

Temat

VIII

DRGANIA HARMONICZNE

1. Ruch harmoniczny ♦

W układach mechanicznych ruch harmoniczny spowodowany jest siłą, która jest proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi i przeciwnie skierowana do tego wychylenia (§TVI 3.7).

$$F = -kx \quad 1.1$$

Fizyczna interpretacja wychylenia x zależy od układu drgającego. Na przykład: w układach mechanicznych wychylenie rozumiane jest jako przesunięcie punktu materialnego od punktu równowagi (czyli punktu, gdzie działające siły równoważą się), a w układach elektrycznych odchyleniem może być zmiana wartości prądu lub napięcia. W tym temacie ograniczę się do oscylatorów mechanicznych, zatem „ x ” będzie wychyleniem drgającego ciała z położenia równowagi. Uogólnienie uzyskanych wyników na inne rodzaje oscylatorów harmonicznym będzie w gruncie rzeczy polegało na zmianie oznaczeń we wzorach oraz ich nowej interpretacji fizycznej. Mając określoną siłę (1.1) mogę napisać równanie ruchu

$$m\ddot{x} = -kx \quad 1.2$$

Równanie ruchu (1.2) wygląda niepozornie. Omawiałem je już, kiedy w temacie (§TVI 3) podałem przykłady równań ruchu. Równań ruchu możemy napisać tysiące, tak jak możemy zdefiniować tysiące różnie działających sił. Ja mam zamiar poświęcić równaniu (1.2) i jego rozwiązaniom następnym kilkanaście stron. Od razu powiem, że takiej troski z mojej strony doznają tylko nieliczne z tysięcy możliwych równań ruchu. Kryją się za tym dwa powody. Pierwszy - równanie ruchu harmonicznego jest równaniem nietrywialnym, ale na tyle prostym, że jesteśmy w stanie sensownie je omówić. Drugi - ruch harmoniczny ma podstawowe znaczenie dla wszystkich działów fizyki. Można wręcz zaryzykować stwierdzenie, że fizyka to w sporej części teoria oscylatora harmonicznego. W dodatku matematycznym (DB 3.1) piszę, że ulubioną metodą matematyki stosowanej jest rozłożenie jednego trudnego problemu na mnóstwo prostych. Fizyka przez swe ścisłe związanie z matematyką dziedziczy te „skłonności”. Nazwijmy taką metodę, metodą cegiełek.

Definicja 1.1: Metoda cegiełek

Jeżeli dany problem obliczeniowy rozbijamy na złożenie wielu kroków wykorzystujących pewien zbiór podstawowych elementów, to taką metodę nazywamy metodą cegiełek.

Metoda cegiełek znana jest od starożytności. Przykładem jest model kosmosu w filozofii Arystotelesa, kiedy złożony ruch planet opisywany był przez układ sfer obracających się jednostajnie względem różnych osi obrotu. Tutaj cegiełkami były ruchy jednostajne sfer. Podobnie działał model Ptolemeusza, który składał ruchy planet z jednostajnych ruchów po okręgach (§TVI 1.3). Oba te modele

można uznać za pierwsze wykorzystanie analizy fourierowskiej, która wykorzystuje oscylatory harmoniczne (jedno lub wielowymiarowe) do opisu złożonych ruchów. Jak się przekonacie, w wielu wypadkach sensownym jest rozłożenie skomplikowanego ruchu na wiele, a nawet nieskończenie wie

M

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 1.8$$

to wyrażenie (1.3) jest rozwiązaniem równania (1.2). W dalszej części wykładu, będę przyjmował, że trzy wielkości oznaczane jako ω , k i m spełniają zależność (1.8). Dokładnie taki sam warunek (1.8) uzyskujemy dla rozwiązania w postaci (1.4). Korzystając z warunku (1.8) równanie ruchu harmonicznego (1.2) możemy zapisać w postaci

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad 1.9a$$

$$\ddot{x} = -\omega^2x \quad 1.9b$$

W wielu podręcznikach równanie ruchu harmonicznego zapisywane jest w postaci (1.9b).

Jak dotychczas, to o ruchu harmonicznym wypowiadałem się w bardzo formalny (matematyczny) sposób. Przydałoby się trochę fizycznej treści. Zajmę się interpretacją fizyczną wielkości występujących w rozwiązaniu równania ruchu harmonicznego. Skupię się na rozwiązaniu w postaci (1.3). Jak widać z rysunku (1.1) ruch harmoniczny jest ruchem wahadłowym. Cząstka „biega” cyklicznie tam i z powrotem. Możemy się zapytać jakie jest największe wychylenie cząstki tam – ewentualnie z powrotem? Ponieważ funkcja sinus osiąga wartość co najwyżej 1 lub co najmniej (-1) za wartość maksymalnego wychylenia odpowiada liczba A , przy czym wychylenie to liczymy od punktu równowagi, czyli od punktu, gdzie funkcja sinus przyjmuje wartość zero (rys. 1.2). Dlaczego akurat ten punkt nazwałem punktem równowagi? Dlatego, że gdy funkcja sinus przyjmuje wartość zero, wychylenie $x(t)$ jest również równe zero i siła dana wzorem (1.1) jest też równa zero. Gdy nie działa siła, to ciało jest w równowadze. Przejdźmy do definicji

Definicja 1.2: Położenie równowagi w ruchu drgającym

Położenie równowagi dla ruchu harmonicznego, to takie położenie, w którym siła wymuszająca ten ruch jest równa zero

Definicja 1.3: Amplituda ruchu harmonicznego

Amplitudą ruchu harmonicznego nazywamy bezwzględną wartość maksymalnego wychylenia od położenia równowagi. (rys. 1.2)

Definicja 1.4: Siła wymuszająca drgania harmoniczne

Siłą wymuszającą ruch harmoniczny nazywamy siłę proporcjonalną do wychylenia i przeciwnie skierowaną do kierunku wychylenia

Definicja 1.5: Okres drgań harmoniczych

Okres drgań to czas trwania pojedynczego pełnego cyklu drgań

Okres drgań ilustruje rysunek (1.3). Wielkością odwrotną do okresu jest częstość, która mówi nam ile pełnych cykli drgań mieści się w jednostce czasu (rys.1.4).

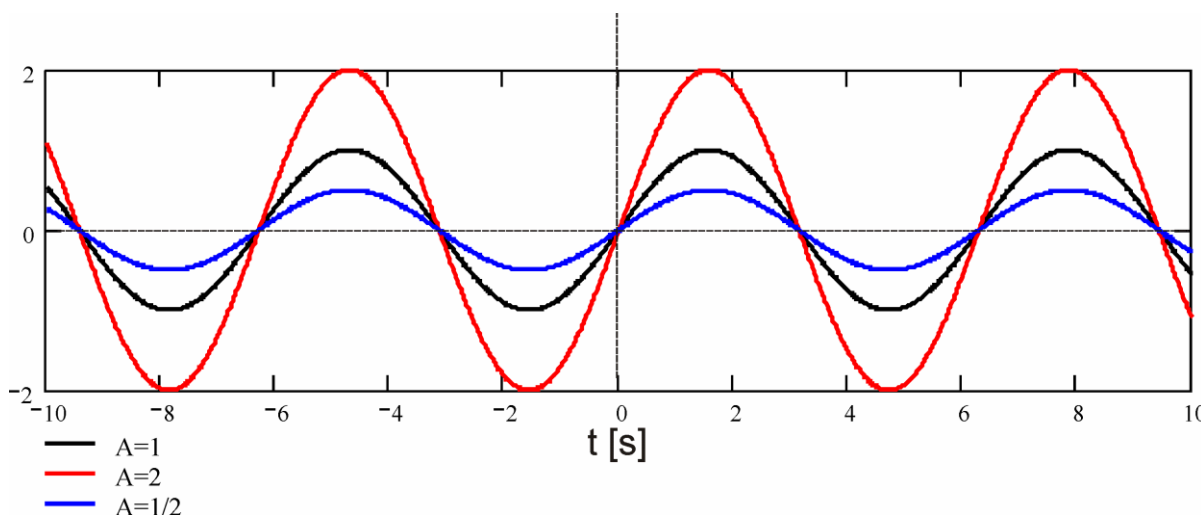
Definicja 1.6: Częstość drgań harmoniczych

Częstość układu drgającego jest równa ilości pełnych cykli w jednostce czasu.

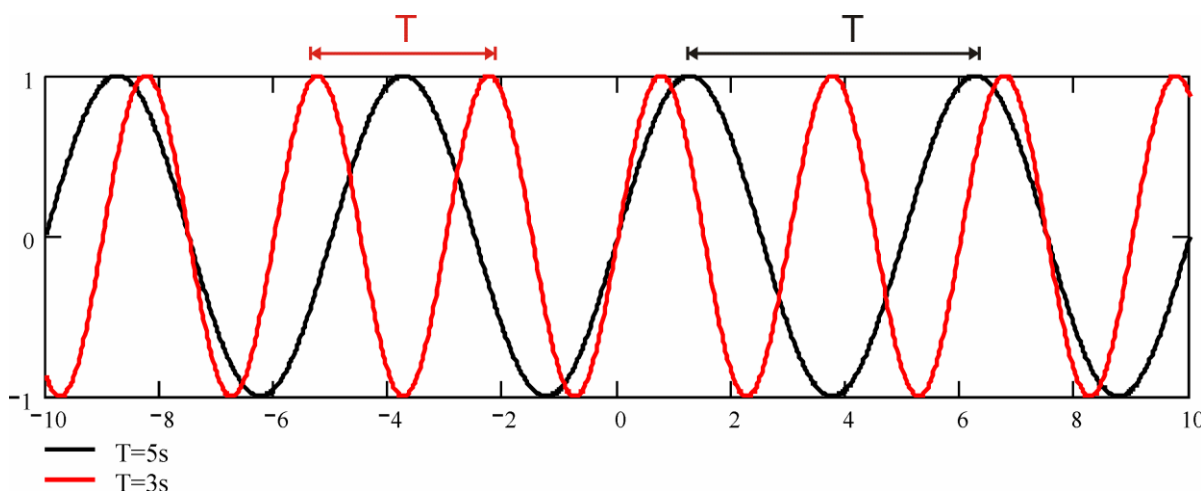
Częstość wyrażamy w cyklach na jednostkę czasu i ma wymiar [1/czas]. W układzie SI jednostką częstości jest jeden przez sekundę. Jednostka ta ma swoją własną nazwę: herc [Hz].

Definicja 1.7: Herc

Drgania zachodzą z częstością jednego herca, gdy w jednej sekundzie mieści się jeden pełny cykl drgań.



Rysunek 1.2. Przykłady drgań różniących się tylko amplitudą



Rysunek 1.3. Okres drgań jest czasem trwania jednego pełnego cyklu drgań.

Wygodniejszą jednostką jest częstości, czyli liczba radianów na sekundę.

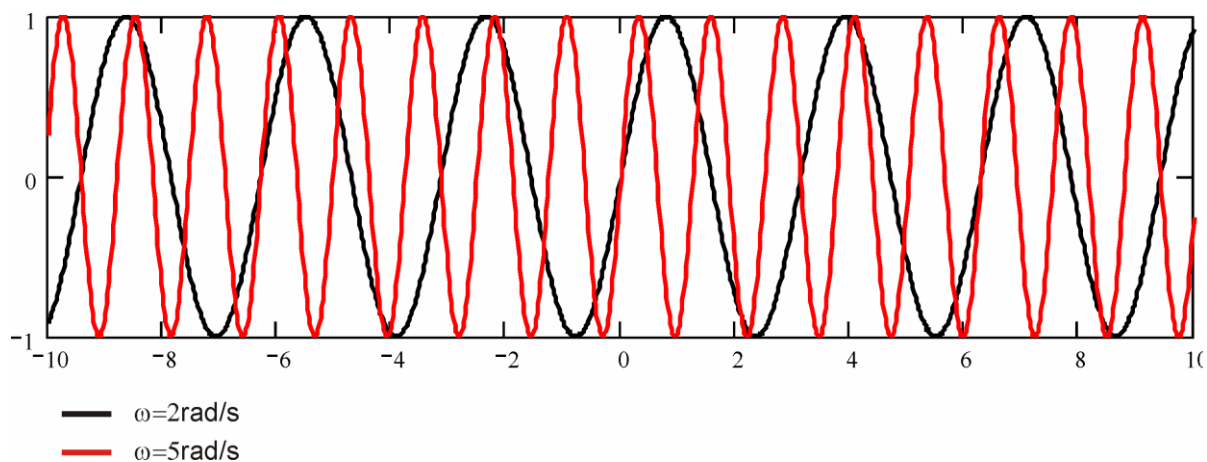
Definicja 1.8: Częstość

Częstość układu drgającego jest równa ilości radianów jakie przemierza ten układ w jednostce czasu.

W pełnym cyklu mieści się 2π radianów, stąd mamy zależność między częstością ω a częstotliwością f

$$\omega \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] = 2\pi f [\text{Hz}] \quad 1.10$$

Zwykle częstość wyrażoną w radianach na sekundę będą oznaczał grecką literą ω , a częstość wyrażoną w hercach literą f .



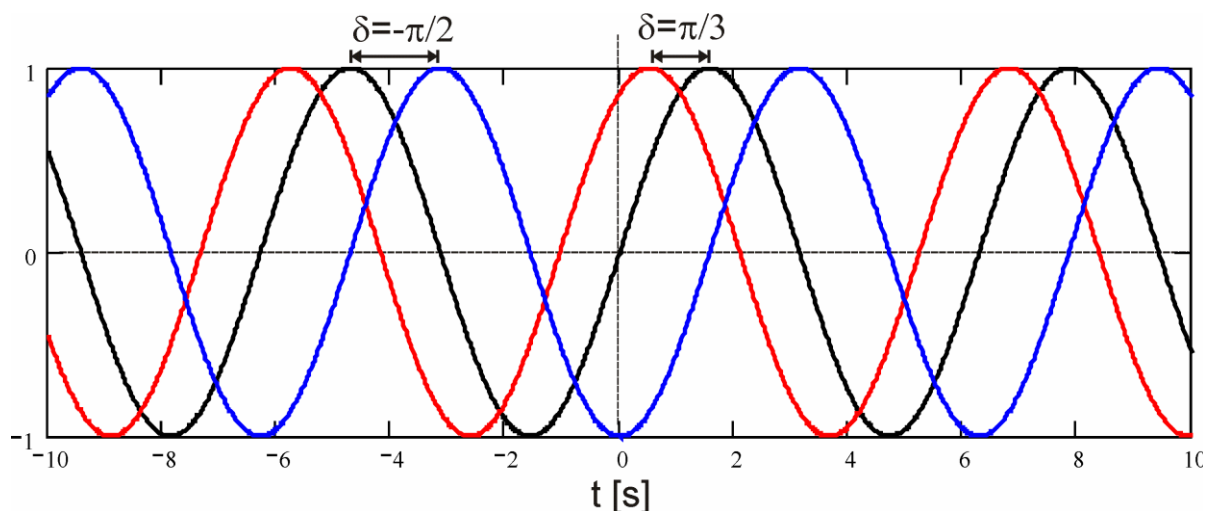
Rysunek 1.4. Przebieg dwóch drgań harmonicznycch różniących się częstością.

Ostatnim parametrem występującym w rozwiązaniu równania ruchu harmonicznego jest faza początkowa δ . Jeżeli przyjmiemy rozwiązania postaci (1.3) to musimy pamiętać o tym, że chwila $t=0$ nie zawsze wypada w momencie, gdy ciało przechodzi przez punkt równowagi. Aby to uwzględnić musimy przyjąć odpowiednią wartość fazy początkowej δ (rys 1.5). Jeżeli jest faza początkowa, to musi być również faza drgań. Faza drgań harmonicznycch jest wielkością kątową siedzącą pod funkcją sinus lub cosinus.

Definicja 1.9: faza drgań harmonicznycch

Faza drgań harmonicznycch jest wielkością kątową będącą argumentem funkcji sinus lub cosinus we wzorach opisujących to drganie.

Faza określa oczywiście miejsce, które na sinusoidzie, w danej chwili czasu zajmuje punkt, który oscyluje.



Rysunek 1.5. Dla ruchu reprezentowanego przez wykres czarny $\delta=0$, gdyż w chwili $t=0$ układ jest w położeniu równowagi. Przyjmujemy tutaj, że rozwiązanie równania ruchu jest postaci (1.3). Wykres czerwony przyjmuje, dla $t=0$, wartość większą od zera. Aby równanie (1.3) przyjmowało odpowiednią wartość musimy przyjąć, że faza początkowa ma wartość $\delta=\pi/3$. Wykres niebieski przyjmuje, dla $t=0$ wartość -1 , co oznacza, że faza początkowa ma wartość $\delta=-\pi/2$

Powiedzmy, że mamy siłę daną wzorem (1.1). Równanie ruchu jest dane wzorem (1.2), a rozwiązanie jest postaci (1.3) lub (1.4). Ze związku (1.8) obliczamy częstość ω ; a co z parametrami A i δ ? Pozwolę tu sobie przypomnieć, że klasyczne równania ruchu pozwala obliczać przyrosty położenia i prędkości (prędkości). A rozwiązanie (1.3 lub 1.4) jest rozwiązaniem klasycznego równania ruchu (1.2). Zatem, aby mieć pełne rozwiązanie równania ruchu musimy znać wartości dwóch wielkości w wybranej chwili czasu; czyli określić warunki początkowe (§TVI 3.3), zwykle są to: położenie początkowe x_p i prędkość początkowa v_p . Jednak sprawy nie zawsze bieżą „zwykle”. W przypadku oscylatora harmonicznego mogą to być amplituda A i faza początkowa δ . Łatwo pokazać, że para wielkości x_p i v_p wiąże się z parą A i δ . Wartości A i δ możemy znaleźć rozwiązując układ dwóch równań:

$$\begin{cases} x_p = x(0) = A \sin(\delta) \\ v_p = \dot{x}(0) = -\omega A \cos(\delta) \end{cases} \quad 1.11$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy

$$A = \sqrt{\frac{\omega^2 x_p^2 + v_p^2}{\omega^2}} \quad 1.12a$$

$$\delta = \operatorname{atan}\left(-\omega \frac{x_p}{v_p}\right) \quad 1.12b$$

Mając wzory (1.12), możemy jako warunki początkowe przyjąć równoważnie albo x_p i v_p albo A i δ .

Oscylator harmoniczny jest na tyle ważnym przypadkiem, że rozwiązanie jego równania ruchu napiszę w jeszcze innej postaci.

$$x(t) = A\sin(\omega t + \delta) = A[\sin(\omega t)\cos(\delta) + \cos(\omega t)\sin(\delta)] \quad 1.13$$

Niech teraz

$$\bar{A} = A\cos(\delta) \quad 1.14a$$

$$\bar{B} = A\sin(\delta) \quad 1.14b$$

Rozwiązanie (1.13) przyjmie postać

$$x(t) = \bar{A}\sin(\omega t) + \bar{B}\cos(\omega t) \quad 1.15$$

Z warunków początkowych określamy wartości obu współczynników; podobnie jak w poprzednim przykładzie przyjmujemy, że chwila dla której znamy warunki początkowe to: $t=0$.

$$\begin{cases} x_p = x(0) = \bar{B} \\ v_p = \dot{x}(0) = -\omega\bar{A} \end{cases} \quad 1.16$$

Stąd

$$\bar{A} = \frac{v_p}{\omega} \quad 1.17a$$

$$\bar{B} = x_p \quad 1.17b$$

Tutaj nad A i B narysowałem kreskę aby podkreślić, że A z kreską jest współczynnikiem różnym od A bez kreski. W przyszłości przy analizie konkretnego zagadnienia będę się czasem posługiwał postacią (1.15) rozwiązania równania ruchu harmonicznego; wtedy współczynniki będą pisane bez kreski, ale ich wartość będzie dana przez związki (1.14) uwzględniające fazę początkową.

Czas na wzory odwrotne do wzorów (1.14). Dodając stronami wyrażenia (1.14) mamy

$$\bar{A}^2 + \bar{B}^2 = A^2 \quad 1.18$$

Dzieląc stronami (1.14b) przez (1.14a) mamy

$$\frac{\bar{B}}{\bar{A}} = \frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta)} = \tan(\delta) \quad 1.19$$

Wybór postaci rozwiązania równania harmonicznego zależy oczywiście od rozpatrywanego zagadnienia.

Na zakończenie tych wstępnych rozważań chcę zwrócić waszą uwagę na znaczenie związku (1.8). Z jego lewej strony mamy częstość wyrażoną w radianach. Z prawej strony w mianowniku ułamka pod pierwiastkiem mamy

masę. Wynika z tego, że im większa masa tym mniejsza częstość drgań. Jest to zgodne z intuicją, im masywniejsze ciało tym trudniej jest je ruszyć i tym mniej jest skoczne, a musisz przyznać, że szybkie drgania mają wiele wspólnego z żwawym skakaniem. W liczniku tego ułamka jest stała k , która decyduje o wartości siły. Im większa jest siła tym żwawiej może „podskakiwać” wahadło.

1.1. Energia ruchu harmonicznego

Wyznaczę energię ciała w ruchu harmonicznym. Zacznę od energii kinetycznej. Prędkość w ruchu harmonicznym opisanym równaniem (1.3) wyraża się wzorem

$$\dot{x}(t) = A\omega \sin(\omega t + \delta) \quad 1.1.1$$

Energia kinetyczna jest równa

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta) \quad 1.1.2$$

Energię maksymalną możemy wyznaczyć korzystając z faktu, że maksymalna wartość kwadratu funkcji cosinus wynosi jeden.

$$E_{kmax} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad 1.1.3$$

Tam gdzie funkcja cosinus jest równa jeden funkcja sinus jest równa zero, zatem wartość maksymalną energii kinetycznej, ciało poruszające się ruchem harmonicznym, uzyskuje w położeniu równowagi układu drgającego. Wyciągnięte tu wnioski nie zależą od tego czy posługujemy się opisem ruchu harmonicznego w postaci (1.3) czy (1.4) czy też (1.15).

Obliczę energią potencjalną ciała. Siła jaka działa na poruszającą się masę w ruchu harmonicznym wyraża się wzorem (1.1). Jest to siła z jaką na przykład sprężyna ciągnie zawieszony na niej ciężarek. Teraz jednak pytamy z jaką siłą F działa ktoś (lub coś) co naciąga sprężynę. Siła ta jest oczywiście odwrotnie skierowana do siły wywieranej przez naciąganą sprężynę. Mamy więc

$$F = -kx \quad 1.1.4$$

Przypadek siły wyrażającej się takim równaniem omawiałem w części poświęconej pracy (§TII 5). Przypominam, że praca to pole pod wykresem funkcji $F(\Delta x)$. Zatem energia potencjalna ciała w ruchu harmonicznym prostym jest równa (T II 5.3).

$$E_p = \int_0^x F dx = \int_0^x -kx dx = -\frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \delta) = -\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta) \quad 1.1.5$$

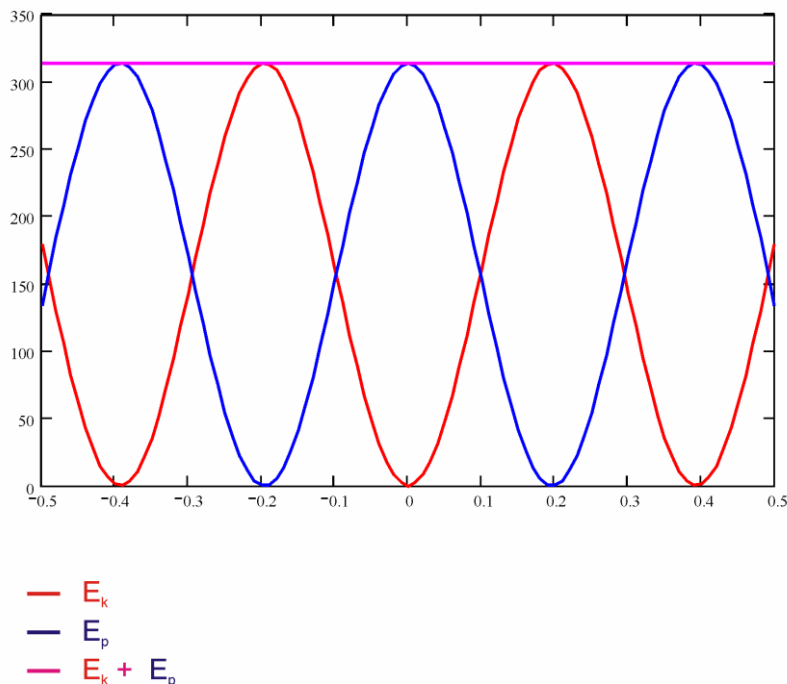
Maksymalną wartość energii potencjalnej otrzymamy podstawiając za wartość funkcji sinus jej wartość maksymalną czyli jeden

$$E_{pmax} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad 1.1.6$$

Wynika z tego, że maksymalną wartość energii potencjalnej ciało zyskuje w położeniu największego wychylenia z położenia równowagi. Można się było tego spodziewać. Największe wychylenie, na przykład wahadła składającego się z kulki na sprężynie, wypada przy największym rozciągnięciu (ściśnięciu) sprężyny, czyli w stanie gdy energia zgromadzona w sprężynie jest największa. Energia całkowita w ruchu harmonicznym to suma energii kinetycznej i potencjalnej.

$$\begin{aligned} E_c &= E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2A^2(\sin^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta)) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \end{aligned} \quad 1.1.7$$

Energia całkowita nie zależy od czasu, co nie może dziwić - obowiązuje wszak zasada zachowania energii. Rysunek (1.1.1) przedstawia przebieg w czasie energii całkowitej, kinetycznej i potencjalnej dla ruchu harmonicznego.



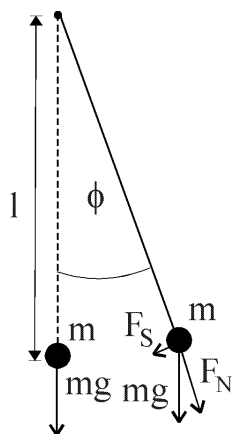
Rysunek 1.1.1. Wykres przebiegu energii kinetycznej, potencjalnej i całkowitej w ruchu harmonicznym. Przyjęto ruch dla którego: $\omega=8\text{rad/s}$; $A=10\text{cm}$; $m=100\text{g}$; $\delta=0$.

