

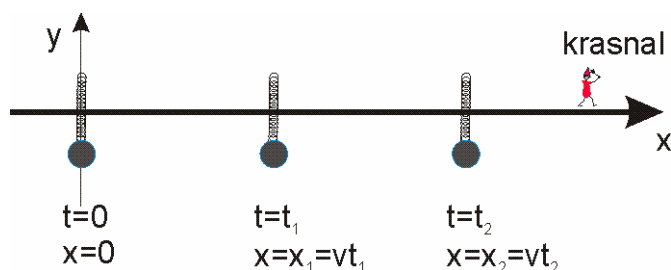
TEMAT
IX

FAŁE

1. Fala harmoniczna ♦

Fale harmoniczne są podstawowym pojęciem teorii fal. Powód jest taki sam jak w przypadku drgań harmoniczych – analiza fourierowska, dla której fale harmoniczne są klockami, z których budujemy matematyczny opis innych rodzajów fal. Co więcej, model fali harmonicznej możemy zbudować z zbioru oscylatorów harmoniczych. Wynika z tego, że najbardziej podstawową cegiełką w teorii fal jest oscylator harmoniczny.

Jednowymiarową falę harmoniczną możemy traktować jako zbiór oscylatorów harmoniczych rozłożonych wzdłuż prostej. W każdym punkcie tej prostej ustawiony jest jeden oscylator (rys. 1.1). Wzdłuż prostej biegnie, ze stałą prędkością v krasnal z czarodziejską różdżką. Magiczne własności różdżki powodują, że oscylator, przez który przebiegnie krasnal zaczyna drgać.



Rysunek 1.1. Wzdłuż prostej ustawione są oscylatory harmoniczne, tu przedstawione w postaci ciężarków na sprężynach. Po prostej biegnie krasnal z czarodziejską różdżką, która wprawia każdy z oscylatorów w ruch drgający z częstością ω . Ten zbiór drgających oscylatorów tworzy falę harmoniczną.

Drgania oscylatora harmonicznego możemy również reprezentować za pomocą fazorów (wirujących wektorów) (§TVIII 2.3). Zamiast oscylatorów, w każdym punkcie, ustawiamy fazor. Krasnal biegnąc wprawia w wirowanie z częstością ω kolejno mijane fazory, jak to jest pokazane na rysunku (1.2). Przyjmę dla wygody, że w momencie kiedy biegnący krasnal jest w punkcie $x=0$, na osi czasu mam współrzędną $t=0$. Mając to na uwadze, dla punktu w początku układu współrzędnych, ruch oscylatora harmonicznego reprezentowany jest przez fazor, którego obrót opisany jest wyrażeniami (§TVIII 2.3).

$$u(x = 0, t) = A e^{i\omega t} \quad 1.1$$

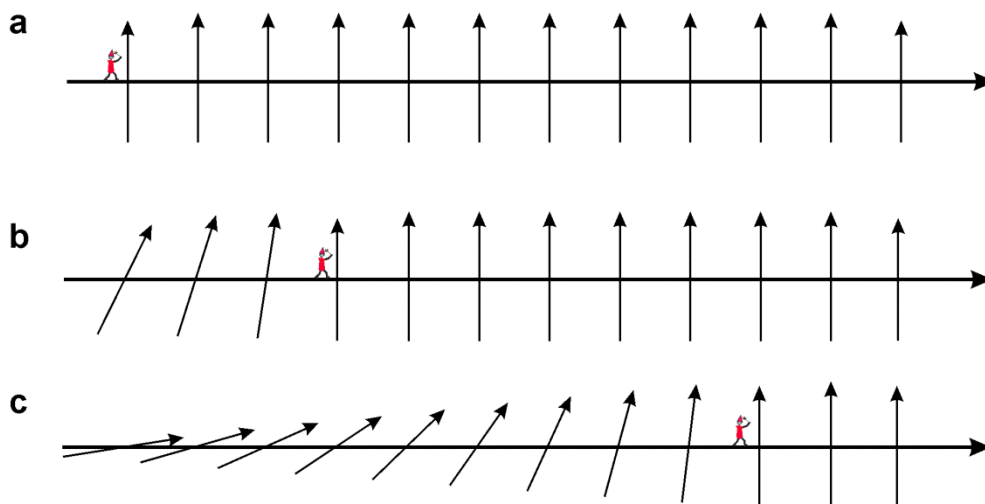
A oznacza amplitudę drgań oscylatora (jest to zarazem długość fazora). Aby z wyrażenia (1.1) dostać równanie oscylatora posłużę się funkcją Im .

$$u(x = 0, t) = A \text{Im}(e^{i\omega t}) = A \sin(\omega t) \quad 1.2a$$

Choć równie dobrze można by się posłużyć funkcją Re

$$u(x = 0, t) = A \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) = A \cos(\omega t) \quad 1.2b$$

Trzeba pamiętać, że faza fali wyrażonej wzorem (1.2a) jest przesunięta w fazie o $\pi/2$ względem fali wyrażonej wzorem (1.2b).



Rysunek 1.2. Wzdłuż promienia rozłożone są fazory. Biegając krasnal, mija kolejnej fazory puszcając je w ruch obrotowy z częstotliwością ω .

Do punktu o współrzędnej x_1 krasnal dobiegnie po czasie

$$t_1 = \frac{x_1}{v} \quad 1.3$$

W chwili t_1 oscylator w punkcie x_1 zacznie drgać (fazor zaczyna się obracać), tak jak zaczął drgać oscylator (obracać się fazor) w punkcie $x=0$ w chwili $t=0$. Pomyśl, czekam do chwili t_1 i w punkcie x_1 mamy drgania opisane równaniem (1.2a). Ale nie możemy wstawić do (1.1) czasu t_1 , gdyż chodzi nam dokładnie o takie drgania, jakie w chwili $t=0$ miały miejsce w punkcie $x=0$. Możemy to osiągnąć przez zamianę w równaniu (1.2a) t na: $t \rightarrow t - t_1$

$$u(x_1, t - t_1) = A \operatorname{Im}(e^{i\omega(t-t_1)}) = A \sin(\omega(t - t_1)) \quad 1.4$$

Gdy czas t osiągnie wartości t_1 , to wyrażenie $t - t_1 = 0$ a wzór (1.4) zachowa się tak jak (1.2) w chwili $t=0$ i w punkcie $x=0$. Wstawiając (1.3) do (1.4) mam

$$u(x_1, t - t_1) = A \sin\left(\omega\left(t - \frac{x_1}{v}\right)\right) \quad 1.5$$

Ostatnie wyrażenie mogę przekształcić w następujący sposób

$$u(x_1, t - t_1) = A \sin\left(\omega t - \omega \frac{x_1}{v}\right) = A \sin(\omega t - kx_1) \quad 1.6$$

gdzie,

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad 1.7a$$

Wielkość k ma wymiar odwrotności długości i nazywa się liczbą falową.

Definicja 1.1: Liczba falowa

Dla fali harmoniczej o długości λ , liczba falowa ma wartość wyrażoną wzorem

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad 1.7$$

Ponieważ punkt x_1 mogę wybrać zupełnie dowolnie będę po prostu pisał

$$u(x, t) = A \sin(\omega t - kx) \quad 1.8$$

Powyższe równanie opisuje jednowymiarową falę harmoniczną, czyli zbiór oscylatorów harmoniczych drgających z tą samą częstotliwością, rozłożonych wzdłuż prostej. Jednak oscylatory te nie drgają tak samo. Powiedzmy, że fala biegnie zgodnie z kierunkiem osi x -ów. Niech x_1 jest większe od x_2 . Wtedy oscylator w punkcie x_2 jest opóźniony w czasie o $(x_2 - x_1)/v$ w stosunku do oscylatora w punkcie x_1 , gdzie v jest prędkością krasnala. Może nie wypada za długo zaprzęgać do pracy krasnala. Nazwijmy zatem krasnala impulsem pobudzającym. Impuls pobudzający, zupełnie jak krasnala, wędruje wzdłuż osi x -ów, a gdzie dojdzie tam oscylator harmoniczny zaczyna drgać. Prędkość v tego impulsu jest zarazem prędkością fali; ściślej jest to prędkość fazowa fali. Czym dokładnie jest prędkość fazowa wyjaśnię za moment. Korzystając z (1.8) mogę obliczyć moment czasu, w którym zaczyna drgać oscylator umieszczony w punkcie x .

$$\omega t - kx = 0 \Rightarrow t = \frac{kx}{\omega} \quad 1.9$$

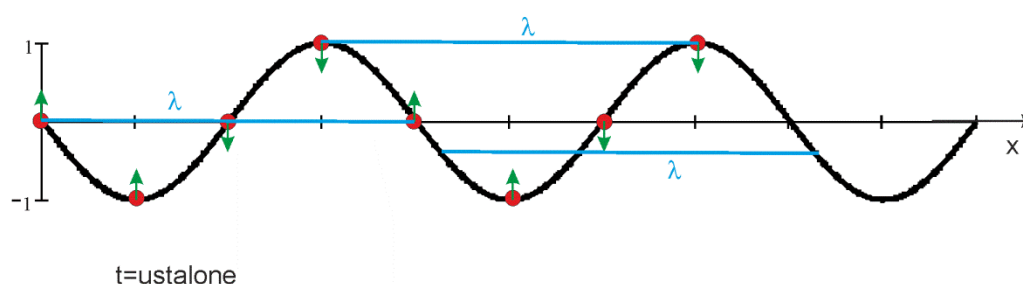
Ustalmy chwilę czasu $t = t_{ust}$. Dla tak ustalonej chwili czasu równanie fali (1.8) przyjmuje postać

$$u(t_{ust}, x) = A \sin(\omega t_{ust} - kx) \quad 1.10$$

Wyrażenie (1.10) jest funkcją tylko jednej zmiennej, to jest zmiennej x . Oznacza to, że wzdłuż osi x -ów wychylenia poszczególnych oscylatorów układają się tak, że całość wygląda jak przestrzenny oscylator harmoniczny (rys. 1.3.). To znaczy idąc wzdłuż osi x -ów z jednostajną prędkością widzimy, że położenie punktu drgającego zmienia się tak, jak w przypadku, gdy obserwujemy, stojąc w miejscu, zmianę w czasie położenia punktu na normalnym oscylatorze.

Jeżeli zatrzymamy się w jednym wybranym punkcie $x_{ustalone}$ to zobaczymy, pojedynczy oscylator harmoniczny (rys. 1.4). Odcinek czasu pomiędzy sąsiednimi szczytami oznaczą przez literę T – jest to oczywiście okres drgań oscylatora harmonicznego znajdującego się w punkcie o współrzędnej $x_{ustalone}$. Sensowne jest zatem stwierdzenie, że fala harmoniczna to nic innego jak ruch harmoniczny w czasie z częstością ω i przestrzeni z „częstością” k . Z powodów historycznych nie nazywamy wielkości k częstością przestrzenną, choć w pełni na to zasługuje. Porównajmy choćby wzory na częstość ω i na liczbę falową k .

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad 1.11$$

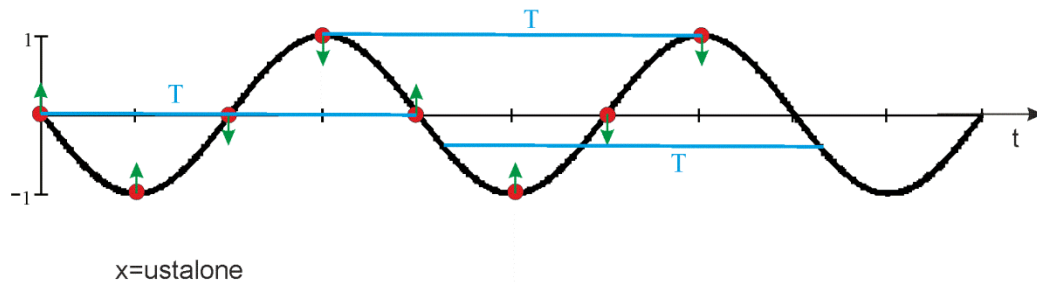


Rysunek 1.3. Wyobraźmy sobie prostą x , przez którą przebiegł impuls pobudzający kolejne oscylatory harmoniczne. Wszystkie punkty na interesującym nas odcinku tej prostej wykonują ruch harmoniczny. Zróbmy zdjęcie punktów drgających w wybranej chwili $t_{ustalone}$. Czarna linia pokazuje położenie punktów w tej wybranej chwili. Niektóre z nich zostały zaznaczone na czerwono wraz z strzałkami pokazującymi, w którą stronę będzie się poruszał punkt w następnej chwili. Niebieskie odcinki mają długość równą długości fali λ i pokazują przykład par sąsiednich punktów, które są w tym samym wychyleniu.

Ze rysunków (1.3) i (1.4) widać, że długości fali λ , pełni dla współrzędnej przestrzennej tą samą rolę co okres fali T dla współrzędnej czasowej, nadto wzór (1.11) daje nam identyczną zależność między ω i k a odpowiednio T i λ .

Powiedzmy, że w chwili $t=0$ fala harmoniczna ma w punkcie $x=0$ maksimum wychylenia. Pierwszy problem polega na tym, że takiej fali nie uzyskamy ze wzoru (1.7). Z tego wzoru wynika, że w chwili $t=0$ i w punkcie $x=0$ wychylenie fali jest równe zero. Wiemy jednak jak sobie z tym problemem poradzić. Do argumentu funkcji sinus, we wzorze (1.7) musimy dodać początkowe przesunięcie fazowe.

$$u(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \delta) \quad 1.11$$



Rysunek 1.4. W ustalonym punkcie prostej, drgania fali są drganiami oscylatora harmonicznego. Zauważ, że zamieniając na rysunku (1.3) t na x a x na t oraz λ na T , otrzymujemy takie same rysunki.

Równanie (1.11) jest ogólnym wyrażeniem na jednowymiarową falę harmoniczną. Jeżeli przyjmę $\delta = \pi/2$, to w chwili $t=0$ i w punkcie $x=0$ fala będzie miała maksymalne wychylenie i sinus można zamienić na kosinus, kładąc przy tym $\delta=0$. Przy okazji rozstrzygnę kwestię kierunku ruchu fali. W chwili początkowej $t=0$ ustawię układ współrzędnych w jednym z maksimów funkcji, co oznacza, że $\delta = \pi/2$. Gdzie znajdzie się maksymalne wychylenie w chwili nieco późniejszej $\delta t > 0$? Oczywiście, maksimum znajdzie się tam, gdzie argument funkcji sinus będzie miał wartości $\pi/2$. Stąd mam równanie

$$\omega \delta t - kx + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\omega \delta t}{k} \quad 1.12$$

Zatem, x jest dodatnie i grzbiet fali przesunie się w prawo. Możemy stwierdzić, że fala biegnie w kierunku zgodnym ze zwrotem osi x . Nic w tym dziwnego, w końcu właśnie w tym kierunku biegł krasnal na rysunku (1.2). Nie ma jednak powodów by krasnal nie biegł w drugą stronę. Wystarczy wzór (1.11) napisać w postaci

$$u(x, t) = A \sin(\omega t + kx + \delta) \quad 1.13$$

A znak przy x we wzorze (1.12) zmieni się na ujemny i fala będzie biegła w stronę przeciwną do kierunku osi x . Pisząc

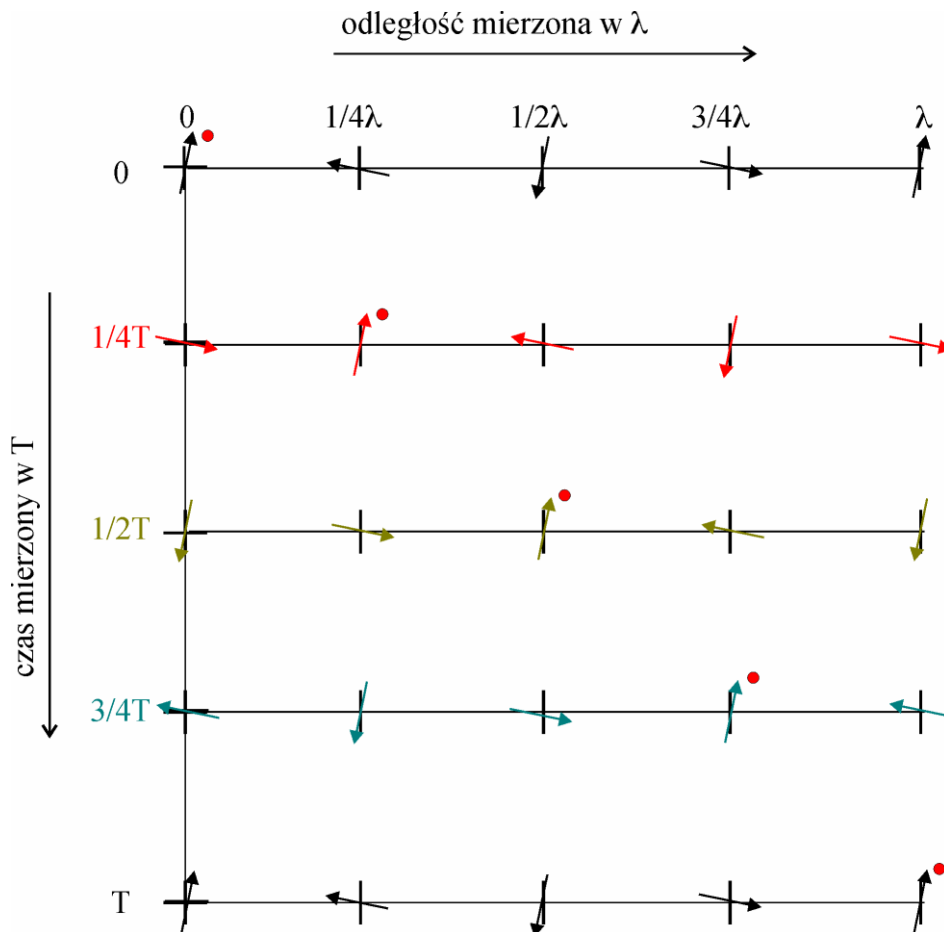
$$u(x, t) = A \sin(-\omega t + kx + \delta) \quad 1.14$$

Uzyskamy ten sam kierunek biegu fali co z równania (1.11) ale z czasem biegnącym do tyłu jakoś nam nieswojo, więc póki co zostaniemy przy wyrażeniu (1.11). Popatrz jeszcze na rysunek (1.5). Po przestudiowaniu rysunku (1.5), wiesz już, że prędkość fazowa fali, równa prędkości impulsu pobudzającego, wyraża się wzorem

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad 1.15$$

Widać również jak fazory reprezentują falę. Kąt fazora, czyli jego faza odpowiada fazie fali. Przyjmiemy, podobnie jak w teorii drgań harmoniczných, że długość fazora odpowiada amplitudzie fali.

$$u(x, t) = \underbrace{A}_{\substack{\text{długość} \\ \text{fazora}}} \sin\left(\underbrace{\omega t - kx + \delta}_{\text{faza fazora}}\right) \quad 1.16$$



Rysunek 1.5. Na osi przestrzennej kąt fazowy fazora powtarza się co odcinek λ , a na osi czasów co odcinek T . Czerwone kropki pokazują fazory o tej samej fazie. Możemy się zapytać: jak szybko biegnie czerwona kropka czyli wybrany kąt fazowy. Jak widać z rysunku, w czasie T kropka przebywa drogę λ , zatem jej prędkość wynosi λ/T . Wielkość ta to prędkość fazowa fali. Prędkość fazowa fali mówi również jak szybko przesuwa się szczyt fali. Dlaczego? Dlatego, że szczyt fali mamy dokładnie dla ustalonego kąta fazowego fazora.

Rysunek (1.5) wyjaśnia pojęcie prędkości fazowej.

Definicja 1.2: Prędkość fazowa fali harmonicznej

Prędkość fazowa fali harmonicznej jest to prędkość z jaką przesuwa się punkt reprezentujący wybraną fazę fali.

Faza fali jest pojęciem abstrakcyjnym. Jak widać na rysunku (1.1) żaden kawałek materii nie biegnie zgodnie z kierunkiem biegu fali. Choć rysunek ten przedstawia prosty model fali, a nie samą falę, to dokładniejsza analiza pokaże, że w realnej fali żadna cząstka materii nie porusza się zgodnie z kierunkiem biegu fali. Niewątpliwie natomiast przesuwa się punkt maksymalnego wychylenia, podobnie jak punkty o innym stopniu wychylenia, ale maksimum najłatwiej jest nam obserwować. Dlatego pojęcie prędkości fali wiążemy z tym ruchem. Podkreślam, że choć powiedziałem „punkt maksymalnego wchylenia”, to nie możemy z nim wiązać żadnej cząstki, gdyż jest to punkt abstrakcyjny. Kończąc tą część podam definicje wprowadzonych wielkości

Definicja 1.3: długość fali harmonicznej

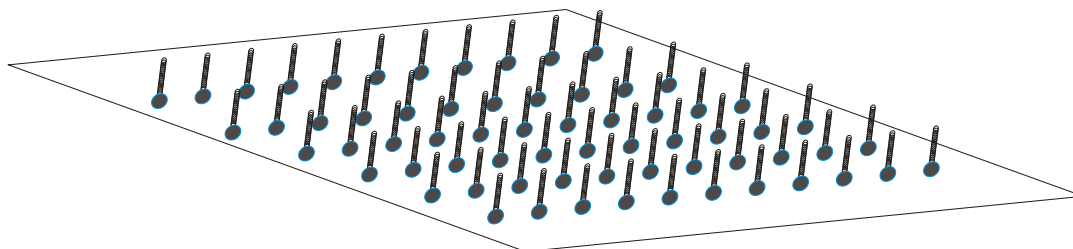
Długością fali harmonicznej nazywamy odległość między dwoma najbliższymi punktami, mierzonymi wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali, takimi, że w ustalonej chwili czasu, na końcach tego odcinka mamy fazory tej fali w tej samej fazie

Definicja 1.4: prędkość fazowa fali harmonicznej

Prędkością fazową fali harmonicznej nazywamy prędkość z jaką przesuwa się wybrany grzbiet tej fali.

1.1. Fale harmoniczne w wyższych wymiarach

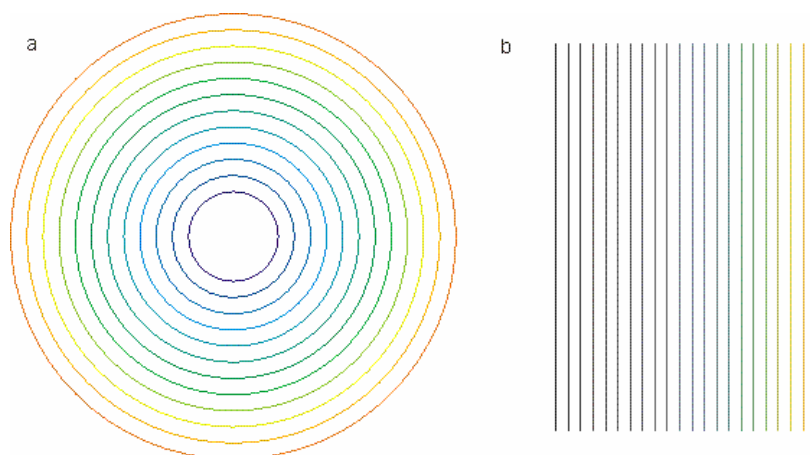
Naszą konstrukcję fali możemy rozszerzyć na dwa lub więcej wymiarów. Niech każdy punkt płaszczyzny ma swój oscylator harmoniczny lub wirujący wektor. W momencie kiedy przychodzi do niego impuls pobudzający oscylator zaczyna drgać (rys. 1.1.1).



Rysunek 1.1.1. Niech w każdym punkcie płaszczyzny umieszczony będzie oscylator harmoniczny. Pod wpływem kontaktu z generatorem drgań, poszczególne oscylatory zaczynają drgać. Całość tworzy dwuwymiarową falę.

Zabawa z biegnącym krasnałem staje się, w przypadku fali dwuwymiarowej, kłopotliwa. Krasnal może biec wzdłuż linii, a my potrzebujemy krasnala, który

biegłby wzdłuż wielu linii naraz. Zrezygnujmy z usług krasnali na rzecz obrazka przedstawionego na rysunku (1.1.2).

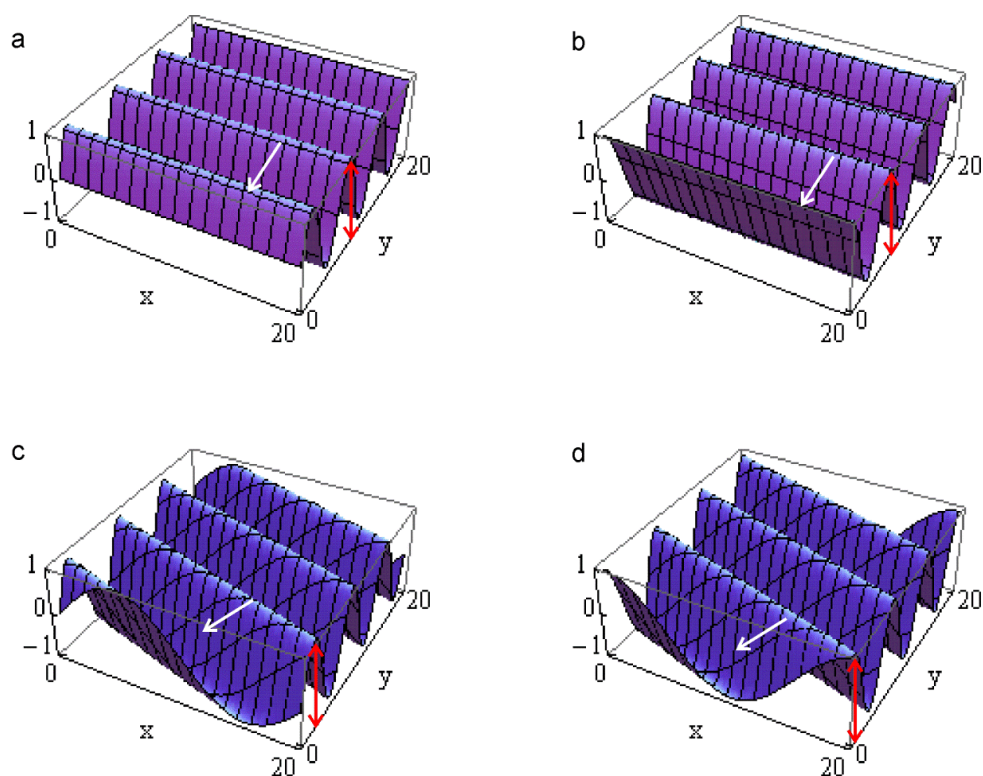


Rysunek 1.1.2. Dla fali rozchodzącej się po powierzchni impuls pobudzający nie może przesuwać się jak punkt. Impuls pobudzający musi rozchodzić się jak linia. Na rysunku (a) okrąg o rosnącym promieniu reprezentuje przykładową linię pobudzającą. Każdy następny okrąg przedstawia miejsca gdzie impuls generujący dotarł w kolejnej chwili czasu. Rysunek (b) generator przedstawiony jest jako biegnącą linią.

Mamy jeszcze jeden problem. Spójrz na rysunek (1.1.3). Fala harmoniczna rozchodząca się na powierzchni może to robić w różne strony. Sprawia to kłopot przy napisaniu równania takiej fali w postaci (1.11), gdzie współrzędna x była mnożona przez liczbę falową k . Teraz mamy dwie współrzędne x i y – i pytanie jak i przez co je mnożyć? Zanim to rozstrzygnę wprowadzę bardzo ważne pojęcie powierzchni falowej. Ustalmy chwilę czasu $t = \text{const}$. Dla ustalonej chwili czasu fala harmoniczna jednowymiarowa ma znany nam już przebieg (rys. 1.1.4). Zapytajmy o punkty, w których fala, w ustalonej chwili czasu, osiąga szczyt grzbietu. Punkty te będą się oczywiście powtarzały co długość fali λ . Zbiór tych punktów nazwiemy „powierzchnią” falową. Oczywiście w następnej chwili czasu te wybrane punkty przesuną się ale „powierzchnia” zachowa swój kształt. W jednowymiarowym przypadku powierzchnia falowa to zbiór punktów, czyli żadna powierzchnia, ale gdy fala rozchodzi się w trójwymiarowej przestrzeni, to takie punkty utworzą powierzchnię – stąd nazwa. Czas na definicję

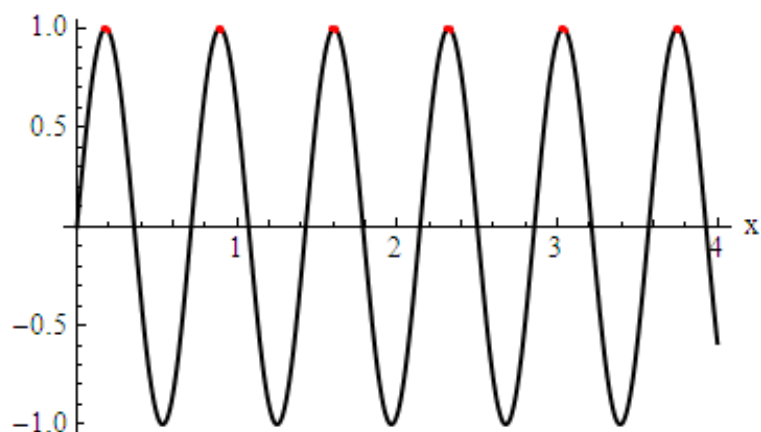
Definicja 1.1.1: Powierzchnia falowa

W ustalonej chwili czasu t_{ust} powierzchnia falowa fali jest zbiorem punktów, dla których faza tej fali przybiera wybraną wartość stałą



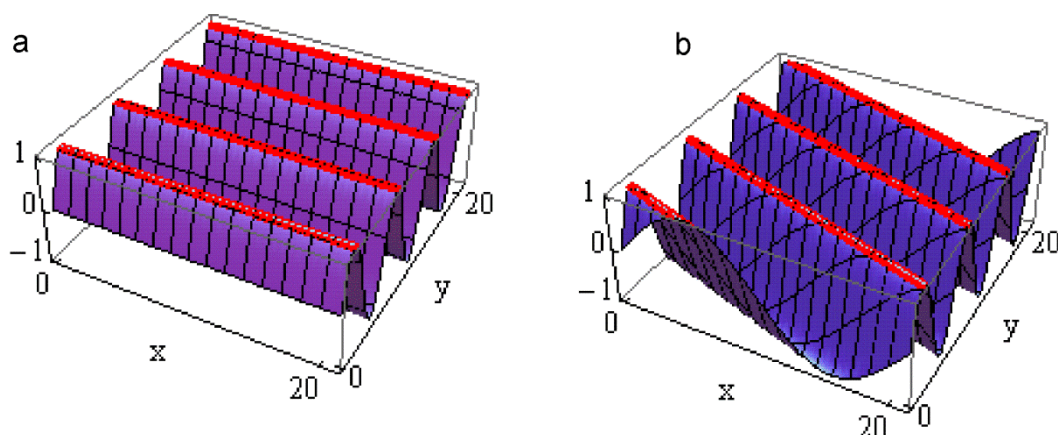
Rysunek 1.1.3. Przykład (a i b) – fala płaska dwuwymiarowa w dwóch różnych chwilach czasu. Fala rozchodzi się w kierunku równoległym do osi y , w przeciwną stronę do zwrotu tej osi, jak pokazuje biała strzałka. Czerwony odcinek ze strzałkami wskazuje położenie wybranego grzbietu w dwóch chwilach czasu różniących się o $T/4$; (c i d) – kierunek rozchodzenia się fali nie jest równoległy do osi y .

Przyjęta definicja oznacza, że w ustalonej chwili czasu możemy podzielić falę harmoniczną na zbiór powierzchni równej fazy (rys. 1.1.6).

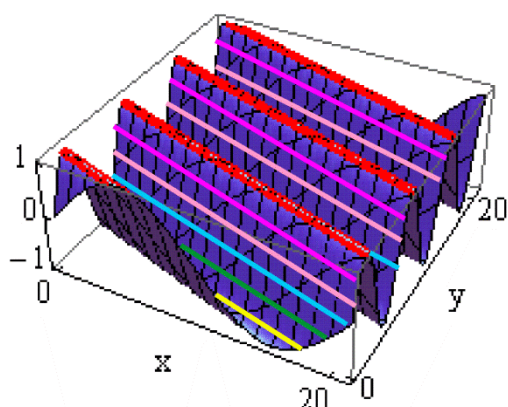


Rysunek 1.1.4. Czerwone kropki zaznaczają punkty, w których fala, w ustalonej chwili t , osiąga swoje maksimum.

Dla fali dwuwymiarowej „powierzchnie” falowe będą liniami oddległymi od siebie o λ (rys. 1.1.5 i 1.1.6).

