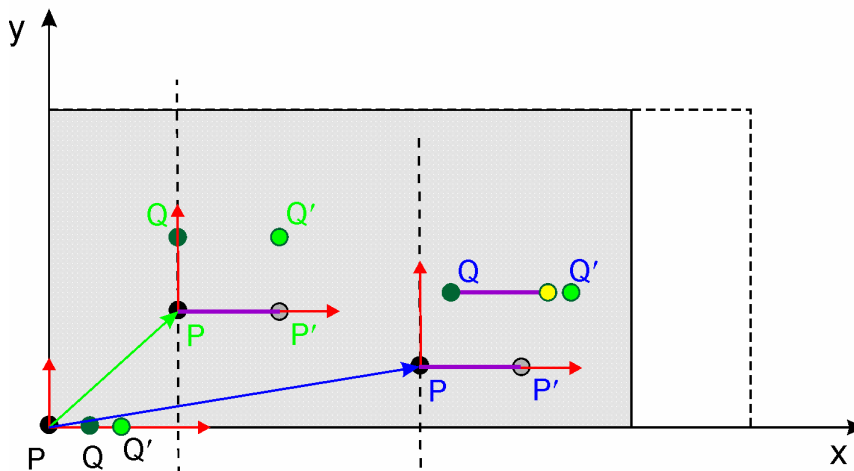
Co się stanie ze wzorem (4.2.25) gdy zmienimy układ współrzędnych na obrocony? Nic się nie zmieni, gdyż ślad macierzy Tr nie zmienia się przy zmianie układu współrzędnych (Tw. 3.1.1). Suma po prawej stronie (4.2.25) to ślad macierzy reprezentującej tensor odkształceń. Oznacza to, że ślad macierzy tensora odkształceń reprezentuje odkształcenie objętościowe ciała.

Tutaj dotarliśmy częściowo do celu określonego na początku sekcji (4.1). Opisaliliśmy z użyciem tensora odkształceń względną zmianę objętości ciała, jaka może zajść na przykład na skutek działania ciśnienia hydrostatycznego. Dalej jednak nie mamy powiązania między tensorami opisującymi ciśnienie hydrostatyczne, a tensorami opisującymi odkształcenie. W tym temacie do takiego związku jeszcze nie dojdziemy. Widać ile wysiłku kosztuje sformułowanie ogólnego formalizmu do opisu odkształcenia.

Popatrzmy na odkształcenie sześcienu raz jeszcze, w kontekście równania (4.2.13) i rysunku (4.2.1). Na rysunku (4.2.6) pokazane jest rozciągnięcie sześciennego klocka wzdłuż osi x -ów. Zobaczmy jak wygląda przesunięcie punktu Q względem punktu P . Punkt P pozostaje w miejscu, zatem jego przesunięcia $\mathbf{p}$ jest równe zeru. Punkt Q przechodzi w punkt Q' , zatem zgodnie z (4.2.13) mamy

$$\mathbf{e}_Q = \mathbf{0} + d\mathbf{e}$$

4.2.25



Rysunek 4.2.6. Gdy punkt P jest w początku układu współrzędnych, to jego wektor przesunięcia $\mathbf{p}=\mathbf{0}$ jest równy zeru. Wtedy $\mathbf{p}_Q=d\mathbf{p}$. Wektor $\mathbf{p}_Q$ łączy punkt Q (bliski punktowi P) przed przesunięciem z punktem Q' wskazującym miejsce, do którego punkt Q został przesunięty w wyniku rozciągnięcia. Inny przykład punktów wyróżniony jest zielonymi oznaczeniami. Punkty P i Q leżą na jednej prostej prostopadłej do osi x -ów. W wyniku rozciągnięcia przechodzą do pozycji P' i Q' również leżących na jednej prostej prostopadłej do osi x -ów, ponieważ rozciągamy tylko wzdłuż osi x -ów. Teraz wektor $\mathbf{p}$ przesunięcia punktu P (fioletowy odcinek) jest różny od zera, ale wektor względnego przesunięcia jest równy zeru $d\mathbf{p}=\mathbf{0}$, gdyż oba punkty przesuwają się tak samo i nie ma między nimi względnego przesunięcia. Kolejny przykład pary punktów wyróżniony jest niebieskimi oznaczeniami. Punkty P i Q nie leżą na jednej prostej prostopadłej do osi x -ów. W tym przypadku punkt Q przesuwają się o większy odcinek i względne przesunięcie punktów Q i P jest równe wektorowi $d\mathbf{p}$ o początku w punkcie żółtym, a końcu w punkcie oznaczonym jako niebieskie Q' .