Z powyższych rozważań oraz z rysunku (1.1.1) wynika, że energia całkowita jest równa maksymalnej energii potencjalnej lub maksymalnej energii kinetycznej. Rzeczywiście, na przykład dla wahadła punkt największego wychylenia jest punktem, w którym wahadło zatrzymuje się. Jednocześnie masa zwieszona na wahadle jest w najwyższym położeniu, czyli ma największą energię potencjalną.

W punkcie o najniższej energii potencjalnej, czyli w punkcie równowagi, energia kinetyczna masy wahadła jest największa (wahadło porusza się z największą prędkością). Przyjmujemy tutaj, że zero energii potencjalnej wypada w położeniu równowagi.

1.2. Wahadło matematyczne

Wahadło matematyczne to masa punktowa zawieszona na nieważkiej, nierozciągliwej nici (rys.1.2.1). Nieważka oznacza, że w praktyce możemy zaniedbać jej masę. Poszukamy równania ruchu wahadła matematycznego. Wychylenie wahadła mierzone wzdłuż łuku okręgu, który zakreśla punktowa masa jest równe $l\varphi$ (φ musi być wyrażone w radianach). Siła kierująca, która działa wzdłuż stycznej do toru wahadła jest równa składowej stycznej siły



Rysunek 1.2.1. Wahadło matematyczne to punktowa masa zawieszona na nieważkiej, nierozciągliwej nici. W praktyce dobrym modelem wahadła matematycznego jest mała kulka zawieszona na lekkiej nici. Przy małej amplitudzie, drgania wahadła są z dobrym przybliżeniem opisywane przez równania oscylatora harmonicznego.

ciężkości i jest przeciwnie skierowana do wychylenia $F = -mg\sin(\varphi)$. Stąd mamy równanie ruchu w następującej postaci

$$ml \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) = -mg\sin(\varphi(t)) \quad 1.2.1$$

Po uproszczeniach mamy

$$l \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) = -g\sin(\varphi(t)) \quad 1.2.2$$

Równanie (1.2.2) nie ma postaci równania ruchu drgań harmonicznym (1.2). Pokażemy jednak, że dla małych kątów wychylenia φ , możemy równanie (1.2.2) zapisać w postaci przybliżonej, która będzie miała postać równania ruchu drgań harmonicznym. W tym celu należy rozłożyć funkcję sinus w szereg potęgowy, przy założeniu, że wychylenie φ jest wyrażone w radianach (DB 3.3)

$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{120}\varphi^5 + \dots \quad 1.2.3$$

Szereg jest nieskończony, ale dla małych φ możemy uznać, że wyrazy w potęgach większej od jedynki są zaniedbywalnie małe, wtedy otrzymujemy

$$\sin(\varphi) \approx \varphi \quad 1.2.4$$

Po zastosowaniu przybliżenia małych kątów równanie ruchu (1.2.2) przyjmuje postać

$$l \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) = -g\varphi(t) \quad 1.2.5$$

wystarczy obie strony podzielić przez długość l

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) = -\frac{g}{l} \varphi(t) \quad 1.2.6$$

oraz wprowadzić oznaczenia

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad 1.2.7$$

i otrzymamy postać (1.9b) równania ruchu dla drgań harmonicznym

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi \quad 1.2.8$$

To, że równanie (1.9b) jest zapisane dla x a powyższe dla φ nie ma żadnego znaczenia. W końcu z punktu widzenia matematyki jest to tylko zmiana oznaczeń. Zatem rozwiązania równania (1.2.8) są takie same jak równania (1.9b), trzeba je tylko napisać w nowych oznaczeniach¹.

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \delta\right) \quad 1.2.9$$

Gdzie przez φ_0 oznaczyłem wartość amplitudy drgań wyrażoną w mierze katowej. Podsumowując: dla małych wychyleń wahadło matematyczne zachowuje się, z dobrym przybliżeniem, jak oscylator harmoniczny. Częstość drgań ω takiego wahadła zależy od wartości przyspieszenia ziemskiego i długości nici. Generalnie im dłuższa nieć tym mniejsza częstość. Częstość nie zależy natomiast od masy m i amplitudy wychylenia wahadła. Te szczególne własności czynią z wahadła matematycznego dobrego kandydata na układ sterujący chodem zegara.

Siła z prawej strony równania (1.2.1) jest składową siły grawitacji, która wymusza drgania układu (w tym wypadku drgania nieharmoniczne). Taką siłę nazywamy siłą kierującą. W przybliżeniu małych wychyleń siła kierująca ma postać praej strony równania (1.2.6), po przemnożeniu jej przez masę kulki.

¹ Kto czyta również te trudne części wykładu (oznaczone pikiem), wie że współrzędną φ możemy traktować jako współrzędną uogólnioną (def. TV 4.2.1).

Definicja 1.2.1: siła kierująca dla ruchu drgającego

Siłę lub składową pewnej siły, która odpowiada za wprawienie układu w drgania nazywamy siłą kierującą.

Wyrażę energię wahadła matematycznego jako funkcję wychylenia kąowego φ . Skorzystam z już wyprowadzonych wzorów na energię oscylatora harmonicznego: potencjalną (1.1.5)

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}kl^2\varphi^2 = \frac{1}{2}m\omega^2l^2\varphi^2 = \frac{1}{2}mgl\varphi^2 \quad 1.2.10$$

i kinetyczną

$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \quad 1.2.11$$

Energia całkowita jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej

$$E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2 \quad 1.2.12$$

Korzystając z zależności (1.2.9) i obliczając pochodną $\dot{\varphi}$ całkowitą energię możemy zapisać w postaci

$$E_c = \frac{1}{2}mgl\varphi_0^2 \quad 1.2.13$$

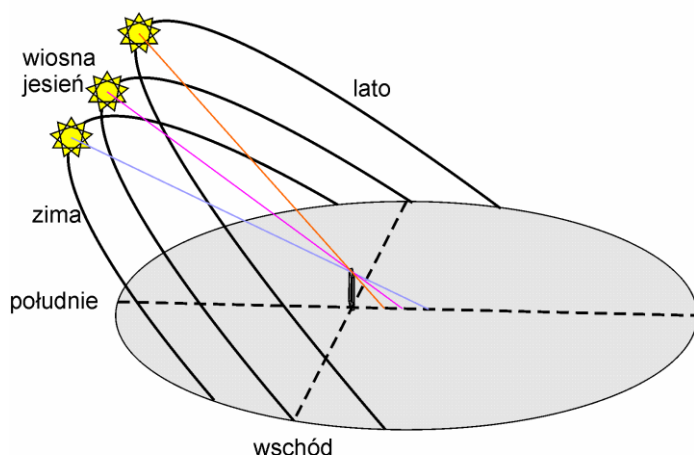
I tak otrzymaliśmy ponownie wzór (1.1.7); widać to z następującego wyrażenia, które jest równoważne wyrażeniu (1.2.13)

$$E_c = \frac{1}{2}m \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega^2} \underbrace{l^2\varphi_0^2}_{A^2} \quad 1.2.14$$

1.3. Zegar z wahadłem

Problem budowy sprawnego zegara trafił już starożytne cywilizacje. Budowa zegara wymaga umiejętności wykorzystania regularnego zjawiska okresowego o odpowiednio dużej częstotliwości. Za pierwszy zegar służyło ludziom niebo. Niebo jako zegar miało istotne zalety. Ruch ciał niebieskich, a szczególnie gwiazd, jest obojętny na ziemskie zdarzenia, co oznaczało, że nawet najgwałtowniejsze kataklizmy na ziemi nie miały wpływu na jego „chód”. Ponadto niebo jest zegarem uniwersalnym, „tykającym” w ten sam sposób dla wszystkich ludzi na Ziemi. Pisałem już o tym, że gwiazdy zachowują się tak jakby były przyczepione do ogromnej sfery, która raz na dobę obraca się wokół Ziemi (rys. TVI 1.3.2). Dziś wiemy, że ruchy ciał niebieskich, w tym gwiazd nie są regularne, lecz przy obserwacji gołym okiem trzeba setek lat konsekwentnych pomiarów by to wykryć. Drugą „wadą” niebieskiego zegara, jest to, że nie nadaje się do pomiarów krótkich odcinków czasu. I choć pierwotnie sekunda definiowana była jako część

roku (§TI_6.3), to nikt nie mierzył czasów rzędu kilku sekund obserwując ruchy ciał niebieskich. Regularny ruch Słońca, Księżycy i sfery gwiazd pozwalał na opracowanie kalendarza, oraz na w miarę dokładne określanie pory dnia czy nocy. Choć to ostatecznie zadanie było złożone ze względu na zmieniającą się, w przeciągu roku drogę Słońca. Przez to w lecie mamy długi dzień, a w zimie dzień jest krótki (rys. 1.3.1). Konstruktorzy i użytkownicy zegarów słonecznych starali się ten fakt uwzględnić. Najstarszy typ zegara słonecznego to obelisk, wysoki słup, którego cień (jego długość) wskazywała porę dnia. Ulepszoną wersją zegara słonecznego jest gnomon, który wskazuje czas na podstawie położenia cienia pręta (rys. 1.3.2). Cień pręta przesuwa się po wyskalowanej podziałce. Oś pręta powinna być nachylona tak, by był on równoległy do osi obrotu Ziemi, czyli do osi, którą wówczas traktowano jako oś obrotu sfery niebieskiej. Konstrukcja takich zegarów wymagała już nagromadzenia obserwacji astronomicznych oraz doświadczenia w zakresie metod geometrycznych.



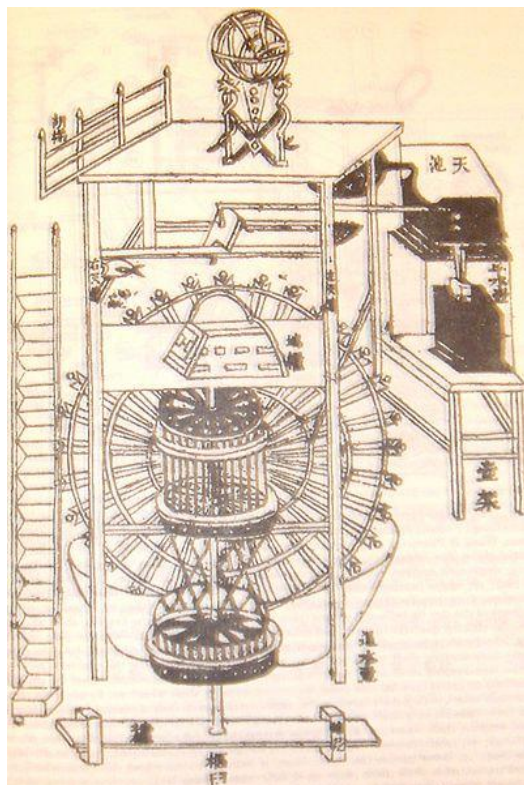
Rysunek 1.3.1. Pozorna droga Słońca na niebie jest najdłuższa latem a najkrótsza w zimie. W efekcie cienie w południe są latem najkrótsze (Słońce wspina się najwyżej) a zimą najdłuższe.



Rysunek 1.3.2. Tarcza gnomonu (zegara cieniowego) pochodzącego z Egiptu z XVI wieku p.n.e. Jest to najstarszy znaleziony zegar tego typu; źródło Wikipedia

Obok zegarów słonecznych budowano zegary wodne, piaskowe, ogniowe (na przykład odmierzano długość spalonej świecy). Mimo wyrafinowania

niektórych konstrukcji (szczególnie hellenistycznych i chińskich (rys. 1.3.3), żadna z nich nie była wyposażona w porządnego oscylatora i przez to nie może być przez nas uznana za pełnoprawny zegar mechaniczny. Warto jednak podkreślić, że chiński zegar wodny pokazany na rysunku (1.3.3) posiadał mechanizm wychwytowy (wychwyt szpindlowy), który stał się istotnym elementem późniejszych zegarów mechanicznych.



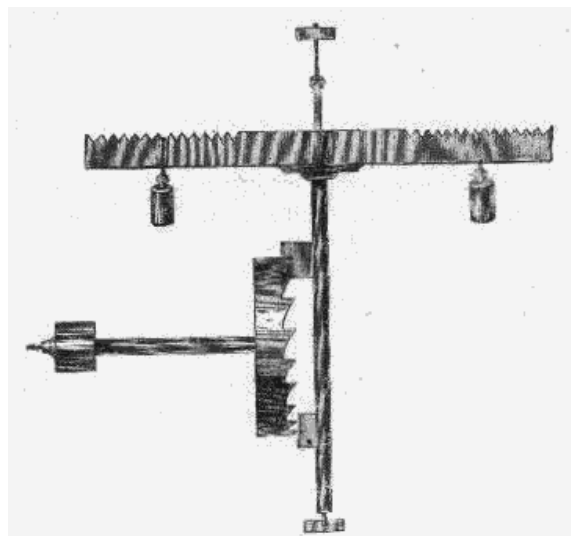
Rysunek 1.3.3. Szkic przedstawia konstrukcję chińskiego zegara wodnego, z czasów dynastii Song. Szkic pochodzi z książki *Xin Yi Xiang Fa Yao* z roku 1092. Zegar wspomagał obserwacje astronomiczne. Zamontowany był na dwunastometrowej wieży w Kaifengu. Song zastosował w nim mechanizm wychwytowy wynaleziony przez mnicha buddyjskiego Yi Xinga i urzędnika Liang Lingzana w 725 roku. W zegarze zastosowana została również nowatorska wówczas przekładnia łańcuchowa. Zegar został zdemontowany w 1127 roku podczas najazdu Dżurdzeńów; źródło Wikipedia

Przełom w budowie zegarów zaczął się w średniowieczu, kiedy do budowy zegarów o napędzie grawitacyjnym zastosowano wspomniany wcześniej wychwyt szpindłowy z kolebniakiem² (rys. 1.3.4). Wychwyt to urządzenie łączące regulator chodu zegara i oscylator z jego napędem. Bez wychwytu i kolebniaka (który pełnił rolę regulatora i oscylatora) napęd grawitacyjny spisywał się źle. Kamień obciążający linę napędową opadał zbyt szybko, lub gdy był za mały nie opadał wcale. Wychwyt szpindłowy pozwalał na powieszenie ciężaru odpowiednio napinającego linę, przy jednoczesnym znacznym spowolnieniu ruchu mechanizmu. Co więcej wychwyt zwiększał regularność ruchu, a kolebniak w prosty sposób pozwalał na regulację tempa chodu zegara. Sam kolebniak jest rodzajem wahadła fizycznego.

Najstarsze wzmianki o europejskim zegarze, które mogą być interpretowane jako dotyczące zegara mechanicznego pochodzą z Werony, gdzie ksiądz Pacificus miał zbudować około 840 r. zegar z mechanizmem kołowym. Nie jest jednak

² Nie wiem czy europejscy konstruktorzy wzorowali się na osiągnięciach inżynierów z Chin, czy też opracowali wychwyt szpindłowy niezależnie.

pewne jaki był to zegar. Kroniki angielskie z 1202 roku wspominają, że kościół w Canterbury otrzymał zegar wieżowy, jednak wiadomość ta pozwala tylko przypuszczać, że był to pełny zegar mechaniczny (z wychwytem i kolebnikiem). Z 1288 roku mamy zapis o zegarze umieszczonym na Westminster Hall. W notatniku znanego nam już Villarda de Honnecourt (rys. TIII 4.1) z 1235 r. znajduje się szkic mechanizmu napędowego zegara poruszanego obciążnikami. Nie ma jednak żadnych informacji na temat mechanizmu wychwytowego. W 1314 roku powstaje zegar w Caen we Francji, wykonany przez Beaumonta. Wszystkie te notki nie dają całkowitej pewności co do charakteru tych zegarów. Znamienny jest fragment książki (1276-1277) króla Kastylii Alfonsa X zwanego mądrym. Wśród opisu wielu zegarów wodnych i ogniowych znajduje się opis zegara napędzanego obciążnikami.



Rysunek 1.3.4. Wychwył szpindlowy z kolebnikiem paryskiego zegara z 1379 roku konstrukcji Henri De Vick. Rysunek wykonany w roku 1849 przez Pierre Dubois. Kolebnik to pionowy pręt z poprzeczną belką obciążoną ciężarkami. Kolebnik, wykonując ruch obrotowy tam i z powrotem pełnił funkcję regulatora ruchu zegara. Zmieniając położenie ciężarków można było zmienić okres drgań kolebnika. Wychwył szpindlowy składał się z koła zębatego o kształcie korony (koło pionowe) oraz dwóch palet przyczepionych do pręta kolebnika. Napęd (czyli spadające w dół wieży ciężary) obracał kołem wychwytu. Koło to popychało jedną z palet powodując obrót kolebnika. W efekcie jedna z palet traciła kontakt z zębami koła, ale jednocześnie kontakt taki uzyskiwała druga paleta, która blokowała ruch koła. Koło musiało teraz zakręcić kolebnikiem w drugą stronę. Wychwył szpindlowy znacznie spowalniał rozwijanie się liny z obciążnikiem był też niezbędnym łączem między regulatorem chodu, czyli kolebnikiem, a napędem zegara. Zegary z wychwytem szpindlowym z kolebnikiem nie były zbyt dokładne. Dlatego, w pierwszym okresie ich rozwoju, wyposażano je w jedną wskazówkę (godzinową) i często regulowano względem ruchu Słońca; źródło Wikipedia.

Obrót wału tegoż zegara spowalniany był wypełniającą go rtęcią, która przepływała przez układ przegród. Alfons X zgromadził na swoim dworze wielu

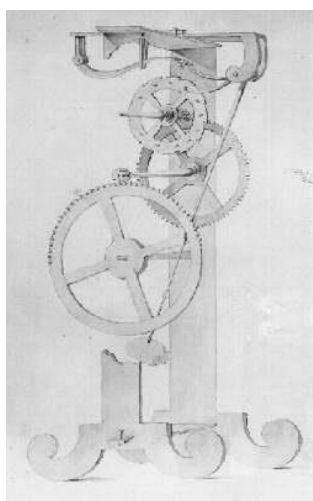
wybitnych uczonych i brak w jego książce wzmianek o zegarze mechanicznym jest silną wskazówką, że w jego czasach, takich zegarów jeszcze nie było. Trudno jest, jak z tego widać, ustalić miejsce powstania pierwszego mechanicznego zegara. Wiadomo jednak, że w połowie wieku XIV zegary mechaniczne tykały już w kilku miastach Włoch i Francji.

Dokładność pierwszych średniowiecznych zegarów mechanicznych wynosiła około połowy godziny na dobę. Co dzień nastawiano je na nowo, korzystając z obserwacji astronomicznych. W XVI wieku dokładność ta wzrosła do około 10 minut na dobę. Najlepsze zegary z wychwytem szpindlowym z kolebnikiem szwajcarskiego mistrza Josta Bürgi z początku wieku XVII miały dokładność około jednej minuty na dobę. Dla wielu zastosowań było to jednak stanowczo za mało – cóż, apetyt rośnie w miarę jedzenia. Z tego co wiemy jako pierwszy na pomysł wykorzystania wahadła jako regulatora chodu zegara wpadł Galileusz. Był on również odkrywcą faktu, że okres wahań wahadła nie zależy od jego masy i amplitudy, zależy natomiast od jego długości. Te własności czynią z wahadła dobrego kandydata na oscylator regulujący chód zegara mechanicznego. Pomysł, niezależnie od tego czy puszczając w ruch wahadło odchylił je o 3° czy o 5° okres wahań pozostanie taki sam. Z drugiej strony tempo wahań oscylatora łatwo jest zmienić zmieniając wysokość zawieszenia ciężarka (wzór 1.8). Galileusz zaprojektował układ zegara (rys. 1.3.5), którego jednak nie zdołał zrealizować. Dzieło kontynuował jego syn Vincenzo, ale również go nie dokończył. O wszystkim tym wiemy z pism pozostawionych przez ucznia Galileusza - Vincenzo Vivaniego.

Dokładny zegar był w owych czasach urządzeniem mocno pożądanym. Potrzebowała go astronomia, fizyka, technika, medycyna, nawigacja oceaniczna. Sam Galileusz przy pomiarach krótkich odcinków czasów, tak jak i inni uczeni epoki odwoływał się do tak niepewnych metod jak liczenie uderzeń pulsu, czy pomiar poziomu wody wypływające z naczynia z niewielkim otworem. Jeszcze jako student uniwersytetu w Pizie zaprojektował prototyp stopera (metronomu). Proste urządzenie wykorzystujące odwrotnie ustawione wahadło (rys. 1.3.6) do precyzyjnego (jak na owe czasy) pomiaru krótkich odcinków czasu. Licząc kolejne wahańcia metronomu można było używać go jako stopera, co dawało znacznie pewniejszy pomiar niż liczenie uderzeń własnego pulsu. Jednak jego projekt zegara z wahadłem nie był udany. Budowa praktycznych zegarów według tego projektu nie była możliwa, choć sam pomysł zastosowania wahadła jako oscylatora był rewolucyjny.

Praktyczny zegar wahadłowy zaprojektował holenderski fizyk Christiaan Huygens (rys. 1.3.8). Huygens dostosował konstrukcję wychwytu szpindlowego do współpracy z wahadłem (a nie kolebnikiem). Rozwiązał również problem dostarczania wahadłu energii (funkcję tę realizował przekonstruowany wychwyty) oraz problem zliczania czasu, czyli przenoszenia ruchu mechanizmu zegara na ruch wskazówek. Nowa konstrukcja wychwyty wraz z innymi usprawnieniami pozwoliły również na zwiększenie dokładności wskazań zegara. Huygens, który

nie był mechanikiem, zegara swojego projektu nie skonstruował. Jego budowę zlecił, w 1657 roku, wziętemu mechanikowi z Hagi Salomonowi Costerowi (rys. 1.3.7). Huygens zdawał sobie sprawę, że isochronizm wahadła matematycznego³, nawet dla małych drgań, nie jest wystarczający. Rozwiązał problem idealnego wahadła, wskazując, że jego kulka powinna poruszać się po wycinku cykloidy a nie okręgu. Próbował zaprojektować odpowiednie wahadło, ale bez końcowego sukcesu. Jednak jego odkrycie zostało wykorzystane przez kolejne pokolenie projektantów mechanizmów zegarowych.



Rysunek 1.3.5. Szkic projektu zegara wahadłowego pomysłu Galileusza. Rysunek wykonany przez ucznia Galileusza Vincenzo Viviani około roku 1659. Projekt zegara powstał około roku 1641. Układ zaproponowany przez Galileusza nie rozwiązywał dwóch istotnych problemów: skutecznego dostarczania do wahadła energii (inaczej na skutek tarcia ruch wahadła szybko by ustał); skuteczny znaczny tutaj możliwie mało zakłócający ruch wahadła. Drugi problem to zliczanie czasu; źródło zdjęcia Wikipedia.

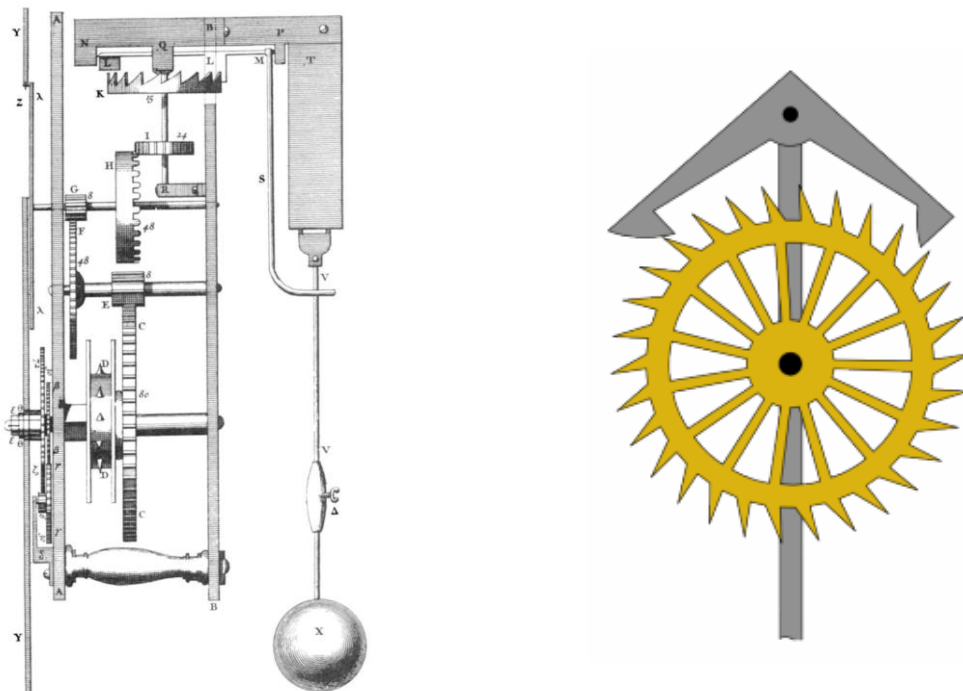


Rysunek 1.3.6. Metronom konstrukcji niemieckiego inżyniera von Johann Nepomuk Mälzel (1815) obecnie w Muzeum Historii Sztuki w Wiedniu. Mälzel uważany jest za jednego z twórców praktycznego metronomu, czyli urządzenia do wybijania taktu na potrzeby nauki muzyki. Poprzez generację miarowych „tyknięć” metronom pomaga uczącym się utrzymać właściwe tempo gry. Widać, że metronom opiera się o odwrócone wahadło. Projekt Galileusza był prostszy – nie zawierał wychwyty i napędu – nadawał się do pomiaru krótkich odcinków czasu, przez zliczanie wahaniec wskazówki; źródło – Wikipedia

W następnych latach konstrukcja zegara wahadłowego była ciągle ulepszana. Długi szereg innowacji pozwolił na budowę coraz to bardziej zróżnicowanych i precyzyjniejszych zegarów. Wiele dało wprowadzenie wychwyty kotwicowego, wymyślonego przez Roberta Hooke’a około 1657 roku. (rys. 1.3.7), który zastąpił wychwyty szpindłowy. Pozwolił on na budowę

³ Czyli niezależność okresu drgań od amplitudy

precyzyjniejszych zegarów o mniejszych rozmiarach. Innym ważnym krokiem było wprowadzenie napędu sprężynowego. W zegarach pojawił się już w XV wieku, ale jego w pełni funkcjonalna postać pojawiła się na przełomie XVI i XVII wieku. Dzięki tym oraz wielu innym innowacjom, obok wielkich zegarów zdobiących wieże kościołów czy salony możnych, pojawiły się zegary o mniejszych rozmiarach, w tym również zegary naręczne. Pamiętajmy, że precyzyjny zegar do odmierzania krótkich odcinków czasu – stoper, był przyrządem niezbędnym do zaistnienia rewolucji naukowej i technicznej. Dlatego rozwój zegara mechanicznego można uznać za jedno z kluczowych zdarzeń w historii cywilizacji.