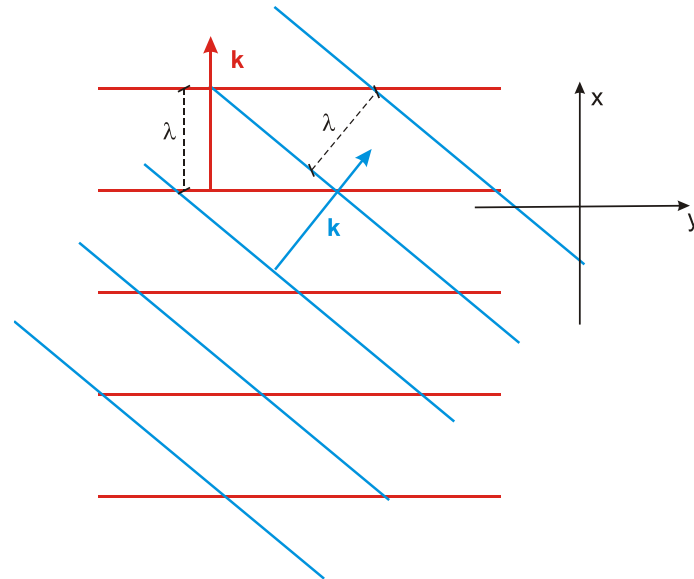


Rysunek 1.1.5. Przykłady dwóch dwuwymiarowych fal harmoniczných rozchodzących się w dwóch kierunkach. Czerwone linie znaczą punkty o maksymalnym wychyleniu. Utworzone z tych punktów linie oddalone są od siebie o długość fali.



Rysunek 1.1.6. Oprócz linii równej fazy związanych z grzbietem fali (czerwone linie) możemy wyróżnić inne linie równej fazy (narysowane innymi kolorami). Każdej wartości fazy możemy przyporządkować linię (powierzchnię dla fali w trzech wymiarach) równej fazy. W efekcie falę możemy podzielić na zbiór linii (powierzchni) równej fazy

Dla różnych fal dwuwymiarowych linie równej fazy mogą być różnie zorientowane. We wzorze na falę harmoniczną jednowymiarową (1.11) współrzędna x była mnożona przez wartość liczby falowej $k=2\pi/\lambda$. Można to ująć jeszcze inaczej, to nie współrzędna x była mnożona ale odcinek od początku układu współrzędnych do danego punktu x . Na płaszczyźnie taki odcinek możemy zamienić na wektor. A co z liczbą falową? Z liczby falowej też zrobimy wektor, nazywany wektorem falowym. Wektor falowy ma wartość $|\mathbf{k}|=2\pi/\lambda$ i jest prostopadły do powierzchni (linii) falowej (rys.1.1.7). Zwrot wektora pokazuje kierunek biegu fali.



Rysunek 1.1.7. Na rysunku zaznaczone są linie równej fazy dla dwóch dwuwymiarowych fal harmoniczných. Niebieskie linie pokazują linie równej fazy jednej fali harmoniczných, a linie czerwone pokazują linie równej fazy innej fali harmoniczných. Na płaszczyźnie „powierzchnie falowe” mogą być różnie zorientowane, w efekcie fala rozchodzi się w różne strony. Aby to uwzględnić z liczby falowej robimy wektor falowy prostopadły do powierzchni falowej i o wartości $2\pi/\lambda$. Zwrot wektora jest zgodny z kierunkiem propagacji fali. Zatem fala czerwona porusza się w kierunku osi x -ów i zgodnie ze zwrotem tej osi. Fala niebieska porusza się na skos w stosunku do osi x -ów i y -ów.

We wzorze (1.14) mnożenie kx , zastąpimy przez iloczyn skalarny wektora falowego i wektora wodzącego: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y$. Zobacz na rysunku (1.1.8), że takie wyrażenie mówi ile grzbietów fali mieści się w odcinku o długości r , przy czym liczba ta jest powiększona 2π razy. To jest dokładnie to samo co „mówi” wyrażenie kx w przypadku fali jednowymiarowej. Jak widać z rysunku (1.1.8) równanie fali możemy zapisać w postaci

$$u(x, t) = A \sin(\omega t - kr_{\parallel} + \delta) \quad 1.1.1$$

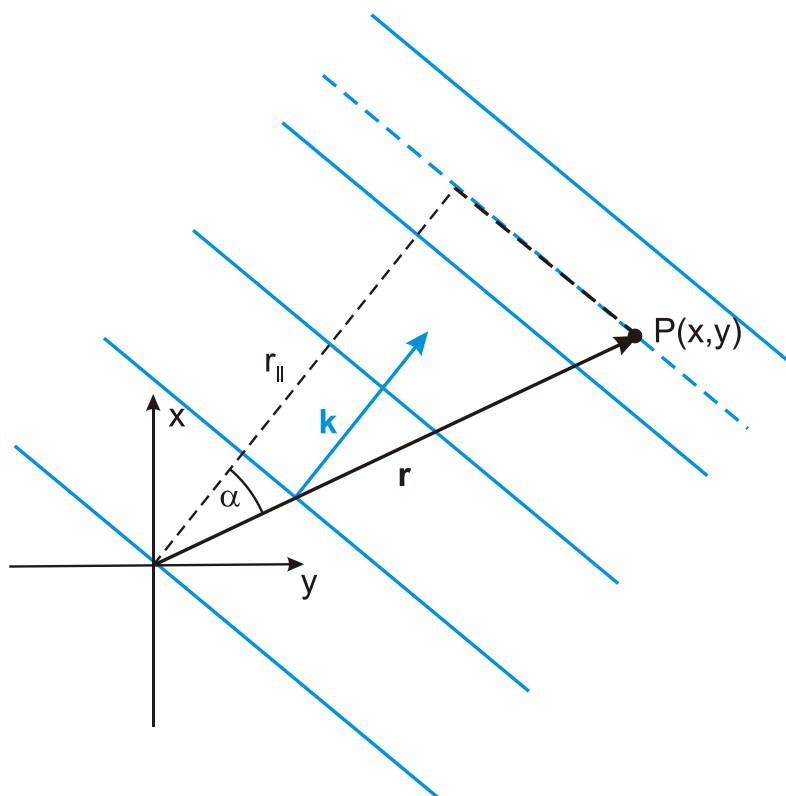
Iloczyn kr_{\parallel} jest równy iloczynowi skalarnemu wektorów $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, stąd mamy

$$u(x, t) = A \sin(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta) \quad 1.1.2$$

W zapisie zespolonym (§TVIII 2.3) równanie fali (1.1.2) ma postać

$$u(x, t) = A \operatorname{Re}(e^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta)}) \quad 1.1.2a$$

Równanie (1.1.2) opisuje falę harmoniczną w dwóch wymiarach. Bez trudu możemy równanie fali napisać dla trzech wymiarów. Sprowadzi się to do przepisania równania (1.1.2) i stwierdzenia, że wektory \mathbf{k} i \mathbf{r} mieszkają teraz w trójwymiarowej przestrzeni. Na szczęście czas ma tylko jeden wymiar, więc nie ma obawy, że z wielkości t i ω , będziemy musieli zrobić wektory.



Rysunek 1.1.8. Chcemy wyznaczyć parametry fali w punkcie P. Przez punkt P przechodzi jakaś powierzchnia falowa; narysowana niebieską linią przerywaną. Faza na tej linii jest inna niż na liniach narysowanych kreską ciągłą, ale ta inna wartość fazy jest taka sama wzdłuż całej linii kreskowanej. Oznacza to, że wyznaczenie parametrów fali w punkcie P można sprowadzić do wyznaczenia tych parametrów w którymkolwiek punkcie na niebieskiej linii przerywanej. W tej sytuacji zamiast wektorem \mathbf{r} możemy zająć się jego rzutem na linię prostopadłą do linii równej fazy, czyli wektorem r_{\parallel} . Idąc wzdłuż linii prostopadłej sprowadzamy wszystko do przypadku jednowymiarowego (nasza ulubiona droga wiadra (§TI)), czyli równanie fali ma postać (1.1.1). Aby policzyć ile grzbietów fali mieści się w wektorze \mathbf{r} należy obliczyć rzut r_{\parallel} tego wektora na prostą równoległą do wektora falowego \mathbf{k} , a następnie pomnożyć długość tego rzutu przez wartość wektora falowego. Operacja ta jest równoważna obliczeniu iloczynu skalarnego wektora \mathbf{r} i \mathbf{k} , co prowadzi do równania (1.1.2)

Nie ma również przeszkód, aby uogólnić nasz model fazorowy fali na trzy wymiary. Teraz każdy punkt przestrzeni ma swój własny fazor (lub oscylator harmoniczny). Impuls pobudzający musi przyjąć postać powierzchni. Gdy chcemy wygenerować falę harmoniczną powierzchnia generująca falę musi przesuwać się w zadanym kierunku. Oscylatory w punktach, do którego dotarła powierzchnia generująca zaczynają drgać. Oznacza to oczywiście, że geometria powierzchni falowej jest taka sama jak geometria linii (powierzchni) pobudzającej.

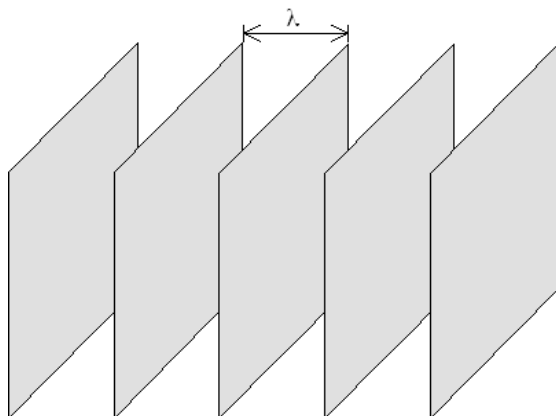
Dla fali rozchodzącej się w przestrzeni zbiór punktów, w których fazory, w ustalonej chwili czasu, mają taką samą fazę tworzy układ powierzchni. Dla fali harmonicznnej jest to zbiór równoległych płaszczyzn oddalonych od siebie o λ

(rys. 1.1.9). W trzech wymiarach powierzchnie falowe stały się wreszcie powierzchniami. Fala harmoniczna w trzech wymiarach nazywana jest falą płaską, właśnie ze względu na kształt powierzchni falowych.

Definicja 1.1.2: Fala płaska

Fala harmoniczna trójwymiarowa nazywana jest falą płaską

Wektor falowy pokazuje, w przypadku fali płaskiej, kierunek przesuwania się powierzchni falowych.



Rysunek 1.1.9. W przypadku fali harmonicznej w trzech wymiarach punkty maksymalnego wychylenia tworzą zbiór płaszczyzn oddalonych o λ .

Pokażę, że z równania (1.1.2) dla fali w trzech wymiarach rzeczywiście wynika, że powierzchnie falowe są zbiorem równoległych płaszczyzn. W pierwszym kroku ustalę chwilę czasu na powiedzmy t_u . Na powierzchniach falowych, w ustalonej chwili czasu, faza fali musi być stała (def. 1.1.1)

$$\omega t_u - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta = \text{const} + 2\pi m \quad 1.1.3$$

Aby ułatwić sprawę przeniosę się do układu współrzędnych, w którym wektor falowy \mathbf{k} jest równoległy do osi z -et. W tym nowym układzie współrzędnych wektor falowy ma współrzędne $\mathbf{k}(0, 0, k'_z = |\mathbf{k}|)$, a wektor wodzący $\mathbf{r}(r'_x, r'_y, r'_z)$. W nowym układzie współrzędnych równanie (1.1.3) przyjmie postać

$$\omega t_u - k'_z \cdot r'_z + \delta = \text{const} + 2\pi m \quad 1.1.4$$

Obliczam zetową współrzędną wektora \mathbf{r}

$$r'_z = \frac{\delta + \omega t_u - \text{const} - 2\pi m}{(k'_z = |\mathbf{k}|)} \quad 1.1.5$$

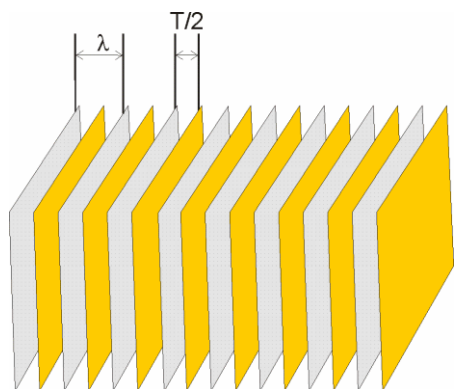
Biorąc pod uwagę (1.6) mam

$$r'_z = \lambda \frac{\delta + \omega t_u - \text{const}}{2\pi} - \lambda m \quad 1.1.6$$

Równanie to mówi nam, że dla ustalonego m , wartość współrzędnej z' punktów, w których faza, w ustalonej chwili czasu, ma wartość const modulo 2π , jest stała.

Zbiór punktów o stałej wartości z' wyznacza płaszczyznę prostopadłą do osi z' . Gdy zmienimy m o jeden to wartość z' zmieni się o λ , co wyznaczy nam drugą płaszczyznę prostopadłą do osi z' . Pokazaliśmy zatem, że w trzech wymiarach powierzchnia falowa fali opisanej wzorem (1.1.2), jest zbiorem płaszczyzn prostopadłych do kierunku wyznaczonego przez wektor falowy \mathbf{k} (wektor falowy jest równoległy do osi z'), przy czym kolejne płaszczyzny są odległe od siebie o λ (rys. 1.1.8).

Powierzchnie falowe obliczane są przy ustalonej chwili czasu t . Gdy czas płynnie powierzchnie przesuwać się (rys. 1.1.9).



Rysunek 1.1.9. Szare płaszczyzny wyznaczają powierzchnię falową fali płaskiej w pewnej chwili t . W chwili $t+T/2$, wszystkie te powierzchnie przesunę się o $\lambda/2$ - powierzchnie żółte.

Wzór (1.1.2) może opisywać falę harmoniczną w dowolnej liczbie wymiarów. Na przykład w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej mamy czterowymiarowe wektory \mathbf{k} i \mathbf{r} . Jak się można domyśleć, powierzchnie falowe fali płaskiej będą zbiorem trójwymiarowych przestrzeni odległych od siebie o λ . My jednak nie będziemy wykraczali poza trzy wymiary.

Warto również zauważyć, że nie jestem w stanie narysować trójwymiarowej fali, tak jak fali dwuwymiarowej (rys. 1.1.5). Na wyrysowanie fali dwuwymiarowej potrzebuję dwóch wymiarów przestrzennych i jednego wymiaru na wartość wychylenia – w sumie trzech wymiarów. Na wyrysowanie fali trójwymiarowej potrzebuję trzech wymiarów przestrzennych i jednego wymiaru na wyrysowanie wychylenia – w sumie czterech wymiarów. Przyznam, że nie opanowałem jeszcze rysowania obiektów czterowymiarowych. Wobec tego geometrię fali trójwymiarowej będę reprezentował przez powierzchnie falowe, co zupełnie wystarczy.

1.2. Fale bardziej ogólnie

Nie chcę abyś myślał, że fale mogą być tylko płaskie. Jak już na wstępie zaznaczyłem fale harmoniczne proste są elementarnymi cegiełkami, z których budujemy opis fal o bardziej złożonej naturze. Przykład koncentrycznych „prawie” kręgów poniżej pokazuje, że powierzchnie fal mogą przybierać najróżniejsze kształty. Jak ogólnie możemy określić falę? Spróbujmy tak:

Definicja 1.2.1: Fala klasyczna

Fala klasyczna to zaburzenie rozchodzące się w ośrodku materialnym lub próżni, któremu towarzyszy transport energii, bez ekwiwalentnego transportu masy.

Dlaczego fala klasyczna? Bo w mechanice kwantowej mamy również fale, tyle że nie niosą one żadnej energii, a rozkłady amplitud prawdopodobieństwa. Nie możemy przez źle sformułowaną definicję zamykać sobie drogi do mechaniki kwantowej. Do fal klasycznych zaliczamy również fale elektromagnetyczne, gdzie sprawa jest subtelniejsza niż w mechanice (ale nie tak subtelna jak w mechanice kwantowej), gdyż fale te rozchodzą się w próżni.



Rysunek 1.2.1. Fala na powierzchni wody nie jest płaska ale quasi-kołowa. Widać, że punkty maksymalnego wychylenia tworzą linie o geometrii zbliżonej do koła.

Co oznacza ów brak ekwiwalentnego transportu masy? Wyjaśnia to rysunek (1.2.2). Gdy porusza się cząstka, energia przez nią przenoszona jest związana z ruchem tej cząstki. Mamy jasny związek między transportem masy i energii. Fala oznacza, że cząstki ośrodka, owszem lokalnie poruszają się, ale nie biegną wraz z energią. Energia jest przekazywana przez popychanie kolejnych sąsiadów, którzy uzyskują przez to energię kinetyczną, po to by biegać tam i z powrotem w niewielkim obszarze i popychać kolejnych sąsiadów.

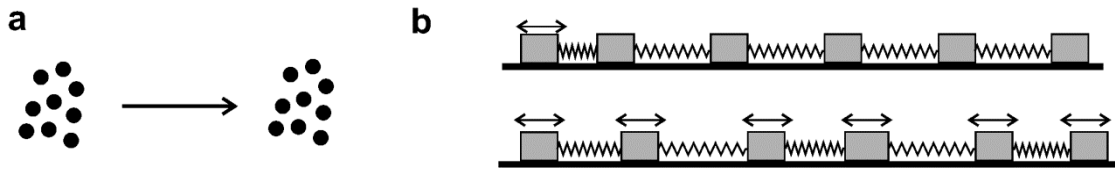
Powierzchnia falowa nie musi być płaska (fala nie musi być harmoniczna). Rysunek (1.2.3) pokazuje falę o geometrii sferycznej. Choć geometria powierzchni falowych jest sferyczna, falę taką nazywamy falą kulistą.

Równanie fali o powierzchniach falowych innych niż płaskie wyrażają się innymi zależnościami. Na przykład wzór na falę kulistą ma postać

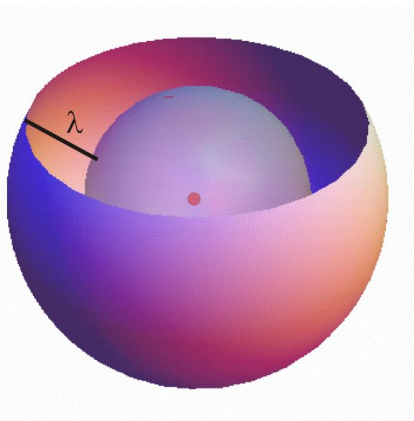
$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{|\mathbf{r}|} \sin\{\omega t - |\mathbf{k}||\mathbf{r}| + \delta\} \quad 1.2.2$$

W zapisie zespolonym równanie fali (1.2.2) ma postać

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{|\mathbf{r}|} \operatorname{Re}(e^{i(\omega t - |\mathbf{k}||\mathbf{r}| + \delta)}) \quad 1.2.2a$$



Rysunek 1.2.2. a) grupa cząstek przemieszcza się w przestrzeni, przenosząc jednocześnie i masę i energię; b) sieć ciężarków połączona sprężyną. Gdy ściśniemy pierwszą sprężynę i ją puścimy pierwszy ciężarek zacznie oscylować pobudzając do oscylacji drugi, drugi pobudzi trzeci i tak dalej. W układzie ciężarków pojawi się fala. Gdy ostatni ciężarek zacznie oscylować, będziemy mogli powiedzieć, że część energii pobudzenia została przeniesiona na koniec układu ciężarków. Nie jest to jednak związane z przeniesieniem masy z początku na koniec łańcucha ciężarków. Ponieważ kierunek oscylacji poszczególnych ciężarków jest zgodny z kierunkiem przenoszenia energii przez falę, mamy tu do czynienia z falą podłużną.



Rysunek 1.2.3. Powierzchnia falowa fali kulistej to, zbiór współśrodkowych sfer. Kolejne sfery mają promień o λ większy od poprzedniej. Sfery są wyznaczone w ustalonym czasie. Gdy czas płynie sfery zwiększają swój promień, jednak w każdej chwili zachowują wzajemne odległości λ .

Szeroką klasę fal, interesujących z punktu widzenia praktycznego można opisać wzorem

$$u(\mathbf{r}, t) = \underbrace{A(\mathbf{r}, t)}_{\text{długość fazora}} \sin\left(\underbrace{\omega t - \varphi(\mathbf{r}) + \delta}_{\text{faza fazora}}\right) \quad 1.2.2$$

W zapisie zespolonym równanie fali (1.2.2) ma postać

$$u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) \operatorname{Re}(e^{i(\omega t - \varphi(\mathbf{r}) + \delta)}) \quad 1.2.2a$$

Dla fali harmoniczej mamy

$$A(\mathbf{r}, t) = \text{const} \quad 1.2.3a$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad 1.2.3b$$

Dla fali kulistej danej wzorem (1.2.1) mamy

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{const}{|\mathbf{r}|} \quad 1.2.4a$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = |\mathbf{k}||\mathbf{r}| \quad 1.2.4b$$

Dla fali nieharmonicznej, takie parametry jak długość fali, częstość, okres mogą nie być dobrze określone (rys. 1.2.4). Jednak dla fal określonych wzorem (1.2.2) dalej dobrze określona jest powierzchnia falowa. Mając wzory (1.2.2) powierzchnię falową mogą zdefiniować tak

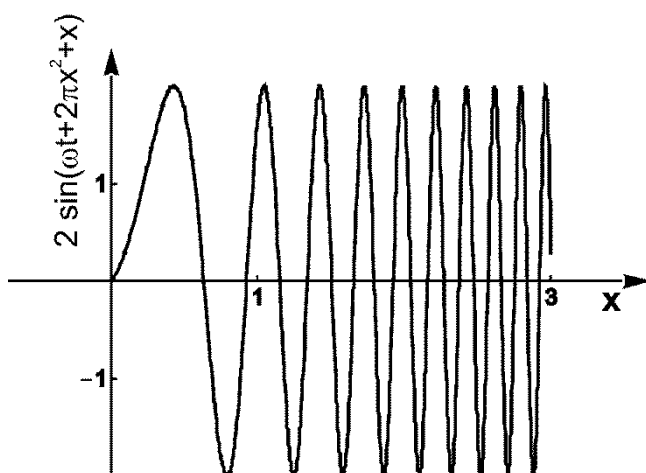
Definicja 1.2.1: Powierzchnia falowa

Dla fali danej wzorem

$$u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t)\sin(\omega t + \varphi(\mathbf{r}) + \delta) \quad 1.2.5$$

powierzchnia falowa jest zbiorem punktów, które dla ustalonej chwili czasu t_{ust} spełniają równanie

$$\omega t_{ust} + \varphi(\mathbf{r}) + \delta = const \quad 1.2.6$$



Rysunek 1.2.4. Wykres przebiegu przykładowej jednowymiarowej fali nieharmonicznej, w ustalonej chwili czasu. Częstość drgań rośnie wraz z współrzędną x przy stałej ich amplitudzie. W takiej sytuacji trudno jest podać wartość długości fali.

Powróć jeszcze na moment do wektora falowego. Może on być określony, tak jak dla fal płaskich, dla tych fal, dla których możemy łatwo zdefiniować długości fali. Przykładem takiej niepłaskiej fali jest fala kulista. W takim przypadku wektor falowy ma dobrze określoną wartość poprzez długość fali (1.10) i jest prostopadły do powierzchni falowej i pokazuje kierunek rozchodzenia się fali. Wektor falowy może być zdefiniowany również w bardziej ogólnym przypadku, ale do tego jeszcze dojdziemy.

Uwaga 1.2.1:

W ośrodkach optycznie anizotropowych wektor falowy zwykle nie jest prostopadły do powierzchni falowej. O tym dokładniej powiem w temacie poświęconym polaryzacji światła (TXIII)

1.3. Fale jeszcze bardziej ogólnie

Spróbujmy do problemu fal podejść jeszcze bardziej ogólnie. Zaczniemy do przypadku jednowymiarowego. Pomyślmy o impulsie rozchodzącym się na rozciągniętej strunie, wodzie czy w innym ośrodku, z prędkością v . Zakładamy przy tym, że postać impulsu opisana przez funkcję $f(x,t)$ nie zmienia się podczas propagacji. Mamy zatem równanie

$$u(x,t) = f(x - vt) \quad 1.3.1$$

Obliczmy drugą pochodną cząstkową tego wyrażenia po położeniu x .

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,t) = \frac{\partial}{\partial(x-vt)} f(x-vt) \frac{x-vt}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(x-vt)} f(x-vt) \quad 1.3.2a$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial^2(x-vt)} \quad 1.3.2b$$

Obliczmy drugą pochodną cząstkową tego wyrażenia po czasie t .

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial(x-vt)} f(x-vt) \frac{x-vt}{\partial t} = -v \frac{\partial f(x-vt)}{\partial(x-vt)} \quad 1.3.3a$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = v^2 \frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial^2(x-vt)} \quad 1.3.3b$$

Kombinując równania (1.3.2b) i (1.3.3b) mamy

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) \quad 1.3.4$$

Równanie to nazywamy równaniem falowym. Dla większej liczby wymiarów będziemy mieli

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\mathbf{r},t) \quad 1.3.5$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 \quad 1.3.6a$$

$$\square = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad 1.3.6b$$

Pierwszy symbol (odwrócony trójkąt) nazywany jest laplasjanem (operatorem laplasjan), drugi symbol (kwadrat) to operator d'Alemberta. O operatorach będzie więcej w temacie (TXIV). W tym momencie symbole te są dla nas sposobem na krótki zapis równania falowego (1.3.5).

$$\square u(\mathbf{r}, t) = 0 \quad 1.3.7$$

Łatwo jest pokazać, że równania opisujące fale płaskie harmoniczne są rozwiązaniami równania falowego. Zatem (1.3.7) jest równaniem różniczkowym, którego rozwiązaniem są fale płaskie. Ponieważ jest to równanie liniowe, to również suma rozwiązań fal płaskich jest rozwiązaniem tego równania. Dla ruchu falowego równanie (1.3.7) jest tym czym dla ruchu punktów materialnych są równania ruchu Newtona.

2. Zasada Huygensa ♦

Z holenderskim fizykiem Christiaanem Huygensem spotkaliśmy się już przy okazji omawiania zegara wahadłowego (§TVIII 1.3). Huygens jest autorem zasady leżącej u podstaw naszego rozumienia zjawisk falowych. Zasada tę sformułował w oparciu o obserwacje rozchodzenia się fal na wodzie. Według koncepcji Huygensa, każdy punkt ośrodka, do którego dochodzi zaburzenie (czoło fali) sam staje się źródłem zaburzenia, które rozchodzi się w postaci fali kulistej (w trzech wymiarach) lub kołowej (w dwóch wymiarach) (rys.2.1). A obwiednia tych wszystkich fal wtórnych jest powierzchnią fali wypadkowej (rys.2.2).

Określenie 1.3.1: Zasada Huygensa

Każdy punkt ośrodka, do którego dociera fala, staje się źródłem fali wtórnej. Jeżeli ośrodek jest jednorodny i izotropowy fala wtórna jest falą kulistą (kołową w dwóch wymiarach). Obwiednia fal wtórnych wyznacza powierzchnię frontu falowego w chwili późniejszej.



Rysunek 2.1. Ze źródła punktowego rozchodzi się fala. Po pewnym czasie fala ta dociera do pewnego punktu i pobudza go do drgań. Pobudzony punkt sam stał się punktowym źródłem fali, tzw. fali wtórnej.

Wynika z tego, że czoło rozchodzącej się fali pełni rolę impulsu pobudzającego drgania. Docierając do kolejnych punktów ośrodka pobudza te punkty do ruchu drgającego. Tak pobudzony punkt staje się źródłem kołowej (w dwóch wymiarach) lub kulistej (w trzech wymiarach) fali wtórnej. Przypomina to konstrukcje z rysunków (1.1.1 i 1.1.2), z tą różnicą, że teraz nie potrzebujemy krasnala jako impulsu pobudzającego, gdyż jego rolę pełni sama fala. Potrzebne jest tylko źródło pierwszego pobudzenia. Na przykład, dla fal wodnych może to być cyklicznie uderzający o powierzchnię wody rysik, a dla fal dźwiękowych drgania strun głosowych, czy membrany w głośniku. Fala jednowymiarowa przedstawiona na rysunku (1.2.2a) jest dobrą ilustracją samowzbudności fali. Kolejne ciężarki pobudzają do ruchu swoich sąsiadów bez konieczności angażowania krasnala.

Huygens zapostulował, że światło jest również falą rozchodzącą się zgodnie z jego zasadą. Dziś możemy stwierdzić, że była to prorocza wizja. Jednak w XVII wieku nie miała ona wielkich szans powodzenia, do czego za chwilę powrócę. Co powodowało Huygensem? Zapewne intrygujące obserwacje załamania, odbicia, a nade wszystko ugięcia (dyfrakcji) fal wodnych na przeszkodach skierowały jego uwagę na zjawiska falowe. Zjawiska odbicia i załamania światła były znane od czasów starożytnych. Zjawisko ugięcia (dyfrakcji) światła przejawia się w naszym życiu w subtelny sposób. Zwykle go nie postrzegamy, a kiedy już je zauważamy to nie przykuwa ono naszej uwagi. Dziś, ze względu na powszechność sztucznego oświetlenia ze zjawiskiem dyfrakcji mamy okazję spotkać się znacznie częściej niż w dawnych czasach. Przykład efektów dyfrakcyjnych pokazuje rysunek (2.2). Pierwsze, znane nam, uważniejsze obserwacje zjawiska dyfrakcji są autorstwa Włocha Francesco Grimaldiego (1665). Grimaldi odnotował między innymi, że wiązka światła przechodząca przez kołowy otwór, za otworem traci swój pierwotny kształt i rozchodzi się w objętość stożka. Grimaldi zaproponował też nazwa „dyfrakcja” do łacińskiego „diffringere”, co można tłumaczyć jako rozbicie na kawałki. Nazwa odnosiła się do faktu, że wiązka światła ulegająca dyfrakcji rozszczepia się (rozbija się) na różne kierunki. Jednak w czasach, gdy ilościowy opis światła był w powijakach; nie zwracano na te zjawiska większej uwagi. Było to coś zbyt subtelnego, by miało istotny wpływ na bieg zdarzeń, na których koncentrowano wówczas uwagę. Sytuacja zmieniła się wraz z rozwojem geometrycznej teorii propagacji światła. Teoria geometryczna dała nam narzędzia do ilościowej analizy zjawisk optycznych. Jej orędownik Newton musiał się już zmierzyć i z dyfrakcją i z interferencją fal, co na tym wczesnym etapie dało się jeszcze opisać w ramach teorii promienia¹.



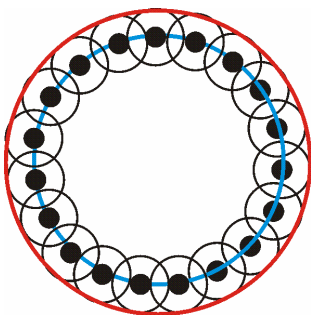
Rysunek 2.2. Dyfrakcja światła latarni ulicznej na firance utkanej z przeplatających się pod kątem prostym nitek; Z pracy inżynierskiej Agnieszki Juszczyk: „Obrazy dyfrakcyjne wokół nas”. Praca wykonana, pod kierunkiem J. Masajada, w Instytucie Fizyki Politechniki Wrocławskiej w 2012

¹ Ścisłej rzecz biorąc była to teoria korpuskularna, to znaczy światło było traktowane jako zbiór cząsteczek, a promienie świetlne były śladem torów tych cząsteczek.

Drugą przyczyną, dla której zasada Huygensa musiał swoje odczekać była jej złożoność obliczeniowa. Była ona zbyt duża jak na możliwości XVII i XVIII wiecznej matematyki. Powiedzmy, że w pewnej chwili czoło fali tworzy okrąg (np. na powierzchni wody). Każdy punkt, do którego dotrze to czoło zaczyna drgać i emitować własną falę wtórną. Możliwie krótką chwilę potem należałoby wyznaczyć obwiednię wszystkich fal wtórnych (rys. 2.3). Obwiednia wyznaczyłaby geometrię czoła fali (frontu falowego) chwilę później. To nowo wyznaczone czoło fali pobudziłoby kolejne punkty do drgania i zabawa zaczęłaby się na nowo. Na szczęście w jednorodnym (izotropowym) środowisku sprawy się mocno upraszczają. Środowisko jest jednorodne kiedy prędkość rozchodzenia się fali nie zależy od kierunku. Fakt ten znamienicie uprasza prowadzenie analizy. Jeżeli w pewnym momencie mamy kołowe (kuliste) czoło fali, to po chwili Δt będziemy mieli dalej kołowe (kuliste) czoło fali, tyle że jego promień będzie o $v\Delta t$, gdzie v jest prędkością fali, większy.

Fakt 2.1:

Z zasady Huygensa wynika, że w środowisku izotropowym i jednorodnym fala kulista (kołowa) zachowuje swoją geometrię, zmienia się tylko promień sfery (okręgu).



Rysunek 2.3. Niebieski okrąg przedstawia zbiór punktów, do których doszła, w wybranej chwili, fala wyemitowana z źródła punktowego. Każdy punkt niebieskiego okręgu staje się źródłem fali wtórnej – fale te wyrysowane są jako czarne okręgi i powinny być możliwie małe, tak aby czas, po którym wyznaczamy obwiednię fal wtórnych był możliwie krótki. Obwiednia, czyli linia styczna łącząca poszczególne fale wtórne wyznacza kształt czoła fali chwilę później. Tutaj obwiednia wyrysowana jest linią czerwoną. Jak widać w ośrodku jednorodnym fala kołowa (kulista) zachowuje swoją geometrię.