Wynika z tego, że gdy punkt P nie ulega przesunięciu, to wzór (4.2.13) jest wzorem na przesunięcie bezwzględne, bo tylko wtedy przesunięcie bezwzględne jest równe przesunięciu względnemu.

$$d\varrho_Q = d\varrho \quad 4.2.26a$$

Z rysunku (4.2.6) widać, że tylko składowe x-owe powyższych wektorów są różne od zera, stąd mamy

$$d\varrho_{Q;x} = d\varrho_x = \varepsilon_x dx \quad 4.2.26b$$

Całkowity przyrost długości otrzymujemy przez zsumowanie wszystkich przyczynków postaci (4.2.26b)

$$\Delta\varrho_{Q;x} = \int_{x=0}^L \varepsilon_x dx = \varepsilon_x L \quad 4.2.26c$$

Jeżeli do przyrostu dodamy długość początkową to otrzymamy wzór (4.2.22a). Przypadki gdy punkt P nie leży w początku układu współrzędnych rozpatrzone są również na rysunku (4.2.6). Opisane tu rozciągnięcie ciała odpowiada przypadkowi z punktu (4.1.1), gdzie do analizy posłużył tensor przesunięcia Ξ .

Przyjmę teraz, że wektor ρ (rys. 4.2.7) ma postać.

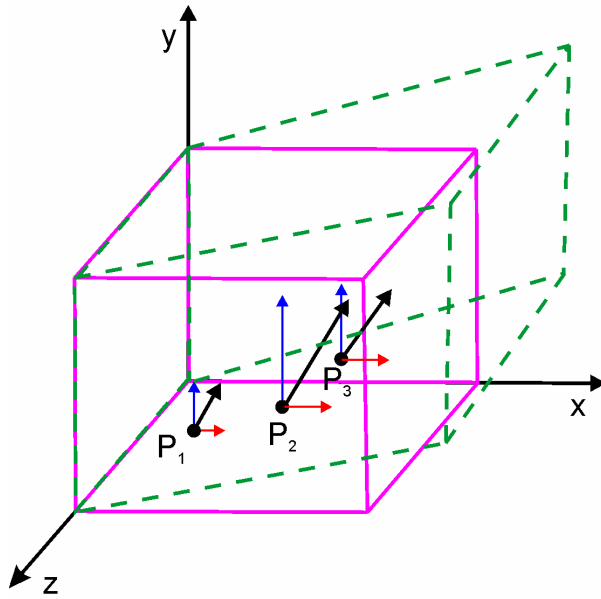
$$\rho \begin{pmatrix} \beta\varepsilon_{xy}, \gamma x, 0 \\ \zeta_x \quad \zeta_y \quad \zeta_z \end{pmatrix} \quad 4.2.27$$

W osi x-ów odpowiada to przykładowi (4.1.3), w którym analiza opierała się na tensorze przemieszczeń Ξ . Wzór (4.2.27) usadawia w każdym punkcie ciała jego wektor przemieszczeń, definiuje przez to wektorowe pole przemieszczeń (rys. 4.2.7). Zgodnie z (4.2.10) mamy

$$d\zeta_x = \beta\varepsilon_y dx + \beta\varepsilon_x dy + 0dz \quad 4.2.28a$$

$$d\zeta_y = \gamma dx + 0dy + 0dz \quad 4.2.28b$$

$$d\zeta_z = 0dx + 0dy + 0dz \quad 4.2.28c$$



Rysunek 4.2.6. Odkształcenie zdefiniowane polem wektora przesunięć (4.2.27) rozciąga i ścina sześcian wzdłuż osi x -ów oraz ścina wzdłuż osi y -ów. Wzdłuż osi z -ów nic się nie dzieje. W efekcie sześcian różowy przekształca się w równoległobok. W punktach P_1 , P_2 i P_3 pokazane są przykładowe składowe x -owe (czerwony kolor) i y -owe (niebieski kolor) wektorów przesunięcia przyporządkowanych tym punktom. Wektory narysowane na czarno to wektory wypadkowe.

tensor odkształceń (4.2.14) ma postać

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \beta\epsilon y & \beta\epsilon x & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 4.2.29$$

Zgodnie z (4.2.16) wektor przesunięcia względnego ma składowe

$$d\zeta_x = bdy; \quad d\zeta_y = adx; \quad d\zeta_z = 0 \quad 4.2.30$$

Mając na uwadze (4.2.13) możemy napisać

$$\varrho_x = \zeta_x + \beta\epsilon ydx + \beta\epsilon xdy \quad 4.2.31a$$

$$\varrho_y = \zeta_y + \gamma dx \quad 4.2.31b$$

$$\varrho_z = \zeta_z + 0 \quad 4.2.31c$$

Wprowadzone tu tensory napięć i odkształceń nabiorą pełnej wartości, gdy znajdziemy między nimi związki. Będziemy wtedy mogli, mając dany tensor napięć obliczyć powodowane przez te napięcia odkształcenia. Niestety związki między współrzędnymi tensorów nie są proste. Pełne wyłożenie odnośnej teorii zajęłoby objętość osobnego tematu. Na taką rozrzutność nie mogę sobie pozwolić. Ale przynajmniej pewną prostą postać tych związków jeszcze nakreślę. Tyle, że nie teraz. Teraz masz prawo być zmęczony tymi wszystkimi tensorami.