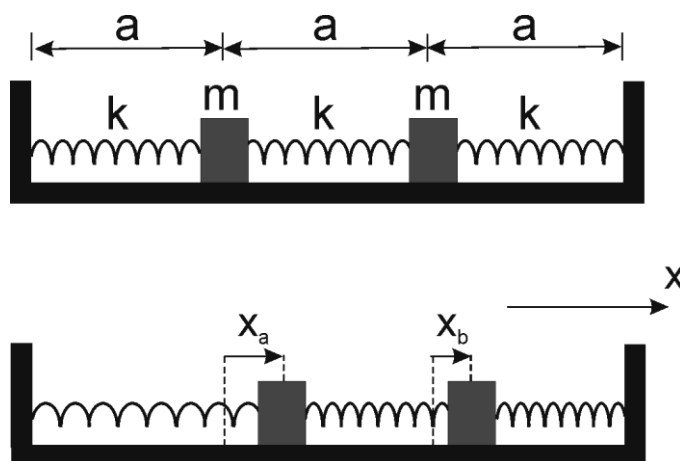
Rysunek 1.3.7. Z lewej: szkic mechanizmu zegara wahadłowego (drugi, ulepszony projekt) zaprojektowanego przez Huygensa. Rysunek autora z roku około 1673; źródło Wikipedia; z prawej: wychwyty kotwiczny; źródło Wikipedia



Rysunek 1.3.8. Christiaan Huygens (1629-1695) fizyk, matematyk, astronom Flamandzki (Holenderski). Przyczynił się do rozwoju dynamiki, dał podwaliny falowej teorii światła, projektant i teoretyk dokładnego zegara wahadłowego, równocześnie z Robertem Hookiem opracował napęd sprężynowy do zegarów, zajmował się rachunkiem prawdopodobieństwa, odkrył Tytana największy księżyc Saturna, z powodzeniem badał pierścienie Saturna. Stwierdził, że część mgławic można, używając odpowiednio mocnego teleskopu, rozdzielić na pojedyncze gwiazdy składowe; źródło Wikipedia

2. Składanie drgań ♦/♣/♦

Jak pokazuje historia zegara wahadłowego, prosty ruch harmoniczny miał duże znaczenie dla rozwoju nauki i techniki. Obecnie prosty ruch harmoniczny służy jako cegiełka. Z sumy wielu takich cegiełek budujemy opis bardziej złożonych ruchów. Zajmę się pierwszym bardziej złożonym układem drgającym: dwoma sprzężonymi oscylatorami harmonicznymi pokazanymi na rysunku (2.1).



Rysunek 2.1. U góry: Dwa ciężarki o tej samej masie m połączone ze sobą i z ściankami masywnego pudełka przez trzy takie same sprężyny o współczynniku sprężystości k . Zwrot „masywne pudełko” oznacza tu, mocowanie do masy tak dużej, że drgania ciężarków mają na nią zanedbywalnie mały wpływ. Sytuacja przedstawia położenie, w którym układ jest w równowadze. U dołu: ciężarki zostają wychylone z położenia równowagi, pierwszy o x_a drugi o x_b .

Napiżemy równania ruchu dla tego układu. Równania będą dwa, bo mamy dwie masy, które mogą się poruszać na różne sposoby. I choć na rysunku (2.1) masy jawią się jako kostki, to w naszym modelu potraktujemy je, jak zwykle, jako dwie masy punktowe. Zanedbamy również tarcie w układzie, a sprężyny potraktujemy jako nieważkie. Układ równań ruchu dla dwóch mas punktowych połączonych sprężynami o jednakowych współczynnikach sprężystości k ma postać:

$$m \frac{d^2 x_a}{dt^2} = -kx_a + k(x_b - x_a) \quad 2.1a$$

$$m \frac{d^2 x_b}{dt^2} = -k(x_b - x_a) - kx_b \quad 2.1b$$

Przyjrzyj się prawej stronie równania (2.1a). Pierwszy składnik sumy opisuje siłę z jaką na lewą masę działa lewa sprężyna. Drugi składnik sumy opisuje siłę z jaką na lewą masę działa środkowa sprężyna. Wyraz $(x_b - x_a)$ jest długością na jaką środkowa sprężyna jest rozciągnięta (lub ściśnięta), gdy ciężarek z lewej strony przesunięty jest o x_a , a ciężarek z prawej strony przesunięty jest o x_b . Równanie

(2.1b) skonstruowane jest analogicznie. Z układu równań ruchu (2.1) widać, że dwa oscylatory są sprzężone, to znaczy, że ruch jednego z nich wpływa na ruch drugiego. Niestety w przypadku sprzężenia, ruchu ciężarków nie da się analizować osobno. Kiedy chcemy wyznaczyć siły działające na, na przykład, masę z lewej strony, to musimy znać położenie masy z prawej strony (bo ma to wpływ na długość środkowej sprężyny) i na odwrót. Z drugiej strony gdyby oscylatory nie były sprzężone mielibyśmy dwa niezależne oscylatory harmoniczne i cała sprawa byłaby mało ciekawa. Wygląda na to, że trafiliśmy na pierwszy układ równań różniczkowych, których nie da się rozwiązywać niezależnie. Ale nie wpadaj w panikę! Szybko damy sobie z nim radę. Będziemy stosować chwyt znany z rozwiązywania układów równań algebraicznych. Dodajmy równania (2.1) stronami

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_a + x_b) = -k(x_a + x_b) \quad 2.2a$$

A teraz je odejmijmy

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x_a - x_b) = -3k(x_a - x_b) \quad 2.2b$$

Jeżeli wprowadzę nowe zmienne zdefiniowane wzorami:

$$\Lambda_1 = x_a + x_b \quad 2.3a$$

$$\Lambda_2 = x_a - x_b \quad 2.3b$$

A następnie podstawię je do wzorów (2.2), to otrzymam nowy układ równań różniczkowych.

$$m \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_1 = -k\Lambda_1 \quad 2.4a$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} \Lambda_2 = -3k\Lambda_2 \quad 2.4b$$

Co ciekawe, w nowych zmiennych równania są niezależne i każde z nich ma postać równania ruchu drgań harmoniczných. Takie małe czary mary - przez podstawienie (2.3) udało się zamienić równania sprzężone na równania niezależne, ale wyrażone przez „egzotyczne” zmienne. Coś za coś: albo sprzężone równania względem zwykłych zmienných, albo równania rozseparowane względem egzotycznych zmienných. Te nowe zmienne sprzęgają położenie obu mas, przez co same równania mogą ulec separacji. Współrzędne dla których możemy napisać układ niezależnych równań ruchu dla układu drgającego nazywamy współzrędnymi normalnymi. Mówimy również, że we współzrędných normalnych układ równań ruchu staje się rozsprzęgnięty, to jest taki, że zmiana jednej współzrędnej nie powoduje zmiany pozostałych współzrędných.

Definicja 2.1 : Rozsprzęgnięty układ równań ruchu

Jeżeli układ równań ruchu napisany ze względu na współrzędne takie, że zmiana jednej współrzędnej nie powoduje zmiany pozostałych współrzędnych, to taki układ nazywamy rozsprzęgniętym układem równań ruchu.

Definicja 2.2 : Współrzędne normalne układu drgającego

Dla układu drgającego, współrzędne, dla których układ równań staje się rozsprzęgnięty nazywamy współrzędnymi normalnymi tego układu drgającego

Współrzędne (2.3) są oczywiście współzrędnymi uogólnionymi; zwykle współrzędne normalne układu drgającego są współzrędnymi uogólnionymi. Wróćmy do naszego układu.

Mogę od razu napisać rozwiązania równań (2.4)

$$\Lambda_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \quad 2.5a$$

$$\Lambda_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \quad 2.5b$$

Korzystając z (3.3) mamy

$$x_a + x_b = A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \quad 2.6a$$

$$x_a - x_b = A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \quad 2.6b$$

Przy czym

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad 2.7a$$

$$\omega_2^2 = \frac{3k}{m} \quad 2.7b$$

Dodając lub odejmując rozwiązania (2.6) dostaniemy wyrażenia na x_a i x_b .

$$x_a = \frac{1}{2} [A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)] \quad 2.8a$$

$$x_b = \frac{1}{2} [A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)] \quad 2.8b$$

Prawda, że nie bolało? Ogólne rozwiązanie układu równań ruchu (2.2) jest sumą dwóch niezależnych drgań harmoniczných znalezionych przez nas dla zmiennych $A_1=x_a+x_b$ oraz $A_2=x_a-x_b$. Podsumuję dotychczasową drogę. Zaczęliśmy od sformułowania układu równań ruchu (2.2). Okazało się, że ruch ciężarków nie jest niezależny, czego należało się spodziewać, a co utrudnia rozwiązanie równań ruchu. Na szczęście udało się znaleźć nowe zmienne (2.3) (współrzędne uogólnione (§TV 4.2)), dla których układ równań (2.2) przechodzi w układ dwóch niezależnych równań (2.4). Jakby tego szczęścia było mało oba równania (2.4) są równaniami ruchu harmonicznego, więc łatwo jest nam napisać ich rozwiązanie.

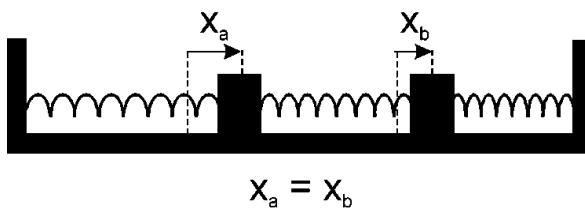
Potem już tylko powrót do starych zmiennych drobne przekształcenie równań i mamy rozwiązanie układu równań (2.2) w postaci (2.8). Kiedy mamy rozwiązanie równań ruchu to wypada je przeanalizować.

Zajmę się przypadkami szczególnymi. Jeżeli $x_a = x_b$, to z równań (2.6) mamy

$$x_a = x_b = \frac{1}{2} A_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) \quad 2.9$$

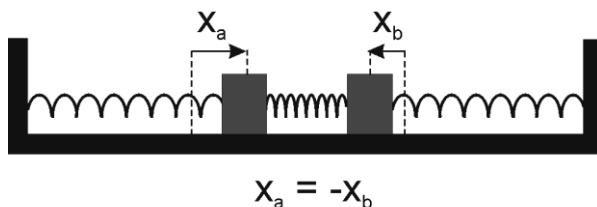
i cały układ wykonuje pojedyncze proste drganie harmoniczne z częstością i przesunięciem fazowym jakie otrzymaliśmy w rozwiązaniu (2.5a) dla zmiennej $A_1 = x_a + x_b$. Przypadek ten odpowiada przesunięciu ciężarków o tą samą wartość w tą samą stronę (rys. 2.2), w efekcie oba ciężarki drgają tak samo, ale niezależnie, bo środkowa sprężyna nie jest ani naciągnięta ani ściśnięta, a to środkowa sprężyna przenosi oddziaływanie między ciężarkami. Jeżeli przyjmiemy, że $x_a = -x_b$, to

$$-x_a = -x_b = \frac{1}{2} A_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) \quad 2.10$$



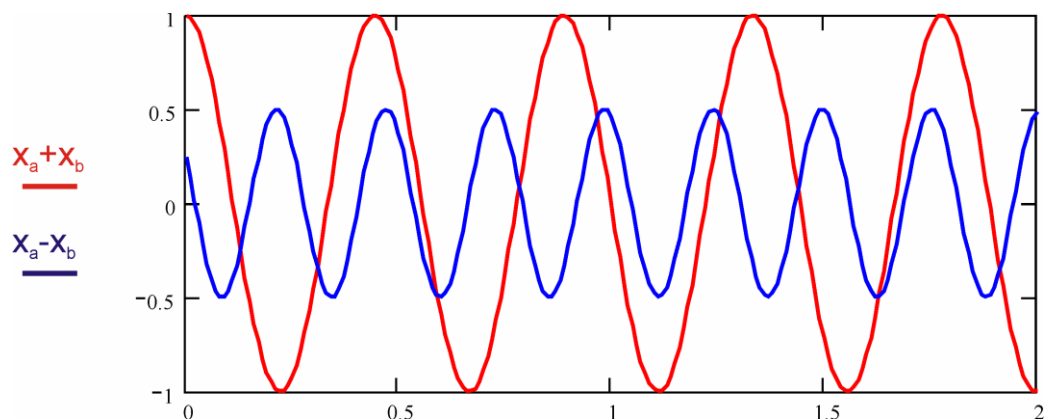
Rysunek 2.2. Gdy wychylenia obu mas z rysunku (2.1) są takie same mamy szczególny przypadek ruchu układu dwóch mas, odpowiadający rozwiązaniu opisanemu wzorem (2.5a).

Środkowa sprężyna będzie rozciągnięta (ściśnięta) jednakowo z obu stron (rys. 2.3). Na oba ciężarki w każdym momencie będzie działał układ tych samych sił wymuszających drgania. Oba więc będą oscylowały tak samo. Każdy z ciężarków wykonuje pojedyncze proste drganie harmoniczne odpowiadające częstością i przesunięciem fazowym rozwiązaniu (2.5b) dla zmiennej $A_2 = x_a - x_b$.



Rysunek 2.3. Gdy wychylenia obu mas są takie same co do wartości ale przeciwnie skierowane mamy drugi szczególny przypadek ruchu układu tych mas, odpowiadający rozwiązaniu opisanemu wzorem (2.5b).

Ze wzorów (2.7) wynika, że częstość ω_2 drgań w drugim przypadku jest trzy razy większa niż częstość drgań ω_1 w pierwszym przypadku. Musi to oznaczać, że zmienne $A_2 = x_a - x_b$ osiąga swoje maksimum (minimum) trzy razy częściej niż zmienna $A_1 = x_a + x_b$. Rysunek (2.4). ilustruje przebieg obu drgań



Rysunek 2.4. Przebieg drgań opisanych wzorami (2.6), dla zmiennych Λ_1 i Λ_2 .

W tych dwóch szczególnych przypadkach, oba ciężarki wykonują proste drganie harmoniczne, choć są sprzężone. W pierwszym przypadku sprzężenie zostało praktycznie wyłączone (środkowa sprężyna jest ciągle swobodna), a w drugim przypadku siły działają symetrycznie, tak, że siły działające na oba ciężarki są tak samo liniowo zależne od ich wychylenia. Przyjmijmy teraz nowe warunki początkowe. Niech w chwili początkowej $t=0$ pierwszy ciężarek jest w położeniu $x_a=0$, oraz $A_1=A_2=A$. Wtedy z (2.8a) mamy

$$0 = \cos(\delta_1) + \cos(\delta_2) \Rightarrow \delta_1 = \delta_2 + \pi \quad 2.11$$

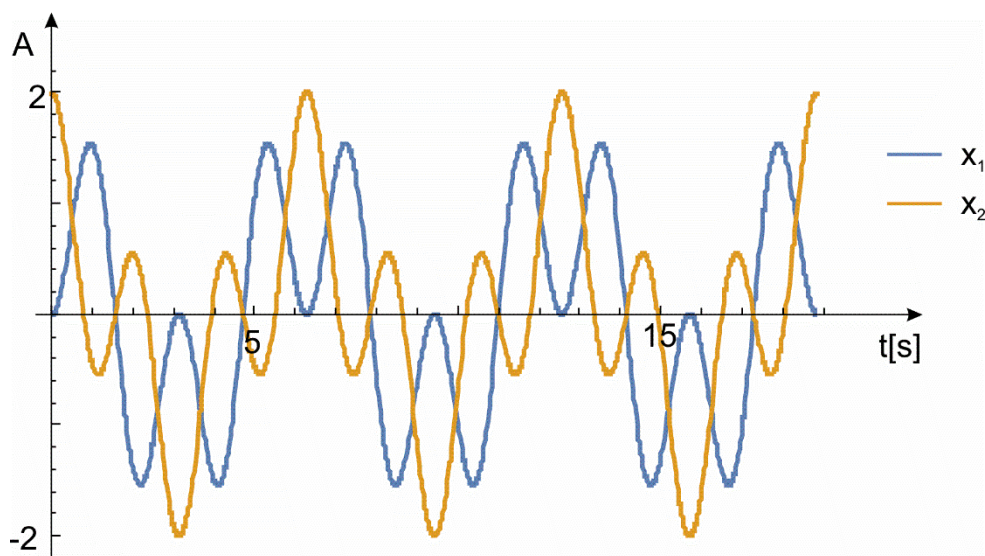
Przyjmę, że $\delta_1=0$, co na mocy (2.11) oznacza, że $\delta_2=\pi$. Warunek ten determinuje położenie początkowe drugiego ciężarka. Rysunek (2.5) pokazuje przebieg drgań obu ciężarków przy tych warunkach początkowych. Widać, że ciężarki nie wykonują już drgań harmonicznymi prostymi. Uzyskane przez nas rozwiązania (2.8) równania ruchu pokazują, że ogólną postać rozwiązania równania ruchu dla dwóch sprzężonych oscylatorów harmonicznymi uzyskujemy przez sumę rozwiązań opisujących ruch w dwóch przeanalizowanych wyżej szczególnych przypadkach. Te szczególne rozwiązania uzyskujemy albo poprzez wybór współrzędnych normalnych (w naszym przykładzie były to współrzędne (x_a+x_b) i (x_a-x_b)), albo poprzez wybór odpowiednich warunków początkowych jakie nakładamy na drgania (w naszym przykładzie $(x_a=x_b)$, lub $(x_a=-x_b)$). Jest to własność ogólna układów drgających. To znaczy dla układu drgających, sprzężonych mas, można znaleźć współrzędne normalne, które po zsumowaniu dadzą nam bardziej złożony ruch tych mas. Zwykle jednak znalezienie odpowiednich współrzędnych lub warunków, przy których pojawiają się proste drgania harmoniczne nie jest tak prostą rzeczą jak w naszym przykładzie. Drgania harmoniczne proste, na które możemy rozłożyć ogólny ruch złożonego układu drgającego nazywamy drganiami własnymi.

Definicja 2.1: Drgania własne

Zbiór drgań harmonicznych prostych, których suma odtwarza ruch drgający danego układu fizycznego nazywamy drganiami własnymi tego układu

Definicja 2.2: Częstość własna

Częstości własne danego układu drgającego są to częstości jego drgań własnych



Rysunek 2.5. Przebieg drgań ciężarków przy warunkach początkowych: $x_a=0$ dla $t=0$, $A_1=A_2=A$, oraz $\delta_1=0$ oraz $\delta_1=\pi$. Częstości drgań własnych wynoszą $\omega_1=1\text{rad/s}$, $\omega_2=3\text{rad/s}$ (2.7). Zauważ, że gdy jeden z ciężarków osiąga maksymalne wychylenie w stronę dodatnich wartości, drugi jest bliski maksymalnego wychylenia w stronę ujemnych wartości.

Skoro poradziłam sobie z dwoma ciężarkami to może damy rady z większą ich ilością?

2.0.1 Układ N- ciężarków ♣

Przedstawię schemat odnajdywania częstości własnych i drgań normalnych układu dwóch ciężarków w ogólny sposób, to jest taki, który będzie można uogólnić na układ N-ciężarków. Układ równań (2.1) można zapisać w postaci

$$m \frac{d^2 x_a}{dt^2} = -2kx_a + kx_b \quad 2.11a$$

$$m \frac{d^2 x_b}{dt^2} = -2kx_b + kx_a \quad 2.11b$$

Jest to przykład dwóch liniowych, jednorodnych równań różniczkowych drugiego rzędu (§DF 2.1), zapisywanych ogólnie tak

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \quad 2.12a$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 \quad 2.12b$$

Przy tak ogólnym zapisie możemy przyjąć, że sprężyny mają różne współczynniki sprężystości k_1, k_2 . Wpłynie to tylko na zmianę wartości współczynników a_{ii} , postać układu równań pozostanie niezmienną. Niech układ ciężarków wykonuje drganie harmoniczne (drganie własne) o częstości ω , opisane ogólnymi wyrażeniami

$$x_1 = A \cos(\omega t + \varphi) \quad 2.13a$$

$$x_2 = A \cos(\omega t + \varphi) \quad 2.13b$$

Równanie ruchu dla drgań harmonicznym można zapisać w postaci

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\omega^2 x_1 \quad 2.14a$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\omega^2 x_2 \quad 2.14b$$

Nie pokazaliśmy, że dla różnych wartości stałej sprężystości k_1, k_2 układ daje się opisać poprzez drgania własne. Ale możemy zaryzykować stwierdzenie, że tak jest. Zgadujemy możliwe rozwiązanie postaci (2.13). Jeżeli to nie jest prawda to dojdziemy do sprzeczności. Jeżeli jest to tanim kosztem uzyskamy rozwiązanie. Zatem sprawdzamy: wstawiając do (2.14) rozwiązania (2.13) mamy

$$(a_{11} - \omega^2)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \quad 2.15a$$

$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \omega^2)x_2 = 0 \quad 2.15b$$

W ten sposób układ równań różniczkowych został przetransformowany do układu równań liniowych jednorodnych. Istnienie niezerowych rozwiązań układu równań liniowych wymaga by wyznacznik układu był równy zero (§DE 4.3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = (a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}a_{21} = 0 \quad 2.16$$

Równanie (2.16) jest równaniem kwadratowym ze względu na ω^2 . Rozwiązując go otrzymamy dwa rozwiązania (wskazywane dalej przez indeks i), które odpowiadają dwóm postaciom drgań własnych. Widać zatem, że jeżeli tylko równanie kwadratowe (2.16) ma rozwiązanie, to rozwiązanie (2.13) ma sens. Z równań (2.13) mamy

$$\frac{x_{2,i}}{x_{1,i}} = \frac{A_{2,i}}{A_{1,i}} \quad 2.17$$

Równanie (2.17) pozwala na wyznaczenie stosunków amplitud dla i -tej postaci drgań. Ogólne rozwiązanie możemy zatem zapisać w postaci

$$x_1(t) = A_{1,1}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{1,2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad 2.18a$$

$$x_2(t) = \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_{2,2}}{A_{1,2}}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad 2.18b$$

Przy N - ciężarkach będziemy mieli układ N -równań typu (2.12)

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -a_{11}x_1 - \dots - a_{1N}x_N \\ \vdots \\ m \frac{d^2 x_N}{dt^2} = -a_{N1}x_1 - \dots - a_{NN}x_N \end{cases} \quad 2.19$$

Ich rozwiązanie będzie polegało na rozwiązaniu równania N -tego stopnia ze względu na ω . Równanie to otrzymamy obliczając wyznacznik układu (2.19) i przyrównując go do zera

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} - \omega^2 & \dots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} - \omega^2 \end{bmatrix} = 0 \quad 2.20$$

Niestety, dla stopnia wyższego niż cztery nie ma ogólnych wzorów na rozwiązanie równań wielomianowych. Często trzeba odwoływać się do metod numerycznych.

Otrzymaliśmy bardzo sympatyczny wynik. Złożony układ równań ruchu (2.19) dla drgających mas w liczbie N połączonych $N+1$ sprężynami, rozwiązujemy metodami czysto algebraicznymi, poprzez znalezienie rozwiązania algebraicznego równania (2.20). W ten sposób możemy rozwiązać każdy złożony układ drgający, dla którego układ równań da się zapisać w postaci (2.19). Do sprawy powrócę w temacie (TXXI)

2.1. Dudnienia ♦

Powiedzmy, że na jakiś układ działają dwie niezależne siły wymuszające drgania harmoniczne z niewiele różniącymi się częstościami i równymi amplitudami, wzdłuż tego samego kierunku. Nieważne w tej chwili jak taki układ zbudować, przykłady pojawią się później. Składowe drgania dane są wzorami

$$x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \delta_1) \text{ oraz } x_2(t) = A\cos(\omega_1 t + \delta_1) \quad 2.1.1$$

Złożenie tych drgań opisane jest równaniem

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\cos(\omega_1 t + \delta_1) + A\cos(\omega_1 t + \delta_1) \quad 2.1.2$$

Sumę cosinusów można przekształcić do postaci iloczynu

$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{(\omega_1 - \omega_2)t + \delta_1 - \delta_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2)t + \delta_1 + \delta_2}{2}\right) \quad 2.1.3$$

Wprowadzę nowe zmienne

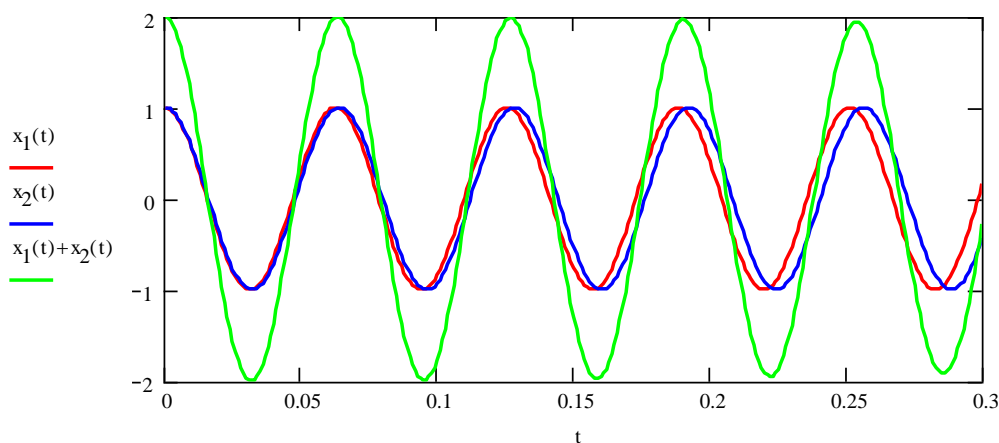
$$\omega_{sr} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2); \quad \omega_{mod} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad 2.1.4$$

ω_{sr} nazywamy częstotnością średnią, a ω_{mod} nazywamy częstotnością modulacji. Teraz mogę zapisać

$$x(t) = 2A \cos\left(\omega_{mod}t + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}\right) \cos\left(\omega_{sr}t + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}\right) \quad 2.1.5$$

Prawa strona tego równania zawiera dwa składniki. Wartość wyrazu zawierający ω_{sr} oscyluje szybko w porównaniu z oscylacjami wyrazu zawierającego częstotność ω_{mod} (przypominam, że ω_1 było prawie równe ω_2). Przeanalizujemy skutek przemnożenia tych dwóch czynników.