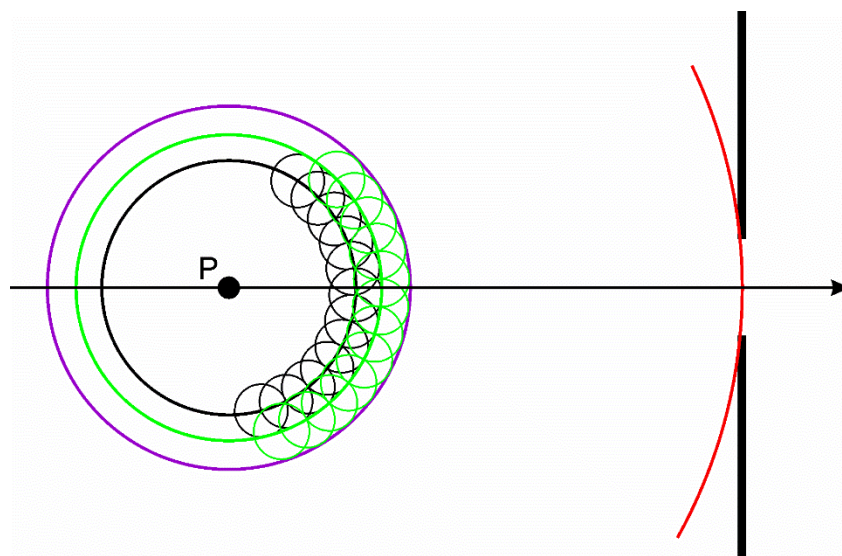
Podobny wniosek możemy wysnuć dla fali płaskiej. W środowisku jednorodnym fala płaska pozostaje falą płaską, a jej czoło przesuwa się z prędkością v .

Fakt 2.2:

Z zasady Huygensa wynika, że w środowisku izotropowym i jednorodnym fala płaska zachowuje swoją geometrię, a jej czoło przesuwa się z prędkością fazową.

Powyższe dwa fakty znacznie ułatwiają korzystanie z zasady Huygensa. Gdy fala z punktu źródłowego Z kieruje się na szczelinę, lub inną przeszkodę to w przestrzeni między źródłem a przeszkodą nie musimy obliczać, krok po kroku,

propagującej się fali. Wiemy, że do przeszkody zachowa ona kształt kołowy (kulisty). Rachunku zaczynają się dopiero w płaszczyźnie przeszkody (rys. 2.4).



Rysunek 2.4. Z punktu źródłowego P emitowana jest fala kulista. Zadanie polega na wyznaczeniu geometrii frontu falowego za otworem. Pomiedzy otworem a punktem źródłowym srodowisko jest izotropowe. Kształt fali na wejściu do otworu powinniśmy wyznaczać, krok po kroku, rysując kolejne serie fal wtórnych wygenerowanych na kolejnych frontach, przy czym kroki powinny być bardzo, bardzo drobne. Rysunek pokazuje dwa przykładowe kroki. Na szczęście mając fakt (2.2) możemy od razu narysować kształt powierzchni falowej na wejściu otworu (czerwona linia). Dopiero tu musimy wykreślić zbiór fal wtórnych, aby na podstawie jego obwiedni określić kształt frontu falowego za otworem.

Z zasady Huygensa wynikają ważne wnioski. Gdy na drodze fali postawimy przeszkodę w postaci małego otworu, czy grupy małych otworów, to za tymi otworami będzie się rozchodziła fala prawie kołowa (lub prawie kulista) (rys. 2.5). Dlaczego prawie? Idealne fala kołowa (kulista) wymagałaby otworu punktowego, a przez otwór punktowy przechodzi nieskończenie mało energii, więc taki przypadek jest niepraktyczny². Wynika z tego, że dla małego otworu, to czy fala padająca jest płaska, kulista czy inna nie ma dużego znaczenia. Gdy otwór poszerzymy do szerokiej szczeliny sprawy ulegają zmianie (rys. 2.6). Zaraz za szczeliną fala płaska odtwarza geometrię swojego frontu, podobnie jak fala kulista. Jednak w pobliżu granic szczeliny geometria fal ulega zaburzeniu. Przykładowo, przy brzegach szczeliny fala płaska ugina się. Ponieważ energia rozchodzi się prostopadle do powierzchni falowej, widać, że zmieni się również

² Oczywiście dochodzą wszelkie inne problemy z czymś co staje się nieskończenie małe. To jest tak jak z problemem stołu (TI 2.1), od pewnego momentu pewne pojęcia i teoria tracą sens, więc jeżeli chcemy stosować zasadę Huygensa to otwór musi być sensownie duży.

kierunek rozchodzenia się energii fali (jest to właśnie zjawisko dyfrakcji (ugięcia)).



Rysunek 2.5. Z lewej strony. Płaska fala wpada na dwa bardzo małe otwory. Zgodnie z zasadą Huygensa otwory te stają się źródłem dwóch fal wtórnych. Ponieważ otwory są małe, fale pojawiające się poza otworem są falami prawie kołowymi. Z prawej strony. Zamiana fali padającej z płaskiej na kołową lub inną niewiele zmienia, gdyż wewnątrz małych otworów fale płaskie i kuliste wyglądają bardzo podobnie.



Rysunek 2.6. Gdy mamy szeroki otwór geometria powierzchni fali płaskiej lub kulistej odtwarza się w centralnej części otworu. Przy jego brzegach geometria fali przechodzącej zależy od geometrii fali padającej.

Dygresja 2.1:

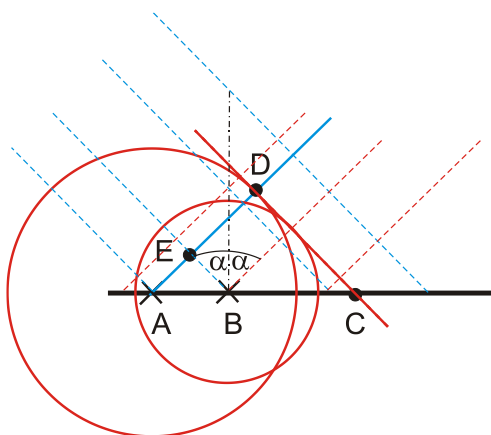
Zauważ, że źródła fal wtórnych są wyrysowane wzdłuż linii równej fazy fali kulistej. Linia ta dotyka brzegu szczeliny, ale w jej wnętrzu wychodzi nieco do przodu – nie leży dokładnie w linii szczeliny. Jest to zgodne z zasadą Huygensa. Linia równej fazy wyznacza te punkty do których, w danej chwili dotarło zaburzenie. Z drugiej strony dopóki linie równej fazy nie „dotkną” brzegu szczeliny dopóty zgodnie z faktem (1.3.1) fala będzie się odtwarzała jako idealna fala kulista. Rzecz się zmienia dopiero wtedy kiedy część frontu falowego dotrze do obszaru, gdzie zmieniają się warunki. Gdy to się zdarzy nie można skorzystać z faktu (1.3.1) i trzeba wyrysować fale wtórne oraz ich obwiednię.

Z zasady Huygensa możemy wyprowadzić prawo załamania i odbicia dla ruchu falowego, które są ściśle związane z odnośnymi prawami dla promienia w optyce geometrycznej. Związek powierzchni falowych z promieniami jest w przypadku środowiska optycznie izotropowego prosty. Promienie są prostopadłe do powierzchni falowych.

Fakt 2.3:

W środowisku optycznie izotropowym promienie są prostopadłe do powierzchni falowych i pokazują kierunek biegu energii fali.

Wyprowadzę prawo załamania i odbicia dla prostego przypadku płaskich powierzchni łamiących (odbijających). Przy wyprowadzeniu posłużę się metodą geometryczną. Wyprowadzenie prawa odbicia ilustruje rysunek (2.6).



Rysunek 2.6. Powierzchnia falowa fali padającej reprezentowana jest przez niebieską ciągłą linię (jest to fala płaska) lub przez promienie wyrysowane jako niebieskie linie przerywane. Gdy fala dochodzi do punktu A powierzchni odbijającej, to punkt ten staje się źródłem kołowej (kulistej) fali wtórnej. Gdy fala dojdzie do punktu C na powierzchni odbijającej to fala kołowa (kulista) wyemitowana z punktu A będzie miała promień AD, a fala kołowa (kulista) wyemitowana z punktu B będzie miała odpowiednio mniejszy promień (została wyemitowana później niż w punkcie A, a wcześniej niż w punkcie C). Rysując styczną łączącą dwa koła reprezentującą fale wtórne z punktów A i B oraz punkt C, w którym fala wtórna jest właśnie emitowana, dostaniemy nową powierzchnię falową (linia ciągła czerwona). Promienie będą do niej prostopadłe (linie czerwone przerywane). Jak widać promienie fali padającej i odbitej tworzą ten sam kąt z normalną do powierzchni odbijającej (normalna to prostopadła do danej powierzchni), tak jak wymaga tego prawo odbicia: kąt padania równy jest kątowi odbicia.

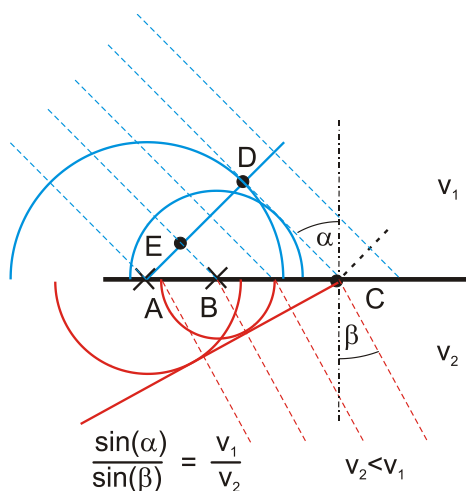
Podobnie możemy sformułować prawo załamania. Załamanie fali zachodzi na granicy oddzielającej obszar, w którym fala porusza się z różną prędkością. Dla fal wodnych może to być granica między obszarem płytkim i głębokim (uskok na dnie). Prawo załamania wprowadza rysunek (2.7). Warto rozważyć

jeszcze jedną sytuację. Niech fala przechodzi z ośrodka o współczynniku załamania n_1 do ośrodka o współczynniku załamania n_2 , przy czym $n_2 < n_1$ (rys. 2.8). Niech ponadto spełniony jest warunek

$$\overline{AB} = \frac{n_1}{n_2} \overline{BC} \quad 2.1$$

Warunek ten oznacza, że gdy fala padająca dochodzi do punktu B, to wtórna fala wyemitowana z punktu A również dociera do punktu B. Fale wtórne są styczne w punkcie B. Wygląda to tak jakby fala załamana biegła po powierzchni granicznej między ośrodkami. Gdy spełniony jest warunek (rys. 2.9)

$$\overline{AB} > \frac{n_1}{n_2} \overline{BC} \quad 2.2$$



Rysunek 2.7. Gdy fala padająca (linia niebieska) dochodzi do powierzchni będącej granicą pomiędzy ośrodkami, w których fale rozchodzą się różnymi prędkościami, to kolejne punkty tej powierzchni stają się źródłem wtórnych fal kulistych. Ale w ośrodku wolniejszym promienie odpowiednich sfer rosą wolniej (czerwone wycinki kół) niż w ośrodku szybszym (niebieskie wycinki kół). Na rysunku przedstawiono dwie przykładowe fale wtórne rozchodzące się z punktu A i B. Fale niebieskie to fale odbite a czerwone to fale przechodzące. Widać, że dla fal przechodzących zmienia się kierunek powierzchni falowej. Odpowiednio jeżeli promienie padające tworzą z normalną do powierzchni granicznej kąt α , to promienie załamane tworzą kąt β . Na bazie elementarnej geometrii można pokazać, że iloraz sinusów tych kątów jest równy ilorazowi prędkości fal w tych ośrodkach, co jest treścią prawa załamania.

to zanim fala padająca dotrze do punktu B, fala wtórna z punktu A będzie już poza punktem B. Jak w takiej sytuacji narysować obwiednię fal wtórnych? Popatrzmy co wynika z prawa załamania, w pierwszym kroku dla warunku (2.1)

$$n_1 \sin(i) = n_2 \sin(i') \quad 2.3$$

Gdzie i' jest szukanym kątem załamania. Nadto z rysunku (2.8) mamy

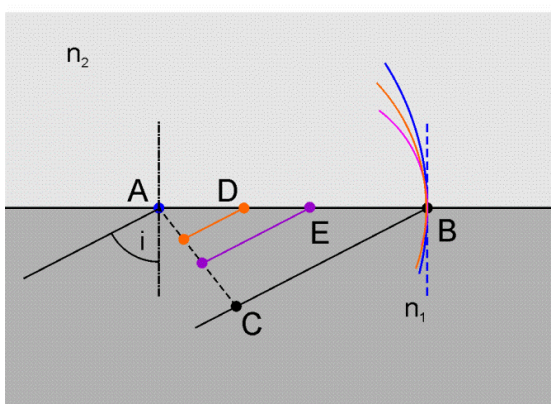
$$\sin(i) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \quad 2.4$$

Wstawiając do (2.4) wyrażenie (2.1) otrzymujemy

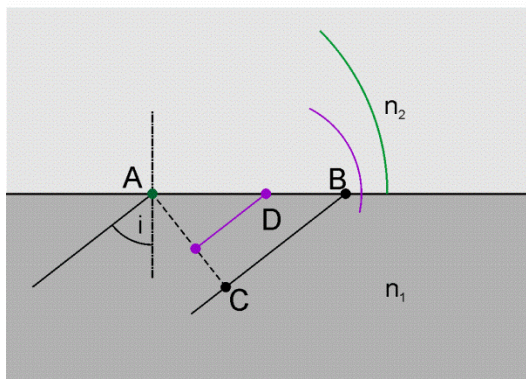
$$\sin(i) = \frac{n_2}{n_1} \quad 2.5$$

Wstawiając (2.5) do (2.3) mamy

$$1 = \sin(i') \quad 2.6$$



Rysunek 2.8. Fala pada na granicę ośrodków pod kątem i od strony ośrodka gęstszego. W punkcie A emitowana jest fala wtórna, która po stronie ośrodka rzadszego jest szybsza niż fala propagująca się w ośrodku gęstszym. Przy odpowiednio dobranych kątach padania fala załamana może dotrzeć do punktu B równie szybko jak fala w ośrodku gęstszym. Wtedy wszystkie fale wtórne będą miały punkt wspólny w punkcie B.



Rysunek 2.9. Gdy spełniony jest warunek (2.2) fale wtórne wyemitowane w punktach A i D, w rzadszym środowisku, dotrą do punktu B szybciej niż fala padająca. Gdy fala padająca dotrze do punktu B, odpowiednie fale wtórne będą poza nim. Jak widać z rysunku nie da się wyrysować obwiedni fal wtórnych.

Zatem kąt załamania jest kątem prostym co zgadza się z wnioskami wyciągniętymi z zasady Huygensa. Co się stanie gdy spełniona jest relacja (2.2). Łatwo możesz pokazać, że lewa strona (2.6) stanie się większa od 1. Ale sinus „nie potrafi” być większy od 1, przynajmniej w dziedzinie liczb rzeczywistych. W takiej sytuacji musimy przyjąć, że promieni załamanych nie ma i fala odbija się od granicznej powierzchni. Zjawisko to nazywamy zjawiskiem całkowitego wewnętrznego odbicia, w skrócie TIR (od angielskiego: total internal reflection).

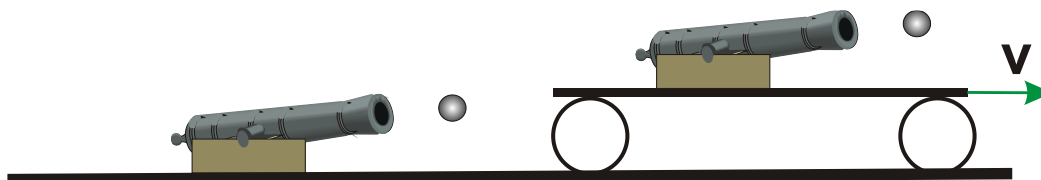
Zwracam jeszcze raz waszą uwagę na to, że odeszliśmy w jednym istotnym punkcie od konstrukcji fal pokazanych na rysunkach (1.1. i 1.2). Realne fale nie potrzebują krasnala. Same dla siebie są krasnałem. Gdy fala dźwiękowa rozchodzi się, to cząsteczki powietrza z czoła fali popychają cząsteczki powietrza znajdujące się przed czołem fali. W wyniku zderzenia cząsteczki czoła fali cofają się, a te nowo uderzone propagują się do przodu tworząc nowe czoło fali, itd. W efekcie lokalnie oscyluje gęstość cząsteczek powietrza. Patrząc na oscylacje tej gęstości w wybranym punkcie widzimy oscylacje harmoniczne. Patrząc na zmiany gęstości, w ustalonej chwili czasu, wzdłuż wybranej prostej widzimy, że gęstość zmienia się zgodnie z przebiegiem funkcji harmonicznej. Dlatego też ruch fali możemy opisywać tak jakby to był ruch zbioru niezależnych oscylatorów harmonicznych. Daje to dobry obraz ruchu fali. Zasada Huygensa jest ważkim krokiem w kierunku ilościowego opisu propagacji fal.

Teoria falowa światła powróciła na dobre z początkiem wieku XIX. Dlaczego przez prawie dwieście lat koncepcje falowa pozostawały w uśpieniu? Częściowo na to pytanie już odpowiedziałem. Zasada Huygensa jest trudna od strony technicznej. Wyznaczanie obwiedni rodziny krzywych w czasach, gdy analiza matematyczna dopiero zaczęła się rozwijać, nie zachęcała do stosowania teorii falowej. Obwiednie potrafiono wyznaczyć metodami graficznymi dla niezbyt złożonych przypadków. W optyce dominowała teoria korpuskularna – teorie promienia, którą wzmocnił olbrzymi autorytet Newtona. Newton w swym dziele „Optica” opisał swoje liczne i ważne osiągnięcia stosując konsekwentnie teorię promienia. Potrafił również w zadowalającym wówczas zakresie zmierzyć się z dyfrakcją światła, a nawet ze zjawiskiem interferencji. Optyka geometryczna posługiwała się znacznie prostszym aparatem matematycznym, za pomocą którego odniesiono w wieku XVIII wiele ważkich sukcesów na gruncie optyki instrumentalnej. Nie było więc żadnej istotnej presji by zwrócić się w kierunku trudniejszej falowej teorii światła.

2.1. Efekt Dopplera

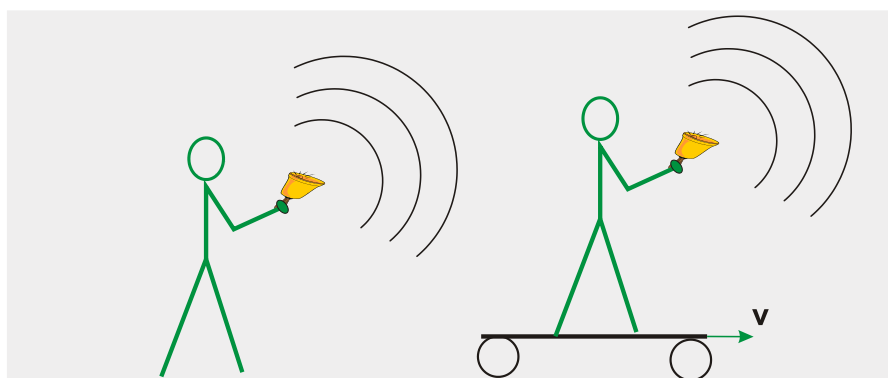
Między ruchem fali, a ruchem cząstki istnieją zasadnicze różnice (rys. 1.2.2). Pierwsza jaka się narzuca to fakt, że ruch cząstki jest zlokalizowany. Cząstka w każdej chwili czasu zajmuje dobrze określoną część przestrzeni. Klasycznie rozumiana fala jest uporządkowanym pobudzeniem ogromnej liczby cząstek na dużej przestrzeni (dużej w porównaniu z rozmiarami cząstek). Ruch fali jest przemieszczaniem się tego pobudzenia. Gdy kibice unoszą i opuszczają ręce tworząc tzw. meksykańską falę na stadionie piłkarskim, to żaden z nich nie przemieszcza się wokół stadionu. Obserwator widzi jednak wyraźne przemieszczanie się zaburzenia. Ruch ciała materialnego może odbywać się w próżni. Fala mechaniczna potrzebuje ośrodka, w którym mogłaby się rozchodzić. Ośrodkiem tym może być gaz, ciecz czy ciało stałe. Różnice te powodują, że dla ruchu falowego zachodzi efekt Dopplera, który nie jest obecny

w przypadku ruchu cząstki. Sprawę naświetlają dwa kolejne rysunki. W dwóch narysowanych wyżej przypadkach prędkość wystrzelonej kuli względem powierzchni ziemi jest inna. W pierwszym przypadku prędkość kuli, mierzona przez obserwatora związanego z ziemią, jest równa prędkości kuli mierzonej względem armaty. W drugim przypadku do prędkości kuli względem armaty należy dodać prędkość wózka, na którym armata stoi.



Rysunek 2.1.1. Dla obserwatora stojącego na ziemi prędkość wystrzelonej z armaty kuli stojącej na ziemi jest mniejsza od prędkości wystrzelonej kuli z armaty ustawionej na ruchomej platformie.

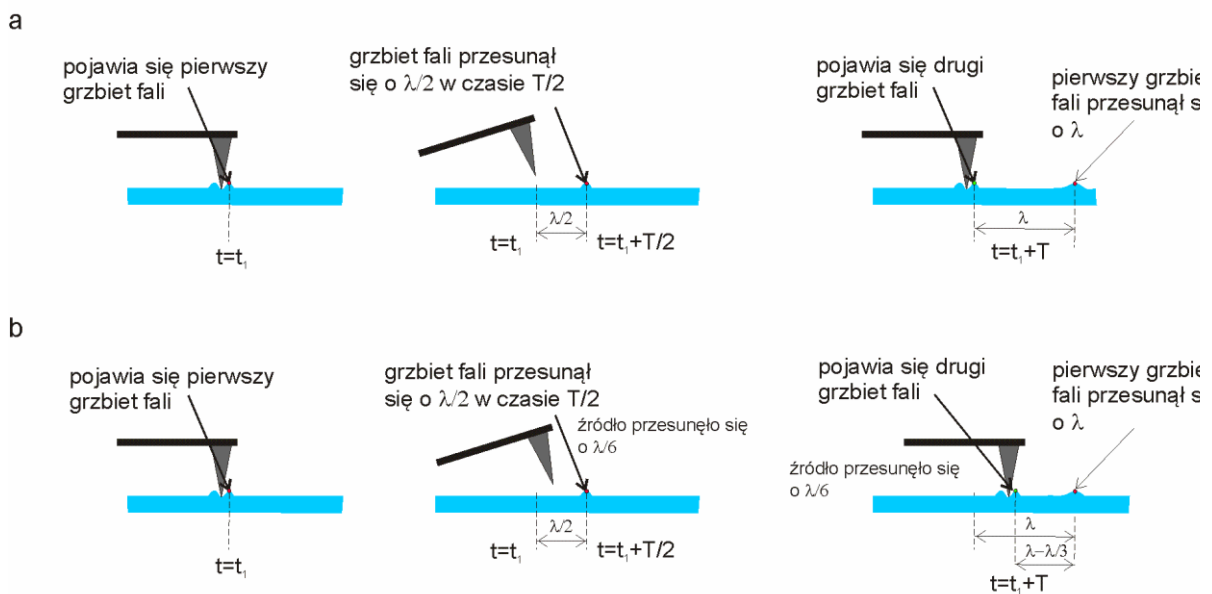
Sprawy mają się inaczej w przypadku fali dźwiękowej. Prędkość dźwięku emitowanego przez dzwonek w rękach woźnego, który stoi na ziemi jest taka sama jak prędkość dźwięku emitowanego przez tenże sam dzwonek w rękach tegoż woźnego, ale stojącego na ruchomej platformie (rys. 2.1.2). Dzieje się tak ponieważ, o prędkości fali decyduje sprężystość ośrodka, w którym fale te się rozchodzą, a nie prędkość źródła fali.



Rysunek 2.1.2. Prędkość dźwięku generowanego przez dzwonek w rękach woźnego stojącego na ziemi jest taka sama jak prędkość dźwięku w przypadku gdy i dzwonek i woźny są na ruchomej platformie. Prędkość dźwięku zależy od własności sprężystych ośrodka.

Każde źródło fal ma swoją charakterystyczną częstość na której „nadaje”. Może to być na przykład częstość drgań rysika na sprężynującej belce (rys. 2.1.3). Niech rysik uderza w powierzchnię wody wzbudzając na niej fale podobne do fal powstających na skutek wrzucenia do wody kamienia. Każde uderzenie rysika odpowiada wrzuceniu w to samo miejsce kolejnego kamyczka. Oznaczmy częstość źródła (mierzoną w hercach) przez f_0 . Podkreślam, że częstość

emisji jest własnością źródła. Po uderzeniu rysika na wodzie zaczyna rozchodzić się fala kołowa. To jak szybko to pobudzenie rozchodzi się zależy od własności sprężystych wody, a nie źródła. Dla już wzbudzonego zaburzenia nie ma znaczenia czy rysik porusza się względem wody czy nie. Dlatego mówimy, że prędkości ruchu fali nie zależy od prędkości jej źródła, zależy natomiast od własności ośrodka. Oznaczę wartość prędkości fali przez v . Założę ponadto, że źródło (czyli rysik) porusza się względem środowiska (w naszym przykładzie jest to woda), w którym rozchodzą się fale z prędkością o wartości v_s . Niech obserwator, który mierzy częstość fali jest nieruchomy względem tego środowiska (czyli wody). Jaką częstość wyemitowanej przez źródło fali mierzy obserwator?



Rysunek 2.1.3. a) Źródło fal wzbudzanych na wodzie jest nieruchome względem wody. W chwili t_1 źródło generuje pierwszy grzbiet fali wodnej. W chwili $t_1 + T/2$ grzbiet ten oddalił się od miejsca powstania o $\lambda/2$. W chwili $t_1 + T$ grzbiet ten oddalił się o λ , a źródło wygenerowało drugi grzbiet. b) Źródło fal na wodzie porusza się w prawo z prędkością równą jednej trzeciej prędkości fal na wodzie. W chwili t_1 źródło generuje pierwszy grzbiet fali wodnej. W chwili $t_1 + T/2$ grzbiet ten oddalił się od miejsca powstania o $\lambda/2$, a źródło przesunęło się o $\lambda/6$. W chwili $t_1 + T$ grzbiet ten oddalił się o λ , a źródło przesunęło się o $\lambda/3$ i wygenerowało drugi grzbiet. Teraz odległość między grzbietami wynosi $\lambda - \lambda/3$. W kierunku ruchu źródła na wodzie pojawiają się fale o mniejszej długości fali (mniejszej odległości między grzbietami).

Założmy, że źródło zbliża się do obserwatora. Skupmy uwagę na grzbietach fal. Niech z punktu źródłowego wyjdzie w pewnej chwili grzbiet fali. Po czasie T_0 (T_0 - to okres fali $T_0 = 1/f_0$) źródło wyemituje następny grzbiet fali. Ale jednocześnie po czasie T_0 źródło przesunie się w kierunku obserwatora o drogę

$v_s T_0$. Wobec tego odległości pomiędzy sąsiednimi grzbietami fali będzie wynosiła (rys. 2.1.3)

$$\lambda = \lambda_0 - v_s T_0 \quad 2.1.1$$

λ_0 - jest długością fali jaką mierzy obserwator w przypadku, gdy źródło jest nieruchome, a λ jest długością fali jaki mierzy obserwator, gdy źródło jest ruchome. Biorąc pod uwagę, że $\lambda_0 = v T_0$ mamy

$$\lambda = v T_0 - v_s T_0 = \frac{1}{f_0} v - \frac{1}{f} v_s = \frac{2\pi}{\omega_0} v - \frac{2\pi}{\omega} v_s \quad 2.1.2$$

Mierzona częstotliwość fali wyrazi się wzorem

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{1}{f_0} v - \frac{1}{f} v_s} \Rightarrow f = f_0 \frac{1}{1 - \frac{v_s}{v}} \quad 2.1.3a$$

Ponieważ założyliśmy, że źródło zbliża się do obserwatora mierzona przez niego częstość fali rośnie wraz z prędkością źródła, czyli $f > f_0$. Zakładamy również, że prędkość źródła jest mniejsza od prędkości fali $v_s < v$. Gdy źródło oddala się od obserwatora należy przyjąć ujemną wartość prędkości źródła względem obserwatora $v_s < 0$. Wzór na mierzona częstość fali ma teraz postać

$$f = f_0 \frac{1}{1 + \frac{v_s}{v}} \quad 2.1.3b$$

W tym przypadku mierzona częstość jest mniejsza od częstości źródła: $f < f_0$.

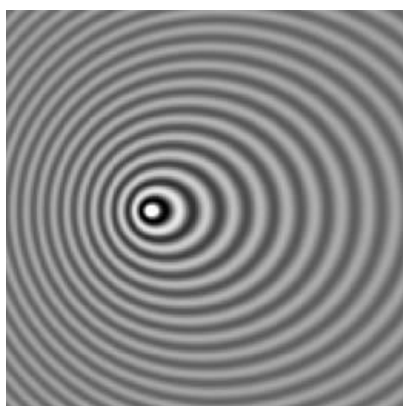
Otrzymany wynik jest zgodny z intuicją bazującą na fakcie, że prędkość fali nie zależy od prędkości źródła względem środowiska. Jak źródło goni grzbiet fali, poruszający się z prędkością v , z prędkością v_s , to oczywiście następny grzbiet zostanie wygenerowany bliżej tego uciekającego niż miałyby to miejsce przy źródle nieruchomym. Gdy źródło fali oddala się od grzbietu efekt jest odwrotny (rys. 2.1.4).

Inaczej wygląda sprawa, gdy źródło jest nieruchome względem ośrodka, w którym rozchodzą się fale, a porusza się obserwator z prędkością v_{ob} . Niech obserwator zbliża się do źródła. Jeżeli w pewnej chwili t obserwator minął grzbiet fali, to sąsiedni grzbiet znajduje się w odległości λ_0 . Grzbiet ten przesuwa się względem środowiska z prędkością v . Obserwator również przesuwa się względem środowiska z prędkością v_{ob} . Zatem całkowita prędkość ruchu grzbietu względem obserwatora jest równa $v + v_{ob}$. Stąd okres obserwowanego ruchu falowego wynosi

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda_0}{v + v_{ob}} = \frac{v}{f_0(v + v_{ob})} \quad 2.1.4$$

Mierzona przez obserwatora częstość wynosi

$$f = \frac{f_0(v + v_{ob})}{v} = f_0 \left(1 + \frac{v_{ob}}{v}\right) \quad 2.1.5a$$



Rysunek 2.1.4. Źródło porusza się w lewą stronę. Skutkiem tego fala traci swoją symetrię (w różnych kierunkach rozchodzi się różną częstością). W kierunku ruchu źródła fala staje się krótsza, a w kierunku przeciwnym dłuższa.

Obserwator poruszający się względem środowiska, w którym rozchodzi się fala w kierunku źródła mierzy większą częstość drgań niż częstość źródła. Kiedy obserwator ten oddala się od źródła wtedy jego prędkość w powyższym wzorze mnożymy przez -1.

$$f = f_0 \left(1 - \frac{v_{ob}}{v}\right) \quad 2.1.5b$$

W takim przypadku obserwator rejestruje mniejszą częstość drgań niż wynosi częstość źródła. Zwróć uwagę na fakt, że w pierwszym przypadku, to jest gdy porusza się źródło, fale generowane w ośrodku mają krótszą lub większą długość. W drugim przypadku, gdy porusza się obserwator, fale w ośrodku mają we wszystkich kierunkach taką samą długość – źródło jest nieruchome. To, że obserwator widzi odległości między grzbietami fal jako mniejsze lub większe wynika z faktu jego ruchu względem ośrodka.