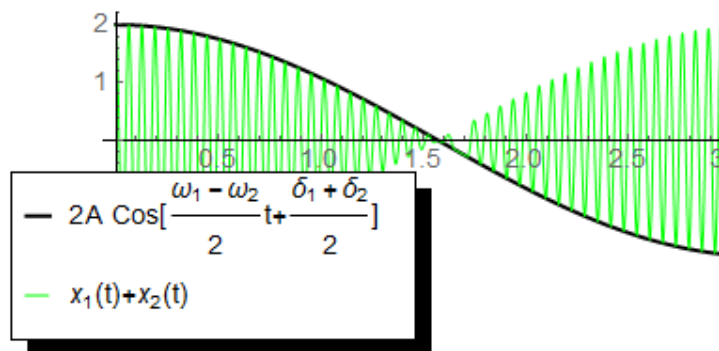
Na rysunku (2.1.1) wykres czerwony przedstawia przebieg składnika o wyższej częstotności ω_1 , a wykres niebieski przebieg składnika o nieco mniejszej częstotności ω_2 . Przebieg zielony przedstawia sumę obu przebiegów. Suma wydaje się mieć częstotność pośrednią pomiędzy przebiegiem wolnym i szybkim.



Rysunek 2.1.1. Przebieg drgań składowych i ich sumy. Przyjęto następujące parametry: $\omega_1=100\text{rad/s}$; $\omega_2=98\text{rad/s}$; $A=1\text{m}$; $\delta_1=\delta_2=0$

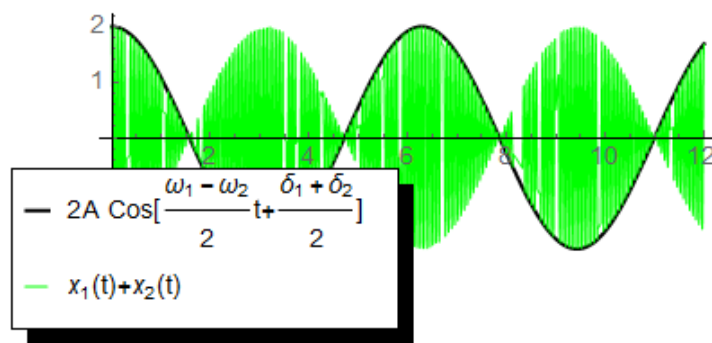
Rysunek (2.1.2) pokazuje sumę przebiegu x_1+x_2 , z rysunku (2.1.1), w 10-krotnie większym przedziale czasu. Widać wyraźnie, że przebieg wypadkowy powoli, w porównaniu z częstotnością ω_{sr} , zmienia swoją amplitudę. Częstotność tej zmiany jest równa ω_{mod} i w podanym przykładzie jest prawie 50-razy mniejsza od częstotności ω_{sr} . Z tego powodu na rysunku (2.1.1) spadek amplitudy jest praktycznie niewidoczny. Czarna linia na rysunku (2.1.2) przedstawia przebieg funkcji cosinus zależnej od częstotności modulacji ω_{mod} . Ponieważ wartości funkcji

cosinus leży w przedziale $[-1, 1]$, wolniejsza z funkcji cosinus we wzorze (2.1.5) działa jak ograniczenie wartości amplitudy drgań opisanych „szybką” funkcją cosinus. Mówimy, że funkcja cosinus z częstotliwością ω_{mod} jest obwiednią drgań wypadkowych.



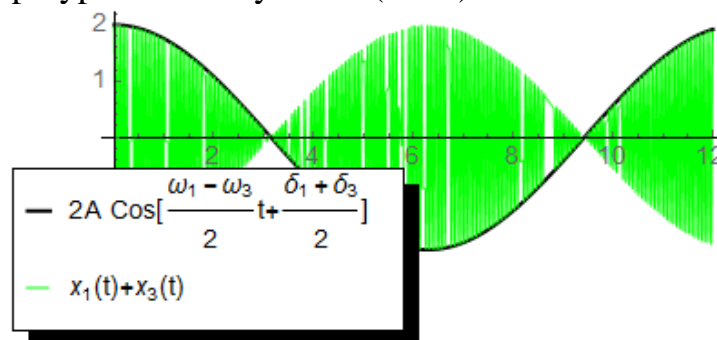
Rysunek 2.1.2. Przebieg drgań wypadkowych oraz ich obwiedni, dla przypadku przedstawionego na rysunku (2.1.1), dla czasu z przedziału od 0 do 3 sekund.

Rysunki (2.1.3) przedstawia ten sam przypadek dla jeszcze dłuższego przedziału czasu.



Rysunek 2.1.3. Przebieg drgań wypadkowych oraz ich obwiedni dla czasu z przedziału od 0 do 12 sekund, pozostałe parametry jak na rysunku (2.1.1). Rozdzielczość rysunku jest za niska aby oddać przebieg pojedynczych drgań.

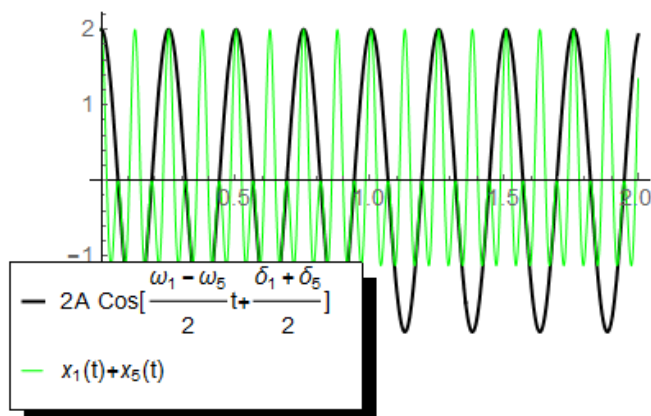
Rysunek (2.1.4) pokazuje przypadek dla dwa razy mniejszej częstotliwości modulacji w porównaniu z przypadkiem z rysunku (2.1.3)



Rysunek 2.1.4. Przebieg drgań wypadkowych oraz ich obwiedni dla czasu z przedziału od 0 do 12 sekund. Częstość modulacji jest teraz dwa razy mniejsza niż w poprzednim przykładzie – wartości parametrów drgań składowych wynoszą: $\omega_1=100\text{rad/s}$; $\omega_3=99\text{rad/s}$; $A=1\text{m}$; $\delta_1=\delta_2=0$. Widać, że okres zmian

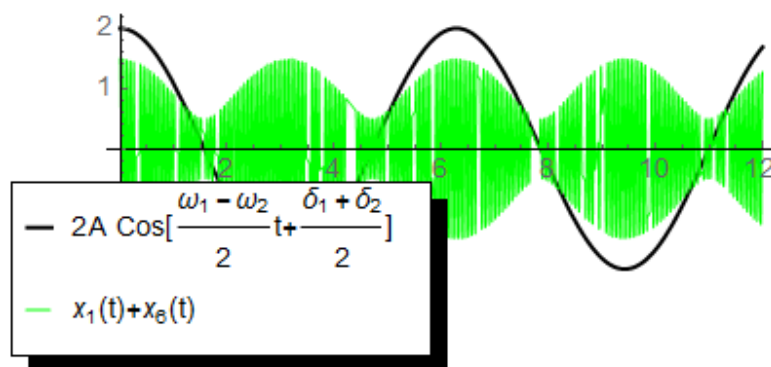
obwiedni drgań wzrósł dwukrotnie. Rozdzielczość rysunku jest za małą aby oddać przebieg pojedynczych drgań.

A co jeżeli częstość ω_1 jest wyraźnie większa od ω_2 ? Nic strasznego się nie dzieje. Dalej złożenie drgań opisane jest wzorem (2.1.5). Tyle, że obraz drgań nie jest już tak prosty w interpretacji, ze względu na dużą wartość częstości modulacji. Rysunek (2.1.5) pokazuje przykład takiego przebiegu.



Rysunek 2.1.5. Przebieg drgań wypadkowych dla wartości parametrów drgań składowych wynoszą: $\omega_1=100\text{rad/s}$; $\omega_5=50\text{rad/s}$; $A=1\text{m}$; $\delta_1=\delta_2=0$. Częstość modulacji jest dwadzieścia pięć razy większa niż z rysunku (2.1.1) i (2.1.2). Widać wyraźną zmianę charakteru drgań wypadkowych. Składnik z częstości ω_{mod} (czarna linia) nie stanowi obwiedni przebiegu tych drgań.

Pozostało jeszcze rozważyć przykład nierównych amplitud drgań składowych. Sumowanie jest w takim przypadku trudniejsze, ale to nie znaczy, że nie można obliczyć odnośnej sumy. Uzyskane wyniki są podobne w swym charakterze do przypadku sumowania drgań o takich samych amplitudach. Przykład pokazuje rysunek (2.1.6).



Rysunek 2.1.6. Przebieg drgań wypadkowych o parametrach takich jak w przykładzie z rysunku (2.1.2), z tym że amplituda drugiej składowej jest dwa razy mniejsza niż pierwszej $A_1=1\text{m}$; $A_2=0.5\text{m}$ (zielony wykres). Czarny wykres pokazuje obwiednię amplitudy, taką jak dla wykresu (2.1.2). Widać, że amplituda drgań oscyluje z częstością modulacji. Jednak w przeciwieństwie do przypadku równych amplitud, obwiednia amplitudy drgań nie spada do zera, ani nie dochodzi do wartości maksymalnej wyznaczonych przez obwiednię.

Dudnienia mogą sprawiać kłopoty. Współczesne przepełnione głośnikami i mikrofonami sale koncertowe mogą doprowadzić powstania warunków, przy których w sprzęcie nagłaśniającym pojawi się dudniący dźwięk (odbierany przez nas jako nieprzyjemny pisk). Oczywiście nie każdy pisk wydobywający się z nagłośnienia spowodowany jest dudnieniami. Dudnienia mogą być również pożyteczne. Używane są na przykład przy strojeniu instrumentów. Przy dwóch bliskich dźwiękach (ale nie takich samych) ucho będzie słyszało dudnienia. Dla ucha ludzkiego dudnienia (czyli narastający i zanikający dźwięk o częstotliwość zanikania wyraźnie niższej od częstotliwość dźwięku) zaczynają być słyszalne przy różnicy częstotliwości około 18Hz, przy dźwięku o częstotliwościach rzędu 1000Hz. Najwyraźniej słyszymy dudnienia przy różnicy częstotliwości około 8Hz. Porównując dźwięk stroika z dźwiękiem struny stroiciel przestraja dźwięk struny do momentu zaniknięcia dudnień. Innym ważnym przykładem wykorzystania zjawiska dudnień jest technika nazywana heterodyną. Heterodyny używa się w odbiornikach radiowych i telewizyjnych. Po stronie nadajnika, w wyniku mieszania sygnałów o różnych częstotliwościach (odbieranego i z heterodyny), uzyskuje się sygnał o częstotliwości równej sumie częstotliwości składowych modulowany obwiednią, której przebieg ma częstotliwość modulacji. W odbiorniku jeden z tych sygnałów jest wydzielany i dalej przetwarzany.

2.2. Składanie drgań harmoniczných w dwóch wymiarach ♦

Do tej pory składaliśmy drgania w jednym wymiarze. Możemy również składać drgania zachodzące wzdłuż różnych osi układu współrzędnych. Najprostszym, ale z praktycznego punktu widzenia bardzo ważnym przykładem są składania dwóch drgań harmoniczných zachodzących wzdłuż dwóch osi wzajemnie prostopadłych. Na takim przypadku opiera się matematyczny opis polaryzacji światła (§TXIII). Ogólnie drgania takie możemy opisać wzorami

$$x(t) = A_{0x} \cos(\omega_x t + \delta_x) \quad 2.2.1a$$

$$y(t) = A_{0y} \cos(\omega_y t + \delta_y) \quad 2.2.1b$$

Od strony geometrycznej równania te są opisem parametrycznym pewnej krzywej. W celu wyznaczenia toru punktu poruszającego się zgodnie ze wzorami (2.2.1) wykorzystam swobodę wyboru chwili początkowej czasu. Niech chwila $t=0$ będzie wybrana w momencie kiedy punkt na osi x osiąga maksymalne wychylenie. Wtedy cosinus musi być równy jeden i $\delta_x=0$. Oczywiście nie możemy założyć, że również $\delta_y=0$, ale możemy przyjąć, że

$$\delta_y \rightarrow \Delta = \delta_y - \delta_x \quad 2.3.2$$

W ten sposób mamy

$$x(t) = A_{0x} \cos(\omega_x t) \quad 2.3.2a$$

$$y(t) = A_{0y} \cos(\omega_y t + \Delta) \quad 2.3.2b$$

Dokonując kolejnej transformacji $\Delta \rightarrow \Delta' + \pi/2$ otrzymamy układ

$$x(t) = A_{0x} \cos(\omega_x t) \quad 2.3.3a$$

$$y(t) = A_{0y} \sin(\omega_y t + \Delta') \quad 2.3.3b$$

Co przy $\omega_x = \omega_y$, $\Delta' = 0$ i $A_{0x} = A_{0y}$ daje parametryczne równanie okręgu. Dalej rozważać będę przypadek drgań o równych częstościach i posługiwać się układem równań (2.3.2)

$$\omega_x = \omega_y \quad 2.3.4$$

Gdy $A_{0x} \neq A_{0y}$ otrzymujemy równanie parametryczne elipsy. Gdy $\Delta = 0$, to otrzymamy równanie prostej o kącie nachylenia α

$$\tan(\alpha) = \frac{A_{0y}}{A_{0x}} \quad 2.3.5$$

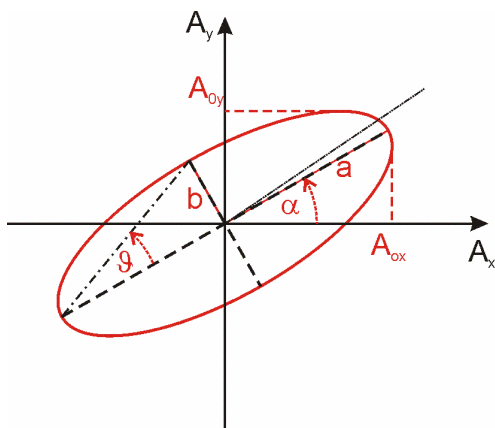
Gdy $\Delta = \pi$, to kąt nachylenia prostej jest równy

$$\tan(\alpha) = -\frac{A_{0y}}{A_{0x}} \quad 2.3.6$$

W ogólnym przypadku złożenie dwóch drgań harmonicznym wzdłuż osi x i y , o tej samej częstości daje ruch po elipsie, w szczególnym przypadkach po prostej lub okręgu. Wszystkie te przypadki zbiera tabela (2.2.1), a oznaczenia z tabeli objaśnia rysunek (2.2.1).

α	B/A	θ	Δ	POLARYZACJA
0°	0	0°	nieokreślone	—
90°	0	0°	nieokreślone	
45°	0	0°	0°	/
-45°	0	0°	180°	\
nieokreślony	1	45°	90°	○
nieokreślony	1	-45°	-90°	○
0°	1/2	$26,6^\circ$	0°	⬭
-30°	1/3	$18,4^\circ$??	⬭

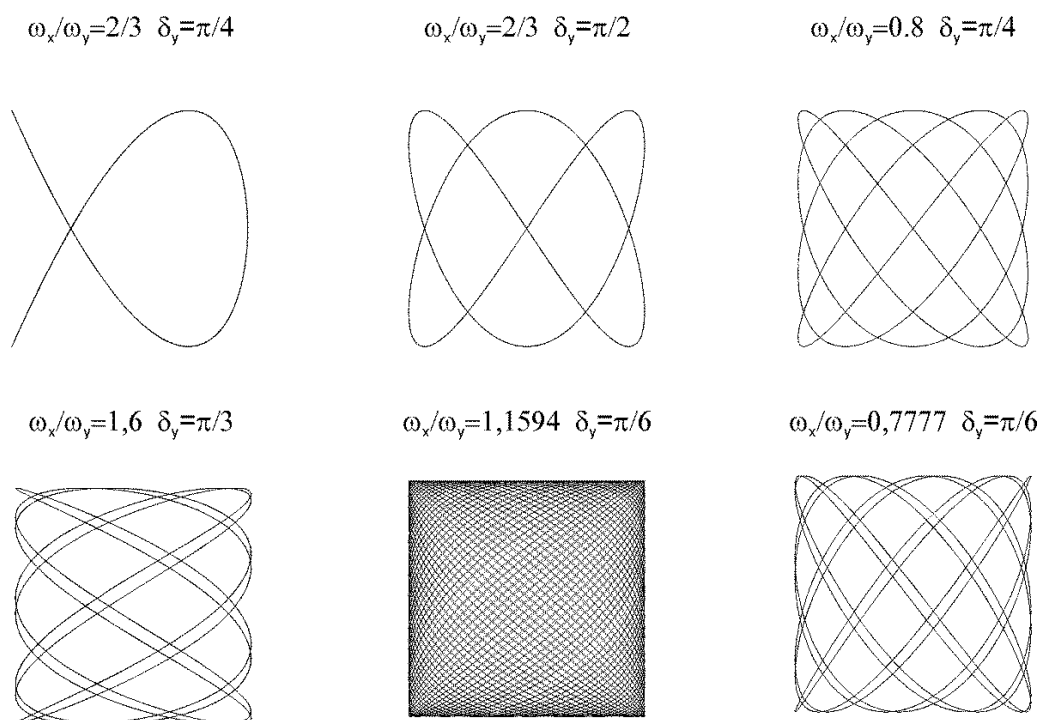
Tabela 2.2.1. Wybrane przypadki składania dwóch drgań harmoniczych



Rysunek 2.2.1 Złożenie drgań harmoniczych o tej samej częstotliwości przebiegających wzdłuż osi x i y daje w ogólnym przypadku, jako tor wypadkowy, elipsę. W zależności od wartości przesunięcia fazowego δ , punkt przebiega tą elipsę lewo lub prawoskrętnie. Kąt α określa nachylenie dużej osi elipsy, a kąt θ spłaszczenie elipsy

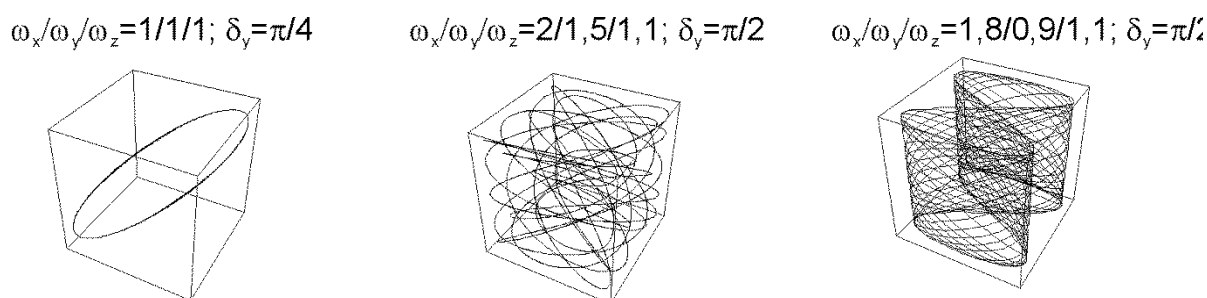
Niech teraz oba drgania harmoniczne mają różne częstotliwości. Wypadkowy tor punktu komplikuje się w przyjemny dla oka sposób – punkt drgający kreśli linie nazywane krzywymi Lissajous. Gdy stosunek częstotliwości drgań ω_x/ω_y jest liczbą wymierną, krzywe są zamknięte. W przeciwnym razie krzywa kreślona przez złożenie dwóch ruchów harmoniczych nigdy się nie domyka. Dla

przykładu dla $\omega_x/\omega_y=2$ i $\delta_y=\pi/2$ punkt porusza się po paraboli. Przykłady krzywych Lissajous dla innych wartości parametrów pokazuje rysunek (2.2.2).



Rysunek 2.2.2. Wypadkowe tory dla punktu poruszającego się w wyniku złożenia dwóch ruchów harmonicznycch o różnych częstościach przebiegających wzdłuż osi x i wzdłuż osi y . Tory wykreślone są dla różnych wartości stosunku częstości ω_x / ω_y i parametru δ_y . Uwaga: choć pierwszy tor zdaje się być otwarty, to tak nie jest. Punkt drgający biega tam i z powrotem, od jednego końca do drugiego końca krzywej.

Drgania harmoniczne składać możemy również w trzech wymiarach, a formalnie rzecz biorąc w dowolnej liczbie wymiarów. Rysunek (2.2.3) pokazuje przykład składania drgań harmonicznycch w trzech wymiarach



Rysunek 2.2.3. Przykłady krzywych Lissajous w trzech wymiarach

3. Fazory ♦

To co teraz zrobię może się wydać niepotrzebną ekstrawagancją. To nie jest jednak ekstrawagancja. Jak się przekonacie przedstawiona tu metoda opisu drgań harmoniczných jest wysoce użyteczna. **Fazory** nie wprowadzają żadnej nowej fizyki. Są tylko technicznym środkiem do ilustrowania i szybkiego obliczania zagadnień związanych z drganiami. I to też jest bardzo cenne.

Niech po kole o promieniu A porusza się punkt. Ruch tego punktu mogę opisać przez obrót wektora o długości A . Współrzędne tego wirującego wektora, a ściślej współrzędne, jego końca można wyznaczyć pisząc równanie parametryczne okręgu.

$$\begin{cases} x = D \cos(\omega t + \delta) = D[\cos(\omega t)\cos(\delta) - \sin(\omega t)\sin(\delta)] \\ y = D \sin(\omega t + \delta) = D[\sin(\omega t)\cos(\delta) + \cos(\omega t)\sin(\delta)] \end{cases} \quad 3.1$$

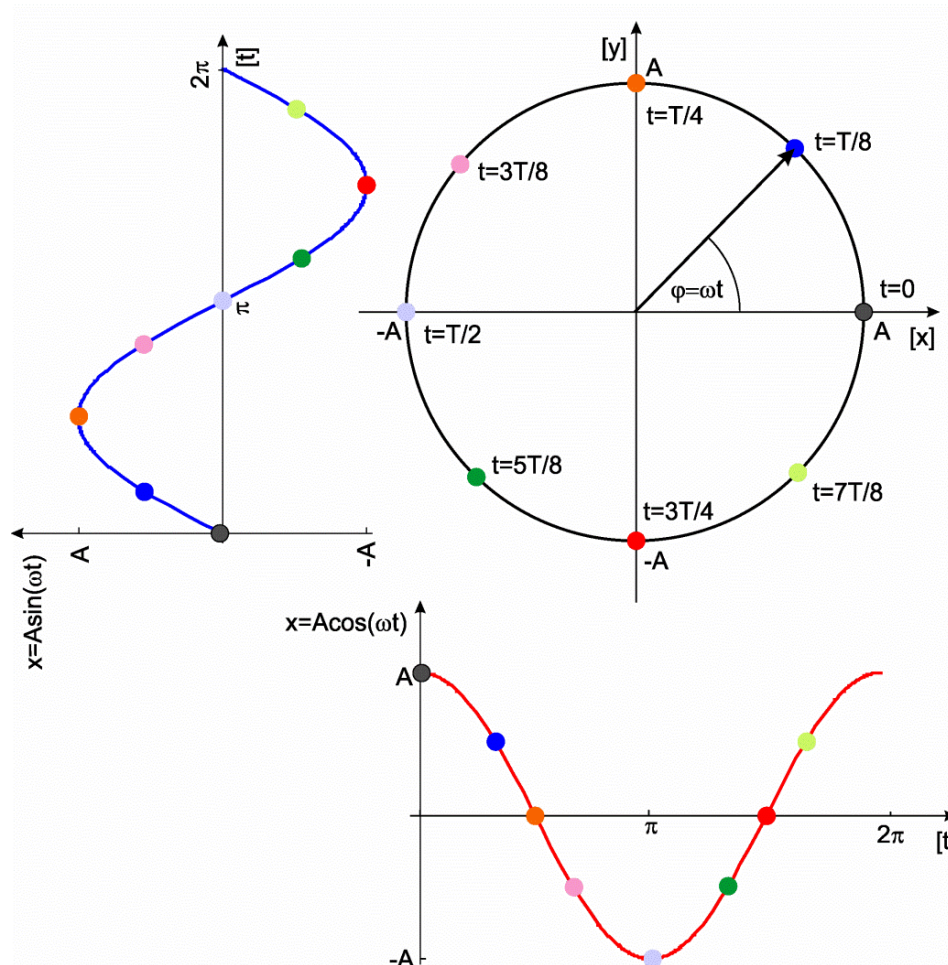
Układ równań (3.1) ilustruje znany fakt: rzut punktu poruszającego się ruchem jednostajnym po kole na oś x lub na oś y porusza się ruchem harmonicznym (rys. 3.1)

Wirujący wektor z rysunku (3.1) będę nazywał fazorem. Fazor nie jest pojęciem matematycznym (matematycznie to wektor) tylko fizycznym i jego cechy muszą mieć określone fizyczne znaczenie. Długość fazora jest równa amplitudzie drgań, a kąt fazora jest równy fazie drgań (rys. 3.2). Przyporządkowanie to ma sens, gdyż, jak widać z rysunku (3.2) i wzorów (3.1) między kątem obracającego się jednostajnie fazora, a fazą oscylatora harmonicznego mamy jednoznaczność. Fazory, czyli wirujące wektory o długości A i częstości obrotu ω , możemy zatem reprezentować przez zespolone wyrażenie (3.2).

Definicja 3.1: Fazor

Fazorem nazywamy obracający się wektor reprezentujący ruch harmoniczny. Fazorowi nadajemy następującą interpretację: częstość obrotu fazora odpowiada

częstości drgań, kąt fazora odpowiada fazie drgań; kąt ten będziemy również nazywać fazą fazora, długość fazora odpowiada amplitudzie drgań



Rysunek 3.1 Ruch po kole o promieniu A można reprezentować przez rzut ruchu po okręgu końca wektora o długości A . Ruch punktu wzdłuż osi x i y możemy opisać odpowiednio przez funkcję $A\cos(\omega t)$ i $A\sin(\omega t)$. Kolorowe punkty wykreślone są dla różnych czasów t i na wszystkich wykresach te same kolory oznaczają położenie punktu w tej samej chwili czasu.

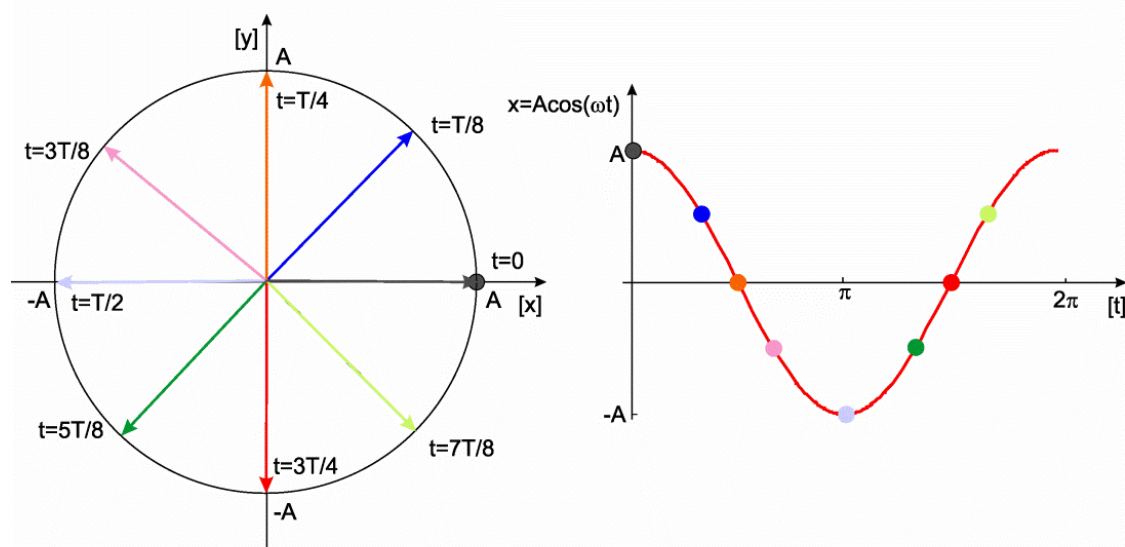
Powiedzmy, że mamy dwa fazory o tej samej długości (amplitudzie) wirujące z tą samą częstością ω . W chwili początkowej fazory te mają różne fazy początkowe, odpowiednio δ_1 i δ_2 (rys. 3.3). W dodatku DD na rysunku (DD 1.1.5) pokazałem, że wyrażenie typu $e^{i\omega t}$ reprezentuje punkt biegający po okręgu jednostkowym. Zatem fazory mogą również reprezentować w postaci zespolonej

$$\mathbf{v}_1 = |\mathbf{v}_1|e^{i(\omega t + \theta_1)} \quad 3.4a$$

$$\mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_2|e^{i(\omega t + \theta_2)} \quad 3.4b$$

W notacji zespolonej ich sumę mogę zapisać tak

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = e^{i\omega t} (|\mathbf{v}_1|e^{i\theta_1} + |\mathbf{v}_2|e^{i\theta_2})$$



Rysunek 3.2. Kąt fazora, liczony względem osi x , w ruchu po okręgu odpowiada kątomu fazowemu ωt punktu wykonującego ruch harmoniczny. Długości fazora nadajemy znaczenie amplitudy drgań A . Kolory fazorów odpowiadają kolorom punktów na cosinusoidzie.

W efekcie otrzymam nowy fazor (wirujący wektor), który obraca się z częstotliwością ω . Korzystając ze wzoru Eulera (DD 1.1.3) wyrażenie (3.5) mogę zapisać tak

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = e^{i\omega t} \left[\underbrace{(|\mathbf{v}_1|\cos(\theta_1) + |\mathbf{v}_2|\cos(\theta_2))}_a + i \underbrace{(|\mathbf{v}_1|\sin(\theta_1) + |\mathbf{v}_2|\sin(\theta_2))}_b \right] \quad 3.6$$

Zauważ, że czynnik $e^{i\omega t}$ we wzorze (3.6) mnoży liczbę zespoloną postaci $z=a+ib$, którą możemy zapisać w postaci wykładniczej

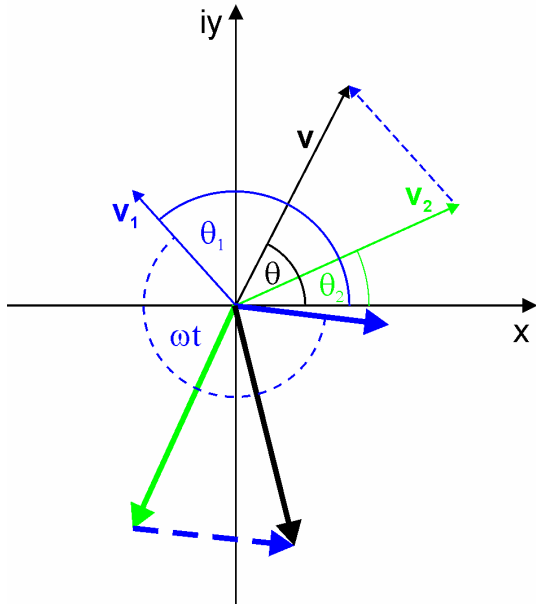
$$\mathbf{v} = e^{i\omega t} \underbrace{|\mathbf{v}|e^{i\theta}}_z \quad 3.7$$

Gdy w wyrażeniu (3.6) przyjmę $t=0$, to $e^{i\omega t} = 1$, wtedy łatwo mogę wyrazić moduł (długość) wypadkowego fazora

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(|\mathbf{v}_1|\cos(\theta_1) + |\mathbf{v}_2|\cos(\theta_2))^2 + (|\mathbf{v}_1|\sin(\theta_1) + |\mathbf{v}_2|\sin(\theta_2))^2} \quad 3.8a$$

Kąt fazowy fazona wypadkowego zmienia się w czasie, gdyż fazor kręci się z częstością ω . Możemy wyliczyć tangens tego kąta w chwili początkowej $t=0$. Podstawiając $t=0$ do wyrażenia (3.6) mamy

$$\tan(\theta) = \frac{|\mathbf{v}_1|\sin(\theta_1) + |\mathbf{v}_2|\sin(\theta_2)}{|\mathbf{v}_1|\cos(\theta_1) + |\mathbf{v}_2|\cos(\theta_2)} \quad 3.8b$$



Rysunek 3.3. Dwa fazy zielony \mathbf{v}_2 i niebieski \mathbf{v}_1 w chwili $t=0$ nachylone są pod kątem θ_1 i θ_2 do osi x -ów. Dodając je do siebie uzyskujemy fazor czarny \mathbf{v} . Przyjmujemy, że fazy: zielony i niebieski, kręcą się z prędkością kątową ω , tak, że po czasie t , ich kąt liczony do osi x -ów wzrośnie o ωt . Oznacza to, że również wypadkowy fazor zmieni swój kąt o ωt . Widać, że fazor wypadkowy będzie obracał się z tą samą prędkością kątową ω , przy czym jego kąt początkowy wynosi θ , wartość tego kąta można wyznaczyć ze wzoru (3.8b) Obrócone fazy narysowane są grubszą kreską.

Pozostaje mi jeszcze rozwinięcie we wzorze (3.6) wyrazu $e^{i\omega t}$ i uporządkowanie otrzymanego wyrażenia. Wyrażenie jest długie ale operacje niezbędne do jego uporządkowania są proste. W efekcie mam

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \cos(\omega t) [& (|\mathbf{v}_1|\cos(\theta_1) + |\mathbf{v}_2|\cos(\theta_2)) \\ & + i(|\mathbf{v}_1|\sin(\theta_1) + |\mathbf{v}_2|\sin(\theta_2))] \\ & + \sin(\omega t) [i(|\mathbf{v}_1|\cos(\theta_1) + |\mathbf{v}_2|\cos(\theta_2)) \\ & - (|\mathbf{v}_1|\sin(\theta_1) + |\mathbf{v}_2|\sin(\theta_2))] \end{aligned} \quad 3.9$$

Zanim usprawiedliwię się z sensu wykonanej wyżej pracy dodam dwa przebiegi harmoniczne o tej samej częstości zapisane w klasycznej postaci

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta_1) \quad 3.10a$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \theta_2) \quad 3.10b$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega t + \theta_2) \quad 3.10c$$

Ostatnie wyrażenie mogę zapisać w postaci

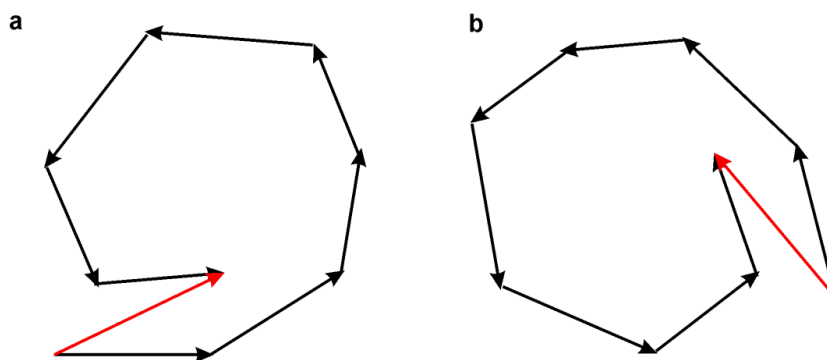
$$\begin{aligned} x(t) = \cos(\omega t) (& A_1 \cos(\theta_1) + A_2 \cos(\theta_2)) \\ & - \sin(\omega t) (A_1 \sin(\theta_1) + A_2 \sin(\theta_2)) \end{aligned} \quad 3.11$$

Zauważ, że część przy $\cos(\omega t)$ lub $\sin(\omega t)$ odpowiada części rzeczywistej, odpowiednio przy $\cos(\omega t)$ lub $\sin(\omega t)$ w wyrażeniu (3.9), pod warunkiem, że przyjmiemy, że amplitudy fazorów są tożsame z amplitudami drgań przedstawionych wzorami (3.10a) i (3.10b), to jest: $|\mathbf{v}_1|=A_1$ i $|\mathbf{v}_2|=A_2$. Jest to zarazem część rzeczywista fazora wypadkowego \mathbf{v} przedstawionego na rysunku (3.2) jako suma fazorów \mathbf{v}_1 i \mathbf{v}_2

$$x(t) = \text{Re}(\mathbf{v}) = \text{Re}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \quad 3.12$$

Z tego wnioskujemy, że sumując dwa fazory o tej samej częstotliwości ω otrzymujemy nowy fazor, o takiej samej częstotliwości ω . Część rzeczywista tego nowego fazora reprezentuje drganie harmoniczne, które otrzymujemy jako sumę drgań harmonicznnych reprezentowanych przez dwa dodane fazory. Część urojona ma podobną interpretację, tylko że drgania harmoniczne (3.10) musiałyby być wyrażone przez funkcje sinus, a nie cosinus.

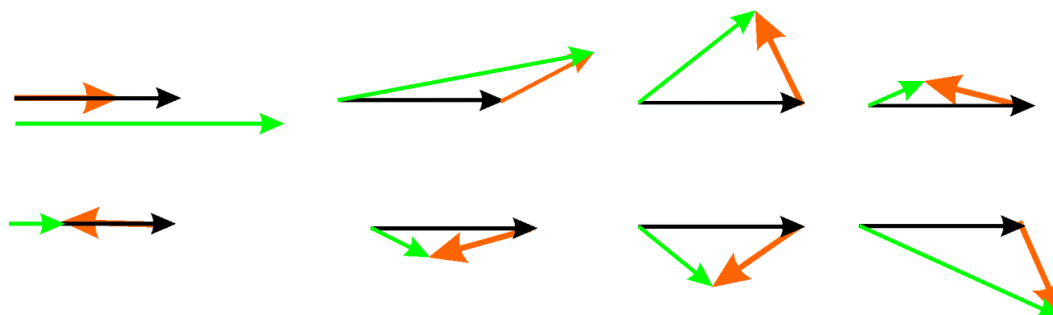
Reprezentacja fazorowa jest o tyle ciekawa, że pozwala na graficzne dodawanie drgań. Na rysunku (3.4) mamy wyznaczoną zarówno amplitudę drgania wypadkowego (długość czarnego fazora) jak i jego fazę początkową θ . Z graficznego dodawania fazorów (drgań) od razu widać, że suma N drgań harmonicznnych o częstotliwości ω , fazach początkowych $\theta_1, \dots, \theta_N$, oraz amplitudach A_1, \dots, A_N jest drganiem harmonicznym o częstotliwości ω oraz fazie i amplitudzie wyznaczonej przez sumę fazorów reprezentujących drgania składowe. Wynika to z tego, że dodawanie N wektorów (fazorów) daje wektor (fazor). Jeżeli wszystkie fazory obracają się z tą samą częstotnością, to i fazor wypadkowy obraca się z tą samą częstotnością (rys. 3.4). Spróbuj ten wniosek wyciągnąć dodając N drgań zapisanych w postaci (3.10).



Rysunek 3.4. a) suma ośmiu fazorów (czarne strzałki) wirujących z tą samą częstotnością, daje fazor (czerwona strzałka), który wiruje z tą samą częstotnością co fazory składowe; b) chwilę później fazory łącznie z wypadkowym są obrócone o ten sam kąt.

Zastosuję metodę fazorów do analizy zjawiska dudnień. Rysunek (3.5) przedstawia dwa fazory reprezentujące dwa nakładające się drgania o różnych częstotnościach. Siadamy na fazor reprezentujący drganie o mniejszej częstotści

i notujemy położenie drugiego fazora po każdym pełnym obrocie fazora, na którym siedzimy. Drugi fazor obraca się względem naszego z częstością większą o różnicę częstości między oboma drganiami, czyli z częstością większą o częstość modulacji (2.1.4) Szybszy fazor wyprzedza wolniejszy (na którym siedzimy).

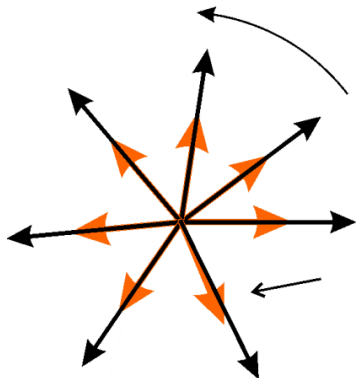


Rysunek 3.5. Czarna i pomarańczowa strzałka to dwa fazory reprezentujące dwa drgania harmoniczne. Zielona strzałka to fazor wypadkowy. Kolejne rysunki pokazują kilka wybranych etapów w ruchu fazora pomarańczowego względem fazora czarnego (na którym siedzimy). Różnica czasu pomiędzy kolejnymi okresami jest równa okresowi obrotu czarnego fazora. Częstości obrotu fazora pomarańczowego względem zielonego wynosi

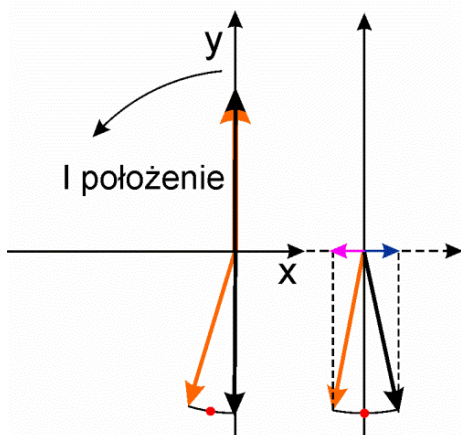
ω_{mod}

Widać, że zmiana kąta między fazorami skutkuje w zmianie długości fazora wypadkowego. Gdy fazory są ułożone antyrównolegle długość fazora wypadkowego jest najmniejsza, w szczególności, gdy długości fazorów są równe, fazor wypadkowy ma długość zerową. Zmiany długości fazora spowodowane różną częstością obu fazorów odpowiadają obwiedni dudnień (rys. 2.1.3 i 2.1.4). Zmiany długości fazora zilustrowane na rysunku (3.5) pokazują stan w ściśle określonych chwilach czasu to jest co obieg wolniejszego fazora. Co się dzieje pomiędzy tymi wybranymi chwilami? Załóżmy, że częstość modulacji jest tysiąc razy mniejsza od częstości drgań oscylatora wolniejszego. W czasie jednego okresu tych drgań możemy uznać, że względny kąt między fazorami jest prawie stały (rys. 3.6). Powiedzmy, że drgania reprezentujemy przez rzut fazora wypadkowego na oś x -ów (stosujemy funkcję Re przy zapisie zespolonym). Niech w chwili $t=0$ oba rzuty będą równe zero, czyli mamy moment, gdy amplitudy obu fal spadły jednocześnie do zera. W efekcie rzut fazora wypadkowego będzie również równy zero. Kiedy pojawi się następne zero sumy fazorów? Po czasie $T_1/2$ szybszy fazor obróci się o π i jego rzut na oś x -ów znów będzie równy zero. Wolniejszy fazor jednak nie zdąży obrócić się o π (rys. 3.7), w efekcie rzut fazora wypadkowego będzie różny od zera. Pytanie brzmi kiedy punkt środkowy między fazorami obróci się o π ? Jest oczywiste, że punkt środkowy (punkt na środku łuku łączącego końce obu fazorów) kręci się z prędkością ω_{sr} . Zatem zero długości fazora wypadkowego pojawi się po czasie $T_{sr}/2$, z czego wynika, że okres drgań

wypadkowych to T_{sr} , a częstość to ω_{sr} , co ustaliliśmy już wcześniej sumując algebraicznie oba drgania harmoniczne (wzory od 2.1.1 do 2.1.5).

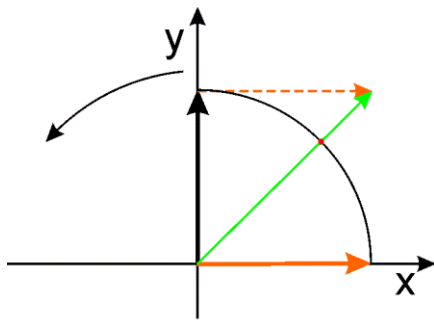


Rysunek 3.6. narastanie różnicy kąta między fazorami jest w czasie jednego okresu zanedbywalnie małe. Zgodnie z przyjętym założeniem ω_{mod} jest równa jednej tysięcznej częstości wolniejszego oscylatora. Oznacza to, że w czasie jednego obrotu obu fazorów ich względne kąty zmieniają się o jedną tysięczną pełnego obrotu. Zostało to zaakcentowane na rysunku przez nieznaczne opóźnienie obrotu fazora pomarańczowego w położeniu wskazanym strzałką.



Rysunek 3.7. W położeniu I fazy reprezentujące oba oscylatory harmoniczne leżą na osi y-ów. Ich rzuty na oś x-ów są równe zero. Amplituda drgań obu oscylatorów jest również równa zero. Po połowie okresu szybszego oscylatora, reprezentujący go fazor jest znów na osi y-ów, tyle że przeciwnie skierowany, a jego rzut na oś y-ów jest ponownie równy zero. Fazor reprezentujący oscylator wolniejszy nie zdąży „dobić” do osi y-ów i jego rzut na oś x-ów jest różny od zera. Suma rzutów obu fazorów jest różna od zera, skąd wynika, że wychylenie wypadkowe jest również różna od zera. Aby było równe zero, punkt zajmujący, na łuku łączącym oba fazy, położenie środkowe (czerwony punkt) musi dotrzeć do osi y-ów. Wtedy rzuty obu fazorów na oś x-ów są takie same co do długości ale przeciwnie skierowane i dodają się do zera. Punkt czerwony porusza się po okręgu z częstością ω_{sr} i tak jest częstość drgań wypadkowych.

Jeżeli częstość średnia jest dużo większa od częstości modulacji to w czasie T_{sr} efekty związane z różnicą częstości między oscylatorami są prawie niewidoczne (rys. 3.6). Ale po wielu okresach zaczynają odgrywać rolę. Na przykład po czasie $T_{mod}/4$ rysunek (3.7) będzie mniej więcej wyglądał tak (rys. 3.8)



Rysunek 3.8. W pewnej chwili fazor czarny leży na osi y -ów. Ponieważ jednak minął czas $T_{mod}/4$ od położenia I z rysunku (2.7) fazor pomarańczowy spóźnia się o ćwierć obrotu. Fazor wypadkowy narysowany jest na zielono. Punkt czerwony leżący na środku łuku łączącego oba fazory porusza się z częstością ω_{kr} . Z taką samą częstością będzie się obracał wypadkowy fazor zielony; przy równych długościach fazorów składowych, fazor wypadkowy zawsze będzie przechodził przez punkt środkowy na łuku rozpiętym na obu fazorach składowych

Względna zmiana kąta między fazorami w przedziale czasu T_{sr} będzie miała zanedbywalnie mały wpływ na fazor wypadkowy, ale po wielu przedziałach czasu T_{sr} drobne różnice nawarstwiają się i przykładowo gdy w czasie $t=0$ oba fazory są w fazie, to gdy minie czas $t_n=T_{mod}/2$, ułożenie fazorów będzie takie jak na rysunku (3.8). Jednak gdy zaczniemy obserwować układ fazorów w chwili t_n , to do czasu t_n+T_{sr} względną różnicę faz między fazorami znów będzie można uznać za prawie stałą. W efekcie oscylacje w pobliżu chwili t_n będą zachodziły z prawie stałą amplitudą. Widać z tego dlaczego dla zjawiska dudnień, warunek małej różnicy częstości drgań jest ważny. Przy dużej różnicy częstości nie możemy powiedzieć, że w czasie T_{sr} , zmiany różnicy faz między fazorami są zanedbywalnie małe, a efekty związane z opóźnianiem się jednego fazora względem drugiego mieszają się z efektami związanymi z oscylacjami amplitudy.

Wróć do pytania: dlaczego fazory są przydatnym narzędziem przy analizie drgań? Część odpowiedzi już mamy, fazory pozwalają ilustrować drgania z użyciem wektorów. Takie rysunki są, w niektórych zagadnieniach, bardziej użyteczne niż rysowanie sinusoid. Ale są również zalety rachunkowe. Dla przykładu policzę sumę dwóch drgań harmonicznym o tej samej częstości ale różnej amplitudzie. Drganie te dane są równaniami

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) \quad \text{oraz} \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta_2) \quad 2.3.13$$

Zrobię to na dwa sposoby: „normalnie” i korzystając z zapisu zespolonego.

Metoda standardowa

Metoda ta polega na dodaniu do siebie wyrażeń (2.3.13). Skorzystam na wzór na cosinus sumy kątów

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &= A_1 \cos(\omega t) \cos(\delta_1) - A_1 \sin(\omega t) \sin(\delta_1) \\ &\quad + A_2 \cos(\omega t) \cos(\delta_2) - A_2 \sin(\omega t) \sin(\delta_2) \end{aligned} \quad 2.3.14$$

Zbierając wyrażenia przy $\cos(\omega t)$ i $\sin(\omega t)$ mamy

$$\begin{aligned}
 x_1(t) + x_2(t) &= \cos(\omega t)(A_1 \cos(\delta_1) + A_2 \cos(\delta_2)) \\
 &\quad - \sin(\omega t)(A_1 \sin(\delta_1) + A_2 \sin(\delta_2))
 \end{aligned}
 \tag{2.3.15}$$

Wprowadzę nowe oznaczenia

$$C = A_1 \cos(\delta_1) + A_2 \cos(\delta_2) \tag{2.3.16a}$$

$$D = A_1 \sin(\delta_1) + A_2 \sin(\delta_2) \tag{2.3.16b}$$

Równanie (2.3.15) przyjmie postać

$$x_1(t) + x_2(t) = C \cos(\omega t) - D \sin(\omega t) \tag{2.3.17}$$

Niech teraz

$$C = B \cos(\theta) \tag{2.3.17a}$$

$$D = B \sin(\theta) \tag{2.3.17b}$$

Podstawienie (2.3.17) może wam się zdać zaskakujące. Ale, przynajmniej od strony formalnej nie ma w nim nic zdrożonego. Dowolną jedną liczbę mogę zawsze wyrazić przez iloczyn dwóch liczb, w tym wypadku B i jeszcze cosinus lub sinusa jakiegoś kąta. Pojawia się pytanie: czy dwie liczby, takie jak C i D mogę wyrazić przez inną liczbę B oraz sinusa i cosinusa jakiegoś kąta? Wzory (2.3.18) na transformację odwrotną pokazują, że jak najbardziej jest to możliwe

$$\tan(\theta) = \frac{D}{C} = \frac{A_1 \sin(\delta_1) + A_2 \sin(\delta_2)}{A_1 \cos(\delta_1) + A_2 \cos(\delta_2)} \tag{2.3.18a}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \sqrt{C^2 + D^2} \\
 &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta_1)\cos(\delta_2) + 2A_1A_2 \sin(\delta_1)\sin(\delta_2)}
 \end{aligned}
 \tag{2.3.18b}$$

Gdy mianownik wyrażenia (2.3.18a) jest równy zero, to całe wyrażenie jest równe nieskończoności, a kąt θ jest równy $\pi/2$. Dzięki podstawieniom (2.3.17) wyrażenie (2.3.16) możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
 x_1(t) + x_2(t) &= B [\cos(\theta)\cos(\omega t) - \sin(\theta)\sin(\omega t)] \\
 &= B \cos(\omega t + \theta)
 \end{aligned}
 \tag{2.3.19}$$

Po podstawieniu (2.3.18) mamy

$$\begin{aligned}
 x_1(t) + x_2(t) &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta_1)\cos(\delta_2) + 2A_1A_2 \sin(\delta_1)\sin(\delta_2)} \\
 &\quad \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{A_1 \sin(\delta_1) + A_2 \sin(\delta_2)}{A_1 \cos(\delta_1) + A_2 \cos(\delta_2)}\right)\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.3.20}$$

Zapis zespolony

W zapisie zespolonym obie fale mają postać

$$x_1(t) = A_1 e^{i(\omega t + \delta_1)} \quad \text{oraz} \quad x_2(t) = A_2 e^{i(\omega t + \delta_2)} \quad 2.3.21$$

Ich suma wyrazi się wzorem

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &= A_1 e^{i(\omega t + \delta_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \delta_2)} \\ &= e^{i\omega t} (A_1 e^{i\delta_1} + A_2 e^{i\delta_2}) \\ &= e^{i\omega t} [(A_1 \sin(\delta_1) + A_2 \sin(\delta_2)) \\ &\quad + i(A_1 \cos(\delta_1) + A_2 \cos(\delta_2))] \end{aligned} \quad 2.3.22$$

Korzystając z (2.3.16) mam

$$x_1(t) + x_2(t) = e^{i\omega t} (C + iD) \quad 2.3.23$$

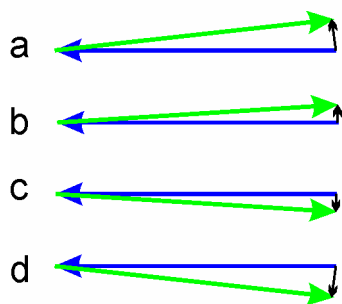
Zatem

$$x_1(t) + x_2(t) = \sqrt{C^2 + D^2} e^{i\omega t} e^{i \arctan \frac{D}{C}} \quad 2.3.24$$

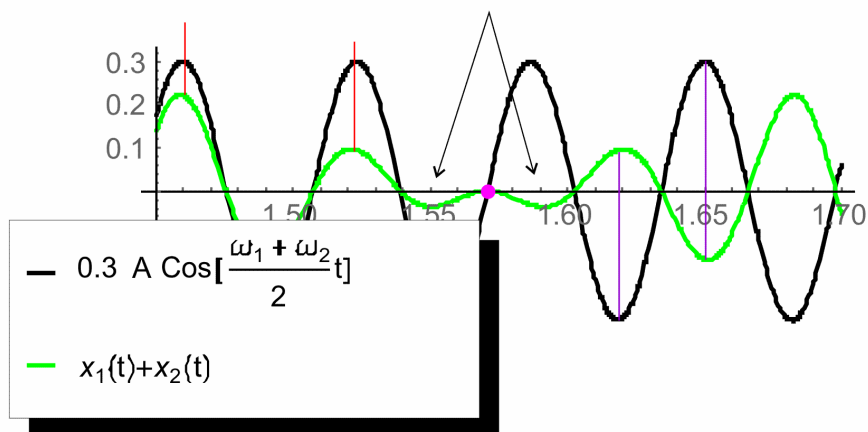
Skorzystanie z wzorów (2.3.17) i (2.3.18) i zastosowanie funkcji Re transformuje wyrażenie (2.3.24) do wyrażenia (2.3.20). Uzyskujemy to samo przy mniejszym wysiłku obliczeniowym. Zapis zespolony pozwala na prostsze przekształcanie wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne. Im bardziej jest złożona suma takich wyrażeń tym lepiej widoczny jest zysk ze stosowania notacji zespolonej.