Gdy względem ośrodka porusza się i źródło i odbiornik, to musimy połączyć wyrażenia opisujące oba te przypadki. Otrzymujemy wtedy wzór

$$f = f_0 \frac{v \pm v_{ob}}{v \mp v_s} \quad 2.1.6$$

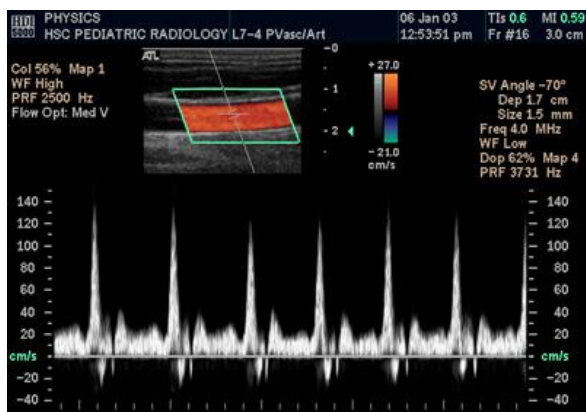
Z dotychczasowych rozważań wynika, że przy analizie ruchu falowego wygodnym układem współrzędnych jest układ związany z ośrodkiem, w którym rozchodzą się fale. Ośrodek stanowi dla ruchu falowego rodzaj bezwzględnego układu odniesienia. Oczywiście ruch każdej cząstki ośrodka nie czuje obecności

takiego bezwzględnego układu odniesienia, co wiemy z zasad dynamiki. Jednak w przypadku fali obserwujemy nie tyle ruch cząstki, ile ruch zaburzenia cząstek ośrodka. Taki ruch zaburzenia jest ściśle związany z własnościami ośrodka, którego cząstki ulegają zaburzeniu. Stąd szczególna rola ośrodka dla ruchu falowego. Kiedy zatem podajemy prędkość fali, nie mówimy względem jakiego układu współrzędnych została owa prędkość wyznaczona; domyślnie przyjmujemy, że chodzi o prędkość mierzona względem ośrodka w którym ta fala się rozchodzi.

Efekt Dopplera pozwala za pomocą fali odbitej mierzyć prędkość poruszającego się obiektu. Niech obiekt porusza się względem systemu pomiarowego z pewną prędkością. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że źródłem jest sonar okrętu, który mierzy prędkość innego okrętu. Gdy układ pomiarowy emituje falę ta, po pewnym czasie, dobiega do obiektu i się od niego odbija. Długość fali liczymy ze wzoru (2.1.6). W momencie odbicia obiekt staje się źródłem fali odbitej o częstotliwości obliczonej w pierwszym kroku. Teraz sytuacja odwraca się. Obiekt jest źródłem a źródło obiektem (odbiornikiem). W sposób podobny do poprzedniego możemy obliczyć, ze wzoru (2.1.6) częstotliwość fali odbieranej przez okręt z sonarem. Mierząc tą częstotliwość i znając własną prędkość względem ośrodka możemy wyznaczyć prędkość drugiego okrętu.

Podobnie działa pomiar prędkości pojazdów z użyciem radaru. Fale elektromagnetyczne nie są jednak falami mechanicznymi. Wzory na efekt Dopplera nieco się modyfikują, co wynika z konieczności uwzględnienia efektów relatywistycznych. Nie mniej sama idea pomiaru opiera się o zmianę częstotliwości mierzonej dla poruszających się źródeł i obserwatorów.

Innym przykładem zastosowania efektu Dopplera jest ultrasonografia dopplerowska. Dla układu źródło-detektor ultradźwięki propagują się w poruszającym się płynie w inny sposób niż w płynie stacjonarnym. Mierząc zmianę częstotliwości i/lub przesunięcie fazowe fali można określić parametry przepływu krwi w naczyniach krwionośnych (rys. 2.1.5). Technika ta odbiega w swych szczegółach od prostego schematu pomiaru przedstawionego dla sonaru, ale u jej podstaw leży efekt Dopplera.



Rysunek 2.1.5. Widok ekranu podczas pomiaru przepływów w tętnicy szyjnej wspólnej z użyciem aparatu dopplerowskiego. Tego typu badanie nie obciąża pacjenta i pozwala precyzyjnie określić stan naczyń krwionośnych oraz serca; źródło Wikipedia. Creative Commons Attribution-Share Alike 2.5 Generic

2.2. Fala uderzeniowa

Przejdźmy jeszcze raz do wzoru (2.3a). W kierunku ruchu źródła fale zagęszczają się (rośnie częstość fali); ten wniosek został wyciągnięty gdy prędkość źródła względem ośrodka była mniejsza od prędkości fali rozchodzącej się w tym ośrodku. Co się stanie gdy $v_s \geq v$, to znaczy, źródło porusza się z prędkością równą lub większą od prędkości fali. W normalnych warunkach wzbudzona cząsteczka uderza w cząsteczkę ją poprzedzającą odbija się od niej powraca wstecz odbija się od cząsteczki będącej za nią, itd. Jeżeli jednak źródło ma większą prędkość od prędkości dźwięku to pobudzone cząsteczki nie mają czasu na pobudzenie cząsteczek poprzedzających zanim dotrze do nich ruchome źródło. Kolejne cząstki pobudza źródło i w efekcie powstaje wąski obszar silnego wzrostu ciśnienia, który nazywamy falą uderzeniową.

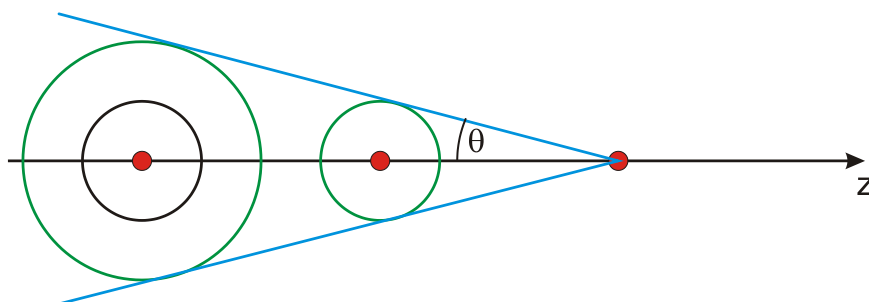
Fale uderzeniowe kojarzą się z przelotem naddźwiękowych samolotów. Ale to nie jedyne ich źródło. Powstają również na skutek wybuchów. Szczególnie niszczycielskie fale uderzeniowe wywołują wybuchy jądrowe. Gwałtowny podmuch towarzyszący takim wybuchom jest skutkiem przejścia fali uderzeniowej. Fale uderzeniowe towarzyszą wylądowaniom atmosferycznym, wybuchom wulkanów, wywołują je uderzenia większych meteoroidów. Na mniejszą skalę falę uderzeniową możemy wywołać trzaskając z bicia. W momencie „trzaśnięcia” koniec bicia porusza się szybciej od dźwięku. Trzask, który słyszymy wywołany jest przez falę uderzeniową.

Zobaczmy jak rzecz cała wygląda z punktu widzenia zasady Huygensa. Obwiednia fal wtórnych tworzy powierzchnię stożka (rys. 2.2.1). Prosta analiza geometryczna pokazuje, że kąt θ tego stożka spełnia zależność:

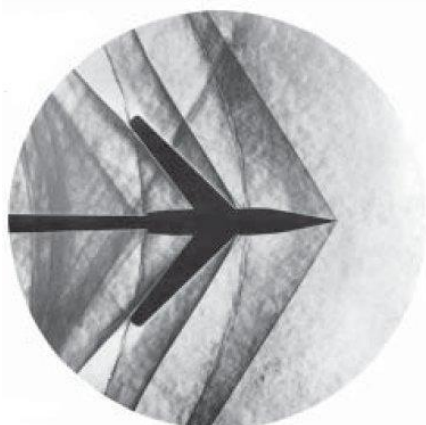
$$\sin(\theta) = \frac{v_d}{v_s} \quad 2.2.1$$

Rysunek (2.2.2) pokazuje stożki fali uderzeniowej zarejestrowane w tunelu aerodynamicznym, w którym bada się opływ powietrza wokół kadłuba naddźwiękowego samolotu. W tunelu z prędkością większą niż dźwięk porusza

się, względem samolotu, powietrze. Ale w przypadku ruchu ciał (a nie fal) nie ma znaczenia czy wzajemną prędkość wiążemy z ruchem samolotu czy powietrza.



Rysunek 2.2.1. Na rysunku mamy źródło fali w postaci czerwonego punktu, które porusza się z prędkością v_s w prawo. Zgodnie z zasadą Huygensa, w każdym punkcie źródło emituje wtórną falę kulistą, która rozchodzi się z prędkością fali v_f . W przedstawionym przypadku prędkość źródła jest cztery razy większa od prędkości fali. Gdy źródło dotrze do drugiego wyróżnionego czerwoną kropką punktu fala wyemitowana w pierwszym punkcie będzie miała cztery razy mniejszy promień (czarny okrąg) w stosunku do odległości pomiędzy dwoma zaznaczonymi położeniami źródła. W każdym położeniu, a więc również drugim wyrysowanym, źródło emituje kolejną falę kulistą. Gdy źródło znajdzie się w trzecim wyróżnionym czerwoną kropką punkcie (odległość między pierwszym a drugim punktem jest taka sama jak między drugim a trzecim) fala wyemitowana w pierwszym punkcie osiągnie dwa razy większy promień (zielony okrąg), a wtórna fala wyemitowana w drugim punkcie osiągnie taki promień, jak fala wyemitowana w pierwszym punkcie w momencie, gdy źródło było w drugim punkcie. Gdybyśmy wyrysowali odpowiednie fale wtórne od każdego punktu, to widać, że linia styczna do tych wszystkich fal wtórnych (obwiednia) byłaby powierzchnią stożka (linia niebieska). Stożek ten stanowi powierzchnię falową fali uderzeniowej.



Rysunek 2.2.2. Strugi powietrza opływające sylwetkę modelu samolotu. Wyraźnie widać krawędzie fali uderzeniowej; źródło Wikipedia

Choć fale uderzeniowe kojarzą się nam z falami akustycznymi, to zjawisko to jest charakterystyczne dla samego ruchu falowego; czyli może ujawnić się w wszystkich typach fal. Przykładowo fale uderzeniowe mogą powstawać: na wodzie (rys. 2.2.3) w skorupie ziemskiej na skutek trzęsień ziemi, w ciałach

stałych, w gazie międzygwiazdowym, i wielu innych okolicznościach. Fizyka fali uderzeniowej jest trudna, jak każdego gwałtownego zjawiska zachodząca w złożonym środowisku, ale ważna ze względu na wiele związanych z nią aspektów technicznych i naukowych.

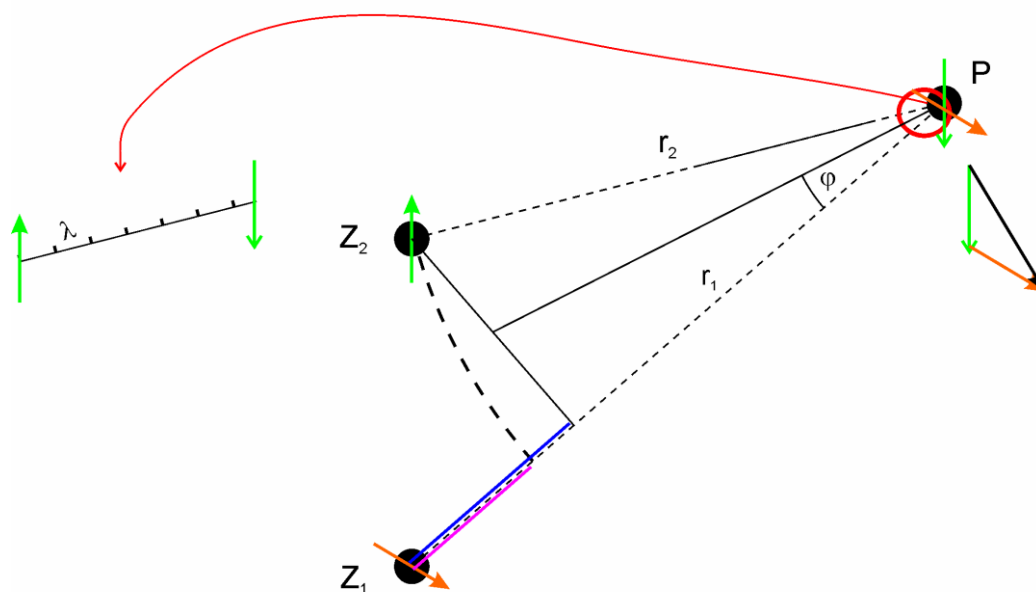


Rysunek 2.2.3. Pancernik USS Iowa strzela pełną salwą burtową w czasie manewrów na Pacyfiku w lipcu 1984. Gwałtowny podmuch wzbudza na powierzchni wody falę uderzeniową. Wyraźnie widać jej granice i charakter przesuwającej się „ściany” wody; źródło Wikipedia

3. Interferencja fal ♦

Zjawisko nakładania się fal ma swoją własną nazwę – interferencja fal. Interferencja fal jest dla współczesnej fizyki zjawiskiem podstawowym. Szeroko obecna jest w teorii fal elektromagnetycznych, w tym również w optyce. Stanowi chleb powszedni w mechanice kwantowej, z tym że w mechanice kwantowej interferują abstrakcyjne fale „amplitudy prawdopodobieństwa”. I choć fale są abstrakcyjne, to obliczanie ich interferencji prowadzi do weryfikowalnych doświadczalnie wyników. Jak z tego widać, że do interferencji fal musimy podejść bardzo poważanie. Jak zwykle zacznę od prostego przykładu.

Rozważmy dwa punkty źródłowe Z_1 i Z_2 , które generują dwie fale kołowe (rys. 3.1). Jaki jest wynik nakładania się obu fal w odległym punkcie P. Punkt uważamy za odległy, gdy jego odległość od źródeł jest dużo większa od odległości między źródłami



Rysunek 3.1. Z punktów Z_1 i Z_2 rozchodzą się fale kołowe. W chwili początkowej fazy drgań tych punktów są różne, dlatego różne są kąty fazorów stowarzyszonych z tymi punktami. W punkcie P odległym o r_1 od punktu Z_1 i o r_2 od punktu Z_2 fazy odpowiednich fazorów są również inne. Zmiana kąta fazora, na drodze od punktu źródłowego do punktu obserwacji, jest równa wrażeń, odpowiednio kr_1 i kr_2 . Efekt nałożenia się fal w punkcie P obliczamy sumując, w tym punkcie, fazory tych fal.

Rozwiążemy ten problem używając fazorów. Zgodnie z fazorową reprezentacją fal, w każdym punkcie przestrzeni umieszczamy fazor, który wiruje z częstością ω . Analizę przeprowadzimy w pewnej wybranej chwili t_{ust} . Przyjmę, że w tej wybranej chwili fazor fali drugiej w punkcie źródłowym ma fazę

początkową $\delta_2 = \pi/2$ względem osi poziomej (oś x -ów). Fazor fali pierwszej ma fazę początkową $\delta_1 = 5/4\pi$. To są nasze warunki początkowe. Wiemy, że co odcinek, o długości równej długości fali λ , w ustalonej chwili czasu, faza fazora powtarza się. Czerwone kółko na rysunku (3.1) oznacza sąsiedztwo punktu obserwacji P. Z lewej strony odcinek zawarty w sąsiedztwie jest powiększony. Widać, że mieści się w nim kilka odcinków o długości λ i jeszcze połowa takiego odcinka. O tym jaki kąt będzie miał fazor w punkcie P decyduje ten ostatni kawałek. Kąt ten liczymy tak: obliczamy długość odcinka $r_2 = Z_2P$. Następnie długość tą dzielimy przez długość fali λ . W ten sposób obliczamy ile długości fal mieści się w odcinku o długości r_2 , a następnie przeliczamy tak otrzymaną liczbę na miarę kątową w radianach, to jest mnożymy przez 2π i dodajemy wartość kąta początkowego δ_2 . W ten sposób otrzymamy kąt fazora drugiej fali w punkcie P₂, w ustalonej chwili czasu t_{ust} .

$$\varphi_{P_2} = 2\pi \frac{r_2}{\lambda} + \delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} r_2 + \delta_2 = kr_2 + \delta_2 \quad 3.1.a$$

Podobnie obliczamy, w punkcie P, fazę fazora od pierwszego źródła

$$\varphi_{P_1} = 2\pi \frac{r_1}{\lambda} + \delta_1 = \frac{2\pi}{\lambda} r_1 + \delta_1 = kr_1 + \delta_1 \quad 3.1.b$$

Amplitudę fali wypadkowej obliczamy sumując oba fazory w punkcie P. Długość fazora wypadkowego jest równa amplitudzie fali wypadkowej. Zauważ, że iloczyn kr ma zwykle postać

$$kr = 2\pi M + \beta \quad 3.2$$

Gdzie M jest bardzo dużą liczbą naturalną, a β kątem z przedziału $[0, 2\pi)$. Dzieje się tak dlatego, że zwykle r jest, dużo, dużo większe od długości fali λ . Zatem odcinek, którego długość jest równa długości fali mieści się bardzo wiele razy w odcinku r . Każdy taki raz daje jedno 2π , czyli jeden pełny obrót fazora. O tym jaki będzie kąt β decyduje ostatnia część odcinka r (rys. 3.1). Korzystając z (3.2) możemy zapisać, że fazy obu fazorów w punkcie P są równe

$$\varphi_{P_2} = \beta_2 + \delta_2 \quad 3.3a$$

$$\varphi_{P_1} = \beta_1 + \delta_1 \quad 3.3b$$

Kiedy w punkcie P otrzymujemy maksymalną amplitudę fali wypadkowej? Oczywiście wtedy, kiedy fazy obu składowych fazorów są sobie równe; czyli wtedy, kiedy różnica tych faz jest równa całkowitej wielokrotności 2π . Mamy warunek

$$\varphi_{P_2} - \varphi_{P_1} = 2\pi n \quad 3.4$$

Gdzie n jest liczbą całkowitą. Wstawiając (3.1) do (3.4) mamy

$$\varphi_{P_2} - \varphi_{P_1} = k(r_2 - r_1) + \delta_2 - \delta_1 = 2\pi n \quad 3.5$$

Minima amplitudy wypadną tam, gdzie oba fazory są przeciwnie skierowane, czyli różnica ich faz jest wielokrotnością $2\pi + \pi$, czyli $(2n+1)\pi$

$$\varphi_{P_2} - \varphi_{P_1} = k(r_2 - r_1) + \delta_2 - \delta_1 = (2n + 1)\pi \quad 3.6$$

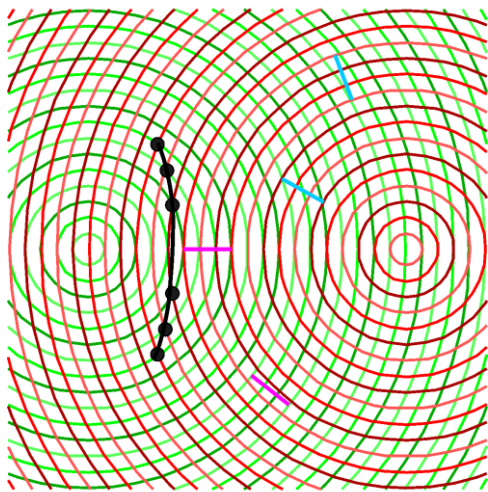
Stąd mamy warunki

$$r_2 - r_1 = \text{const} = \frac{2\pi n - \delta_2 + \delta_1}{k} \quad 3.7a$$

Dla maksimów, a dla minimów

$$r_2 - r_1 = \text{const} = \frac{(2n + 1)\pi - \delta_2 + \delta_1}{k} \quad 3.7b$$

Warunki (3.7) wyznaczają rodzinę hiperbol (rys. 3.2), a w trzech wymiarach rodzinę hiperboloid obrotowych, co przedstawia rysunek (rys. 3.3).

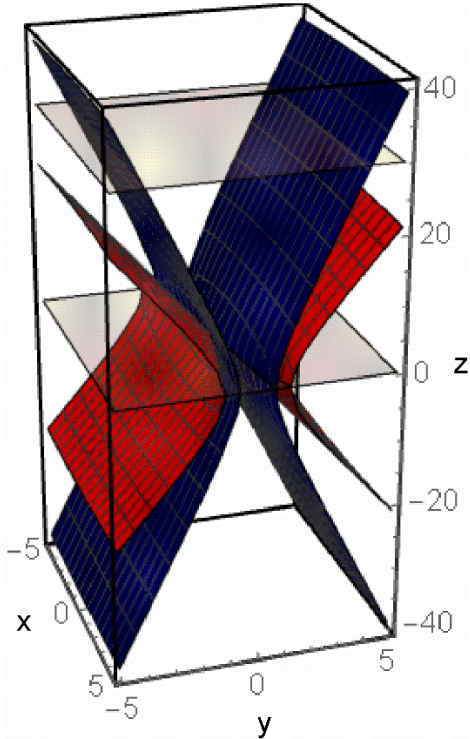


Rysunek 3.2. Dwa źródła oddalone od siebie o 6 i $2/3$ długości fali. Dla każdego źródła wyrysowane są powierzchnie o fazach: $\varphi_0 + 2\pi n$ jasny odcień (zielonego lub czerwonego), $\varphi_0 + 2\pi/3 + 2\pi n$ (zielony lub czerwony) oraz $\varphi_0 + 4\pi/3 + 2\pi n$ ciemny odcień (zielonego lub czerwonego). Czarne kropki pokazują, że przechodząc na sąsiadujące przecięcia linii o kolejnych odcieniach koloru poruszamy się po hiperboli (czarna) linia. Odcinki różowe i niebieskie są przykładowymi odcinkami o długości λ wyrysowanymi między sąsiednimi liniami równej fazy koloru czerwonego i zielonego, prostopadle do powierzchni falowych. Pełną hiperbolę uzyskamy rysując kolejne przecięcia linii równej fazy dla wszystkich możliwych wartości fazy.

Opiszę interferencję fal z dwóch punktów źródłowych, w trzech wymiarach, za pomocą wzorów (1.2.1a) na fale kuliste. Mamy zatem dwie fale kuliste, o tej samej częstotliwości ω i amplitudzie A , wychodzące z dwóch punktów źródłowych Z_1 i Z_2 z fazami początkowymi δ_1 i δ_2 (rys. 3.1)

$$\tilde{u}_1(\mathbf{r}_1, t) = \frac{A}{|\mathbf{r}_1|} \left(e^{i(\omega t - |\mathbf{k}||\mathbf{r}_1| + \delta_1)} \right) \quad 3.8a$$

$$\tilde{u}_2(\mathbf{r}_2, t) = \frac{A}{|\mathbf{r}_2|} (e^{i(\omega t - |\mathbf{k}||\mathbf{r}_2| + \delta_2)}) \quad 3.8b$$



Rysunek 3.3. Powierzchnie maksimum dla dwóch źródeł punktowych leżących w płaszczyźnie $z=0$, w położeniach $y=-d/2$, $y=d/2$, przy $d=10\lambda$, $\lambda=1\text{m}$, dla $n=1$ (niebieska powierzchnia) i $n=2$ (czerwona powierzchnia); (wzór 3.7a). Powierzchnie są hiperboloidami. W płaszczyźnie $z_D=30$ narysowana jest druga szara płaszczyzna. Może to być płaszczyzna detektorów na przykład fal dźwiękowych. Detektor zarejestrują największe natężenie dźwięku w punktach przecięcia z hiperboloidami. Przy dużych z_D i małych rozmiarach detektorów przecięcia utworzą linie prawie proste. Pomiędzy powierzchnią niebieską a czerwoną jest jedna para hiperboloid na której fale dodają się destrukcyjnie. Na przecięciu tej powierzchni z płaszczyzną detektora natężenie dźwięku będzie równe zero.

Gdy fale mają te same częstotliwości to mają również te same liczby falowe $|\mathbf{k}|$. Jak widzisz posługuję się zapisem zespolonym, gdyż zapis zespolony ułatwia obliczenia (wykazałem to w §TVIII 2.3). Możesz się sam o tym przekonać wykonując obliczenia z użyciem wzoru (1.2.1). Aby uprościć wzory (3.8) obróćę wszystkie fazory o kąt $-\delta_1$. Obrót fazorów o ten sam kąt nie zmieni ich kąta względnego. Oznacza to, że suma obróconych fazorów jest będzie taka sama jak nie obróconych.

$$\tilde{u}_1(\mathbf{r}_1, t) = \frac{A}{|\mathbf{r}_1|} (e^{i(\omega t - |\mathbf{k}||\mathbf{r}_1|)}) \quad 3.8a$$

$$\tilde{u}(\mathbf{r}_2, t) = \frac{A}{|\mathbf{r}_2|} (e^{i(\omega t - |\mathbf{k}||\mathbf{r}_2| + \delta)}) \quad 3.8b$$

$$\delta = \delta_2 - \delta_1 \quad 3.8c$$

Przyjmijmy, że odległość d między źródłami jest dużo mniejsza niż odległości r_1 i r_2 , co w typowych doświadczeniach interferencyjnych jest dobrze spełnione.

Wtedy możemy uznać, że amplituda w punkcie P jest, z dobrym przybliżeniem, równa

$$\frac{A}{|\mathbf{r}_1|} \approx \frac{A}{|\mathbf{r}_2|} \approx \frac{A}{|\mathbf{r}_{sr}|} \quad 3.9a$$

$$\mathbf{r}_{sr} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \quad 3.9b$$

Suma fal (3.8) dana jest wzorem

$$\tilde{u}(\mathbf{r}_{sr}, t) = \frac{A}{|\mathbf{r}_{sr}|} e^{i\omega t} (e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{r}_1|} + e^{i(|\mathbf{k}||\mathbf{r}_2| + \delta_2)}) \quad 3.10$$

Dokonom podstawienia

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} + \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2} + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = \mathbf{r}_{sr} + \frac{\delta}{2} + \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2} - \frac{\delta}{2} \quad 3.11a$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} - \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \mathbf{r}_{sr} + \frac{\delta}{2} - \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2} + \frac{\delta}{2} \quad 3.11b$$

Po wstawieniu do (3.10) mam

$$\tilde{u}(\mathbf{r}_{sr}, t) = \frac{A}{|\mathbf{r}_{sr}|} e^{i(\omega t - |\mathbf{k}||\mathbf{r}_{sr}| + \frac{\delta}{2})} \left(e^{i(|\mathbf{k}|\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{2} - \frac{\delta}{2})} + e^{i(-|\mathbf{k}|\frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{2} + \frac{\delta}{2})} \right) \quad 3.12a$$

Stąd

$$\tilde{u}(\mathbf{r}_{sr}, t) = 2 \frac{A}{|\mathbf{r}_{sr}|} e^{i(\omega t - |\mathbf{k}||\mathbf{r}_{sr}| + \frac{\delta}{2})} \cos\left(|\mathbf{k}|\left|\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2}\right| - \frac{\delta}{2}\right) \quad 3.12b$$

Powracam do zapisu rzeczywistego

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}_{sr}, t) &= \text{Re}(\tilde{u}(\mathbf{r}_{sr}, t)) \\ &= 2 \frac{A}{|\mathbf{r}_{sr}|} \cos\left(\omega t - |\mathbf{k}||\mathbf{r}_{sr}| + \frac{\delta}{2}\right) \cos\left(|\mathbf{k}|\left|\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2}\right| - \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \quad 3.13$$

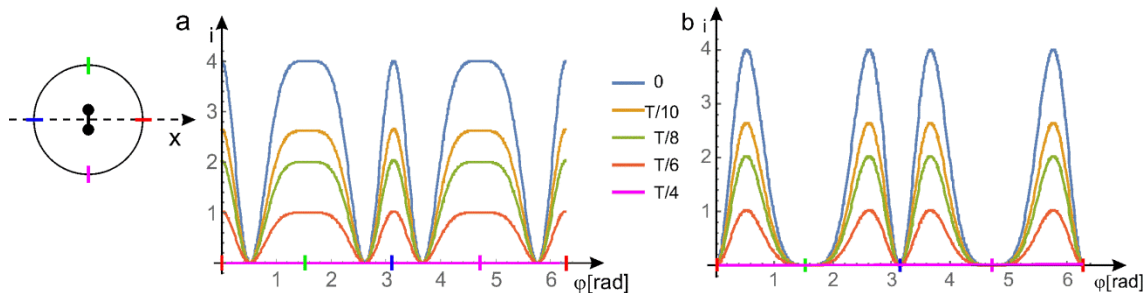
Powyższy wzór ma postać wzoru dla fali kulistej przemnożony przez czynnik modulujący amplitudę (drugi cosinus). Fala ma największą amplitudę gdy

$$\cos\left(|\mathbf{k}|\left|\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2}\right| - \frac{\delta}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow |\mathbf{k}|\left|\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2}\right| - \frac{\delta}{2} = n\pi \quad 3.14$$

Fala ma najmniejszą amplitudę gdy

$$\cos\left(|\mathbf{k}| \left| \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2} \right| - \frac{\delta}{2}\right) = 0 \Rightarrow |\mathbf{k}| \left| \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2} \right| - \frac{\delta}{2} = \frac{2n+1}{2}\pi \quad 3.15$$

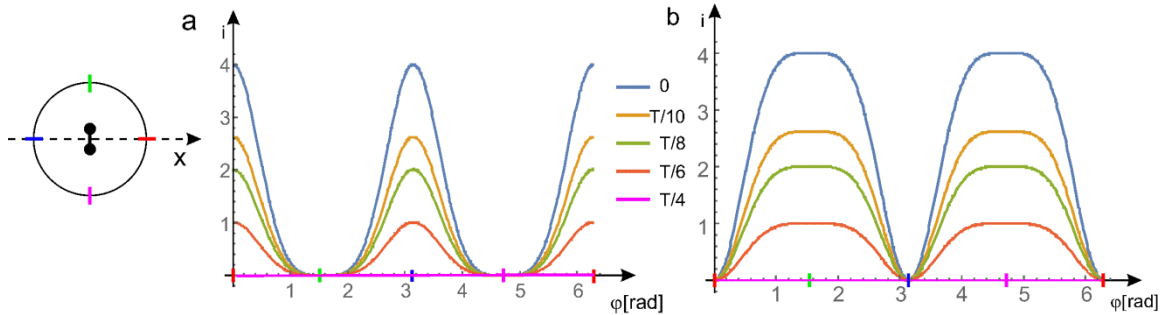
Jak widać spełniony jest warunek (3.7) stałości różnicy dwóch wektorów wodzących, co wyznacza w przestrzeni powierzchnię hiperboliczną. Rysunki (3.4) pokazują wykresy uzyskane dla wzorów (3.13 i 3.14) jako funkcji kąta obserwacji φ (rys. 3.1). Wyraźnie widać, że dla pewnych kątów sygnały z dwóch źródeł wzmacniają się, a dla innych kasują się.