2.3.1. Nieciągłości fazowe ♦

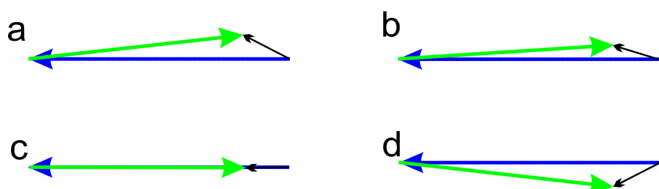
Chcę, z pomocą fazorów, pokazać jeszcze jeden zaskakujący efekt. Powiedzmy, że mamy dwa nakładające się przebiegi o tej samej amplitudzie, ale różnej częstości. Wiemy, że w takiej sytuacji kąt między fazorami zmienia się i w pewnym momencie różnica faz między fazorami będzie równa π . Dwa przeciwnie ustawione fazory, przesunięte w fazie o π dodadzą się do zera. Co się stanie z fazą fazora wypadkowego tuż przed zerem i tuż po zerze? Odpowiedzi udziela rysunek (2.3.9). Okazuje się że faza fazora wypadkowego doznaje, przy przejściu przez wartość zerową, skoku fazy o π . Ten skok fazy o π widać również na wykresie dudnień (rys. 2.3.10). Ale uwaga skok fazy występuje tylko wtedy gdy oba fazory mają tą samą długość (rys. 2.3.11 i 2.3.12).



Rysunek 2.3.9. Rysunek przedstawia sumę dwóch fazorów o tej samej długości blisko momentu gdy ich fazy przesunięte są o π . Przy przejściu od rysunku (a) do (b), gdy różnica faz zbliża się do π kąt fazora wypadkowego (czarnego) zbliża się do kąta $\pi/2$ względem fazora niebieskiego. W chwili gdy fazy różnią się dokładnie o π fazor wypadkowy ma długość zero i nie można określić jego kąta. Chwilę później (c) fazor czarny pojawia się, ale jego kąt wynosi $-\pi/2$. Przy przejściu przez zero faza fazora czarnego zmieniła się skokowo o π .



Rysunek 2.3.10. Środkowa część wykresu dudnień z rysunku (2.1.3). Czarna linia obrazuje przebieg drgań harmoniczných z częstością średnią. Przez czerwone kreski z lewej części wykresu widać, że położenia maksymalnych dodatnich wychyleń na obu wykresach pokrywają się. Punkt różowy pokazuje chwilę gdy fazory reprezentujące dodawane drgania dodają się do zera. Strzałki pokazują dwa minima w przedziale w którym powinno być jedno minimum. Między nimi pojawia się dodatkowe maksimum (różowy punkt). Takie zgęszczenie minimów i maksimum jest możliwe dzięki skokowi fazy o π , w różowym punkcie. Skok fazy powoduje, że po przejściu różowego punktu wykres opada, zamiast dalej wznosić się.

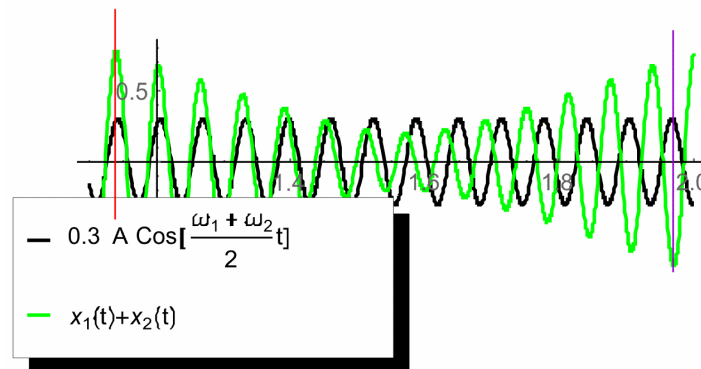


Rysunek 2.3.11. Gdy fazory nie są równej długości, fazor wypadkowy nie doznaje skoku fazy o π .

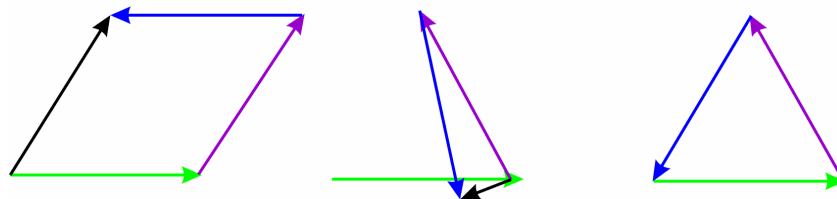
Praktycznie rzecz biorąc trudno jest utrzymać amplitudy dwóch fal na idealnie takim samym poziomie. Jednak dodając trzy fale harmoniczných o nieco różnych częstościach uwalniamy się od konieczności ścisłego dopasowania amplitud (rys. 2.3.14). Widać z tego, że dla N -fal $N > 2$, o różnych częstościach, gdy tylko da się z reprezentujących je fazorów zbudować wielokąt, zerowanie się

wektora wypadkowego będzie się cyklicznie zdarzało. Oznacza to również, że cyklicznie będą się zdarzały punkty, gdzie faza fazora wypadkowego skoczy o π . Spróbuj wyciągnąć te wnioski bez posługiwania się fazorami a szybko docenisz wartość reprezentacji fazorowej.

Przedstawione tu rozważania mogą się wydać akademickie. I co z tego, że od czasu do czasu faza fali wypadkowej skoczy o π ? Na dodatek dzieje się to zawsze w otoczeniu punktu o zerowej amplitudzie więc efekty są praktycznie niewidoczne. Mimo to nieciągłości fazowe odgrywają coraz istotniejszą rolę we współczesnej fizyce i technice. Dlatego będziemy do tego tematu wracać.



Rysunek 2.3.12. Sumujemy drgania takie jak na rysunku (2.3.11) z tym, że teraz amplituda drugiego przebiegu harmonicznego jest taka, że $A_1/A_2=0.8$. Widać, że idąc w kierunku minimum obwiedni drgań przebieg harmoniczny (czarny wykres) zaczyna coraz wyraźniej wyprzedzać sumę drgań. W punkcie, gdzie obwiednia osiąga minimum przesunięcie to równe jest $\pi/4$, aby po drugiej stronie minimum osiągnąć wartość π . Mamy dalej przesunięcie fazy o π , ale nie dzieje się to skokowo.



Rysunek 2.3.15. Trzy fale o różnych częstościach reprezentowane są w danym punkcie przez trzy obracające się z różnymi częstościami fazory. Kąty między tymi fazorami zmieniają się z każdą chwilą. W efekcie zmienia się fazor wypadkowy (czarna strzałka). Pojawią się również takie momenty, gdy fazory utworzą trójkąt i fazor wypadkowy będzie równy zero. Przy zbliżaniu się do takiego zera i jego przejściu faza fazora wypadkowego (a co za tym idzie faza fali wypadkowej) zmieni się π . Zauważ, że teraz fazory nie muszą być równej długości. Utworzą trójkąt zawsze wtedy gdy długość każdego z nich nie będzie większa od sumy długości dwóch pozostałych.

3. Analiza Fourierowska ♣/♠

Sposobów w jaki drgają (wykonują ruch cykliczny) układy fizyczne jest bardzo wiele. Powraca pytanie – dlaczego omawiamy drgania harmoniczne? Jednym z powodów jest oczywiście prostota tych drgań. Ale cóż po prostocie, która nie ma żadnych poważniejszych zastosowań praktycznych? Na szczęście, dzięki analizie fourierowskiej prostota drgań harmonicznnych łączy się z ich użytecznością. Wiesz już, że pewne duże klasy funkcji możemy wyrażać poprzez sumy innych funkcji. Przykładem takiej klasy funkcji są wielomiany (zobacz rozwinięcia w szeregi potęgowe (§DB 3)). Od XVIII wieku podejmowano próby z szeregami złożonymi z funkcji harmonicznnych. Przełom przyszedł wraz z opublikowaniem przez Josepha Fouriera (1807r) pracy pod tytułem „Analityczna teoria ciepła”. Fourier rozwiązał równania różniczkowe opisujące rozptyw ciepła w cienkim, izolowanym na końcach termicznie przewodniku odwołując się do szeregów funkcji trygonometrycznych. Wychodząc z tego punktu rozszerzył swoją metodą postulując, że każda funkcja $f(x)$, okresowa na przedziale $[a; a + \lambda]$ i wystarczająco gładka, może być przedstawiona w postaci szeregu (dziś nazywamy ten szereg szeregiem Fouriera). Zapisujemy go tak

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nkx) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nkx) \quad 3.1$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad 3.1a$$

Współczynniki A_0, A_n, B_n wyrażają się wzorami

$$A_0 = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) dx = \frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(x) dx \quad 3.2a$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \cos(nkx) dx = \frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(x) \cos(nkx) dx \quad 3.2b$$

$$B_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \sin(nkx) dx = \frac{2}{\lambda} \int_{x_0}^{x_0+\lambda} f(x) \sin(nkx) dx \quad 3.2c$$

W czasach Fouriera wiele pojęć analizy matematycznej (na przykład pojęcie całki) nie było jeszcze doprecyzowanych. Wyniki osiągnano idąc za głosem matematycznej i co nie mniej ważnej fizycznej intuicji, metodami, które dziś często nie byłyby akceptowane. Nawet tak „logiczna” nauka jak matematyka nie

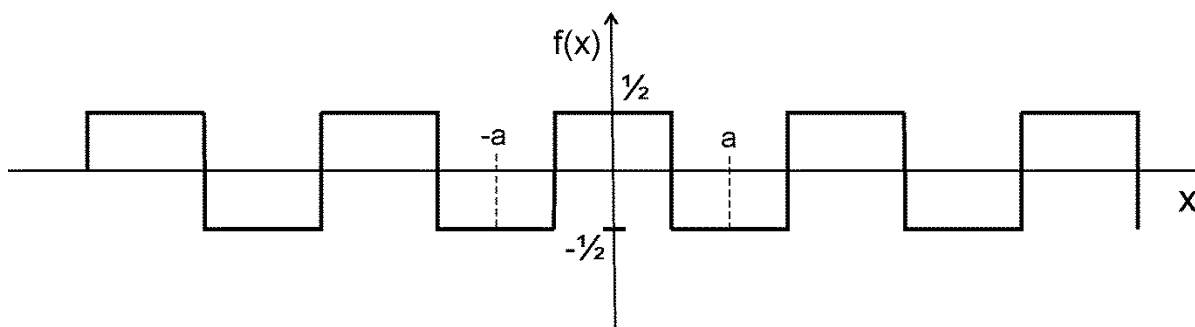
rozwijają się w sposób gładki i zgodny z regułami sztuki poprawnego myślenia. Na początku jest chaos i ci, którzy w chaosie dostrzegają zarys porządku. Gdy to się uda, kolejne pokolenia matematyków porządkują nową teorię. Na solidnych podstawach postawił teorię całki Bernhard Riemann w połowie wieku XIX.

Nie każda funkcja da się przedstawić w postaci szeregu funkcji harmoniczych. Wiemy już, że funkcje muszą być okresowe, ponadto wzory (3.2) wskazują, że muszą być całkowne. Kwestie zbieżności szeregu do funkcji porządkuje twierdzenie

Twierdzenie 3.1: O zbieżności szeregu Fouriera

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jej szereg Fouriera jest zbieżny do wartości funkcji w tym punkcie.

Zobaczmy, na prostym przykładzie, jak działają szeregi Fouriera. W postaci szeregu Fouriera przedstawię okresową funkcję prostokątną, zdefiniowaną tak, aby była funkcją parzystą (rys. 3.1)

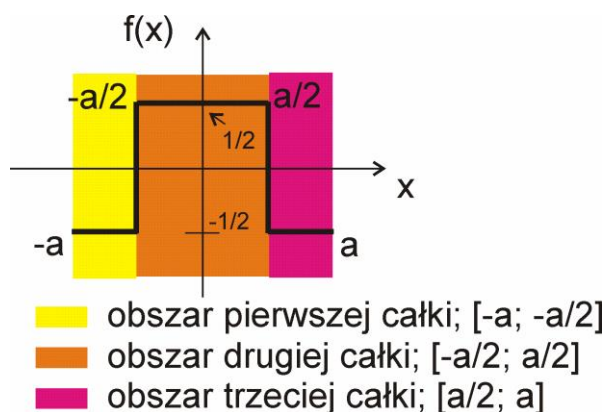


Rysunek 3.1. Przebieg prostokątny umieszczony tak, aby dał się opisać funkcją parzystą.

Rysunek (3.2) przedstawia pojedynczy okres analizowanej funkcji danej wzorem

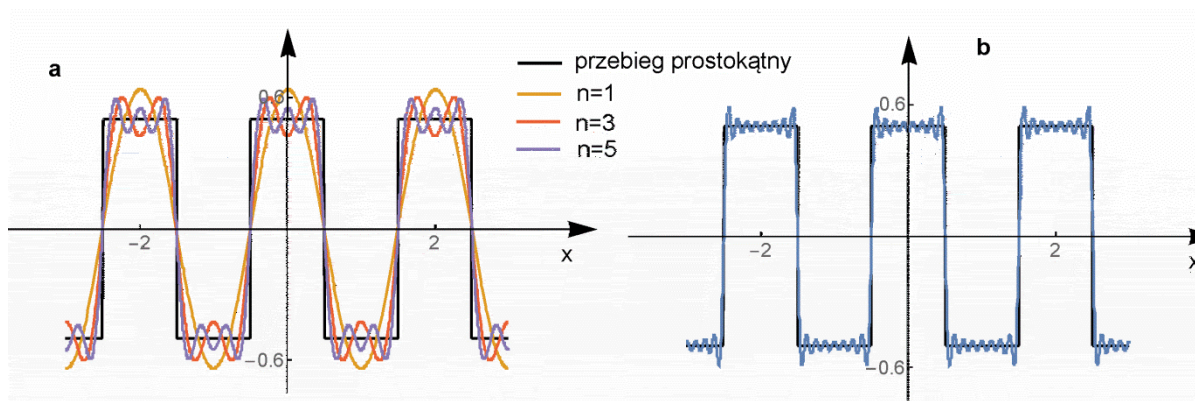
$$f(x) = \Pi\left(\frac{x}{2a}\right) - \frac{1}{2} \quad 3.3$$

Funkcja prostokątna $\Pi(x)$ zdefiniowana jest w (§DG xxx). Zgodnie z wzorami (3.2) obliczenie współczynników rozkładu fourierowskiego wymaga całkowania funkcji po jednym okresie. Rysunek (3.2) pokazuje wygodny podział obszaru całkowania na podpodziały. Na każdym podpodziale funkcja jest stała. W tej sytuacji policzenie współczynników rozwinięcia ze wzorów (3.2) jest proste i możesz to zrobić jako ćwiczenie.



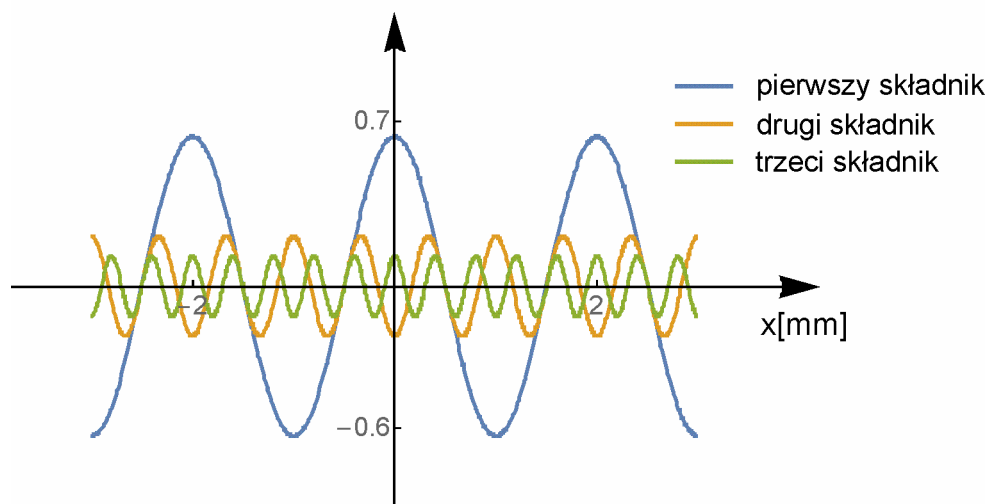
Rysunek 3.2. Korzystając z własności liniowości całek (DC 1.1) możemy funkcję prostokątną, na przedziale o długości jednego okresu, podzielić na trzy obszary całkowania, tak aby w obszarach tych funkcja miała stałą wartość. Taki podział ułatwia obliczenie odnośnych całek

Współczynniki B_n szukanego rozkładu są równe zero gdyż funkcja jest symetryczna. Jej rozkład fourierowski realizuje się poprzez parzyste funkcje cosinus, przy których stoją współczynniki A_n . Rysunek (3.3) przedstawia analizowaną funkcję oraz jej przybliżenie przez sumę kolejnych niezerowych wyrazów rozkładu fourierowskiego.



Rysunek 3.3. Przebieg prostokątny i suma odpowiednio: a) jednego, trzech i pięciu wyrazów A_n (3.4); b) piętnastu wyrazów A_n .

Rysunek (3.4) przedstawia pierwszy, trzeci i piąty czynnik rozwinięcia badanej funkcji. Czynniki drugi i czwarty są równe zero; $A_2=0, A_4=0$.



Rysunek 3.4. Przebieg kolejnych niezerowych składników A_1 , A_3 i A_5 (3.3b) szeregu Fouriera dla funkcji prostokątnej. Zwróć uwagę na malejącą amplitudę składników przy rosnącym n . Własność tą można również wywnioskować ze wzoru (3.3b).

3.0.1. Widmo

Inną formą prezentacji rozkładu w szereg Fouriera jest wyrysowanie tak zwanego widma funkcji. Argument funkcji cosinus lub sinus można przedstawić w postaci

$$nkx = 2\pi x f_{xn} \quad 3.5$$

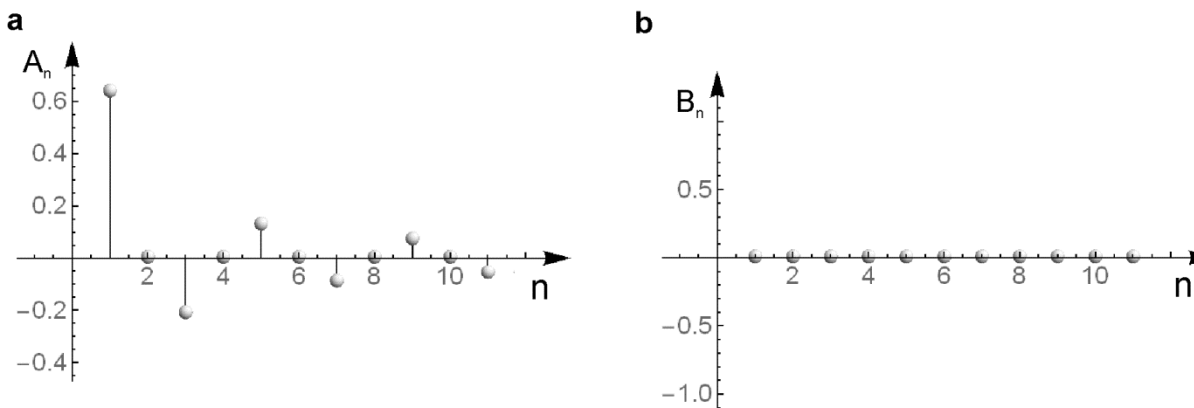
$$f_{xn} = \frac{n}{\lambda} \quad 3.5a$$

Wielkość $f_{xn} = n/\lambda$ ma charakter częstości. Pomyśl, gdy funkcja f jest zależna od czasu $x \rightarrow t$, to wielkość (3.5a) ma wymiar jeden nad czas, czyli wymiar częstości. Teraz jednak nie możemy przyjmować, że x to czas, gdyż zajmujemy się szeregami Fouriera ogólnie. Zmienna x może być czymkolwiek, w tym również możemy jej nadać fizyczne znaczenie długości. Wtedy f_{xn} będzie miało wymiar jeden nad długość. Takie dziwne „częstości” mają duże znaczenie w optyce, gdzie nazywamy je częstościami przestrzennymi (zobacz §TX 4.2).

Możemy teraz wyrysować wykres wartości współczynników A_n i B_n dla poszczególnych częstości f_{xn} . Taki wykres nazywamy widmem badanej funkcji. Widmo analizowanej okresowej funkcji prostokątnej ma postać

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi x f_{xn}) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2\pi x f_{xn}) \quad 3.6$$

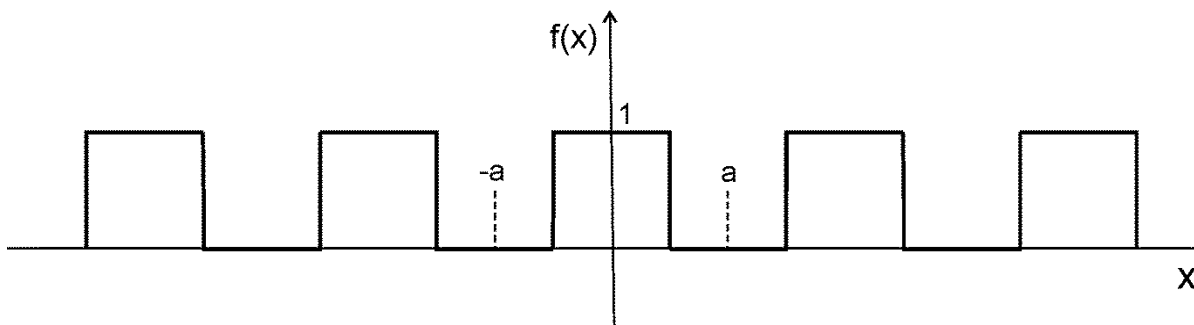
Gdy wiemy jakie są współczynniki rozwinięcia, czyli jakie jest widmo funkcji, jej odtworzenia nie stwarza żadnych problemów.



Rysunek 3.5. Widmo analizowanej funkcji prostokątnej; a) wartości pierwszych jedenastu współczynników A_n (za wyjątkiem A_0); b) wartości pierwszych jedenastu współczynników B_n .