Rysunek 3.4. Z lewej: okrąg ilustrujący orientację dwóch punktowych źródeł. Kolorowymi kreskami zaznaczone są kąty $\varphi=0$ (czerwony), $\varphi=\pi/2$ (zielony), $\varphi=\pi$ (niebieski), $\varphi=3\pi/2$ (fioletowy). Odpowiednie kreski zaznaczone są również na osi kątów rysunków (a) i (b); a) wykres wypadkowego natężenia dla dwóch źródeł odległych o λ . Źródła emitują falę o tej samej amplitudzie i różnicy faz $\delta=0$. Różnymi kolorami narysowany jest rozkład natężenia fali dla różnych chwil czasu; b) wykres wypadkowego natężenia dla dwóch źródeł odległych o λ . Źródła emitują falę o tej samej amplitudzie i różnicy faz $\delta=\pi$. W obu przypadkach natężenie policzone jest ze wzoru (3.13). W obu przypadkach dla chwili $t=0$, mamy maksimum natężenia fali wypadkowej. Rysunki są wykonane dla fali o długości $\lambda=1\text{m}$. Punkty obserwacji ułożone są na okręgu o środku pokrywającym się ze środkiem odcinka łączącego oba punkty źródłowe i o promieniu $r=100\text{m}$ (rysunek z lewej). Oznacza, to że odległości między punktami źródłowymi a punktami obserwacji jest około sto razy większa od odległości między punktami źródłowymi. Możemy więc stosować przybliżenie (3.13)

Z rysunku (3.4a) widać wzmocnienie sygnału dla kątów $\varphi=0$, $\varphi=\pi/2$, $\varphi=\pi$ i $\varphi=3\pi/2$. Przy czym maksima dla kątów $\varphi=\pi/2$, $\varphi=\pi$ są szersze (łagodniej opadają) niż dla dwóch pozostałych kątów. Natężenie wypadkowe policzone jest dla pięciu wybranych chwil czasu. Największą wartość przyjmuje dla $t=0$. Najmniejszą, zerową, przyjmuje dla $t=T/4$. Widać, że dla każdego kąta obserwacji natężenie fali oscyluje. W punktach gdzie mamy maksima oscylacje te mają największą amplitudę, a w punktach gdzie mamy minima amplituda oscylacji jest równa zero. Na rysunku (3.4b) pokazany jest ten sam przypadek, z tą różnicą, że jedno źródło spóźnia się w fazie względem drugiego o $\delta=\pi$. Zmieniły się kąty, dla których mamy maksima i minima natężenia drgań wypadkowych. Zmienił się

również ich charakter, nie ma już tak szerokich maksimumów jak na rysunku (3.4a). Zmiana odległości między punktami źródłowymi również zmienia rozkład kątowy minimum i maksimum (rys. 3.5)

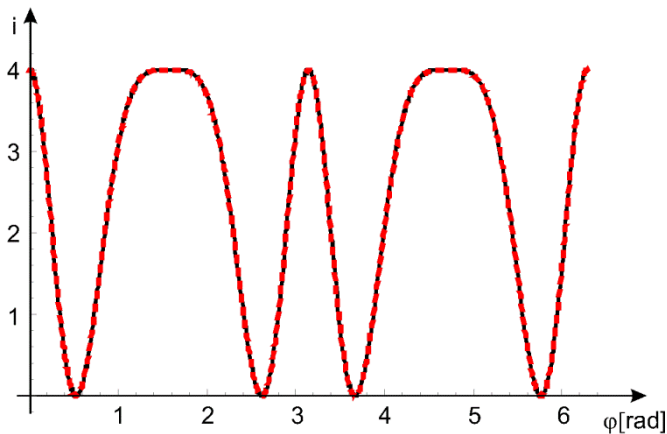


Rysunek 3.5. Z lewej: orientacja dwóch punktowych źródeł; opis na rys. (3.4); a) wykres wypadkowego natężenia dla dwóch źródeł odległych o $\lambda/2$. Źródła emitują falę o tej samej amplitudzie i różnicy faz $\delta=0$, dla różnych chwil czasu; b) wykres wypadkowego natężenia dla dwóch źródeł odległych o $\lambda/2$. Źródła emitują falę o tej samej amplitudzie i różnicy faz $\delta=\pi$, dla różnych chwil czasu. Pozostałe parametry jak na rysunku (3.5)

Rysunki (3.4) i (3.5) wykonane zostały z wykorzystaniem przybliżonego wzoru (3.13). Jak pamiętamy można go stosować, gdy odległości między punktami źródłowymi jest dużo mniejsza od odległości tych punktów od punktu obserwacji. W pokazanych przykładach stosunek tych dwóch odległości wynosi 1:100. Rysunek (3.6) pokazuje rozkład natężenia światła wyrysowany ze wzoru przybliżonego i dokładnego (3.17).

$$i(\mathbf{r}, t) = [\text{Re}(\tilde{u}_1(\mathbf{r}_1, t) + \tilde{u}_2(\mathbf{r}_2, t))]^2 \quad 3.17$$

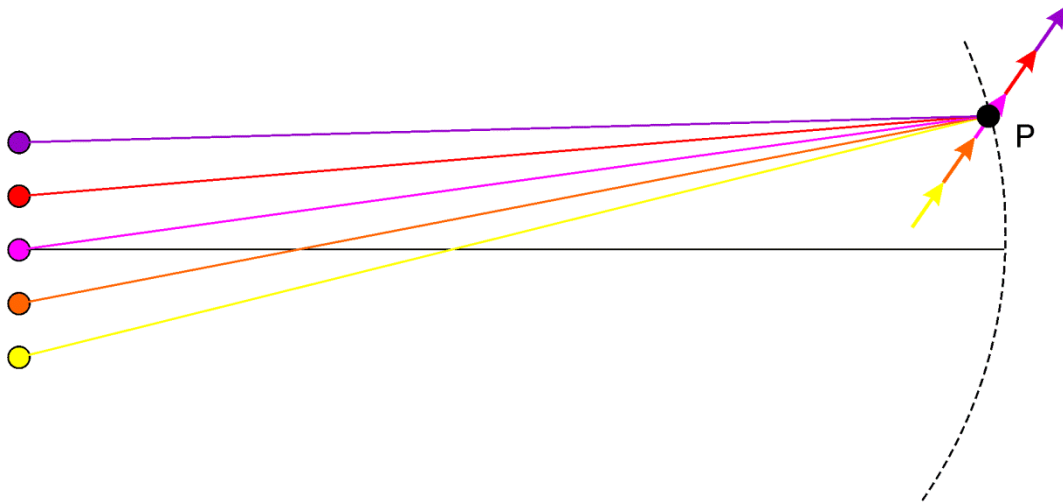
Widać, że wzór przybliżony spisuje się bardzo dobrze.



Rysunek 3.6. Czarną ciągłą linią narysowany jest rozkład natężenia obliczony ze wzoru dokładnego (3.17). Rozkład obliczony został dla układu dwóch punktów dla jakich narysowany został rysunek (3.6a). Czerwoną przerywaną linią narysowany jest rozkład natężenia obliczony, dla tego samego przypadku, ze wzoru przybliżonego (3.13). Widać, że oba rozkłady pokrywają się,

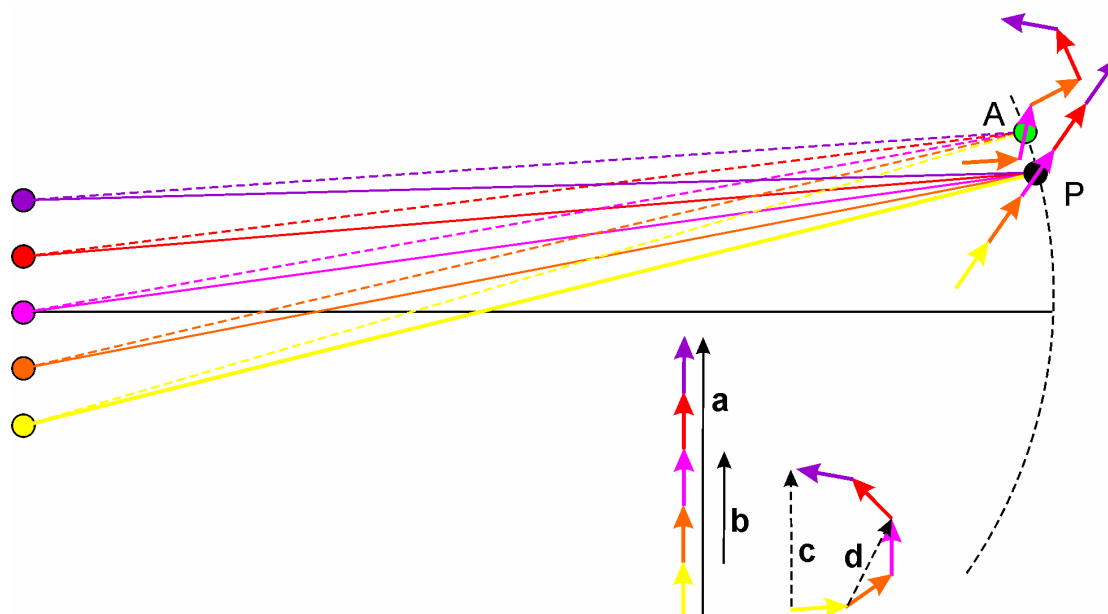
w granicach
rysunku. dokładności

Co się stanie, gdy dodamy kolejne źródła, tak aby otrzymać równomiernie rozłożony układ źródeł punktowych (rys. 3.7)?



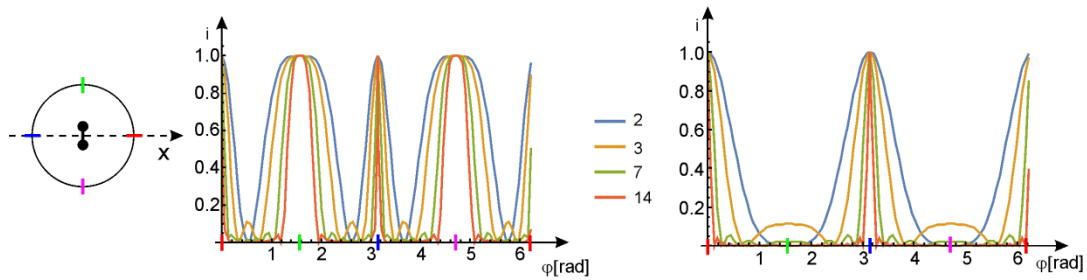
Rysunek 3.7. Dodawanie fal od większej liczby równo oddalonych źródeł nie zmienia kąta pod jakim widzimy kolejne maksima i minima. Powiedzmy, że dla Punktu obserwacji P, żółta i pomarańczowa droga różnią się od siebie o λ . Oznacza to, że żółty i pomarańczowy fazy dojdą do punktu P mając ten sam kąt fazowy. Jeżeli odległość między źródłem różowym a pomarańczowym jest taka sama jak odległość między źródłem pomarańczowym a żółtym, to droga liczona wzdłuż promienia różowego jest o λ dłuższa od drogi liczonej wzdłuż promienia pomarańczowego i o 2λ od drogi liczonej wzdłuż promienia żółtego. To oznacza, że fazy różowy będzie miał w punkcie P tę samą fazę co fazy pomarańczowy i żółty. Uwaga będzie to prawdą, wtedy gdy odległość do punktu P jest dużo większa od odległości między źródłami. W przykładzie zakładamy, że wszystkie źródła ustawione są w tej samej fazie, to znaczy, że przesunięcie fazowe δ między nimi jest równe zero. Jednak nawet gdy między kolejnymi sąsiednimi źródłami będzie to samo przesunięcie fazy δ , to dalej położenie kątowne maksimów i minimów nie będzie zależało od ilości źródeł.

Rozkład maksimów nie powinien się zmienić. Jednak wraz ze wzrostem liczby źródeł maksima będą coraz szczuplejsze, zmieni się również rozkład minimów, co obrazuje rysunek (3.8).

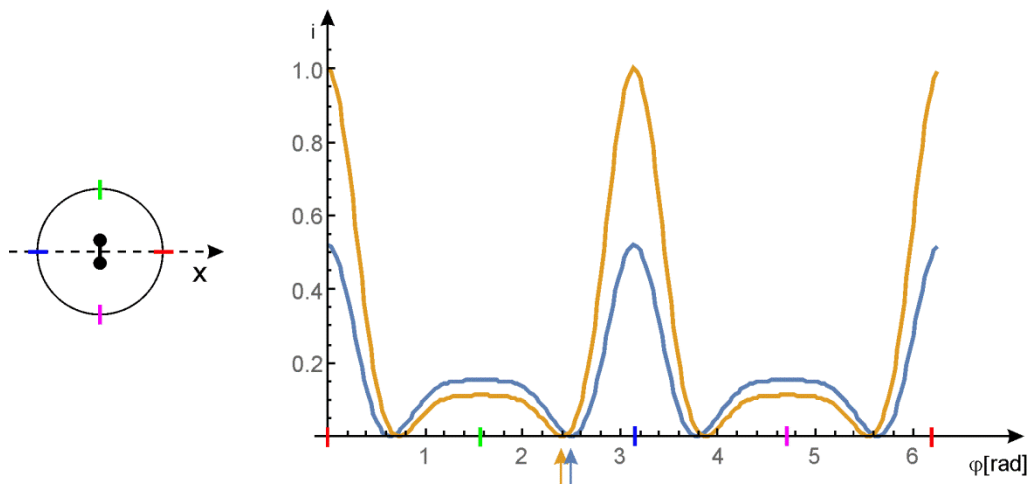


Rysunek 3.8. W punkcie P mamy maksimum, wszystkie fazy mają ten sam kąt – dodają się w fazie. W punkcie A (zielony) drogi wzdłuż promieni liczonych do tego punktu nie różnią się o wielokrotność długości fali, w efekcie fazy nie są w fazie. Stosunek długości faza wypadkowego **a**, liczonego w punkcie P do faza **c** liczonego w punkcie A wynosi 1,95. Kwadrat tego stosunku jest równy 3,8. Stosunek długości faza wypadkowego **b**, liczonego w punkcie P (jako suma tylko dwóch fazy pomarańczowego i różowego), do faza **d** liczonego w punkcie A (jako suma dwóch fazy pomarańczowego i różowego) wynosi 1,3. Kwadrat tego stosunku jest równy 1,7. Dla sumy dwóch fazy stosunek natężeń w punkcie P i A jest ponad dwa razy mniejszy niż dla pięciu fazy. Oznacza to, że natężenie światła dla pięciu punktów świecących, spada przy odchodzeniu od maksimum, szybciej niż dla dwóch fazy. Jest to związane z tym, że z kolejnych punktów świecących fazy w punkcie A będą wchodziły z coraz mniej zgodnymi fazami, podczas gdy w punkcie P cały czas będą się dodawały w fazie.

Rysunek (3.9) pokazuje przykłady rozkładu natężenia światła w chwili, gdy amplituda drgań osiąga maksimum, dla różnej liczby źródeł. Co się stanie gdy amplitudy interferujących fal nie będą równe. Dodawaliśmy już drgania o różnych amplitudach (rys. TVIII 2.1.5) i nic wielkiego się nie stało. Różnica długości fazy nie zmieni ich kątów fazowych w punktach obserwacji. Maksima pozostaną maksimumami. Zmiana długości fazy skomplikuje natomiast kwestie minimum, co obrazuje rysunek (3.10).



Rysunek 3.9. rozkład natężenia dla różnej liczby źródeł w przypadku: a) gdy odległość między sąsiednimi źródłami wynosi λ , b) gdy odległość między źródłami wynosi $\lambda/2$. Odległość między płaszczyzną ze źródłami sferą na której obliczamy rozkłady natężenia wynosi 100000mm, a $\lambda=1000$. Widać, że dodawanie kolejnych źródeł nie zmienia położenia maksimów, powoduje jednak, że maksima stają się szczuplejsze.



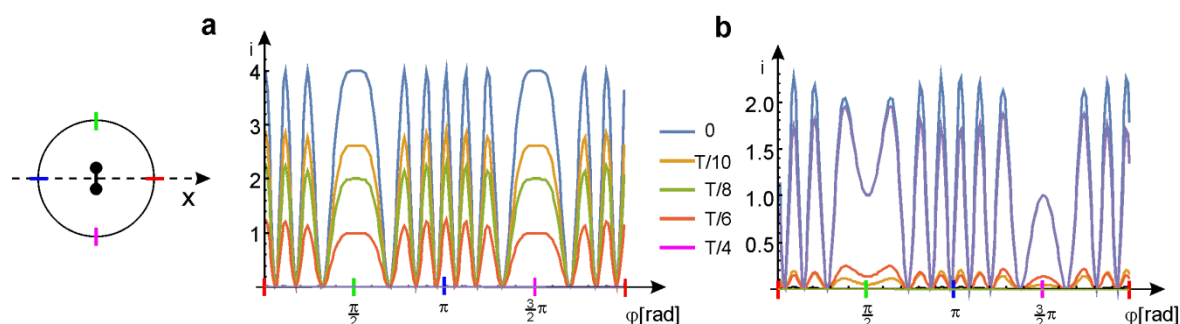
Rysunek 3.10. Przykład interferencji fal emitowanych z trzech źródeł o takich samych amplitudach (żółta linia) i o amplitudach równych, kolejno 1, 1/3, 2/3. Maksima wypadają dla tych samych kątów, ale minima są względem siebie przesunięte. Sąsiednie źródła odległe są o λ . Pozostałe parametry jak na rysunku (3.6). Rysunek jest unormowany tak, że największa wartość jest równa 1.

Do tej pory rysowałem przykłady, w których sąsiednie źródła były oddalone od siebie o λ , lub mniej. Dla porządku na rysunku (3.11) pokazane są przykładowe wzory interferencyjne w przypadku gdy odległości między źródłami są większe niż długość fali. Pojawiają się wówczas dodatkowe maksima rozłożone wokół kątów $\varphi=0$ i $\varphi=\pi$.

Jak widzisz używając fazorów w prosty sposób możemy sporo powiedzieć na temat interferencji fal. Zaletą fazorów jest to, że pewne sprawy po prostu widać. Gdybyśmy się posługiwali wyłącznie wzorami, do wniosków moglibyśmy

dojść po analizie dość złożonych wyrażeń matematycznych. Rysowanie daje szybszy i przyjemniejszy wgląd w tajniki interferencji fal. Czas na podsumowanie tego wstępu do interferencji. Interferencja pojawia się tam, gdzie najpierw sumujemy wyrażenia opisujące fale, a potem sumę podnosimy do kwadratu (w celu obliczenia natężenia światła). Taki sposób obliczania daje nam oprócz sumy kwadratów wyrażeń składowych dodatkowy człon mieszany (tzw. człon interferencyjny).

$$i_w = (u_1 + u_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2 = i_1 + i_2 + 2u_1u_2 \quad 3.18$$



Rysunek 3.11. a) Interferencja fal z dwóch źródeł oddalonych od siebie o 3λ , przesunięcie fazowe między źródłami $\delta=0$; b) Interferencja fal z dwóch źródeł oddalonych od siebie o 3λ , przesunięcie fazowe między źródłami $\delta=\pi/2$. Pozostałe parametry jak na rysunku (3.6).

Ten mieszany człon $2u_1u_2$ powoduje pojawienie się złożonych oscylacji natężenia wypadkowego dwóch interferujących fal. Gdybyśmy najpierw obliczali kwadraty (natężenia) a potem sumowali człon interferencyjny nie pojawiałyby się.

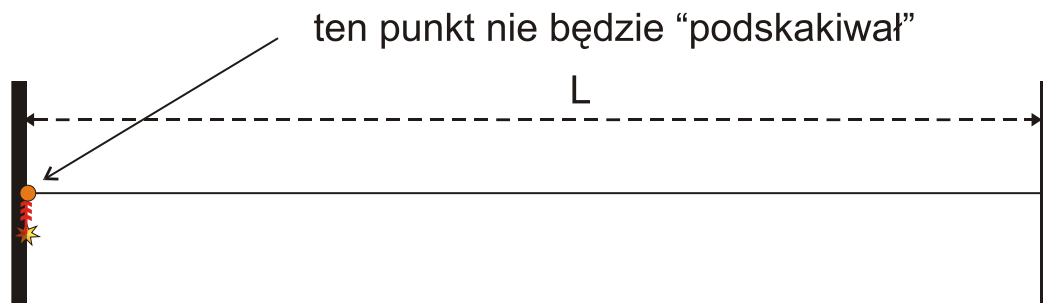
$$i_w = u_1^2 + u_2^2 = i_1 + i_2 \quad 3.19$$

Sumowanie fazorów jest równoważne procedurze, w której najpierw sumujemy a potem podnosimy do kwadratu. Po tych wstępnych rozważaniach przejdę do konstrukcji ważnej klasy fal – fal stojących – jako wyniku interferencji fal harmoniczných.

3.1. Fale stojące

Powiedzmy, że chcemy pobudzić fale w strunie rozpiętej między dwoma ściankami. Czy możemy wzbudzić w strunie dowolną falę? Skupmy uwagę na fali harmonicznój. Gdyby w strunie udało się wzbudzić taką falę, to reprezentujący ją oscylator harmoniczný przy lewym jej końcu miałby amplitudę równą zero (przyjmujemy, że struna jest zamocowana na sztywno). Ponieważ dla fali harmonicznój wszystkie oscylatory muszą mieć taką samą amplitudę, to w strunie możemy wzbudzić falę harmoniczná jedynie o zerowej amplitudzie, czyli żadną.

Fali harmoniczej w strunie nie możemy wzbudzić. Związane jest to z więzami jakie na strunę nakładają punkty zamocowania (rys. 3.1.1). Inaczej mówiąc własności tych zamocowań ograniczają liczbę możliwych fal, jakie możemy wzbudzić w strunie. Z doświadczenia wiemy jednak, że struny mogą drgać. Jaka jest podstawowa postać możliwych do wygenerowania w strunie drgań?



Rysunek 3.1.1. Próba pobudzenia punktu przy ścianie do drgań harmoniczych nie powiedzie się, gdyż jest on na sztywno związany ze ścianą.

Wiemy, że złożone fale można rozłożyć na fale harmoniczne (analiza fourierowska). Wynika z tego, że najprostsza nie harmoniczna postać drgań struny opisana jest przez sumę dwóch fal harmoniczych. Spośród interferujących dwóch fal najciekawszym przypadkiem jest suma dwóch fal o tej samej częstotliwości, ale rozchodzących się w przeciwne strony.

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1) + A \cos(\omega t + kx + \varphi_2) \quad 3.1.1$$

Znak minus przy k oznacza, że fala rozchodzi się przeciwnie do kierunku fali, we wzorze której przy k stoi znak plus. Korzystając ze wzoru na sumę cosinusów mamy:

$$u(x, t) = 2A \cos\left(kx + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) \quad 3.1.2$$

Oczywiście, ze względu na obecność więzów przy końcach struny muszą być spełnione warunki

$$u(0, t) = 2A \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) = 0 \quad 3.1.3a$$

$$u(L, t) = 2A \cos\left(kL + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) = 0 \quad 3.1.3b$$

Warunki te muszą być spełnione dla dowolnego t , stąd mamy

$$\cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = 0 \quad 3.1.4a$$

$$\cos\left(kL + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = 0 \quad 3.1.4b$$

Pierwszy warunek oznacza, że

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad 3.1.5$$

Wstawiając to wyrażenie do drugiego warunku mamy

$$\sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad 3.1.6$$

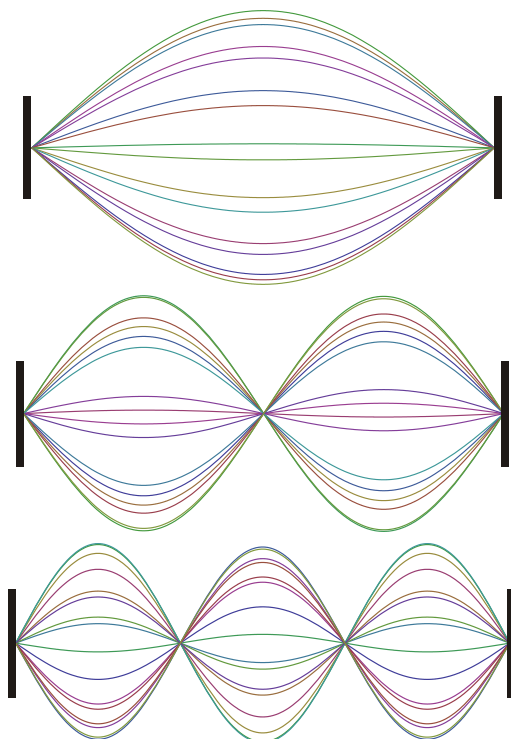
Biorąc pod uwagę, że $k=2\pi/\lambda$, mamy

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad 3.1.7$$

Warunek (3.1.7) ogranicza możliwe częstotliwości składowych fal do zbioru

$$\omega = n \frac{\pi v}{L} \quad 3.1.8$$

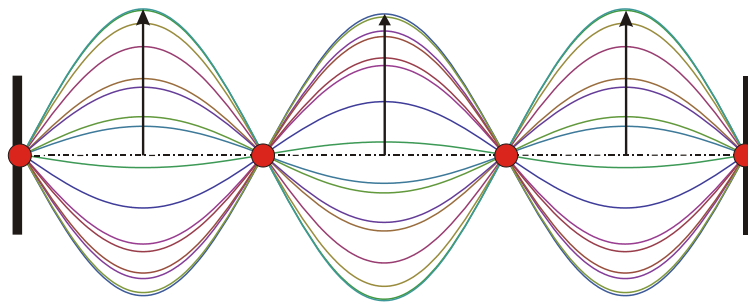
Gdzie v jest prędkością przeciwbieżnych fal harmonicznyc. Zobaczymy jak wygląda wzbudzona w ten sposób fala w strunie (rys. 3.1.2).



Rysunek 3.1.2. Trzy kolejne przykłady fal odpowiadających wzbudzanych w strunie, której oba końce są sztywno zamocowane.: góra) $n=1$; środek) $n=2$ i dół) $n=3$. Różne kolory pokazują stan struny w różnych chwilach czasu.

Przyjrzyjmy się nieco bliżej na przykład fali dla $n=3$ (rys. 3.1.3). Charakter takiej fali można również odgadnąć z jej równania (3.1.2). Pierwszy cosinus zależy

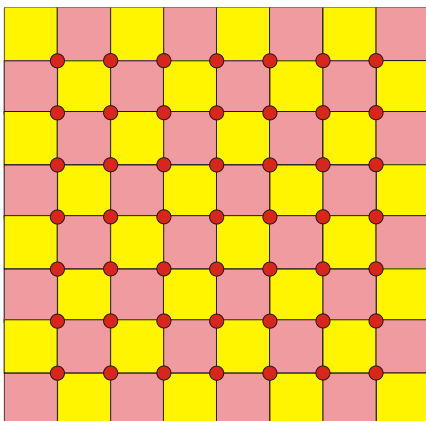
tylko od współrzędnych przestrzennych. Zatem jeżeli wykreślimy wykres fali względem osi x , to w miejscach gdzie pierwszy cosinus przyjmie wartość zero wychylenie punktów będzie w każdej chwili równe zero – w tych punktach będą węzły fali stojącej. W punktach, gdzie cosinus przyjmie wartość jeden, będą miały miejsce największe oscylacje. Sam przebieg oscylacji jest opisany przez zmienny w czasie drugi cosinus. Pierwszy cosinus nakłada na amplitudę drgań granice w ramach, których przebiegają drgania opisane przez cosinus zależny od czasu. Ponieważ punkty o zerowej i maksymalnej amplitudzie nie poruszają się, falę taką nazywamy falą stojącą.



Rysunek 3.1.3. Rysunek pokazuje położenie struny, dla $n=3$, w różnych chwilach czasu. Widać, że jest $n+1$ punktów (pomarańczowe kółka), w których struna jest cały czas w położeniu równowagi. Punkty takie nazywamy punktami węzłowymi fali stojącej (krótko: węzłami fali stojącej). Są również punkty, w których amplituda drgań jest największa (strzałki). Punkty te nazywamy strzałkami fali stojącej. Samą falę, ze względu na istnienie takich stałych, charakterystycznych punktów nazywamy falą stojącą. Odległość między węzłami lub strzałkami wynosi oczywiście $\lambda/2$.

Opisane wyżej drgania podstawowe nazywane są modami drgań struny. W ogólnym przypadku drgania struny dają się rozłożyć na superpozycję modów.

Fale stojące mogą również pojawiać się w układach wielowymiarowych. Analiza takich drgań jest znacznie trudniejsza od strony technicznej, więc w tym miejscu jedynie zasygnalizuję problem (rys. 3.1.4).



Rysunek 3.1.4. Możemy się na przykład domyśleć, że kwadratowa membrana będzie miała na przemian obszary amplitud dodatnich i ujemnych, zaznaczone tu dwoma różnymi kolorami. W centrach tych obszarów będziemy mieli strzałki a na ich skrzyżowaniach węzły (czerwone kółka). Nie będzie to oczywiście jedyna możliwa postać fali stojącej.

4. Paczki falowe ♦

Pozostajemy dalej w bogatym temacie składania drgań. W jednym wymiarze fale stojące powstają na skutek interferencji dwóch przeciwbieżnych fal harmoniczych o tej samej częstości. Kolejny ciekawy przypadek wiąże się z pytaniem: jak wygląda suma wielu fal harmoniczych, biegnących w tą samą stronę, o niewiele różniących się częstościach? Wiemy już, że dwa drgania harmoniczne o niewiele różniącej się częstości dają, po złożeniu, zjawisko dudnień (§TVIII 2.1). Jak wyglądają dudnienia w przypadku fal? Ponieważ fala harmoniczna zachowuje się, w każdym punkcie przestrzeni jak oscylator harmoniczny, to w wyniku złożenia dwóch fal o prawie takich samych częstościach, w każdym punkcie przestrzeni otrzymamy zjawisko dudnień. Co się stanie przy zsumowaniu większej liczby fal?

Będę sumował N fal harmoniczych, których częstości są równomiernie rozmieszczone w przedziale od ω_1 do ω_N . Przedział częstości $\Delta\omega$ wynosi

$$\Delta\omega = \omega_N - \omega_1 \quad 4.1$$

Kolejne sąsiednie funkcje harmoniczne, opisujące kolejne fale harmoniczne, różnią się od siebie o tą samą wartość przyrostu częstości.

$$\delta\omega = \frac{\Delta\omega}{N - 1} \quad 4.2$$

Częstość k -tej funkcji harmoniczej wynosi

$$\omega_k = \omega_1 + (k - 1)N\delta\omega \quad 4.3$$

Zdefiniuję następujące wielkości charakteryzujące zbiór fal, których częstości zmieniają się kolejno o taką samą wartość $\delta\omega$.

Definicja 4.1: Częstość średnia zbioru fal (częstość główna)

Częstość średnia zbioru fal harmoniczych (częstość główna) wyraża się wzorem.

(4.4), przy czym zakładamy, że ω_k wyraża się wzorem (4.3)

$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_N) \quad 4.4$$

Definicja 4.2: Częstość modulacji zbioru fal

Częstość modulacji zbioru fal harmoniczných wyraża się wzorem, przy czym zakładamy, że ω_k wyraża się wzorem (4.3)

$$\omega_{mod} = \frac{1}{2}(\omega_N - \omega_1) \tag{4.5}$$

Definicja 4.3: Średnia liczba falowy zbioru fal (główna liczba falowa)

Jeżeli wektory falowe k_1, \dots, k_N są współliniowe to średni liczba falowa k_0 (główna liczba falowa) wyraża się wzorem (4.6)

$$k_0 = \frac{1}{2}(k_1 + k_N) \tag{4.6}$$

Definicja 4.4: Liczba falowa modulacji

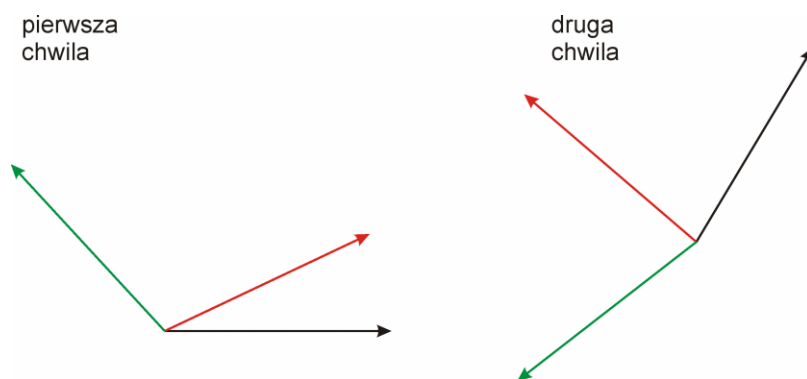
Jeżeli wektory falowe k_1, \dots, k_N są współliniowe to liczba falowa modulacji k_{mod} wyraża się wzorem, (4.7)

$$k_{mod} = \frac{1}{2}(k_1 + k_N) \tag{4.7}$$

Przy zmaganiu z składaniem N fal harmoniczných, pomocny będzie efekt stroboskopowy.

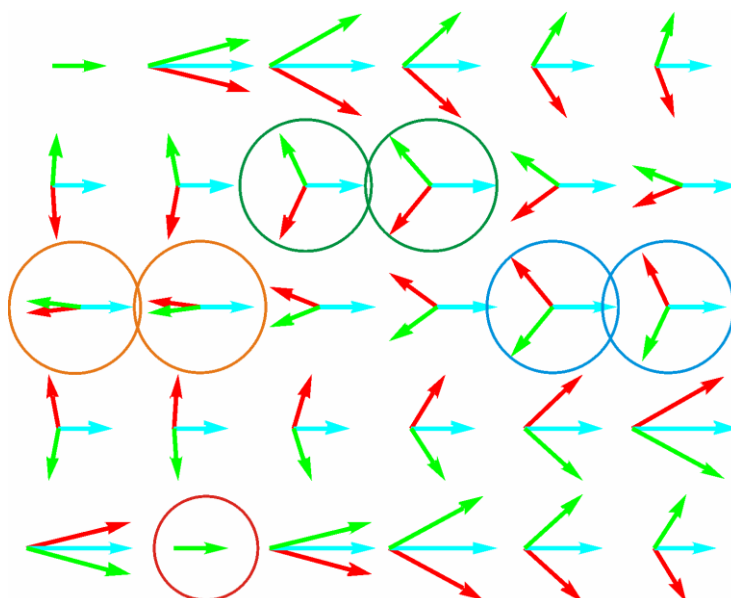
4.1. Efekt stroboskopowy

Gdy mamy trzy fale o częstościach $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, różniących się o wartość $\delta\omega$, to ze wzoru (4.4) otrzymam $\omega_2 = \omega_0$. W danym punkcie obserwacji trzy fale harmoniczne będą reprezentował przez trzy fazory. Obliczając wartość sumy funkcji harmoniczných w wybranym punkcie przestrzeni musimy zaczepić w tym punkcie odpowiadające im fazory. Fazory te będą obracały się z różnymi prędkościami kątowymi, o wartościach odpowiadających poszczególnym częstościom fal składowych (rys. 4.1.1).



Rysunek 4.1.1. Trzy fazory obracają się z trzema różnymi prędkościami kątowymi, reprezentują trzy fale o różnych częstościach. Względne fazy (kąty między fazorami) zmieniają się w czasie.

Niech w pewnej chwili czasu wszystkie fazory mają kąt fazowy równy zero. Załóżmy, że układ oświetlony jest cyklicznie powtarzanymi krótkimi błyskami (oświetlenie stroboskopowe). Niech częstość błysków odpowiada częstości średniej ω_0 , która jest równa, w analizowanym przypadku, częstości ω_2 . To co zobaczymy w takim migającym świetle (światle stroboskopowym) ilustruje rysunek (4.1.2)



Rysunek 4.1.2. Trzy fazory reprezentują, w wybranym punkcie, trzy nakładające się fale harmoniczne. Przyjąłem następujące parametry układu: $\omega_0=25\text{rad/s}$, $\omega_{\text{mod}}=1\text{rad/s}$, $\delta\omega=1\text{rad/s}$; $\Delta\omega=2\text{rad/s}$

Kiedy miga lampa stroboskopu, widzimy fazor niebieski jako nieruchomy, gdyż każdy błysk ma miejsce dokładnie w momencie, gdy niebieski fazor powraca w położenie początkowe (jest to efekt dopasowania częstości tego fazora i częstości błysków stroboskopu). Fazor czerwony spóźnia się względem niebieskiego, a fazor zielony wyprzedza fazor niebieski. W efekcie obserwujemy

pozorny bezruch fazora niebieskiego, któremu towarzyszy pozorny obrót fazora zielonego (zgodnie z ruchem wskazówek zegara) oraz pozorny obrót fazora czerwonego przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Wrażenie tych pozornych ruchów i bezruchów nazywamy efektem stroboskopowym.