3.0.2. Współczynnik A_0

Współczynnik A_0 dla okresowej funkcji prostokątnej przedstawionej na rysunku (3.1) jest równy zero. Ze wzoru (3.2a) widać, że jest on równy całce z funkcji $f(x)$, czyli polu pod tą funkcją obliczoną na przedziale równym jednemu okresowi. Ponieważ pola liczone całkami sumują się z uwzględnieniem znaku (rys. DC 1.6), zerowa wartość współczynnika A_0 nie może dziwić; na przestrzeni jednego okresu funkcja $f(x)$ jest w takim samym zakresie nad jak i pod osią x . Można się łatwo domyśleć ile będzie wynosił współczynnik A_0 dla funkcji przedstawionej na rysunku (3.6)



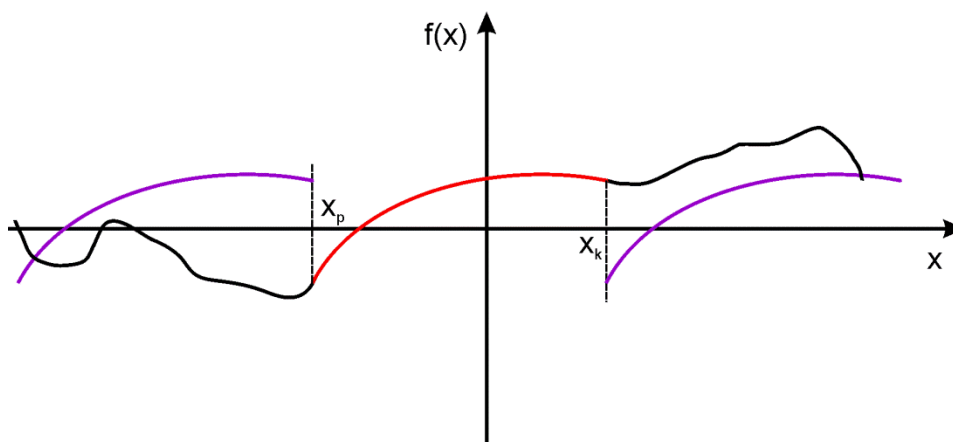
Rysunek 3.6. Przesunięta do góry parzysta funkcja prostokątna z rysunku (3.1)

Funkcja jest teraz całkowicie nad osią x i pod jednym jej okresem pole jest równe 1, czyli $A_0=a$. Zauważ, że przesunięcie funkcji w górę lub w dół nie zmienia wartości współczynników A_n i B_n . Zwiększenie wartości funkcji o stałą C skutkuje tym, że wzór (3.2b) przechodzi w

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} [f(x) + C] \cos(nkx) dx \\
 &= \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \cos(nkx) dx + \frac{2}{\lambda} C \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \cos(nkx) dx \\
 &= A_n + 0 = A_n
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Podobnie jest ze wzorem (3.2c) na współczynniki B_n . Za kształt funkcji odpowiadają funkcje harmoniczne takie jak na rysunku (3.4). Ich przebieg nie może zależeć od przesunięcia funkcji na wykresie w górę lub w dół, bo od tego nie zależy kształt funkcji. Przesuwaniem wykresu funkcji w górę lub w dół „zajmuje się” współczynnik A_0 .

A co gdy przebieg jaki analizujemy nie jest okresowy? Mamy wtedy dwa rozwiązania, albo wyciąć interesujący nas kawałek i zbudować przebieg okresowy (kołowy) (rys. 3.7) albo nauczyć się silniejszej metody należącej do analizy fourierowskiej, to jest obliczania tzw. transformat Fouriera, ale na to przyjdzie czas w następnym temacie (TIX 4.3).



Rysunek 3.7. Czarna linia z czerwonym środkiem przedstawia nieokresową funkcję $f(x)$. Jeżeli interesuje nas jej przebieg w przedziale $[x_p, x_k]$, to możemy z niej uczynić funkcję okresową, kopiując interesujący nas fragment funkcji w nieskończoność na lewo od x_p i na prawo od x_k . Fioletowe linie pokazują dwa takie skopiowane kawałki funkcji. Otrzymamy w ten sposób funkcję okresową o okresie długości $x_k - x_p$. Mając funkcję okresową możemy ją rozwinąć w szereg Fourier, który dowolnie dokładnie będzie aproksymował funkcję w interesującym nas przedziale. Niepokoić może fakt, że w punktach „łączenia” funkcja zwykle nie jest ciągła; mamy skok wartości. Jednak całki, a zatem i wzory (3.4) są niewrażliwe na takie punktowe skoki wartości (§SDC 1.2).

Dygresja 3.1.

Może zauważyłeś, że obok wyrażenia "przebieg okresowy" używamy wymiennie słowa „przebieg kołowy”, choć nie każdy analizowany przebieg da się przedstawić jako biegnący po rzeczywistym kole. Nasze przebiegi są w ogóle jednowymiarowe. Okresowo wracają jednak do tego samego punktu i pod tym względem zachowują się jak punkt biegnący po brzegu koła. Nazwa kołowy wskazuje na wyróżniającą cechę tych przebiegów, to jest uparty powrót do tego samego punktu, po tym samym czasie. Warto się czasem skupić na własnościach ogólnych a nie na szczegółach. Bo to właśnie własności ogólne decydują o zachowaniu układu fizycznego, co w obrazowy sposób przedstawiłem w „Topologicznym dramacie romantycznym” (§TV 4.1.1)

3.0.3. Szeregi Fouriera i Mathematica

Pakiet Mathematica pozwala obliczać szeregi Fouriera. Służy temu kilka funkcji. Najważniejszą funkcją jest funkcja o nazwie *FourierTrigSeries*. Oblicza ona z danej funkcji $f(x)$ szereg Fouriera postaci

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(xn) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(xn) \quad 3.8$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad 3.9a$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad 3.9b$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad 3.9c$$

Wzory te różnią się od wzorów⁴ (3.1 i 3.2). Na szczęście funkcja ta ma opcję o nazwie *FourierParameters->{a,b}*, której ustawienie powoduje zmianę wzorów (3.9) do postaci

$$f(x) = \left| \frac{b}{\pi} \right|^{\frac{1-a}{2}} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(xbn) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(xbn) \right) \quad 3.10$$

$$a_0 = \left| \frac{b}{\pi} \right|^{\frac{1-a}{2}} \int_{-\pi/|b|}^{\pi/|b|} f(x) dx \quad 3.10a$$

⁴ Mamy różne definicje szeregów Fouriera, które różnią się stałymi przed całkami we wzorach (3.2). Wszystkie one są sobie równoważne.

$$a_n = \left| \frac{b}{\pi} \right|^{\frac{1-a}{2}} \int_{-\pi/|b|}^{\pi/|b|} f(x) \cos(nbx) dx \quad 3.10b$$

$$b_n = \left| \frac{b}{\pi} \right|^{\frac{1-a}{2}} \int_{-\pi/|b|}^{\pi/|b|} f(x) \sin(nbx) dx \quad 3.10c$$

Widać z tego, że aby przejść do wzoru (3.1) muszę przyjąć

$$a = 1 \text{ oraz } b = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad 3.11$$

Możesz sam sprawdzić, że takie wartości parametrów a i b przekształcają wyrażenia (3.8 i 3.9) do postaci (3.1 i 3.2).

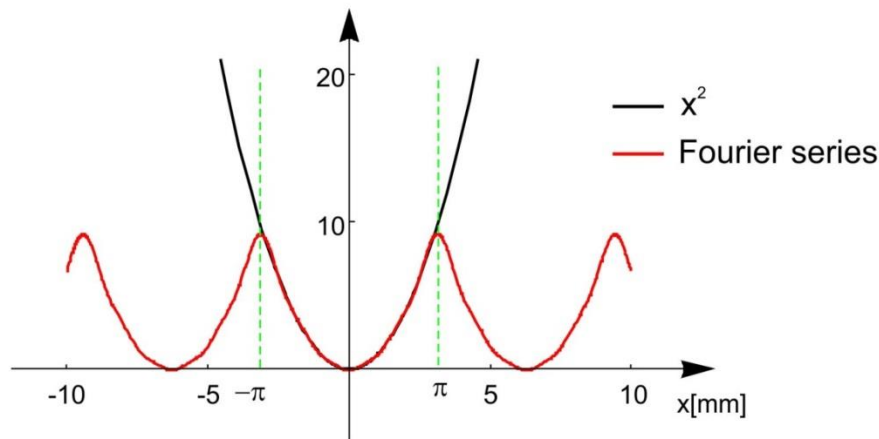
Dla przykładu policzę szereg fouriera dla funkcji x^2 przy $k=1$. Funkcja x^2 jest nieokresowa. Postąpię więc zgodnie z procedurą pokazaną na rysunku (3.7). Przyjmując $k=1$, założyłem, że moja funkcja ma okres o długości

$$\lambda = 2\pi k = 2\pi \quad 3.11a$$

Obliczę zatem szereg Fouriera dla funkcji x^2 do wyrazu rzędu piątego włącznie, zdefiniowanej na takim przedziale. Do dzieła

FourierTrigSeries[x ² ,x,5,FourierParameters->{1,k}]	Instrukcja
$\frac{\pi^2}{3} - 4\text{Cos}[t] + \text{Cos}[2t] - \frac{4}{9}\text{Cos}[3t] + \frac{1}{4}\text{Cos}[4t] - \frac{4}{25}\text{Cos}[5t]$	Wynik po podstawieniu $k=1$.
M.3.1. Obliczenie szeregu Fouriera z funkcji x^2	

Ponieważ funkcja jest parzysta, to w jej szeregu Fouriera występują tylko kosinusy, no i wyraz wolny. Uzyskany wynik przedstawiłem dla konkretnej wartości k , gdyż dla k ogólnego jest on nieco przydługi. Rysunek (3.8) pokazuje wykresy funkcji x^2 i jej szeregu Fouriera.



Rysunek 3.8. Funkcja x^2 i jej szereg Fouriera. Szereg Fouriera został wyznaczony dla $k=1$, co oznacza, że funkcja jest określona jako okresowa na przedziale od $-\pi$ do π . Szereg dla funkcji x^2 został obliczony z dokładnością do pięciu wyrazów. Widać, że na zadanym przedziale przebieg szeregu jest praktycznie taki sam jak przebieg funkcji.

3.1. Parzystość

Funkcja prostokątna przedstawiona w przykładzie jest funkcją parzystą (**DG xx**). Mówiąc bardziej obrazowo po obu stronach osi wartości funkcja wygląda tak samo. Kiedy funkcja okresowa jest parzysta, to w jej szeregu Fouriera niezerowe są tylko współczynniki przy funkcji cosinus (funkcji parzystej), czyli współczynniki A_n , co też miało miejsce w naszym przykładzie. Układ współrzędnych możemy przesunąć tak, że funkcja stanie się funkcją nieparzystą, wtedy przy odbiciu względem osi wartość funkcji zmienia znak: Jak można się domyślać w szeregu Fouriera funkcji nieparzystej niezerowe mogą być tylko współczynniki przy funkcji sinus czyli współczynniki B_n oraz współczynnik A_0 . Wzór na przesuniętą funkcję z naszego przykładu ma postać:

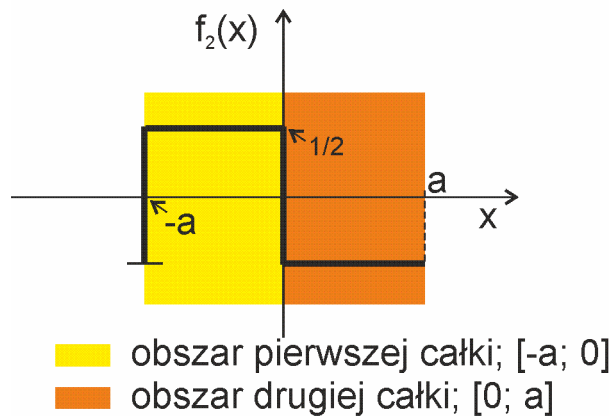
$$f_2(x) = \Pi\left(\frac{x}{2a} - \frac{1}{2}a\right) - \frac{1}{2} \quad 3.1.1$$

Wykres jednego okresu tej funkcji (z podziałem na obszary całkowania) pokazany jest poniżej. Możesz sprawdzić, że współczynniki rozwinięcia w szereg Fouriera mają postać

$$A_0 = 0 \quad 3.1.2a$$

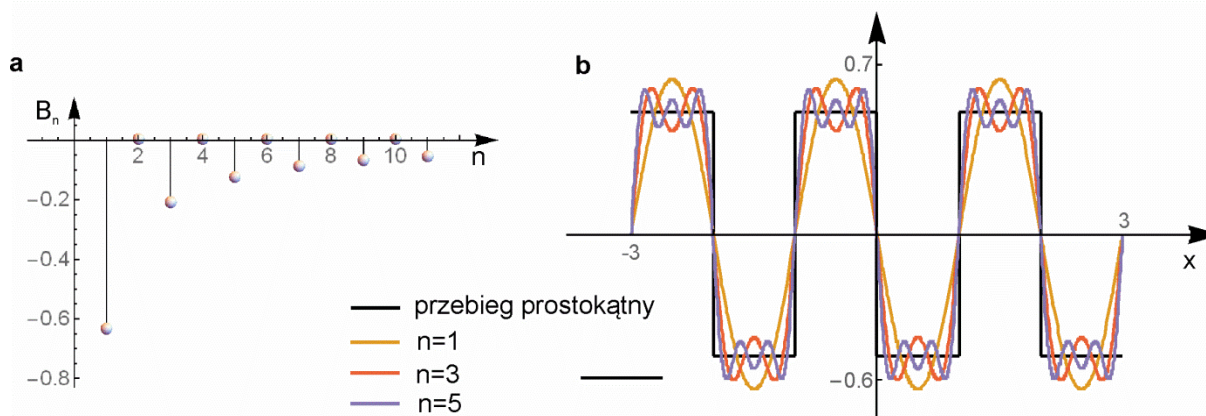
$$A_n = 0 \quad 3.1.2b$$

$$B_n = \frac{-1 + (-1)^n}{n\pi} \quad 3.1.2c$$



Rysunek 3.1.1. Jeden okres prostokątnego przebiegu, określonego jako funkcja nieparzysta

Tym razem różne od zera są współczynniki B_n stojące przy funkcjach sinus, które są funkcjami nieparzystymi. Widmo funkcji f_2 pokazuje rysunek (3.1.2).



Rysunek 3.1.2. a) pierwszych jedenaście współczynników B_n widma antysymetrycznie określonej funkcji prostokątnej (współczynnik A_n są równe zero); b) antysymetryczny przebieg prostokątny i suma odpowiednio: jednego, trzech i pięciu wyrazów B_n

W ogólności funkcja nie musi być ani parzysta ani nieparzysta. Jednak każdą funkcję można przedstawić jako sumę funkcji parzystej i nieparzystej (DG. xxx). Nasza przykładowa funkcja może być przesunięta tak, że nie będzie ani parzysta ani nieparzysta. Na przykład może mieć postać

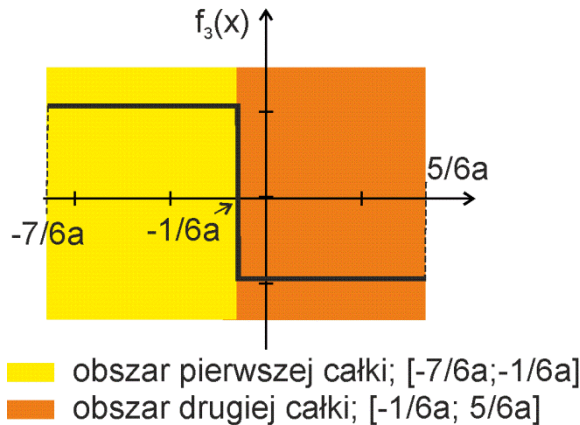
$$f_3(x) = \Pi\left(\frac{x}{2a} + \frac{7}{6}a\right) - \frac{1}{2} \quad 3.1.3$$

Wykres funkcji f_3 pokazuje rysunek (3.1.3). Współczynniki szeregu Fouriera dla tej funkcji wynoszą

$$A_0 = 0 \quad 3.1.4a$$

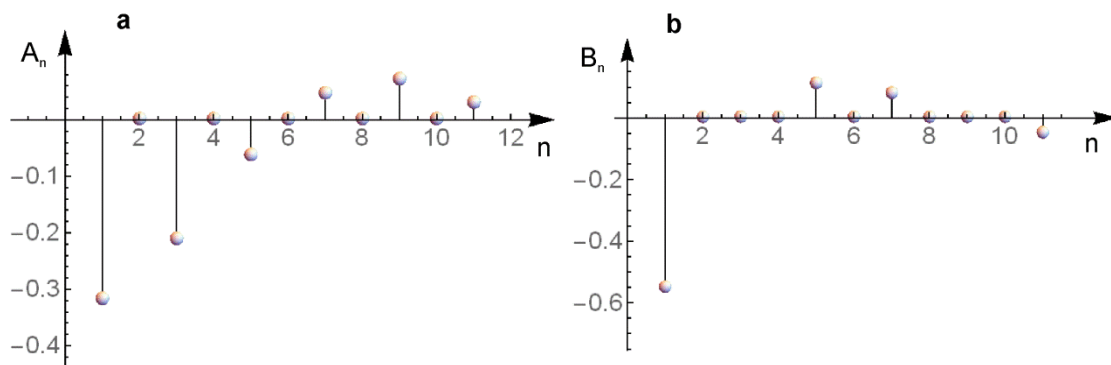
$$A_n = \frac{2 \left(1 + 2 \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)^2 \sin^3\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n\pi} \quad 3.1.4b$$

$$B_n = -\frac{2 \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \quad 3.1.4c$$



Rysunek 3.1.3. Jeden okres prostokątnego przebiegu, o nieokreślonej parzystości

Tym razem niezerowe są współczynniki A_n i B_n . Widmo funkcji f_3 przedstawia rysunek (3.1.4)



Rysunek 3.1.4. Pierwszych jedenaście współczynników widma nieparzystej funkcji f_3 ; a) współczynniki A_n ; b) współczynniki B_n

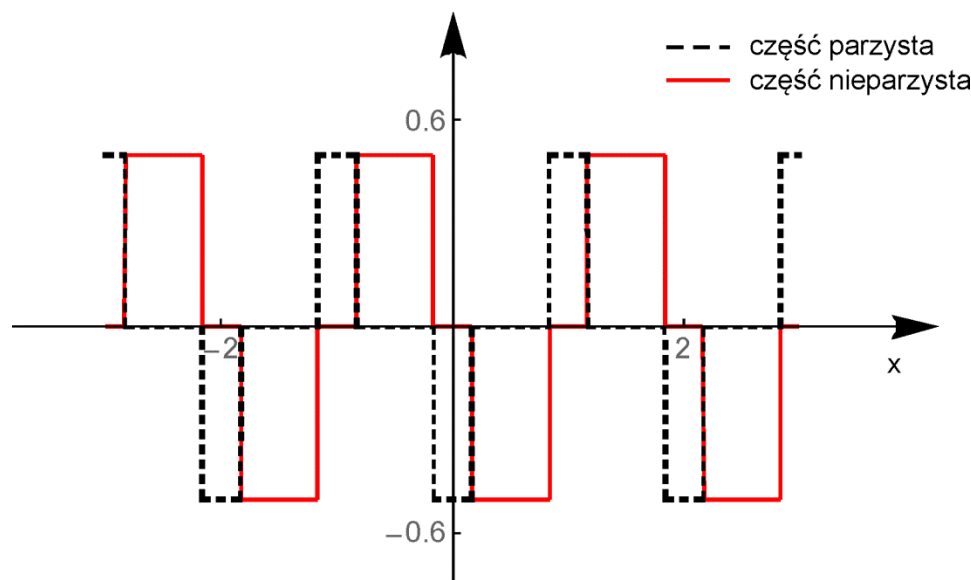
Zauważ, że we wszystkich analizowanych przypadkach częstości, dla których były liczone współczynniki A_n i B_n są takie same. Częstości te wyrażają się wzorem (3.4a) i jak z niego widać zależą tylko od rzędu wyrazu szeregu Fouriera.

Zgodnie ze wzorami (DG xxx) funkcję f_3 można rozłożyć na część parzystą f_p i nieparzystą f_n (rys. 3.1.5)

$$f_p(x) = \frac{\Pi\left(\frac{x}{2a} + \frac{7}{6}a\right) + \Pi\left(-\frac{x}{2a} + \frac{7}{6}a\right) - 1}{2} \quad 3.1.5a$$

$$f_n(x) = \frac{\Pi\left(\frac{x}{2a} + \frac{7}{6}a\right) - \Pi\left(-\frac{x}{2a} + \frac{7}{6}a\right)}{2} \quad 3.1.5b$$

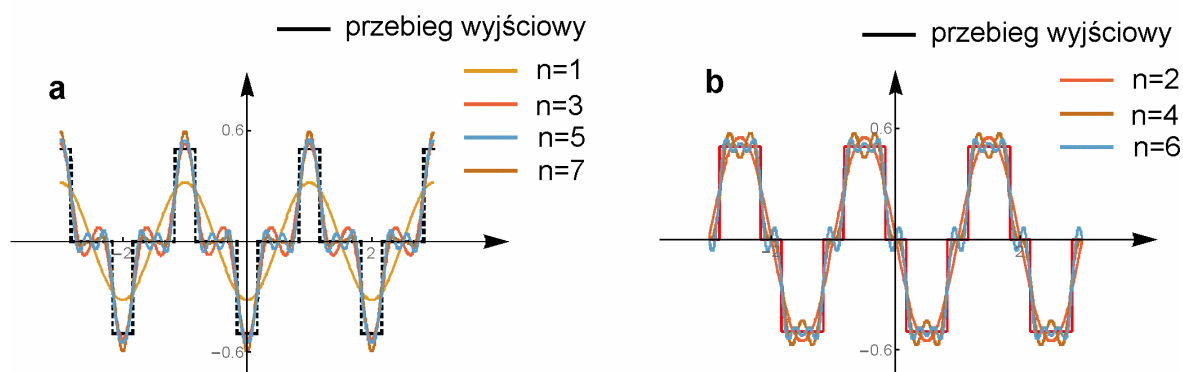
Obliczmy szereg Fouriera dla części parzystej i nieparzystej. Albo, lepiej zastanówmy się. Współczynniki A_n dane wzorem (3.1.4b) stoją przy funkcjach cosinus w szeregu Fouriera. Ich suma powinna dać funkcję parzystą. Współczynniki B_n dane wzorem (3.1.4c) stoją przy funkcjach sinus w szeregu Fouriera. Ich suma powinna dać funkcję nieparzystą. Suma obu części daje szereg Fouriera dla funkcji f_3 . To oznacza, że współczynniki A_n dane wzorem (3.1.4b) powinny reprezentować rozkład na szereg Fouriera parzystej części funkcji f_3 , współczynniki B_n dane wzorem (3.1.4c) powinny reprezentować rozkład na szereg Fouriera nieparzystej części funkcji f_3 . Potwierdza to rysunek (3.1.6)



Rysunek 3.1.5. Część parzysta funkcji f_3 (rys. 3.1.3) narysowana jest czarną przerywaną kreską, a część nieparzysta kreską czerwoną ciągłą. Widać, że suma obu części daje funkcję f_3 .

Podsumuję nasze dotychczasowe spotkanie z analizą fourierowską. Każdy okresowy przebieg możemy rozłożyć w szereg Fouriera. Oczywiście nie do końca jest to prawdą, gdyż matematycy bez problemu potrafią podać przykład funkcji okresowej, dla której szeregu Fouriera nie można policzyć. Funkcje opisujące fizyczne procesy należą jednak do funkcji mających szereg Fouriera, a takie funkcje nas interesują. Szereg Fouriera oznacza, że do opisu drgań nieharmonicznych zamiast jednego złożonego przebiegu okresowego mamy sumę nieskończenie wielu przebiegów harmonicznym, które dobrze znamy. Może liczba tych przebiegów jest zniechęcająca, ale wyrazy wyższych rzędów wnoszą do rozwinięcia coraz to mniejsze wkłady. Z tego powodu dla pewnego n czynnik A_{n+1} i B_{n+1} i wyższe możemy pominąć, gdyż i tak szum, jaki zawsze jest

w układzie fizycznym, działa silniej niż brak tych rzędów. Od jakiego rzędu możemy pominąć wyrazy szeregu Fouriera, to już kwestia konkretnego problemu.



Rysunek 3.1.6. a) parzysta część funkcji f_3 i jej przybliżenie szeregiem Fouriera do rzędu 7; b) nieparzysta część funkcji f_3 i jej przybliżenie szeregiem Fouriera do rzędu 7

3.2. Postać zespolona

Zapiszmy szereg Fouriera w postaci

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(knx + \varphi_n) \quad 3.2.1$$

Możemy ten szereg przepisać w postaci

$$f(x) = (\alpha_0 (= A_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\alpha_n \cos(\varphi_n)}_{A_n} \cos(knx) + \underbrace{\alpha_n \sin(\varphi_n)}_{B_n} \sin(knx) \right) \quad 3.2.2$$

Związki między współczynnikami A_n , B_n , a α_n i φ_n są takie same jak w przypadku wyrażeń (1.18-19). Zapis (3.2.2) daje nam szereg Fouriera zdefiniowany wzorem (3.2). Zdefiniuję nowe współczynniki C_n

$$C_n = \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) e^{iknx} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}(A_n - iB_n) & \text{dla } n > 0 \\ A_0 & \text{dla } n = 0 \\ \frac{1}{2}(A_{-n} + iB_{-n}) & \text{dla } n < 0 \end{cases} \quad 3.2.3$$

Całkę w wyrażeniu (3.2.3) można stosunkowo łatwo obliczyć, wstawiając za $f(x)$ jej rozwinięcie (3.2.2). Zbadajmy sumę

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A_n - iB_n)e^{iknx} + \frac{1}{2}(A_{-n} + iB_{-n})e^{-iknx} \\ = \frac{1}{2}A_n(e^{iknx} + e^{-iknx}) + \frac{1}{2}iB_n(-e^{iknx} + e^{-iknx}) \end{aligned} \quad 3.2.4$$

Korzystając ze wzoru (DD 3.18) mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_n(e^{iknx} + e^{-iknx}) + \frac{1}{2}iB_n(e^{iknx} + e^{-iknx}) \\ = A_n \cos(knx) + B_n \sin(knx) \end{aligned} \quad 3.2.5$$

Wynik jest tożsamy z n -tym wyrazem szeregu zapisanego w postaci (3.2). To znaczy, że szereg Fouriera możemy równoważnie zapisać w postaci zespolonej

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{iknx} \quad 3.2.6$$

Tym razem sumowanie przebiega od $-\infty$. Zauważ, że współczynniki C_N spełniają zależność

$$C_n = C_{-n}^* \quad 3.2.7$$

Na zakończenie wypadałoby policzyć jakiś przykład. Z tym się jednak jeszcze wstrzymam i zamiast zgrabnym przykładem zakończę temat szeregów Fouriera ogólniejszą refleksją matematyczną.