W oświetleniu stroboskopowym wydaje się, że fazory kręcą się z inną prędkością kątową niż ma to miejsce w rzeczywistości, lub nawet w kierunku przeciwnym do rzeczywistego obrotu. Dla wygody zdefiniuję przesunięcie stroboskopowe. Przez przesunięcie stroboskopowe rozumiem kąt o jaki przesuwa się fazor obserwowany w momencie następujących po sobie błysków stroboskopu. Przesunięcie stroboskopowe fazora niebieskiego wynosi zero, gdyż w każdym błysku obserwujemy go w tym samym położeniu. Czas jednego błysku wynosi

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad 4.1.1$$

W czasie jednego błysku fazor zielony zmieni położenie o kąt

$$\delta\varphi = \delta\omega T_s = 2\pi \frac{\delta\omega}{\omega_0} \quad 4.1.2$$

Wzór (4.1.2) wyraża przesunięcie stroboskopowe, fazora zielonego. W analizowanym przykładzie przesunięcie stroboskopowe fazora zielonego jest równe około 0,25 radiana, a fazora czerwonego -0,25 radiana; przy czym częstość stroboskopu wynosi około $\frac{1}{4}$ sekundy. Oznacza to, że na każdy pełny obrót fazora niebieskiego przypada jeden obrót plus jedna czwarta radiana dla fazora zielonego i jeden obrót pomniejszony o jedną czwartą radiana dla fazora czerwonego. Ile trzeba czasu, by fazory wróciły do wyjściowego porządku? Fazor zielony potrzebuje czterech błysków na przesunięcie się o jeden radian, czyli ponad 24 błyski na wykonanie pełnego obrotu. Podobnie fazor czerwony (który obraca się w przeciwną stronę). Możemy to obliczyć ze wzoru

$$\frac{2\pi}{\delta\varphi} = \frac{2\pi\omega_0}{2\pi\delta\omega} = \frac{\omega_0}{\delta\omega} = 25 \quad 4.1.3$$

Zatem powrót do położenia początkowego nastąpi w czasie dwudziestego piątego błysku. Przyjmując, że na początku mamy błysk numer zero, widać z rysunku (4.1.2), że tak właśnie się dzieje. Dwudziesty piąty błysk zaznaczony jest czerwonym kółkiem.

Równie łatwo jest znaleźć moment kiedy fazory dodadzą się do zera. Fazory muszą ułożyć się symetrycznie, czyli fazor zielony musi osiągnąć kąt $2/3\pi$, a fazor czerwony kąt $-2/3\pi$. Numer błysku, przy którym to nastąpi wynosi:

$$\frac{2\pi}{3\delta\varphi} = \frac{\omega_0}{3\delta\omega} = 8.33 \quad 4.1.4a$$

Czyli gdzieś pomiędzy ósmym a dziewiątym błyskiem. Błyski te zaznaczone są, na rysunku (4.1.2) zielonym kółkiem. Następne minimum pojawi się

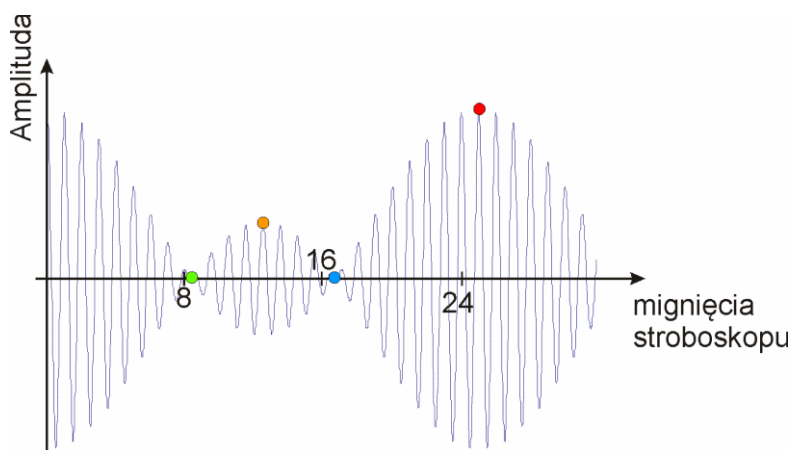
$$\frac{4\pi}{3\delta\varphi} = \frac{4\omega_0}{3\delta\omega} = 16.66 \quad 4.1.4b$$

czyli gdzieś pomiędzy szesnastym a siedemnastym błyskiem stroboskopu. Błyski te zaznaczone są niebieskim kółkiem. Wygląda na to, że używając fazorów całkiem zgrabnie udało się przeprowadzić analizę złożenia trzech drgań harmonicznnych. Spróbuj to zrobić z użyciem wzorów a od razu docenisz zalety fazorów.

Trzy fale, których suma reprezentowana jest na rysunku (4.1.2), dodałem również w sposób „normalny” to znaczy sumując wyrażenie

$$u(t) = \sum_{i=1}^N A \cos(\omega_i t + k_i x_{ustalone} + \delta) \quad 4.1.5$$

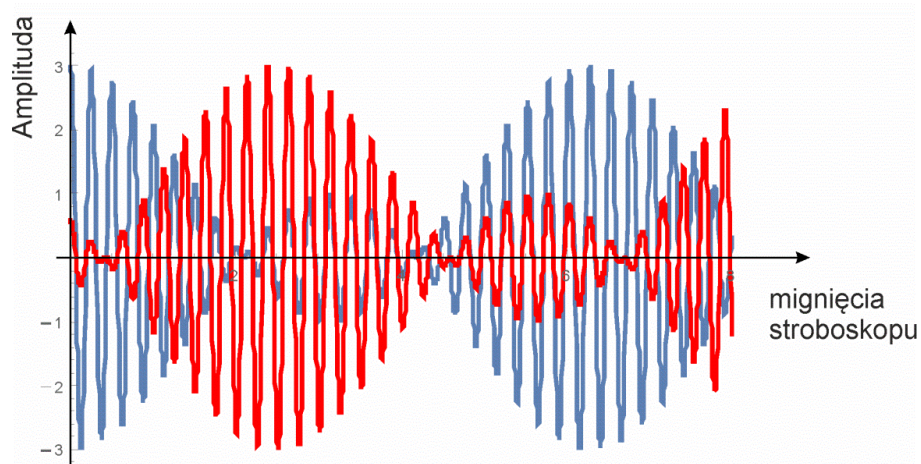
Wykres sumy (4.1.5) dla $N=3$, ω_i takich jak na rysunku (4.1.2) oraz $k_i x_{ustalone} + \delta = 0$ przedstawia rysunek (4.1.3). Zmiana wartości wyrażenia $k_i x_{ustalone} + \delta$ oznacza tylko przesunięcie całego wykresu w lewo lub w prawo i nie zmienia charakteru drgań, tak jak to zwykle bywa z początkowym przesunięciem fazowym.



Rysunek 4.1.3. Wykres drgań wypadkowych dla trzech fal dodanych do siebie w wybranym punkcie przestrzeni $x_{ustalone}$. Fale te są reprezentowane przez fazory na rysunku (4.1.2). Punkty zaznaczone kolorowymi kółkami odpowiadają mignięciom stroboskopu, które na rysunku (4.1.2) ujęte są w okręgi o tych samych kolorach.

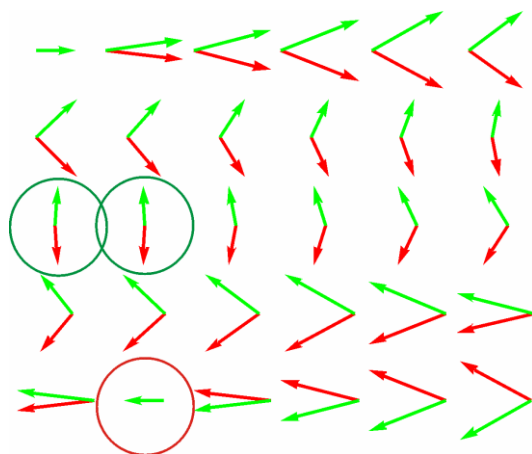
Widać, że pierwsze minimum pojawia się zaraz po ósmym mignięciu. Następne pojawi się po szesnastym mignięciu stroboskopu. Maksimum amplitudy odtworzy się w czasie dwudziestego piątego mignięcia. Punkt pomarańczowy pokazuje położenia lokalnego maksimum amplitudy. Ma ono miejsce między dwunastym a trzynastym mignięciem stroboskopu. W tym czasie dodadzą się w fazie fazy czerwony i zielony, tak jak to widać na rysunku (4.1.2) (pomarańczowy okrąg). Oba te fazy będą maksymalnie współpracować przeciwko niebieskiemu, stąd lokalne maksimum amplitudy.

Rysunek podobny do tego powyżej już oglądaliśmy przy okazji omawiania zjawiska dudnień (§TVII 2.1). Dudnienia powstają wtedy, gdy sumowane są drgania dwóch oscylatorów o bliskich, ale nie jednakowych częstościach. Rysunek (4.1.3) pokazuje takie sumowanie w przypadku trzech oscylatorów harmonicznych (pamiętaj że jest on wyrysowanym w ustalonym punkcie, gdzie fale sprowadzają się do oscylatorów). W dwóch różnych punktach drgania mają taką samą ogólną postać ale są względem siebie przesunięte w fazie, co pokazuje rysunek (4.1.4).



Rysunek 4.1.4. Złożenie trzech fal takich jak na rysunku (4.1.3). Wykres niebieski narysowany jest dla punktu $x=0$, a czerwony dla punktu $x=500\text{m}$, przyjąłem, że fala porusza się z prędkością $v=100\text{m/s}$

Rysunek (4.1.5) pokazuje obraz ruchu fazorów dla dwóch nakładających się fal harmonicznych (co odpowiada analizowanemu wcześniej przypadkowi dudnień). Ponieważ liczba fazorów jest parzysta nie ma fazona, którego prędkość stroboskopowa byłaby równa zero. Pierwsze zero obwiedni amplitudy będzie miało miejsce gdy czerwony i zielony fazon ustawią się przeciwie. Ponieważ prędkości stroboskopowe obu fazorów są przeciwne będzie to miało miejsce gdy oba fazy przebędą, z prędkością stroboskopową, kąt $\pi/2$.



Rysunek 4.1.5. Dwa fazory reprezentują, w wybranym punkcie, dwie nakładające się fale harmoniczne. Przyjąłem następujące parametry układu: $\omega_0=25\text{rad/s}$, $\omega_{mod}=1\text{rad/s}$, $\delta\omega=1\text{rad/s}$; $\Delta\omega=1\text{rad/s}$

Wzór na przesunięcie stroboskopowe w przypadku parzystej liczby fazorów jest inny niż dla ich nieparzystej liczby (4.1.2). W czasie każdego mignięcia stroboskopu zielony fazor obróci się o pełny kąt i jeszcze połowę kąta $\delta\omega$. Przesunięcie stroboskopowe wyrazi się wzorem.

$$\delta\varphi = \frac{\delta\omega}{2} T_s = \pi \frac{\delta\omega}{\omega_0} \quad 4.1.6$$

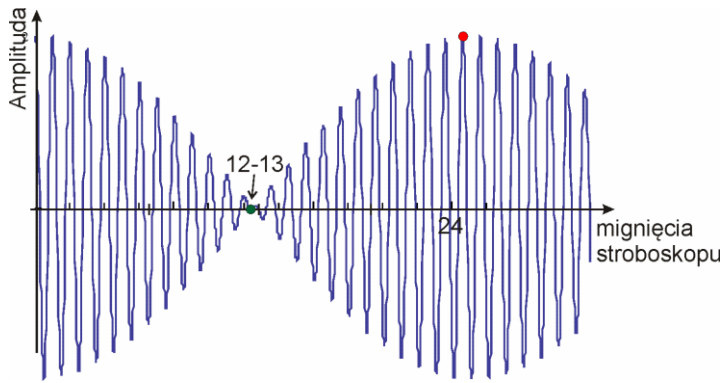
Pierwsze minimum pojawi się, gdy fazory obrócą się (w świetle stroboskopu) o $\pi/2$. Postępując tak jak we wzorze (4.1.3) mamy

$$\frac{\pi}{2} \frac{\omega_0}{\pi\delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\delta\omega} = 12 \frac{1}{2} \quad 4.1.7$$

We wzorze tym przyjąłem dane liczbowe z rysunku (4.1.5). Minimum powinno przypaść pomiędzy dwunastym a trzynastym mignięciem stroboskopu, tak jak to pokazuje rysunek (4.1.5). Maksimum będzie miało miejsce gdy oba fazory obrócą się o kąt π . Stąd otrzymujemy

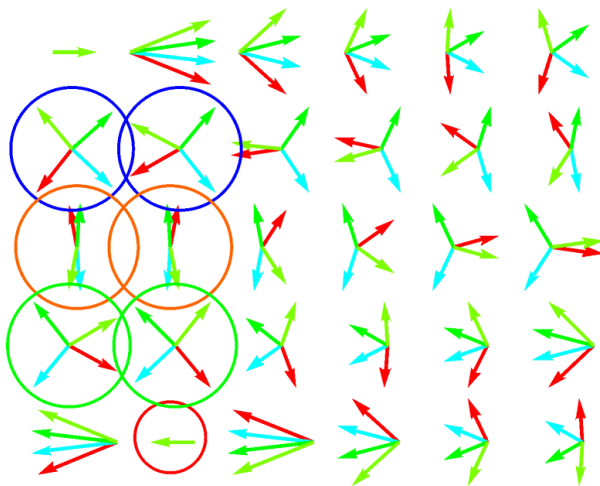
$$\pi \frac{\omega_0}{\pi\delta\omega} = \frac{\omega_0}{\delta\omega} = 25 \quad 4.1.8$$

Zatem spodziewamy się, że nastąpi to w czasie dwudziestego piątego mignięcia stroboskopu, co zgadza się z rysunkiem (4.1.5). Rysunek (4.1.6) pokazuje przebieg w czasie sumy dwóch fal w wybranym punkcie przestrzeni. Widać, że położenie minimum i maksimum zgadza się z wartościami wyznaczonymi we wzorach (4.1.7 i 4.1.8) i z rysunkiem (4.1.5).



Rysunek 4.1.6. Wykres dwóch fal dodanych do siebie w wybranym punkcie przestrzeni. Fale te są reprezentowane przez fazory z rysunku (4.1.5). Punkty zaznaczone kolorowymi kółkami odpowiadają tyknięciom stroboskopu, które na rysunku (4.1.5) ujęte są w okręgi o tych samych kolorach.

Przyglądnijmy się obrotom czterech fazorów reprezentujących cztery składowe harmoniczne (rys. 4.1.7)



Rysunek 4.1.7. Cztery fazory reprezentują, w wybranym punkcie, cztery nakładające się fale harmoniczne. Przyjąłem następujące parametry układu: $\omega_0=25\text{rad/s}$, $\omega_{mod}=1,5\text{rad/s}$, $\delta\omega=1\text{rad/s}$; $\Delta\omega=3\text{rad/s}$

Przesunięcie stroboskopowe i -tego fazora wynosi

$$\delta\varphi_i = \pm \left(\frac{\delta\omega}{2} + i\delta\omega \right) T_s = \pm \left(\frac{\delta\omega}{2} + i\delta\omega \right) \frac{2\pi}{\omega_0} = \pm (\pi + 2\pi i) \frac{\delta\omega}{\omega_0} \quad 4.1.9a$$

Wzór (4.1.9a) należy czytać tak. Jeżeli mamy parzystą liczbę fazorów, to dla najwolniejszego z nich, poruszającego się przeciwie do ruchu wskazówek zegara bierzemy $i=0$ i znak „+”. Największa wartości i jest równa połowie liczby fazorów. Dla każdego szybszego zwiększamy i o jeden. Dla wolnych fazorów obracających się przeciwie do wskazówek zegara robimy tak samo, tyle że wybieramy znak „-”. Przy okazji warto napisać ogólny wzór na przesunięcie stroboskopowe przy nieparzystej liczbie fazorów.

$$\delta\varphi_i = \pm i \delta\omega T_s = \pm i 2\pi \frac{\delta\omega}{\omega_0} \quad 4.1.9b$$

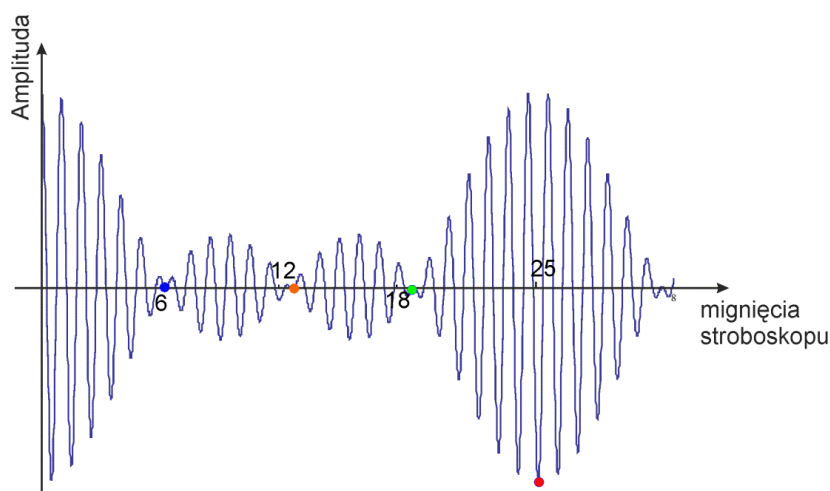
Wzór ten czytamy podobnie jak poprzedni, z tym że teraz indeks i zmienia się od zera do liczby równej liczbie fazorów pomniejszonej o jeden i podzielonej przez dwa.

Wracając do przypadku czterech fazorów z rysunku (4.1.7) widać, że pierwsze minimum nastąpi, kiedy wolniejsze i szybsze fazory ustawią się pod kątem π względem siebie. Nastąpi to na przykład wtedy kiedy wolny fazor zielony (obracający się z wyprzedzeniem) obróci się o kąt $\pi/4$, a szybszy czerwony (obracający się z opóźnieniem) obróci się o kąt $-3/4\pi$. Będzie to miało miejsce

$$\frac{\pi}{4} \frac{1}{\delta\varphi} = \frac{1}{4} \frac{\omega_0}{\delta\omega} = 6 \frac{1}{4} \quad 4.1.10$$

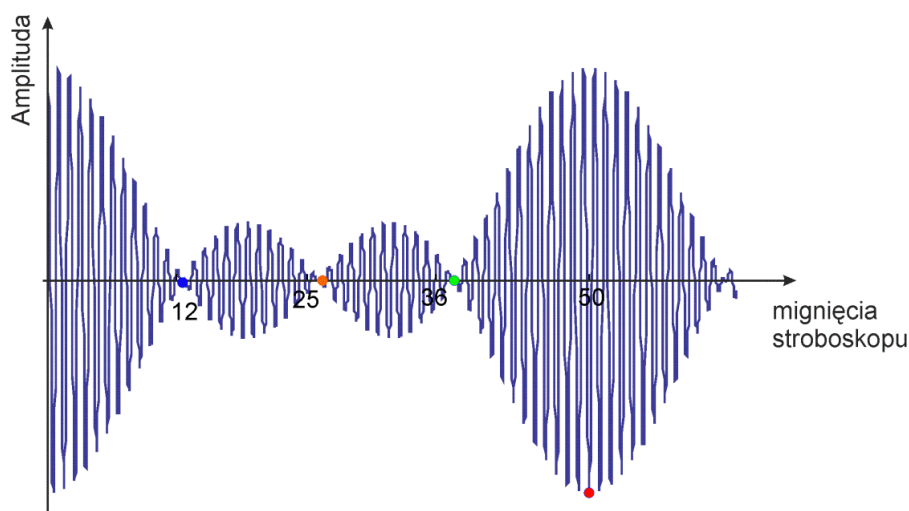
Między szóstym a siódmym mignięciem stroboskopu, co zgadza się z rysunkiem (4.1.7), gdzie mignięcia, między którymi następuje pierwsze minimum zaznaczone są niebieskimi okręgami. Następne minimum pojawi się gdy fazory szybkie i wolne ustawią się naprzeciw siebie na co będzie trzeba dwa razy więcej czasu. Nastąpi to zatem pomiędzy dwunastym a trzynastym mignięciem stroboskopu, na rysunku mignięcia te zaznaczone są pomarańczowymi okręgami. Na trzecie minimum trzeba będzie czekać kolejne nieco ponad sześć mignięć i wystąpi ono między osiemnastym a dziewiętnastym mignięciem stroboskopu, na rysunku mignięcia te zaznaczone są zielonymi okręgami. Powrót do maksimum będzie miał miejsce po kolejnych sześciu i ćwierć obrotach kiedy wszystkie fazory wykonają połowę albo półtora obrotu. Zatem powrót do maksimum będzie miał miejsce w czasie dwudziestego piątego mignięcia stroboskopu, co zaznaczone jest czerwonym okręgiem. Rysunek (4.1.8) pokazuje efekt dodawania czterech fal o parametrach danych na rysunku (4.1.7).

Mam nadzieję, że wiesz już jak obliczać za pomocą fazorów czas, po którym nastąpią kolejne minima obwiedni sumy fal, lub powrót do głównego maksimum. Z rozważań tych wynika, że powrót do głównego maksimum następuje wtedy, gdy w przypadku nieparzystej liczby fazorów, fazory o najmniejszej prędkości stroboskopowej wykonają pełny obrót, a w przypadku parzystej liczby obrotów, gdy ten obrót będzie równy połowie kąta pełnego.



Rysunek 4.1.8. Wykres przebiegu czterech fal dodanych do siebie w wybranym punkcie przestrzeni. Fale te są reprezentowane przez fazory z rysunku (4.1.7). Punkty zaznaczone kolorowymi kółkami odpowiadają mignięciom stroboskopu, które na rysunku (4.1.7) ujęte są w okręgi o tych samych kolorach.

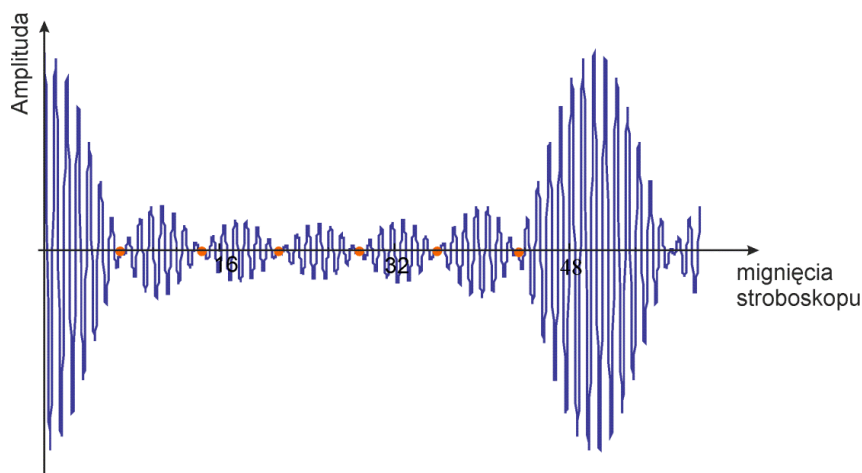
Możemy wysnuć również ogólniejsze wnioski. Gdy zmniejszamy o połowę wartość parametru $\delta\omega$, to czas powrotu do maksimum powinien wzrosnąć dwukrotnie. Na rysunku (4.1.9) pokazany jest przykład taki jak na rysunku (4.1.8), z tym że teraz $\delta\omega=0.5\text{rad/s}$, a przesunięcie stroboskopowe obliczone ze wzoru (4.1.2) wynosi 0.125rad/s . Widać, że choć kształt obwiedni drgań jest taki sam, w szczególności jest tyle samo minimów pomiędzy dwoma maksimumami głównymi, to ilość mignięć między minimami i maksimumami jest większa. Zwiększa się również ilość pojedynczych cykli pomiędzy kolejnymi maksimumami i minimumami obwiedni. Zwiększanie liczby fazorów, przy zachowaniu wartości $\delta\omega$ zwiększa natomiast liczbę lokalnych minimów obwiedni. Rysunek (4.1.10) pokazuje co się dzieje dla siedmiu fazorów, przy zachowaniu wartości $\delta\omega=1\text{rad/s}$, i częstości średniej $\omega_0=25\text{rad/s}$. Co się stanie gdy będziemy zmniejszać $\delta\omega$, tak że $\delta\omega\rightarrow 0$? Wtedy czas potrzebny do obrotu najwolniejszego fazora o kąt π będzie rósł do nieskończoności (mówimy o ruchu w oświetleniu stroboskopowym) i na ponowne pojawienie się maksimum głównego przyjdzie nam czekać nieskończenie długo. W takiej sytuacji będziemy mówili o paczce falowej. Paczka falowa ma to do siebie, że maksimum główne pojawia się tylko raz.



Rysunek 4.1.9. Gdy w przykładzie z rysunku (4.1.8) zmniejszymy $\delta\omega$ dwukrotnie, do $\delta\omega=0,5\text{rad/s}$, to liczba mignięć stroboskopu po których wystąpią kolejne minima i maksima wydłużą się dwukrotnie. Ponieważ czas pojedynczego mignięcia nie zmienił się również czas liczony w sekundach wydłużą się dwukrotnie.

Maksimum to przemieszcza się w czasie z prędkością, którą będziemy musieli wyznaczyć. Obliczę kształt paczki falowej sumując kolejne fale harmoniczne, o amplitudzie a , w zadanym przedziale częstości $[\omega_d; \omega_g]$, przy nieskończenie małym przyroście częstości między kolejnymi falami. W takim przypadku sumowanie oznacza oczywiście całkowanie. Ale uwaga – sprawy nie możemy potraktować tak

$$u(t, x) = \int_{\omega_d}^{\omega_g} a \cos(\omega t - kx) d\omega = \frac{\sin(\omega_g t - kx)}{\omega_g} - \frac{\sin(\omega_d t - kx)}{\omega_d} \quad 4.1.11$$



Rysunek 4.1.10. Tak wygląda wykres sumy siedmiu fal dodanych do siebie w wybranym punkcie przestrzeni. Parametry $\delta\omega$ i ω_0 są takie same jak na rysunku (4.1.9). Zauważ, że choć liczba mignięć między sąsiednimi maksimumami głównymi jest taka sama, to liczba minimów obwiedni wzrosła z trzech do sześciu.

W ten sposób policzymy pole pod funkcją $\cos(\omega t - kx)$ w przedziale od ω_d do ω_g . Do sprawy trzeba podejść inaczej. Powiedzmy, że chcę dodać N fal o amplitudzie β , takich, że te o sąsiednich częstościach różnią się wartościami o $\delta\omega$. Sumę fal zapiszę korzystając z notacji zespolonej.

$$u(t, x) = \operatorname{Re} \left(\beta \sum_{j=0}^{N-1} e^{i((\omega_0 t - k_0 x) + j(\delta\omega t - \delta k x))} \right) \quad 4.1.12$$

$$= \beta \operatorname{Re} \left(e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} S \right)$$

$$S = \sum_{j=0}^{N-1} e^{i(j(\delta\omega t - \delta k x))} = 1 + e^{i(\delta\omega t - \delta k x)} + \dots \quad 4.1.12a$$

S jest sumą szeregu geometrycznego o postaci

$$S = 1 + b + b^2 + \dots + b^{N-1}; b = e^{i(\delta\omega t - \delta k x)} = e^{i\zeta} \quad 4.1.13$$

$$\zeta = \delta\omega t - \delta k x \quad 4.1.13a$$

Wyrażenie to mogę obliczyć korzystając ze wzoru na sumę skończonego szeregu geometrycznego

$$S = \frac{b^N - 1}{b - 1} \Rightarrow S = \frac{e^{iN\zeta} - 1}{e^{i\zeta} - 1} = \frac{e^{\frac{1}{2}iN\zeta}}{e^{\frac{1}{2}i\zeta}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}iN\zeta} - e^{-\frac{1}{2}iN\zeta}}{e^{\frac{1}{2}i\zeta} - e^{-\frac{1}{2}i\zeta}} \quad 4.1.14$$

$$= e^{\frac{1}{2}i\Delta\zeta} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}N\zeta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\zeta\right)};$$

$$\Delta\zeta = (N - 1)\zeta = (N - 1)(\delta\omega t - \delta k x) = \Delta\omega t - \Delta k x; \quad 4.1.14a$$

Wstawiając powyższe wyrażenie do (4.1.12) mamy

$$u(t, x) = \beta \operatorname{Re} \left(e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} e^{\frac{1}{2}i\Delta\zeta} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}N\zeta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\zeta\right)} \right) \quad 4.1.15$$

Przyjmę teraz, że liczba drgań składowych rośnie do nieskończoności $N \rightarrow \infty$, w efekcie

$$\delta\omega \rightarrow 0; N\delta\omega \leftrightarrow (N-1)\delta\omega = \Delta\omega \quad 4.1.16a$$

$$\delta k \rightarrow 0; N\delta k \leftrightarrow (N-1)\delta k = \Delta k$$

Na podstawie (4.1.13a), mamy

$$N\zeta = N(\delta\omega t - \delta k x) \approx \Delta\omega t - \Delta k x \quad 4.1.17$$

Nadto mamy

$$\sin\left(\frac{1}{2}\zeta\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\delta\omega t - \frac{1}{2}\delta k x\right) \rightarrow \frac{1}{2}(\delta\omega t - \delta k x) \quad 4.1.18$$

Poraz sinusów w (4.1.15) przyjmie postać

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}N\zeta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\zeta\right)} &= \frac{\sin\left(\frac{1}{2}N(\delta\omega t - \delta k x)\right)}{\frac{1}{2}(\delta\omega t - \delta k x)} = N \frac{\sin\left(\frac{1}{2}N(\delta\omega t - \delta k x)\right)}{\frac{1}{2}N(\delta\omega t - \delta k x)} \\ &\rightarrow N \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\Delta\omega t - \Delta k x)\right)}{\frac{1}{2}(\Delta\omega t - \Delta k x)} = N \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2\pi}\right) \end{aligned} \quad 4.1.19$$

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad 4.1.19b$$

Funkcja sinc opisana jest w (DD xx). Przy warunku

$$\Delta\omega t - \Delta k x = 0 \quad 4.1.20a$$

Mamy

$$N \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2\pi}\right) = N \quad 4.1.20$$

W wyrażeniu (4.1.11) wszystkie cosinusy przy warunku (4.1.20a) sumują się w fazie. Mamy wtedy największą wartość amplitudy, możemy więc przyjąć, że

$$a(0) = \beta N \quad 4.1.21$$

Stąd, dla $N \rightarrow \infty$ mamy

$$\beta = \frac{a(0)}{N} \rightarrow \frac{a(0)}{\Delta\omega} \delta\omega \quad 4.1.22$$

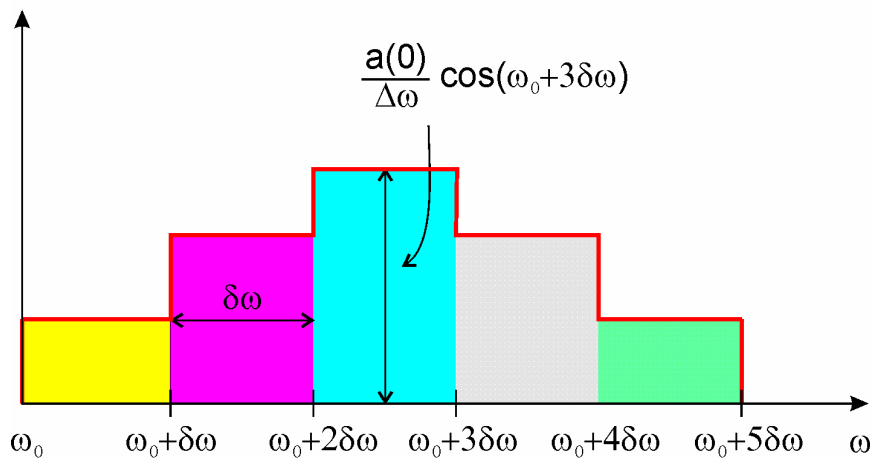
Teraz sumę (4.1.12) mogę zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
 u(t, x) &= \operatorname{Re} \left(\frac{a(0)}{\Delta\omega} \delta\omega \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \right) \\
 &= \frac{a(0)}{\Delta\omega} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(\omega_0 t - k_0 x) \delta\omega
 \end{aligned}
 \tag{4.1.23}$$

Suma (4.1.23) ma postać z której łatwo przejść do całkowania. Bierzemy wartość funkcji dla częstości ω_k i mnożymy przez szerokość przedziału w dziedzinie częstości. Ostatecznie otrzymujemy pole powierzchni pod funkcją schodkową (rys. 4.1.11). Gdy $\delta\omega \rightarrow 0$, to sumę zamieniamy na całkę

$$u(t, x) = \frac{a(0)}{\Delta\omega} \int_{\omega_d}^{\omega_g} \cos(\omega_0 t - k_0 x) d\omega
 \tag{4.1.24}$$

W gruncie rzeczy wyrażenie (4.1.24), z dokładnością do stałego czynnika mnożącego, jest takie same jak wyrażenie (4.1.11). Nie mniej teraz mamy pewność, że taki zapis jest poprawny.



Rysunek 4.1.11. Wartość sumy we wzorze (4.1.23) można przedstawić graficznie jako pole pod czerwoną linią.

Możemy również skorzystać z reprezentacji zespolonej.

$$u(t, x) = \frac{a(0)}{\Delta\omega} \int_{\omega_d}^{\omega_g} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} d\omega
 \tag{4.1.25}$$

Trzeba tylko pamiętać, że przejście do wzoru (4.1.24) wymaga użycia funkcji Re (lub Im , gdy posługujemy się funkcjami sinus).

4.2. Nareszcie paczki

Bez przesady mogę stwierdzić, że cały dotychczasowy wysiłek związany z tematem fale, podjąłem po to by dotrzeć do miejsca, w którym będę mógł omówić paczki falowe. Temat paczek falowych pojawi się w akustyce, optyce i na koniec jak się okaże paczki falowe są kluczowym elementem mechaniki kwantowej. Nie ma co zwlekać, czas na pierwsze spotkanie z paczką falową. Jej pierwszą postać uzyskamy obliczając wyrażenie (4.1.24) w punkcie $x=0$.

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \frac{a(0)}{\Delta\omega} \int_{\omega_d}^{\omega_g} \cos(\omega t) d\omega = \frac{a(0)}{\Delta\omega} \frac{\sin(\omega_g t) - \sin(\omega_d t)}{t} \\ &= a(0) \frac{\sin(\omega_g t) - \sin(\omega_d t)}{(\omega_g - \omega_d)t} \end{aligned} \quad 4.2.1$$

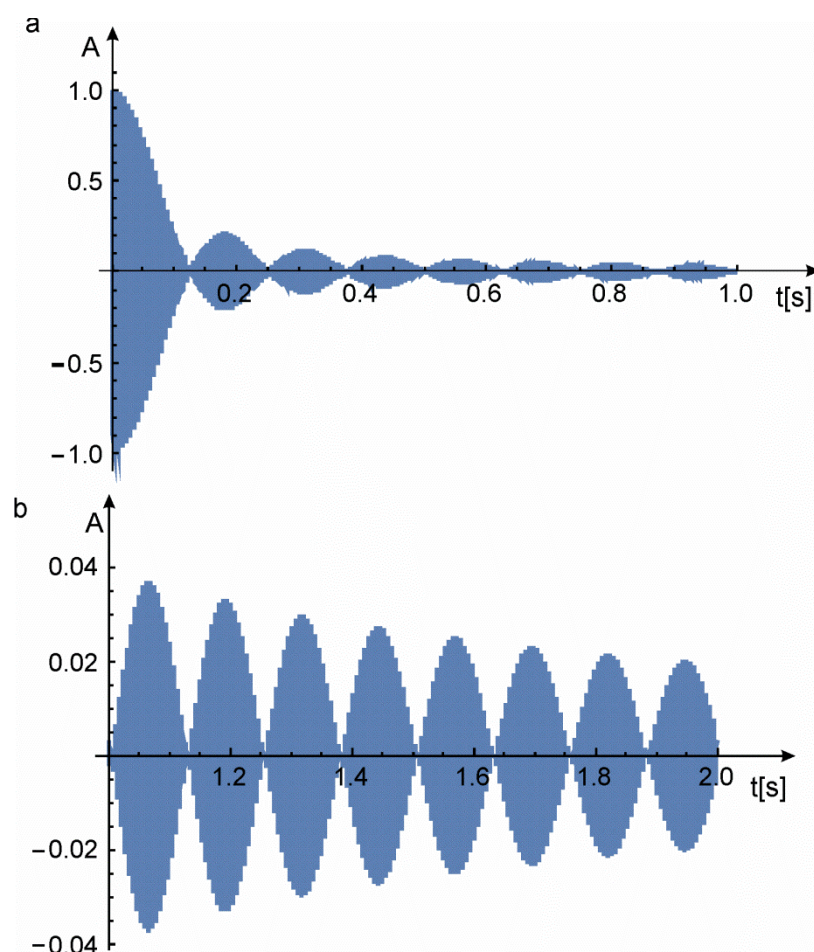
Różnice dwóch sinusów można sprowadzić do iloczynu funkcji sinus i cosinus

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= a(0) \frac{\sin(\omega_g t) - \sin(\omega_d t)}{(\omega_g - \omega_d)t} \\ &= 2a(0) \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\omega_0 t)}{\Delta\omega t} \\ &= a(0) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}t\right) \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \quad 4.2.2$$

$$\Delta\omega = \omega_g - \omega_d \quad 4.2.2a$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_g + \omega_d}{2} \quad 4.2.2b$$

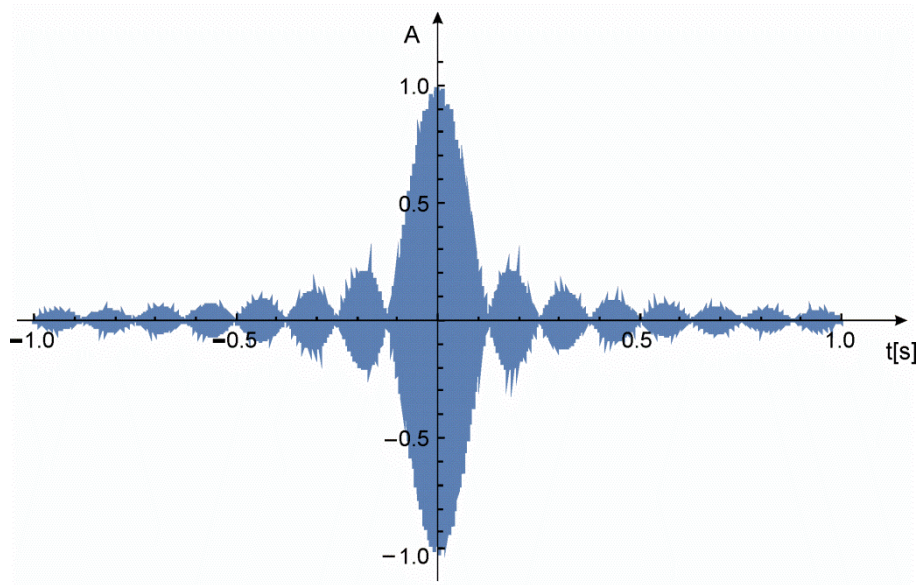
Widać, że paczka falowa zawiera czynnik $\cos(\omega_0 t)$ opisujący drgania harmoniczne z częstością średnią, jednak czynnik ten jest modulowany zależną od czasu i częstości modulacji funkcją sinc, która zanika dla $t \rightarrow \pm\infty$. Rysunek (4.2.1) przedstawia przebieg obliczonej paczki falowej w punkcie $x=0$, wraz z upływającym czasem. Dla chwili $t=0$ paczka osiąga maksimum swojej wartości, a potem amplituda drgań średnio rzecz biorąc opada i nigdy nie wraca do wartości maksymalnej. Patrząc na ten rysunek możemy uznać paczkę falową jako zbiór zgrubień. Jedno z nich ma największą wartość, wartość każdego następnego jest coraz mniejsza. Te zgrubienia teoretycznie nigdzie się nie kończą, ale w końcu stają się tak małe, że nie mają żadnego praktycznego znaczenia. Nie każda paczka ma taki przebieg jak ten pokazany na rysunku (4.2.1), ale każda składa się z serii zanikających zgrubień.



Rysunek 4.2.1. Obwiednia amplitudy paczki falowej, obliczona dla punktu $x=0$, ze wzoru (4.2.2), przy parametrach: $\omega_b=1000\text{rad/s}$, $\omega_d=950\text{rad/s}$, $A(0)=1$. a) wykres obliczony od chwili $t=0$ do chwili $t=1$ s; b) wykres obliczony od chwili $t=1$ s do chwili $t=2$ s. Zauważ, że skala wartości na wykresie (b) jest 25 razy mniejsza niż na wykresie (a)

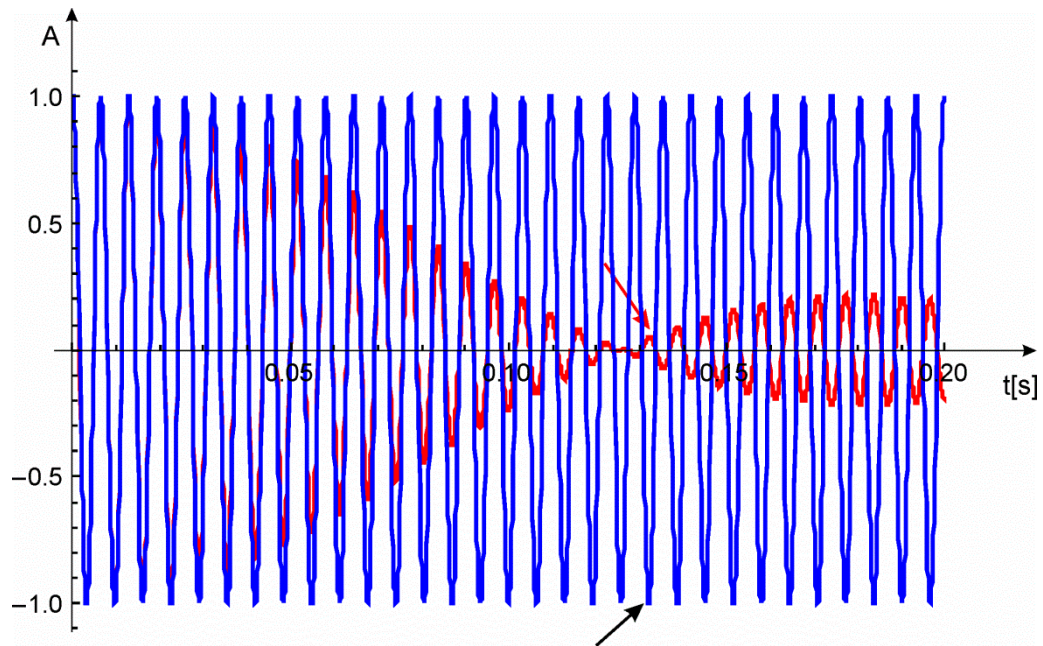
Rysunek (4.2.1) pokazuje prawą połowę przebiegu paczki. Paczka falowa wyliczona ze wzoru (4.2.1) jest symetryczna, co pokazuje rysunek (4.2.2). Komentując rysunki (4.2.1) i (4.2.2) mówiłem o obwiedni amplitudy paczki falowej. Sama amplituda zmienia się tak szybko, że jeżeli chcemy zobaczyć jej przebieg to, ze względu na rozdzielczość rysunku, możemy wyrysować, tylko niewielki fragment paczki (rys. 4.2.3). Na rysunku tym pokazane zostały jeszcze dwa efekty. Jeden bardzo istotny. W obszarze głównego maksimum przebieg oscylacji paczki falowej jest taki sam jak przebieg oscylacji funkcji harmonicznnej zachodzących z częstością średnią ω_b . W zasadzie, w granicach głównego maksimum możemy uważać paczkę za falę harmoniczną o malejącej amplitudzie, co bardzo ułatwia posługiwanie się paczkami falowymi. Drugi efekt polega na tym, że w obszarze minimum amplitudy następuje przesunięcie fazy między paczką a falą harmoniczną o π . Znamy już ten efekt z analizy dudnień

(rys. TVIII 2.3.12) Zwykle oscylacje poza pierwszym maksimum możemy zaniedbać, gdyż maksymalne amplitudy w kolejnych zgrubieniach paczki są dużo mniejsze od maksimum głównego. Kiedy bierzemy pod uwagę energię fali, proporcjonalną do kwadratu amplitudy, to różnice między wielkością maksimum głównego a pierwszego bocznego są jeszcze większe. W przykładzie z rysunku (4.2.3) przedział częstości $\Delta\omega$ jest stosunkowo duży w porównaniu z wartością ω_{sr} : $\omega_{sr}/\Delta\omega = 19.5$.

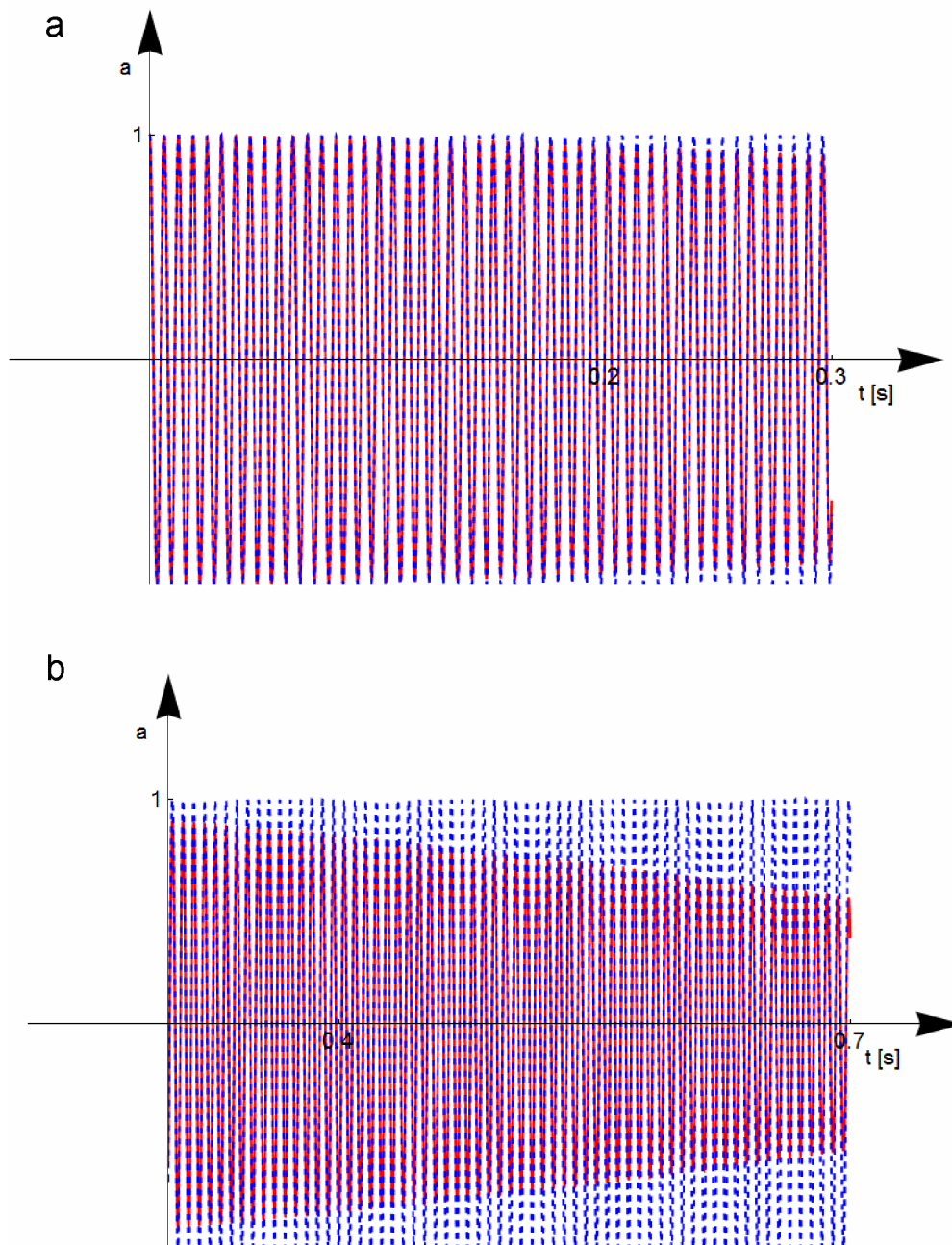


Rysunek 4.2.2. W chwili wcześniejsze niż $t=0$ obwiednia amplitudy paczki falowej narasta. Z obu stron centralnego maksimum paczka wygląda tak samo

Rysunek (4.2.4) pokazuje przykład dla którego stosunek: $\omega_{sr}/\Delta\omega=199,5$, czyli jest dziesięć razy większy niż dla przypadku z rysunku (4.2.3). Od razu widać, że w granicach głównego maksimum paczki mieści się znacznie więcej oscylacji. Obszar tego maksimum liczony między pierwszym lewym i prawym minimum obwiedni jest dłuższy, a prędkości opadania amplitudy od jednego do drugiego maksimum amplitudy drgań jest wolniejsza.



Rysunek 4.2.3. Przebieg drgań paczki falowej z rysunku (4.2.1), wyrysowanych w mniejszym przedziale czasu (czerwona linia). Widać pojedyncze oscylacje o zmniejszającej się amplitudzie. Wykres niebieski przedstawia przebieg oscylacji harmoniczných zachodzących z częstością $\omega_{gr}=975\text{rad/s}$. Zauważ, że w pierwszym zgrubieniu punkty maksymalnego wychylenia amplitudy paczki pokrywają się z punktami maksymalnego wychylenia amplitudy fali harmoniczných. W punkcie, w którym amplituda obwiedni drgań spada do zera następuje przesunięcie fazowe. Zaraz potem w obszarze następnego wzrostu amplitudy maksymalnym wychyleniom w paczce falowej odpowiadają punkty minimalnego wychylenia fali harmoniczných (przykład pokazują strzałki czerwona i czarna).



Rysunek 4.2.4. drgania paczki falowej (czerwona linia) na tle drgań harmoniczných z częstotnością średnią (niebieska przerywana linia), obliczone dla punktu $x=0$, ze wzoru (3.2.1), przy parametrach: $\omega_0=1000\text{rad/s}$, $\omega_d=995\text{rad/s}$, $A(0)=1$. a) wykres obliczony od chwili $t=0$ do chwili $t=0,3\text{s}$; b) wykres obliczony od chwili $t=0,3\text{s}$ do chwili $t=0,7\text{s}$.

Wszystkie powyższe rysunki pokazywały przebieg paczki falowej w punkcie $x=0$. Jak paczka falowa wygląda w innych punktach? Zauważ, że paczka falowa jest sumą fal harmoniczných. Jeżeli wszystkie te fale przemieszczają się z tą samą prędkością v to nie mamy kłopotu ze znalezieniem odpowiedzi na to pytanie. Korzystamy z faktu, że

$$\cos(\omega t - kx) = \cos\left(\omega t - k \underbrace{\frac{\omega}{k} t'}_x\right) = \cos(\omega(t - t')) \quad 4.2.3$$

Gdzie t' jest czasem dojścia sygnału do punktu x . Wyrażenie (4.2.3) przejdzie w

$$\begin{aligned} u(t, t') &= a(0) \frac{\sin(\omega_g(t - t')) - \sin(\omega_d(t - t'))}{(\omega_g - \omega_d)(t - t')} \\ &= 2a(0) \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}(t - t')\right) \cos(\omega_0(t - t'))}{\Delta\omega t} \\ &= a(0) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}(t - t')\right) \cos(\omega_0(t - t')) \end{aligned} \quad 4.2.4$$

Korzystając ponownie z (4.2.3) mamy

$$u(t, x) = a(0) \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}t - \frac{\Delta k}{2\pi}x\right) \cos(\omega_0 t - k_0 x) \quad 4.2.5$$

$$\Delta k = k_g - k_d \quad 4.2.4a$$

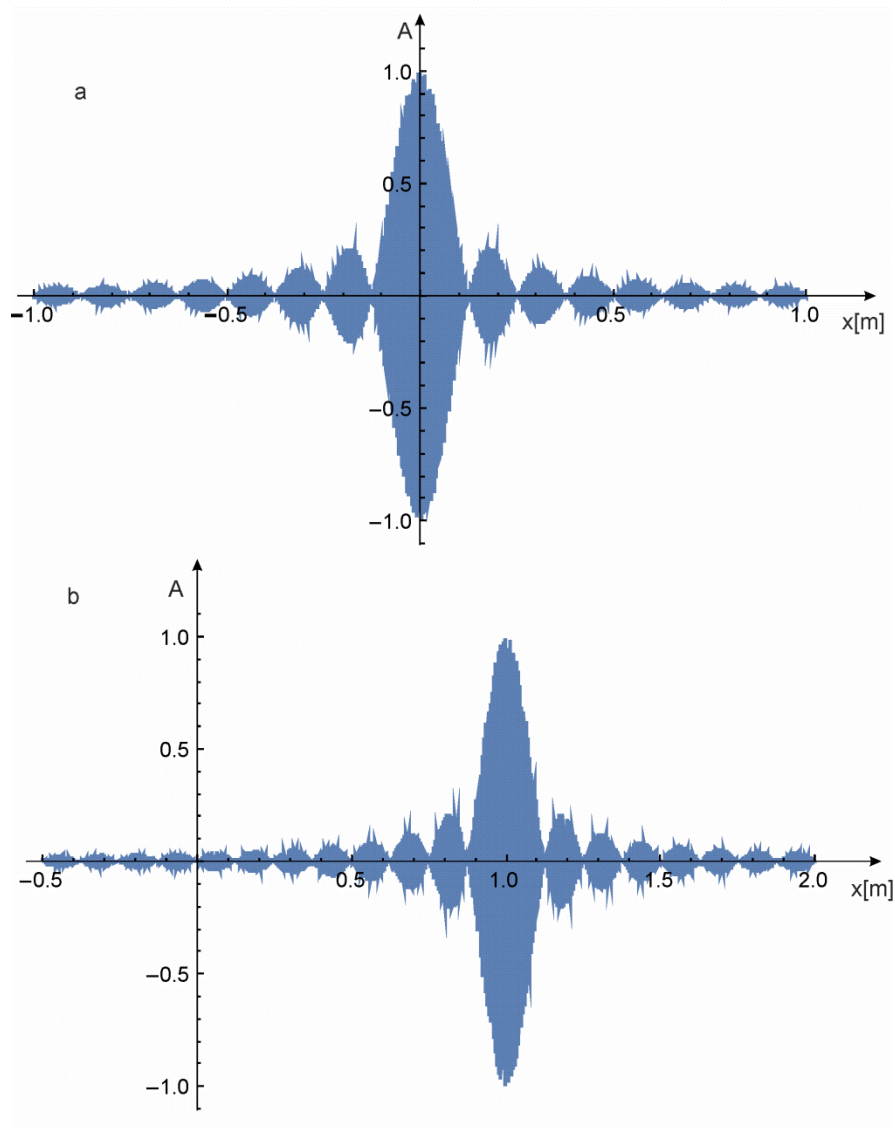
$$k_0 = \frac{k_g + k_d}{2} \quad 4.2.4b$$

Rysunek (4.2.5) obrazuje paczkę, pokazaną na rysunku (4.2.2), tyle że teraz ustalona jest chwila czasu $t = \text{const.}$ Widać, że szczyt amplitudy paczki przesuwa się wzdłuż osi x z prędkością 1m/s. Słowem paczka przemieszcza się w kierunku zgodnym z kierunkiem przemieszczania się fal składowych i z prędkością równą prędkości fazowej fal składowych.

Biorąc pod uwagę symetrię wyrażeń na falę harmoniczną, jeżeli chodzi o czas i przestrzeń paczkę falową możemy liczyć jako funkcję zmiennej x , ze wzoru

$$u(t, x) = \frac{a(0)}{\Delta k} \int_{k_d}^{k_g} \cos(\omega t - kx) dk \quad 4.2.5$$

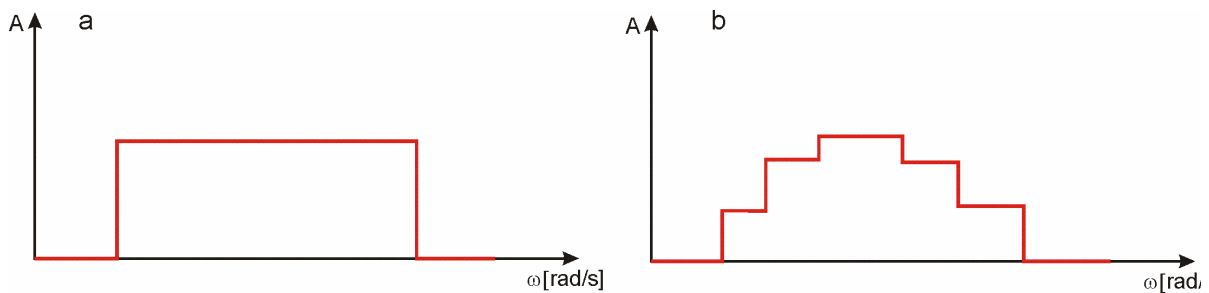
Po obliczeniu tego wyrażenia otrzymamy ponownie wzór (4.2.5)



Rysunek 4.2.5. Niech prędkość fazowa paczki falowej wynosi $v_f=1\text{m/s}$. Wykres paczki falowej z rysunku (4.2.2). jako funkcję położenia przy $t=0$ pokazuje rysunek (a). Maksimum paczki wypada w punkcie $x=0$. Rysunek (b) pokazuje tę samą paczkę w chwili $t=1\text{s}$. Jak można było się spodziewać, maksimum fali przesunęło się o metr na prawo.

Przyjmowaliśmy do tej pory, dość beztrzesko, że wszystkie sumowane fale miały taką samą amplitudę. Słowem wykres widma (§TVIII 3.0.1) sumy fal wygląda tak jak na rysunku (4.2.6a). Równie dobrze mogłoby się zdarzyć, że widmo sygnału wygląda tak jak na rysunku (4.2.6b). Prawdę mówiąc ten drugi przypadek jest zdecydowanie bardziej realistyczny. Suma (4.1.5) przyjmie wtedy postać

$$u(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t + k_i x_{ustalone} + \delta) \quad 4.2.6$$



Rysunek 4.2.6. a) Widmo paczki falowej dla której w pewnym obszarze $\Delta\omega$ amplitudy poszczególnych składowych (poszczególnych fal harmonicznnych) są stałe. Poza tym obszarem wszystkie składowe mają amplitudę równą zero; b) Widmo dla bardziej realistycznego przypadku, gdy w obszarze $\Delta\omega$ amplitudy rosną do wartości maksymalnej stopniowo, a następnie spadają do zera.

Jeszcze bardziej praktyczny przypadek mamy wtedy, gdy amplitudy poszczególnych częstotliwości zmieniają się w sposób ciągły. Niech amplituda $A(\omega)$ będzie funkcją częstotliwości ω (liczby falowej k), wtedy wyrażenie (4.1.14 i 4.2.3) przyjmą postać

$$u(t, 0) = C \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad 4.2.7a$$

$$u(0, x) = D \int_{-\infty}^{\infty} B(k) \cos(kx) dk \quad 4.2.7b$$

Gdzie C i D są stałymi. Zwróć uwagę na granicę powyższej całki. Jak widzisz rozciągnąłem je na pełen zakres liczb rzeczywistych. Mogę tak zrobić, gdyż funkcje $A(\omega)$ i $B(k)$ określają amplitudę z jaką poszczególne częstotliwości lub liczby falowe wchodzi do tej całki. Zatem wszystkie częstotliwości, które nie dają wkładu mnożone są przez zero, co pozwala na rozciągnięcie granic całkowania. Jest to o tyle ważne, że wyrażenie (4.2.3) w pełni przypomina tzw. cosinusową całkę Fouriera. W ten sposób wkraczamy na dobrze znany grunt analizy fourierowskiej. No, dla was grunt analizy fourierowskiej, to może być ziemia nieznaną, ale dla nauki i techniki to swojskie podwórko. A my będziemy musieli nadrobić braki w tej materii.

4.3. Transformaty Fouriera ♣

W (§TVIII 3) omówiłem szeregi Fouriera. Każdą funkcję okresową, przynajmniej ze zbioru tych funkcji, które nas interesują, możemy przedstawić w postaci sumy funkcji sinus i cosinus postaci (TVIII 3.1). Taką sumę nazywamy szeregiem Fouriera. Gdy interesowała nas funkcja nieokresowa to dla ograniczonego przedziału można ją było zamienić na funkcję okresową (TVIII 3.7). Można jednak postąpić inaczej, to jest uogólnić szereg Fouriera tak aby można było pracować również z funkcjami nieokresowymi bez dodatkowych sztuczek. Takie

uogólnione szeregi nazywamy transformatami Fouriera. Nie będę prowadził tu ścisłych wyprowadzeń, a ograniczę się do podania wzorów na transformaty Fouriera. Transformatą Fouriera $F(\xi)$ funkcji $f(x)$ nazywamy funkcję zdefiniowaną wzorem

Definicja 4.3.1a: Transformata Fouriera

Transformatą Fouriera funkcji $f(x)$ nazywamy funkcję, o ile istnieje, zdefiniowaną wzorem:

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad 4.3.1a$$

Definicja 4.3.1b: Odwrotna transformata Fouriera

Odwrotną transformatą Fouriera do transformaty (4.3.1a) nazywamy funkcję, o ile istnieje, zdefiniowaną wzorem:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad 4.3.1b$$

Widać, że postać transformaty jest podobna do szeregu Fouriera zdefiniowanego wzorem (TVIII 3.1.6), z tym że dyskretna suma zastąpiona jest całką. Jest jeszcze jedna różnica. Całkowanie kasuje zależność funkcyjną od zmiennej, po której całkujemy. Jeżeli całkujemy po zmiennej x to transformata Fouriera jako wynik tego całkowania nie może być zależna od zmiennej x . W transformacie pojawia się nowa zmienna oznaczona przez grecką literę ξ .

W dwóch wymiarach wzór (4.3.1) ma postać

Definicja 4.3.2a: Transformata Fouriera funkcji $f(x,y)$

Transformatą Fouriera funkcji $f(x,y)$ nazywamy funkcję, o ile istnieje, zdefiniowaną wzorem:

$$F(\xi, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (x\xi + y\sigma)} dx dy \quad 4.3.2a$$

Definicja 4.3.2b: Odwrotna transformata Fouriera

Odwrotną transformatą Fouriera do transformaty (4.3.2.a nazywamy funkcję, o ile istnieje, zdefiniowaną wzorem:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \sigma) e^{2\pi i(x\xi + y\sigma)} d\xi d\sigma \quad 4.3.2b$$

Dalsze uogólnienie powyższego wzoru na wyższe wymiary nie powinno sprawić kłopotu.

Transformata Fouriera ma szereg użytecznych własności. Po pierwsze jest liniowa, co wynika z tego, że operacja całkowania jest liniowa (tw. DC 1.1).

Twierdzenie 4.3.1. Liniowość transformaty Fouriera

Transformacji Fouriera kombinacji liniowej, dwóch funkcji $f(x, y)$ i $g(x, y)$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi lub zespolonymi jest równa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [af(x, y) + bg(x, y)] e^{-2\pi i(x\xi + y\sigma)} dx dy = aF(\xi, \sigma) + bG(\xi, \sigma) \quad 4.3.3$$

Gdzie $F(\xi, \sigma)$ i $G(\xi, \sigma)$ są transformatami Fouriera funkcji, odpowiednio f i g .

Dla wygody wprowadzę osobny symbol literowy dla transformaty Fouriera

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = \mathcal{F}\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(x\xi + y\sigma)} dx dy \quad 4.3.4$$

Używając nowego symbolu twierdzenie (4.3.1) można zapisać w postaci wzoru

$$\mathcal{F}\{af(x, y) + bg(x, y)\} = a\mathcal{F}\{f(x, y)\} + b\mathcal{F}\{g(x, y)\} \quad 4.3.5$$

Drugim bardzo użytecznym twierdzeniem jest twierdzenie o przesunięciu. Mówi ono, że

Twierdzenie 4.3.2: o przesunięciu

Transformacji Fouriera $f(x-a, y-b)$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi jest równa

$$\mathcal{F}\{f(x - a, y - b)\} = \mathcal{F}\{f(x, y)\} e^{-2\pi i(a\xi + b\sigma)} \quad 4.3.6$$

Czyli przesunięcie funkcji oznacza przemnożenie jej transformaty przez czynnik typu $e^{i\varphi}$. Ostatnie twierdzenie jakie tu podam to twierdzenie o podobieństwie

Twierdzenie 4.3.3: o podobieństwie

Transformacji Fouriera $f(x/a, y/b)$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi jest równa

$$\mathcal{F}\{f(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) \quad 4.3.7$$

Gdzie F jest transformatą Fouriera funkcji f . Gdy będziemy korzystali z transformat Fouriera szybko okaże się, że powyższe trzy twierdzenia bardzo ułatwiają rachunki.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że jeżeli zmienna x i y ma wymiar [długość], to zmienne ξ i σ muszą mieć wymiar odwrotności długości. Wynika to z faktu, że wykładniki potęgowe są bezwymiarowe, zatem iloczyny $x\xi$ i $y\sigma$ muszą być wielkościami bezwymiarowymi. Podobnie jeżeli będziemy obliczali transformatę Fouriera funkcji zależnej od czasu $f(t)$

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i t \nu} dt \quad 4.3.8$$

To zmienna ν musi mieć wymiar jeden przez czas. Wielkości o wymiarze jeden przez czas nazywamy częstością. Zatem jeżeli mamy funkcję czasu to jej transformata Fouriera jest funkcją częstości. Generalnie transformaty Fouriera przenoszą nas do dziedziny częstości. Konsekwentnie zmienne ξ i σ będziemy nazywali częstościami przestrzennymi

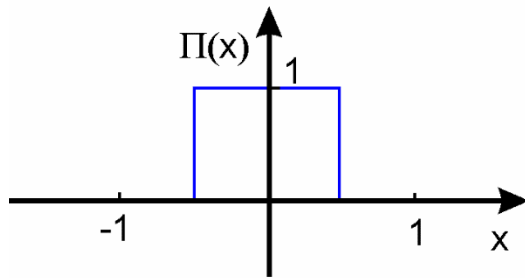
Definicja 4.3.3: częstość przestrzenna

Wielkości o wymiarze odwrotności długości nazywamy częstością przestrzenną

Czas na policzenie prostego, a przy tym ważnego przykładu. Obliczymy transformatę Fouriera funkcji prostokątnej (§DG xx) zdefiniowanej wzorem

$$f(x) = \Pi\left(\frac{x-a}{d}\right) \quad 4.3.9$$

Podobne zadanie robiliśmy w (§TVIII 3.1), tyle że dla okresowej funkcji prostokątnej. Teraz funkcja składa się tylko z jednego prostokąta, tak jak to pokazuje rysunek (4.3.1) i nie jest okresowa.



Rysunek 4.3.1. Pojedynczy impuls prostokątny

Zacznę od liczenia transformaty Fouriera funkcji

$$g(x) = \Pi(x) \quad 4.3.10$$

Korzystam ze wzoru (4.3.1)

$$G(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad 4.3.11$$

Jedyne co robi funkcja prostokątna Π to mnożenie przez jeden lub zero. Tam gdzie mamy mnożenie przez zero cała funkcja podcałkowa staje się równa zero i w efekcie całka jest równa zero. Niezerowe są tylko te wkłady funkcji podcałkowej, dla których funkcja podcałkowa jest równa jeden. Możemy zatem napisać

$$G(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i x \xi} dx \quad 4.3.12$$

Widać, że działanie funkcji prostokątnej przeniosłem w granice całki. Otrzymana całka jest już prosta do wyliczenia. Korzystając ze wzoru Eulera (**DD xx**) oraz liniowości całki mam

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(-2\pi x \xi) dx + i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(-2\pi x \xi) dx \quad 4.3.13$$

Druga całka sumy jest równa zero (sam możesz to sprawdzić), pierwsza całka jest równa

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(-2\pi x \xi) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi x \xi) dx = \frac{1}{2\pi \xi} \sin(2\pi x \xi) \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \quad 4.1.14$$

$$= \frac{1}{2\pi \xi} [\sin(\pi \xi) - \sin(-\pi \xi)] = \frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi} = \text{sinc}(\xi)$$

Funkcja sinc opisana jest w (DG xx). Korzystając z twierdzenie o podobieństwie (tw. 4.3.3) obliczę transformatę funkcji prostokątnej o szerokości d .

$$\mathcal{F} \left\{ \Pi \left(\frac{x}{d} \right) \right\} = d \text{sinc}(d\xi) \quad 4.3.13$$

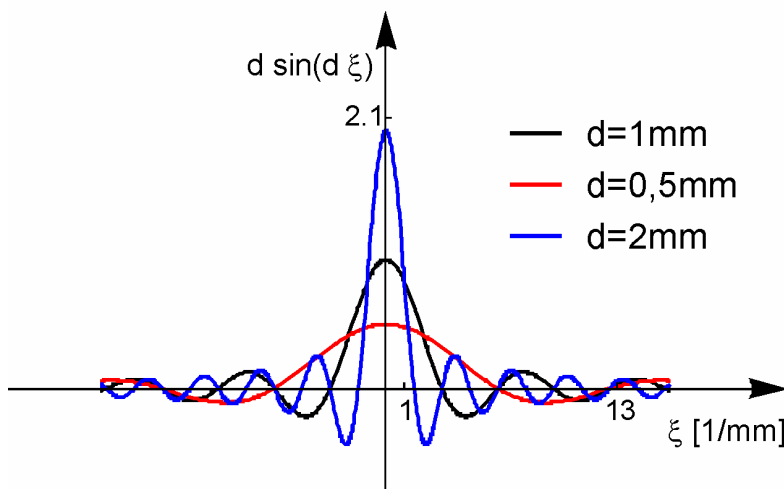
Rysunek (4.3.2) pokazuje widmo policzonej funkcji prostokątnej (4.3.10), to jest takiej, której szerokości jest równa jeden i widma poszerzonej oraz zwężonej funkcji prostokątnej. Korzystając z twierdzenia o przesunięciu (tw. 4.3.2) i wyniku (4.3.10) mogą obliczyć transformatę Fouriera funkcji (4.3.9)

$$\mathcal{F} \left\{ \Pi \left(\frac{x-a}{d} \right) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi \left(\frac{x-a}{d} \right) e^{-2\pi i x \xi} dx = d \text{sinc}(d\xi) e^{-2\pi i a \xi} \quad 4.3.14$$

Widać, że widmo przesuniętej szczeliny ma niezerową część urojoną (i rzeczywistą też).

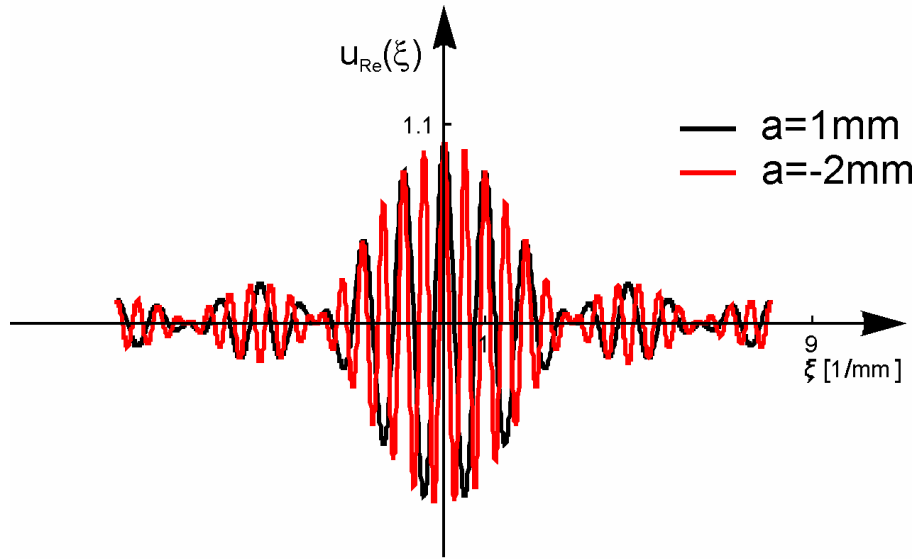
$$u_{Re}(\xi) = \text{Re}(d \text{sinc}(d\xi) e^{-2\pi i a \xi}) = d \text{sinc}(d\xi) \cos(2\pi a \xi) \quad 4.3.15a$$

$$u_{Im}(\xi) = \text{Im}(d \text{sinc}(d\xi) e^{-2\pi i a \xi}) = -d \text{sinc}(d\xi) \sin(2\pi a \xi) \quad 4.3.15b$$



Rysunek 4.3.2. Widmo funkcji prostokątnej dla jej trzech szerokości d . Zauważ, że sinc jest funkcją częstości przestrzennych ξ . Im węższa jest funkcja prostokątna tym szersze jest jej widmo. Jednocześnie niższa jest maksymalna amplituda.

Rysunki (4.3.3 i 4.3.4) pokazują rzeczywistą i urojoną część widma funkcji (4.3.9).



Rysunek 4.3.3. Część rzeczywista widma przesuniętej funkcji prostokątnej o szerokości $d=1$.

Równie prosto możemy obliczyć dwuwymiarową transformatę Fouriera funkcji prostokątnej.

$$f(x, y) = \Pi\left(\frac{x - a_x}{d_x}\right) \Pi\left(\frac{x - a_y}{d_y}\right) \quad 4.3.16$$

Transformata Fouriera tej funkcji wyrazi się wzorem (4.3.4)

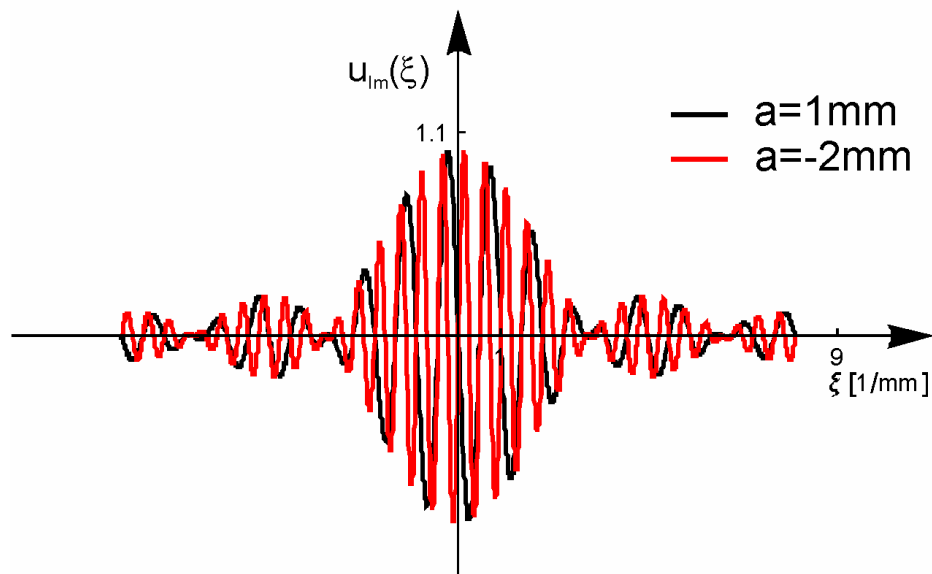
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x - a_x}{d_x}\right) \Pi\left(\frac{x - a_y}{d_y}\right) e^{-2\pi i(x\xi + y\sigma)} dx dy \quad 4.3.17$$

owyzszą całkę możemy łatwo sfaktoryzować

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x - a_x}{d_x}\right) e^{-2\pi i x \xi} dx \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x - a_y}{d_y}\right) e^{-2\pi i y \sigma} dx \quad 4.3.18$$

w efekcie mamy iloczyn dwóch całek postaci (4.3.10). Wystarczy zatem przemnożyć rozwiązania tych całek

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \Pi\left(\frac{x - a_x}{d_x}\right) \Pi\left(\frac{x - a_y}{d_y}\right) \right\} \\ = d_x d_y \operatorname{sinc}(d_x \xi) \operatorname{sinc}(d_y \sigma) e^{-2\pi i(a_x \xi + a_y \sigma)} \end{aligned} \quad 4.3.19$$



Rysunek 4.3.4. Część urojona widma przesuniętej funkcji prostokątnej o szerokości $d=1$.

Kolejny przykład dotyczy funkcji stałej $f(x) = c$. Choć funkcja jest najprostsza z możliwych to jej transformata Fouriera przysparza kłopotów

$$\int_{-\infty}^{\infty} c e^{-2\pi i x \xi} dx = ? \quad 4.3.20$$

Obliczenie tej transformaty wymaga odwołania się do dziwnego tworu jakim jest tzw. delta Diraca.

4.3.4. Delta Diraca

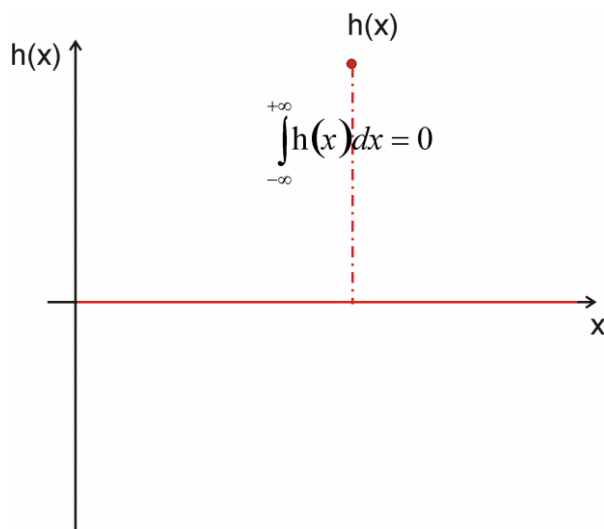
Ile wynosi pole pod funkcją $h(x)$ która jest różna od zera tylko w jednym punkcie (rys. 4.3.5)? Pole to jest oczywiście równe zero. Zatem zgodnie z geometryczną interpretacją całki mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx = 0 \quad 4.3.21$$

Podobnie jest dla każdej funkcji $h(x)$ która jest różna od zera w wielu izolowanych punktach (rys. 4.3.6). Na początku XX wieku fizycy zatęsknili za funkcją (oznaczę ją przez $\delta(x)$), która byłaby różna od zera tylko w jednym punkcie a ponadto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad 4.3.22$$

Użyteczność takiej funkcji była tak duża, że Paul Dirac powołał ją do życia, zdając sobie sprawę z jej wysoce podejrzanego statusu. Jak można było się spodziewać delta Diraca wywołała protesty matematyków. Fizycy to jednak ludzie matematycznie niefrasobliwi i gdy jakiś matematyczny twór jest użyteczny, to zaczynają go stosować niezależnie od protestów matematycznych purystów³. W przeszłość wiele podejrzanых twórców zyskało z czasem obywatelstwo w świecie matematyki, dobrym przykładem są tu liczby zespolone, czy też rachunek różniczkowy.



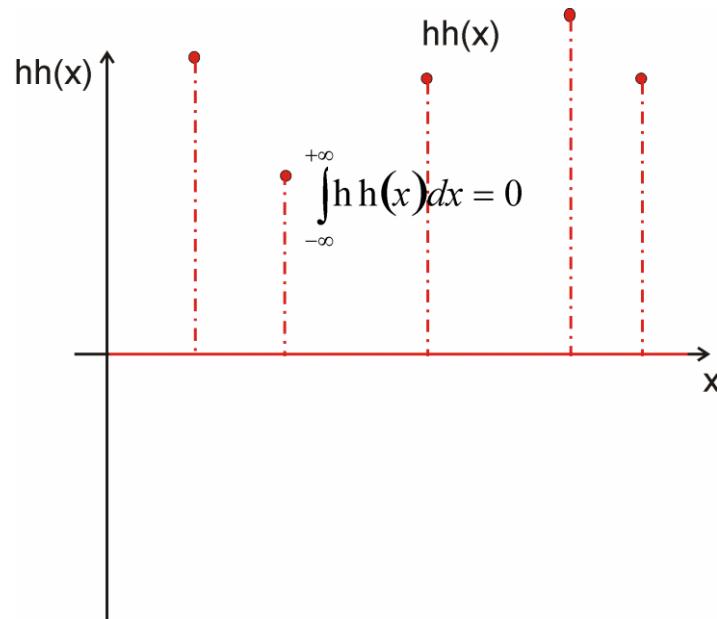
Rysunek 4.3.5. Pole pod funkcją równą zero poza jednym punktem jest równe zero.

Co więcej bez tych onegdaj podejrzanых bytów dziś nie wyobrażamy sobie matematyki. Matematycy w końcu skapitulowali i nadali delcie Diraca pełnoprawne obywatelstwo matematyczne. Stało się to w późnych latach 40-tych XX wieku a głównym sprawczym był matematyk francuski Laurent Schwartz. Schwartz uogólnił pojęcie funkcji wprowadzając tzw. dystrybucje (funkcje uogólnione). Dystrybucja jest klasą odwzorowań liniowych, które przyporządkowują funkcjom z danego zbioru funkcji testowych liczby rzeczywiste. I tak dystrybucja delta Diraca zdefiniowana jest wzorem (4.3.22). Czasem zapisujemy ją tak

$$\langle \delta | f \rangle = f(0)$$

4.3.23

³ Wcześniej pojawiały się prace związane z rozwojem teorii transformat Fouriera, w której wyrażenia typu delta pojawiały się w niejawnym sposób.



Rysunek 4.3.6. Pole pod funkcją, która jest różna od zera w izolowanych punktach jest również równe zero.

Symbol $\langle \dots | \dots \rangle$ wprowadzony został przez Diraca i nazywa się braketem (nawiasem). Sam się powoli przekonasz, że brakety są bardzo wygodne w użyciu. Część z lewej strony to bra, a z prawej to ket. Wracając do wzoru (4.3.23). Z lewej strony braketu mamy bra zawierający symbol dystrybucji. Ket jest miejscem w którym umieszczamy funkcję, na którą działa dystrybucja. Delta Diraca nie jest funkcją, tylko dystrybucją, której działanie na funkcję sprowadza się do obliczenia wartości tej funkcji w zerze. Ze wzoru (4.3.22) i z faktu, że całki są liniowe (tw. DC 1.1) wynika, że delta Diraca jest liniowa

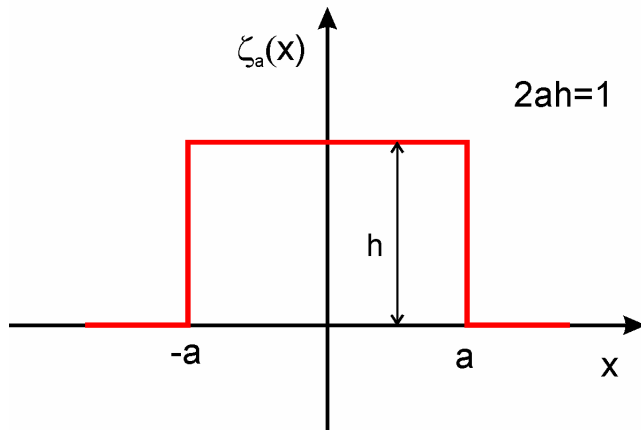
$$\langle \delta | \alpha f_1 + \beta f_2 \rangle = \alpha \langle \delta | f_1 \rangle + \beta \langle \delta | f_2 \rangle \quad 4.3.24$$

Wzór (4.3.22) można potraktować jako postulat. Istnieje taka, dystrybucja, że spełnione jest (4.3.22). Trzeba jeszcze udowodnić, że postulat jest sensowny. Jedną z metod jest konstrukcja delty Diraca jako granicy ciągu. Istnieje wiele takich konstrukcji, poniżej przedstawię jedną z nich. Niech będzie dana funkcja

$$\xi_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -a \\ h & \text{dla } -a < x < a \\ 0 & \text{dla } x > a \end{cases} \quad 4.3.25$$

Ponadto spełniony jest warunek (rys. 4.3.8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi_a(x) dx = 2ah = 1 \quad 4.3.26$$



Rysunek 4.3.8. Wykres funkcji $\xi_a(x)$

Dla ciągłej funkcji $f(x)$ obliczę całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi_a(x) f(x) dx = ? \quad 4.3.27$$

Z rysunku (4.3.8) widać, że funkcja ξ zawęża obszar całkowania do przedziału $[-a, a]$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi_a(x) f(x) dx = \int_{-a}^a \xi_a(x) f(x) dx \quad 4.3.27$$

Ponieważ f jest ciągła mogę skorzystać z twierdzenia o wartości średniej dla całki oznaczonej (tw. DC 2.1). Twierdzenie to mówi, że istnieje taki argument x_p , że

$$\int_{-a}^a \xi_a(x) f(x) dx = f(x_p) \int_{-a}^a \xi_a(x) dx = f(x_p) \quad 4.3.28$$

$$-a \leq x_p \leq a \quad 4.3.28a$$

Ostatnia równość wynika z (4.3.26). Gdy $a \rightarrow 0$, to i $x_p \rightarrow 0$ i wtedy

$$\lim_{a \rightarrow 0} f(x_p) \int_{-a}^a \xi_a(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0} f(x_p) \int_{-a}^a \frac{dx}{2a} = f(0) \quad 4.3.29$$

Jak widać, wartość $f(0)$ uzyskujemy jako granicę ciągu. Delta Diraca jest skonstruowana jako przejście graniczne. Jest to jedna z konstrukcji pokazująca, że taki twór może zostać sensownie zdefiniowany.

Dla delty Diraca można udowodnić wiele użytecznych twierdzeń. Na przykład

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad 4.3.30$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad 4.3.31$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad 4.3.32$$

Dla funkcji dwóch lub więcej zmiennych definiujemy wielowymiarową deltę Diraca. Dla przykładu pokażę jak to wygląda dla dwóch wymiarów, rozszerzenie na większą liczbę wymiarów będzie analogiczne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) f(x, y) dx dy = f(0, 0) \quad 4.3.33$$

Wzór (4.3.30) ma postać

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0, y - y_0) f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) \quad 4.3.34$$

Mogę teraz odpowiedzieć na pytanie ile wynosi transformata Fouriera funkcji stałej $f(x)=c$. W tym celu złożmy transformatę Fouriera z odpowiadającą jej transformatą odwrotną

$$c = c \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x' \xi} dx' \right) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad 4.3.35$$

Jeżeli formalnie zamienimy kolejność całkowania to otrzymamy

$$c = c \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i (x-x') \xi} d\xi \right) dx' \quad 4.3.36$$

Patrząc na wzór (4.3.22), widać, że wyrażenie w nawiasie musi być dystrybucją delta Diraca

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i (x-x') \xi} d\xi = \delta(x') \quad 4.3.37$$

Podstawiając to wyrażenie do (4.3.36) mamy

$$c \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') dx' = c \cdot 1 = c \quad 4.3.37a$$

Zatem transformata Fouriera funkcji stałej jest dystrybucją delta Diraca przemnożoną przez wartość funkcji.

$$\int_{-\infty}^{\infty} c e^{-2\pi i x \xi} dx = c \delta(x) \quad 4.3.38$$

Rozważmy transformatę Fouriera

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \quad 4.3.39$$

Niech $f(t)$ będzie funkcją czasu opisująca przebieg pewnego sygnału. Wyrażenie

$$e^{-2\pi i \nu t} \quad 4.3.39a$$

reprezentuje wirujący z częstością ν fazor. Funkcja $F(\nu)$ opisuje widmo sygnału $f(t)$ (§TVIII 3.01). W przypadku sygnału okresowego widmo było dyskretne, a za pomocą szeregu Fouriera mogliśmy odtworzyć cały sygnał. Teraz widmo jest ciągłe (ale $f(t)$ nie jest okresowa). Z widma ciągłego możemy również odzyskać pierwotny sygnał poprzez odwrotną transformatę Fouriera

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu \quad 4.3.40$$

Z wzoru (4.3.40) widać, że sygnał $f(t)$ został przedstawiony jako ciągła suma (całka) wyrażeń (4.3.39a), czyli jako suma fazorów wirujących z różnymi częstościami. Wyrażenie $F(\nu)$ pokazuje z jaką amplitudą wchodzi do tej sumy poszczególne fazory. Transformata Fouriera daje zatem, podobnie jak szereg Fouriera, rozkład sygnału na fazory. Wzór (4.3.40) możemy również zapisać za pomocą częstości wyrażone w radianach

$$\omega = 2\pi\nu \implies d\nu = \frac{d\omega}{2\pi} \quad 4.3.41a$$

Po wstawieniu do (4.3.40) mamy

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad 4.3.41$$

Transformata prosta (4.3.39) przyjmuje postać

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad 4.3.42$$

Pisałem, że szeregi Fouriera można analizować w języku nieskończenie wymiarowych funkcyjnych przestrzeni wektorowych (§TVIII 3.3). Wektorami tej przestrzeni są funkcje, a bazami nieskończone zbiory funkcji ortogonalnych. Przykładem takiego zbioru jest zbiór funkcji $\{\cos(nkx), \sin(nkx)\}$. Podobnie możemy podejść do transformaty Fouriera. Ale fakt, że sumy zostały zamienione na całki ma daleką idące konsekwencje. Mamy przestrzeń wektorową, w której kombinacja wektorów bazy wyrażona pierwotnie jako suma jest wyrażona jako całka. Do tej pory wektorów bazy było $N < \infty$, lub co najwyżej tyle ile jest liczb naturalnych (bazy nieskończone). Teraz wektorów bazy jest tyle co liczb rzeczywistych. Jak pokazał Cantor, nie można znaleźć jednoznacznego odwzorowania między liczbami rzeczywistymi i naturalnymi⁴. Oznacza to, że nieskończoność zbioru liczb rzeczywistych jest większa od nieskończoności zbioru liczb naturalnych. Matematycy mówią, że moc zbioru liczb rzeczywistych jest większa od mocy zbioru liczb naturalnych. W efekcie nieskończenie wymiarowe przestrzenie wektorowe o mocy zbioru liczb rzeczywistych mają swoje własne unikalne własności, o których jeszcze co nieco pojawi się w przyszłości.

4.3.5. Przekształcenie Fouriera cosinusowe i sinusowe

Pierwotnie transformata Fouriera była zapisywana bez odwoływania się do liczb zespolonych

$$f(t) = \int_0^{\infty} [F_c(\omega)\cos(\omega t) + F_s(\omega)\sin(\omega t)] d\omega \quad 4.3.43$$

Całkowanie od zera do nieskończoności (a nie od minus nieskończoności) pozwoliło uniknąć kłopotliwych w interpretacji fizycznej wyrazów o ujemnych częstościach. Współczynniki rozkładu wyrażają się wzorami

$$F_c(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad 4.3.44a$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \quad 4.3.44b$$

⁴ Ale między liczbami naturalnymi i wymiernymi takie odwzorowanie istnieje. Zbiór liczb naturalnych i wymiernych jest tej samej mocy.

Obie postacie transformat Fouriera (4.3.1) i (4.3.43) są do siebie podobne ale nie tożsame. W transformacie (4.3.1) funkcje rozkładamy w bazie funkcji $e^{i\omega t}$ a transformacie (4.3.43) w bazie funkcji $\cos(\omega t)$ i $\sin(\omega t)$. Wybór transformaty zależy od konkretnych zastosowań. W literaturze można znaleźć nico inne definicje transformat, różniące się stałymi współczynnikami, które mogą być wygodniejsze w użyciu w konkretnym zastosowaniu. Podobnie jak transformatę Fouriera, przekształcenia cosinusowe i sinusowe można uogólnić na wyższe wymiary.

4.4. Wracam do paczek

Porównując wzory na paczki falowe (4.2.3) ze wzorami na transformaty Fouriera (4.3.1) widać, że transformaty same się narzucają, jak narzędzie do obliczania paczek falowych. Wykorzystanie transformat do obliczania paczek o bardziej fizycznym rozkładzie widma pozostawię na inną okazję. Tutaj chciałem, w prosty sposób, zwrócić waszą uwagę na daleko idące konsekwencje naszych rozważań dla telekomunikacji.

Powiedzmy, że chcemy nadawać audycję radiową i wybieramy częstotść fali 1000kHz. Ktoś inny również chce mieć radio i wybiera częstotść 1001kHz. Częstotści obu stacji różnią się więc nie powinny one sobie przeszkadzać. Problem polega na tym, że nie możemy nadawać fali harmoniczej. Fala harmoniczna jest nudna i jedyne co mogłaby spowodować w odbiorniku to jednostajny pisk. Musimy naszą falę zmodulować czyli spowodować, że przestaje to być fala harmoniczna. Możemy na przykład zmieniać jej amplitudę (modulacja AM). Aby maksymalnie uprościć sprawę powiedzmy, że chcemy nadawać w alfabecie Morse'a. Nadajemy więc serię krótszych i dłuższych pisków. Robimy to tak: Mamy generator fali harmoniczej oraz zasłaniacz, który na krótki czas przesłania nadawaną falę. Niech czas trwania krótkiego pisku wynosi Δt (rys. 4.4.1).



Rysunek 4.4.1. Przesłona zasłania sygnał. Są dwa czasy otwarcia sygnału: krótki i długi. Krótki czas otwarcia oznaczamy przez Δt .

Słowem, na falę harmoniczną nakładamy okienka czasowe, w których ta fala opuszcza nadajnik. Korzystając z transformaty Fouriera (4.3.41) obliczymy widmo tej fali

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a\Pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right) e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a\Pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right) e^{i(\omega_0 - \omega)t} d\omega
 \end{aligned}
 \tag{4.4.1}$$

Prosta zmiana zmiennych: $\omega_0 - \omega \rightarrow \omega'$ pozwala sprowadzić (4.4.1) do postaci transformaty Fouriera z funkcji prostokątnej (4.3.12).

$$F(\omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a\Pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right) e^{i\omega' t} d\omega'
 \tag{4.4.1a}$$

Wynik tej transformaty już znamy (4.3.14).

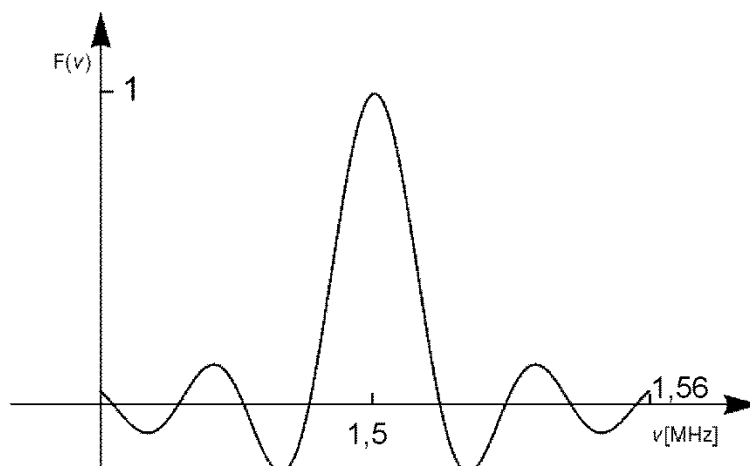
$$F(\omega') = \frac{\Delta t}{2} a \operatorname{sinc}(\Delta t \omega')
 \tag{4.4.2}$$

Wracając do starych zmiennych mamy

$$F(\omega) = \frac{\Delta t}{4\pi} a \operatorname{sinc}(\Delta t(\omega_0 - \omega))
 \tag{4.4.3}$$

Rysunek (4.4.2) pokazuje obliczone widmo. Widmo opisane jest funkcją sinc, podobnie jak widmo funkcji prostokątnej (4.1.14). Możemy przy okazji wysnuć wniosek, że widmo funkcji prostokątnej pomnożonej przez funkcję sinus o częstotliwości ω_0 opisane jest funkcją sinc, której środek przesunięty jest do częstotliwości ω_0 .

Już ten prosty model pokazuje, że modulacja sygnału powoduje jego rozmycie w dziedzinie częstotliwości. Technika modulacji sygnału radiowego jest bardziej złożona i wymaga precyzyjniejszej teorii, ale powoduje ten sam efekt, to jest rozmycie częstotliwości fali, na której nadajemy (nazywamy ją częstotliwością nośną). Dwie stacje radiowe muszą się oddalić na szerokość widma inaczej będą się wzajemnie zakłócały. Na szczęście amplituda bocznych pasm widma szybko spada i można sensownie wyznaczyć te częstotliwości graniczne, dla których dwie stacje nie będą się zakłócały. W praktyce szerokość pasma, na którym nadają stacje radiowe waha się od 9kHz (dla modulacji amplitudy AM) do 15kHz przy audycji stereo i modulacji częstotliwości FM. Telewizja musi nadać w ciągu sekundy znacznie więcej informacji (obraz i dźwięk). W efekcie rozmiar okienka czasowego dla sygnału jest znacznie węższy, a rozmycie częstotliwości fali nośnej znacznie szersze. Szerokość pasma nadawczego dla telewizji jest rzędu 8MHz.



Rysunek 4.4.2. Widmo sygnału prostokątnego, jest opisane funkcją sinc, o środku wypadającym dla częstości $\nu_0 = 2\pi\omega_0 = 1,5\text{MHz}$. Częstości na rysunku przeliczone są na Hertze, czyli pełne cykle na sekundę.

Oznacza to, że telewizja nie może nadawać na pasmach radiowych. W popularnym w Polsce paśmie radiowym (pasmo II) 87.5-108MHz zmieściłyby się dwa kanały telewizyjne. W Polsce, IV pasmo przeznaczone dla telewizji, obejmuje zakres częstości 470-606MHz, w którym mieści się siedemnaście pasm po 8MHz. Telefonnia komórkowa pracuje jeszcze wyżej. Pasmo GSM 1800 mieści się w granicach 1710-1880 MHz. Biorąc pod uwagę ilości danych przesyłanych telefonami komórkowymi szuka się możliwości przeniesienia pasma nadawania jeszcze wyżej. W Ameryce Północnej i Południowej wprowadzono standard GSM 1900, który pracuje w zakresie 1850-1990MHz. Wybór pasma ograniczony jest nie tylko dostępną techniką modulacji sygnału o wysokiej częstotliwości, ale również transparentnością atmosfery. Tylko wąskie pasma częstości propagują się w atmosferze na tyle swobodnie, że mogą być wykorzystane do łączności bezprzewodowej. Najwięcej miejsca jest w światłowodach. Przy częstości światła rzędu 10^{14}Hz , na paśmie o niedużej szerokości, względnej (na przykład 0.01% z 10^{14}Hz) można zmieścić ponad tysiąc stacji telewizyjnych. Wymaga to jednak kosztownej rozbudowy sieci światłowodowych.