Rysunek 3.1.7. Jean Baptiste Joseph Fourier (21.03.1768 Auxerre – 16.05.1830 Paryż) – francuski matematyk i fizyk. Syn krawca. Wcześnie osierocony. Jako zdolny chłopiec uzyskał wsparcie Kościoła, dzięki któremu mógł się kształcić. Aktywnie wspierał rewolucję francuską. Był zaufanym „człowiekiem” Napoleona. Pod koniec życia piastował funkcję sekretarza Francuskiej Akademii Nauk. Znany jako twórca analizy fourierowskiej; zainicjował badania nad szeregami Fouriera i ich zastosowaniem do analizy problemów związanych z drganiami membran i transportem ciepła. Fourier rozpoczął również badania nad efektem cieplarnianym. Portret wykonany około 1820 roku przez nieznanego autora; źródło Wikipedia

3.3. Funkcyjne przestrzenie wektorowe ♠

Szeregi Fouriera przypominają reprezentację wektora w bazie (§TIV 3.1). Czy można nadać zbiorowi funkcji strukturę przestrzeni wektorowej? Okazuje się, że dla zbioru funkcji całkowalnych z kwadratem taka konstrukcja jest możliwa

Definicja 3.3.1: Funkcje całkowalne z kwadratem

Funkcja zespolona f zdefiniowana na zbiorze liczb rzeczywistych jest funkcją całkowalną z kwadratem na przedziale $[a, b]$ gdy całka

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \quad 3.3.1$$

Istnieje i jest skończona

Operacja dodawania na zbiorze funkcji całkowalnych z kwadratem zdefiniowana jest w prosty sposób

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad 3.3.2$$

Podobnie prosto jest zdefiniowana operacja mnożenia przez liczbę zespoloną α

$$\alpha f = \alpha f(x) \quad 3.3.3$$

Wyżej wymienione operacje mają własności wymagane przez definicję przestrzeni wektorowej (def. TIV 3.1), co łatwo dowieść. Nieco trudniej dowodzi się, że obie operacje są zamknięte, to znaczy, że kombinacja liniowa dwóch funkcji całkowalnych z kwadratem na przedziale $[a, b]$ jest również funkcją całkowalną z kwadratem na przedziale $[a, b]$. Dowód ten można znaleźć w podręcznikach do analizy matematycznej. Pozostaje pytanie: czy każdą funkcję całkowaną z kwadratem na przedziale $[a, b]$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej pewnego podzbioru funkcji całkowalnych z kwadratem $\{h_i\}$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i h_i(x) \quad 3.3.4$$

Oczywiście, dla pewnych funkcji sumy mogą być skończone, wtedy pojawiają się zerowe współczynniki c_i . Jeżeli taki zbiór funkcji $\{h_i\}$ istnieje (a istnieje), to zbiór funkcji całkowalnych z kwadratem na przedziale $[a, b]$ ma strukturę przestrzeni wektorowej, a zbiór $\{h_i\}$ jest bazą w tej przestrzeni. Baza ta ma nieskończenie wiele elementów i rozpiną nieskończenie wymiarową przestrzeń. Poruszanie się po takiej przestrzeni wymaga uwagi, gdyż nie wszystkie własności przestrzeni wektorowych skończenie wymiarowych przenoszą się w prosty sposób na przestrzenie o nieskończonej liczbie wymiarów. Generalnie, sprawa nieskończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej funkcji zawiera w sobie pewne subtelnosci, o których jeszcze opowiem. Na początku powinno nam

wystarczyć to, że taka przestrzeń da się sensownie zdefiniować. Wektory tej przestrzeni (punkty tej przestrzeni) to funkcje całkowalne z kwadratem.

Dygresja 3.3.1:

Myslenie o funkcjach jako o wektorach może nam się wydawać cudaczne. Wektory, jak każdy wie to także strzałeczką a nie funkcje. Mój drogi tak jest w szkole podstawowej i tak zaczynali matematycy. Potem jednakże przyszła abstrakcyjna definicja (def. TIV 3.1), której jest wszystko jedno, czy punkty przestrzeni wektorowej są strzałkami, funkcjami czy latającymi rybami. Jeżeli tylko można na danym zbiorze obiektów zdefiniować potrzebne operacje, które spełniają wymagania definicji, to są to obiekty, które tworzą równie dobrą przestrzeń wektorową jak strzałeczką. W tym też przejawia się ogromna siła podejścia matematycznego. Jeżeli okaże się, że zbiór jakichś obiektów ma strukturę przestrzeni wektorowej, to możemy o nim bardzo wiele powiedzieć nie tracąc czasu na szczegółowe badania. Jest to możliwe, gdyż ma on te właściwości, które mają dobrze nam znane przestrzenie wektorowe.

W funkcyjnej przestrzeni wektorowej możemy zdefiniować iloczyn skalarny

Definicja 3.3.2: Iloczyn skalarny (wewnętrzny) w przestrzeni funkcyjnej

Iloczynem skalarnym dwóch funkcji f_1 i f_2 należących do przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem na przedziale $[a, b]$ nazywamy wyrażenie

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) dx \quad 3.3.5$$

Gwiazdka oznacza wielkość sprzężoną, co oznacza, że dopuszczamy do gry funkcje o wartościach zespolonych.

Powyższa definicja spełnia wymogi dla iloczynu skalarnego (def. TV 3.4.1), co łatwo sprawdzić, za wyjątkiem warunku dodatniej określoności. Generalnie mamy

$$\langle f | f \rangle = \int_a^b f^*(x) f(x) dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0 \quad 3.3.6$$

Pozostaje jednak pytanie czy spełniona jest implikacja

$$\langle f | f \rangle = 0 \implies f(x) = 0 \text{ dla każdego } x \in [a, b] \quad 3.3.7$$

Zgodnie z uwagami zawartymi w (rys. DC 1.2.1) funkcja f spełniająca warunek (3.3.7) może być różna od zera w dowolnej liczbie izolowanych punktów. Oznacza to, że warunek (3.3.7) nie jest spełniony. Biorąc pod uwagę tą właściwość całek i by nie robić sobie kłopotów z definicją iloczynu skalarnego w wektorowej przestrzeni funkcyjnej, przyjmuje się następujące definicje.

Definicja 3.3.3: Funkcja równa zero prawie wszędzie

Funkcja określona na przedziale $[a, b]$ i równa zero na skończonej liczbie punktów wewnątrz tego przedziału nazywa się funkcją równą zero prawie wszędzie

Definicja 3.3.4: Funkcja zerowa

Funkcją zerową (wektorem zerowym) w przestrzeni funkcyjnej nazywamy funkcję równą zero prawie wszędzie

Warunek dodatniej określoności dotyczy funkcji równych zero prawie wszędzie. Dla takich funkcji zachodzi zmodyfikowany warunek (3.3.7), to znaczy zapis „ $f=0$ ” czytamy tak: $f=0$ prawie wszędzie.

Możemy się spodziewać, że istnieje wiele różnych baz $\{h_i\}$ w przestrzeni funkcyjnej. Co więcej mając definicję iloczynu skalarnego możemy spośród nich wyróżnić bazy ortogonalne i ortonormalne. W szczególności możemy zdefiniować również długość „wektora”, który jest nazywany normą funkcji.

Definicja 3.3.5: Norma funkcji (długość wektora w przestrzeni funkcyjnej)

Norma funkcji całkowalnej z kwadratem na przedziale $[a, b]$ jest określona wzorem

$$\|f\| = \langle f|f \rangle = \int_a^b f^*(x)f(x) dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx \quad 3.3.8$$

Przykładowo wyrażenie postaci

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \quad 3.3.9$$

Jest kombinacją liniową funkcji typu $f_i(x)=x^i$. Jest tych funkcji nieskończenie wiele i zachodzi dla nich ważne twierdzenie Weierstrassa:

Twierdzenie 3.3.1. Weierstrassa

Jeżeli funkcja o wartościach rzeczywistych $f(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to istnieje ciąg wielomianów o współczynnikach rzeczywistych

$$P_n = \sum_{i=0}^n c_i x^i \quad 3.3.10$$

Tak, że

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \quad 3.3.11$$

Przy czym zbieżność ta jest jednostajna⁵ na $[a,b]$. [Zwracam uwagę, że twierdzenie Weierstrassa określone jest na funkcjach o wartościach rzeczywistych.

Na bazie tego twierdzenia można pokazać, że na każdym przedziale $[a,b]$ w zbiorze funkcji całkowalnych z kwadratem zbiór wielomianów tworzy ortonormalną bazę. Twierdzenie Weierstrassa jest punktem wyjścia do konstrukcji innych baz w funkcyjnych przestrzeniach wektorowych, w tym również baz złożonych z funkcji trygonometrycznych stosowanych w szeregach Fouriera, które też tworzą bazę ortonormalną. Do tematu będę jeszcze wracał. Rozważania te traktuję jako proste wprowadzenie do tematu przestrzeni funkcyjnych. Jest to również ilustracja typowej dla matematyki metody poszerzenia zasięgu użytecznych struktur. W tym wypadku pojęcia przestrzeni wektorowej zostały przeniesione na zbiór funkcji. Pozwala to między innymi na wyłuskanie czasem zaskakujących związków między różnymi dziedzinami matematyki jak również eksploracji krainy funkcji (całkowalnych z kwadratem) z użyciem znanych z innych dziedzin matematyki narzędzi. Oczywiście takie rozszerzenie nigdy nie jest trywialne. Przestrzenie funkcyjne są nieskończenie wymiarowe, co powoduje, że niektóre twierdzenia uzyskane dla przestrzeni skończenie wymiarowych nie przenoszą się w prosty sposób.

⁵ Co to jest ta zbieżność jednostajna: Cóż, definicja i omówienie pojawi się w temacie (TXVII)

4. Drgania tłumione ♦/♣

W praktyce wszystkie drgania z czasem słabną. Spowodowane jest to siłami oporu ruchu rozpraszającymi energię zgromadzoną w układzie wykonującym drgania. W najprostszym, użytecznym modelu możemy przyjąć, że drgania są tłumione przez siłę tłumienia F_T proporcjonalną do prędkości ciała i skierowaną przeciwnie do tej prędkości. Taki model sił oporów przyjęliśmy analizując spadek w powietrzu (§TVI 4.3)

$$F_T = -\gamma \dot{x} \quad 4.1$$

Współczynnik γ zależy od charakteru drgającego układu i ma wymiar

$$[\gamma] = \left[\frac{\text{masa}}{\text{czas}} \right] \quad 4.2$$

Równanie ruchu przyjmie postać

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma \dot{x} \quad 4.3$$

Równanie powyższe zapisuje się zwykle w postaci

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad 4.4$$

gdzie

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m} \quad 4.5$$

Widać, że parametr τ ma wymiar czasu.

$$[\tau] = [\text{czas}] \quad 4.6$$

Równanie (4.4) zostało rozwiązane w (§DF 2.3.2). Rozwiązanie ma postać

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad 4.7$$

W rozwiązaniu (4.7) użyta jest częstość ω , a nie ω_0 , która wyznacza częstość tego samego oscylatora ale bez tłumienia ($\gamma=0$). Inne oznaczenie na częstość wynika z tego, że nie możemy z góry założyć, że oscylator tłumiony będzie drgał z tą samą częstością co nietłumiony.

Sprawdzę poprawność rozwiązania (4.7) w przypadku gdy $\varphi=0$, co odpowiada warunkom początkowym zdefiniowanym przez wzory (DF 2.3.26).

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = A\omega \quad 4.8a$$

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t) \quad 4.8$$

Wyznaczamy prędkość i przyspieszenie. Prędkość wyrazi się wzorem

$$\dot{x} = Ae^{-\beta t} [\omega \cos(\omega t) - \beta \sin(\omega t)] \quad 4.9a$$

a przyspieszenie

$$\ddot{x} = -A\beta e^{-\beta t} [\omega \cos(\omega t) - \beta \sin(\omega t)] + Ae^{-\beta t} [-\omega^2 \sin(\omega t) - \beta \omega \cos(\omega t)] \quad 4.9b$$

Po wstawieniu wzoru na prędkość (4.9a) i przyspieszenie (4.9b), oraz położenie (4.8) do równania ruchu (4.4), otrzymujemy nieco przydługie wyrażenie

$$\begin{aligned} -A\beta e^{-\beta t} [\omega \cos(\omega t) - \beta \sin(\omega t)] \\ + Ae^{-\beta t} [-\omega^2 \sin(\omega t) - \beta \omega \cos(\omega t)] \\ + \frac{1}{\tau} Ae^{-\beta t} [\omega \cos(\omega t) - \beta \sin(\omega t)] \\ + \omega_0^2 Ae^{-\beta t} \sin(\omega t) = 0 \end{aligned} \quad 4.10$$

Równanie (4.10) musi być spełnione dla każdej chwili t , a jest to możliwe tylko wtedy, gdy współczynniki przy cosinusach i sinusach są równe zero. Zbierzmy współczynniki przy funkcjach $\cos(\omega t)$ i $\sin(\omega t)$.

$$-A\omega\beta e^{-\beta t} - A\beta\omega e^{-\beta t} + \frac{1}{\tau} A\omega^2 e^{-\beta t} = 0 \quad 4.11a$$

$$A\beta^2 e^{-\beta t} - A\omega^2 e^{-\beta t} - \frac{1}{\tau} A\beta e^{-\beta t} + \omega_0^2 Ae^{-\beta t} = 0 \quad 4.11b$$

Po uproszczeniach mamy

$$-2\omega\beta + \frac{\omega}{\tau} = 0 \quad 4.12a$$

$$\beta^2 - \omega^2 - \omega_0^2 - \frac{\beta}{\tau} = 0 \quad 4.12b$$

Z równania (4.12a) otrzymamy

$$\beta = \frac{1}{2\tau} \quad 4.13a$$

Co po podstawieniu do (4.12b) daje

$$\frac{1}{4\tau^2} - \omega^2 - \omega_0^2 - \frac{1}{2\tau^2} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 \quad 4.14$$

Ostatni wzór można zapisać w postaci

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2} \quad 4.15$$

Zatem rozwiązanie równania ruchu drgań tłumionych (4.7), przy warunku $\varphi=0$ ma rozwiązanie:

$$x(t) = A \exp\left\{-\frac{t}{2\tau}\right\} \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2}\right) \quad 4.16$$

Zdefiniuję funkcję

$$f(t) = A e^{-\beta t} \quad 4.17$$

Funkcja ta pozwala na zapisanie rozwiązania (4.16) w postaci

$$x(t) = f(t) \sin\left(\omega_0 t \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\omega_0\tau}\right)^2}\right) \quad 4.18$$

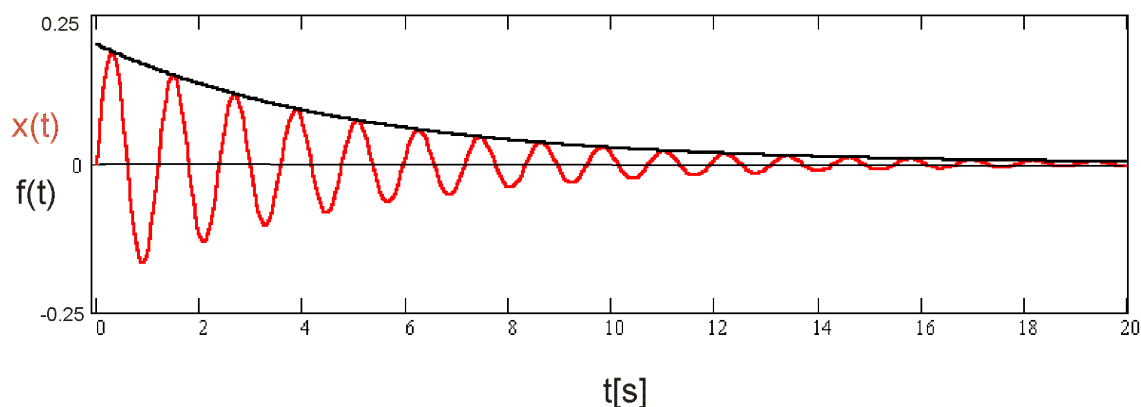
Dla przykładu przyjmę, że

$$m = 0,1 \text{ kg}; \quad k = 3 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}; \quad \gamma = 0,04 \frac{\text{kg}}{\text{s}}; \quad A = 0,2 \text{ m} \quad 4.19a$$

Wtedy

$$\tau = 2,5 \text{ s}; \quad \beta = 0,2 \frac{1}{\text{s}} \quad 4.19b$$

Rysunek (4.1) przedstawia wykres drgań harmoniczych z tłumieniem dla parametrów danych przez wzory (4.19). Czarna linia jest wykresem funkcji (4.17), która mnoży funkcję sinus. Funkcja sinus przyjmuje wartości z przedziału $[-1; 1]$, tak więc funkcja $f(t)$ będzie wyznaczała spadek amplitudy (to jest maksymalnego wychylenia) drgań. Funkcję spełniającą taką rolę będziemy nazywali obwiednią amplitudy drgań.



Rysunek 4.1. Czerwony wykres przedstawia przebieg drgań harmoniczych tłumionych o parametrach danych wyrażeniem (4.19a). Czarny wykres przedstawia przebieg obwiedni $f(t)$ amplitudy drgań.

Współczynnik τ nazywany jest czasem relaksacji. Czas relaksacji mówi jak szybko zanikają drgania. Z teoretycznego punktu widzenia amplituda drgań opisana wzorem (4.14) spada do zera po nieskończonym czasie. W praktyce od

pewnej skończonej chwili możemy uznać, że amplituda drgań jest równa zeru. Słowem nasze rozwiązanie nie stosuje się dla czasów wyraźnie większych od czasu relaksacji. Zastępujemy je wtedy stwierdzeniem: „oscylator się zatrzymał”. Dlaczego tak się dzieje? Każdy realny oscylator tłumiony podlega licznym słabym czynnikom zewnętrznym, które zwykle można pominąć w jego analizie. Te zaniedbane drobne czynniki nabierają znaczenia gdy amplituda drgań staje się mała i powodują, że oscylator zatrzymuje się w czasie zdecydowanie krótszym od nieskończonego. Aby je uwzględnić musielibyśmy napisać nowe równanie ruchu, które uwzględni te drobne wpływy i je rozwiązać. Dostalibyśmy inne rozwiązanie. To inne rozwiązanie byłoby dokładniejsze, ale jak to zwykle bywa, trudniejsze do uzyskania i analizy. A ponieważ drobne ruchy oscylatora zwykle nas nie interesują, a nawet zwykle ich nie zauważamy wolimy stwierdzić: „oscylator się zatrzymał”, zamiast dochodzić do tego wniosku na bazie bardzo złożonej i kłopotliwej analizy.

Musimy precyzyjniej zinterpretować czas relaksacji τ . Podstawię we wzorze (4.17) $t = \tau$. Wtedy, mając na uwadze (4.13a) mogę zapisać

$$f(\tau) = Ae^{-\beta\tau} = Ae^{-\frac{1}{2}} = \frac{A}{\sqrt{e}} \quad 4.20$$

Czyli po czasie τ , amplituda drgań spada pierwiastek z e razy. Ponieważ energia drgań jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy drgań, po czasie τ energia drgań spada e razy.

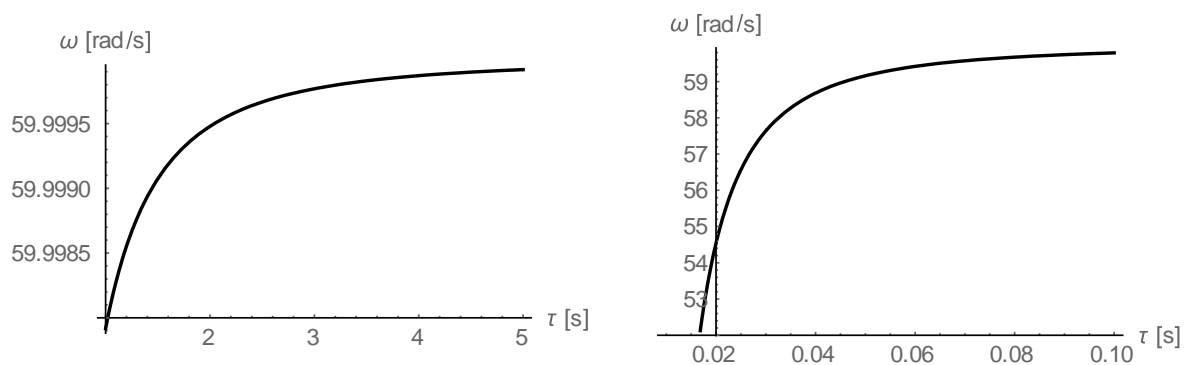
Ze wzoru (4.15) wynika, że częstość oscylatora nietłumionego ω_0 jest większa niż częstość oscylatora tłumionego ω . Częstość oscylatora tłumionego w zależności od czasu relaksacji τ , przedstawia rysunek (4.2). Jeżeli przyjmiemy, że

$$\omega_0\tau \gg 1 \quad 4.21$$

jest to tzw. warunek słabego tłumienia, to możemy przyjąć, że $\omega \approx \omega_0$. Gdy układ spełnia warunek słabego tłumienia (4.21) rozwiązanie równania ruchu (4.16) możemy zapisać w postaci przybliżonej

$$x(t) = A \exp\left\{-\frac{t}{2\tau}\right\} \sin(\omega_0 t) \quad 4.22$$

Jeszcze jedna istotna uwaga. Analizę ruchu oscylatora tłumionego przeprowadziliśmy dla siły oporu ruchu daną wzorem (4.1). Na oscylatory mogą działać siły innej postaci. Wtedy musimy napisać nowe równanie ruchu i je rozwiązać. Zbadany tu przypadek jest bardzo ważny i najczęściej spotykany ale nie wyczerpuje tematu.



Rysunek 4.2. Zależność częstości ω drgań tłumionych od wartości czasu relaksacji τ . Częstość oscylatora nietłumionego wynosi $\omega_0=60\text{rad/s}$. Wykres z lewej strony narysowany jest dla czasów relaksacji o wartości od jednej do pięciu sekund. Widać, że wartości częstości ω są bardzo bliskie wartości ω_0 . Wykres z prawej strony narysowany jest dla czasów relaksacji o wartości od jednej setnej do jednej dziesiątej sekundy. W tym przedziale różnice między ω i ω_0 są bardziej znaczące.

4.1. Moc tracona ♣

Opory ruchu powodują, że każde wahadło w końcu się zatrzymuje. Oznacza to, że energia zgromadzona w układzie drgającym wycieka z niego do otoczenia. Policzę szybkość utraty energii przez wahadło z tłumieniem liniowo proporcjonalnym do prędkości. Ograniczę się do układów spełniających warunek słabego tłumienia (4.21). Utrata energii wiąże się z jej wydatkowaniem na pokonanie oporów ruchu. Jej wartość możemy policzyć jako pracę wykonaną przez układ, przeciw sile tarcia. W pierwszym kroku zamiast pracy obliczę moc P tej siły. Skorzystam ze wzoru.

$$P = -F_T \dot{x} \quad 4.1.1.$$

Siła F_T dana jest wzorem (4.1). Znak minus oznacza, że obliczam moc siły wykonującej pracę przeciw sile tarcia. Prędkość ciała obliczę ze wzoru (4.22)

$$\dot{x} = -\frac{1}{2\tau} A \exp\left\{-\frac{t}{2\tau}\right\} \sin(\omega_0 t) + \omega_0 A \exp\left\{-\frac{t}{2\tau}\right\} \cos(\omega_0 t) \quad 4.1.2$$

Wstawiając wyrażenie (4.1) i (4.1.2) do wzoru (4.1.1) otrzymuję wyrażenie

$$P = -\gamma A^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \left[-\frac{1}{2\tau} \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \cos(\omega_0 t)\right]^2 \quad 4.1.3$$

Wyrażenie (4.1.3) jest na tyle złożone, że jego dalsza analiza byłaby trudna. W takiej sytuacji trzeba się zastanowić, czy kłopotliwego wzoru nie da się rozsądnie uprościć. W przypadku słabego tłumienia jest to możliwe. Przy słabym tłumieniu, odwrotność czasu relaksacji τ jest dużo mniejsza od częstości ω_0 (zobacz 4.21), w efekcie sinus (mnożony przez odwrotność τ) jest dużo mniejszy

od cosinusa (mnożonego przez ω_0). Przy warunku słabego tłumienia wkład funkcji sinus mogą pominąć. Pozostaje wyrażenie

$$P = -\gamma A^2 \omega_0^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \cos^2(\omega_0 t) \quad 4.1.4$$

Wyrażenie to mówi jaką moc traci układ drgający w danej chwili t . Moc wydzielana w układzie zmienia się w czasie. W momencie największego wychylenia prędkość ciała drgającego jest równa zero; zero jest również równa wydzielana w tym momencie moc. Gdy ciało przechodzi przez położenie równowagi jego prędkość jest największa – moc wydzielana jest również największa. Aby uniknąć drobiazgowego wchodzenia w te zmiany, często operuje się pojęciem średniej energii traconej na jeden okres. Praca wykonana w czasie jednego okresu wyniesie

$$W = \int_0^T P dt = -\gamma A^2 \omega_0^2 \int_0^T \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \cos^2(\omega_0 t) dt \quad 4.1.5$$

Mało zachęcająca całka. Ale powiedzmy tak: chcemy policzyć energię rozproszoną w czasie jednego okresu w przypadku słabego tłumienia. Przy słabym tłumieniu, jak widać z rysunku (4.1), w czasie jednego okresu amplituda drgań zmienia się bardzo niewiele. Możemy uznać, że w czasie jednego okresu czynnik z funkcją eksponent, odpowiedzialny za spadek amplitudy, jest stały i wyciągnąć go przed znaki całki

$$W = -\gamma A^2 \omega_0^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \int_0^T \cos^2(\omega_0 t) dt \quad 4.1.6$$

Ostatnią całkę można znaleźć w tablicach lub obliczyć za pomocą programu CAS. W programie Mathematica wygląda to tak

<code>Integrate[(Cos[$\omega_0 t$])², {t, 0, T}]</code>	Instrukcja całkowania, po zmiennej t , kwadratu cosinusa w przedziale od zero do T
$\frac{2T\omega_0 + \sin[2T\omega_0]}{4\omega_0}$	Wynik całkowania
M.4.1.1. Całkowanie funkcji \cos^2	

Wyrażenie (4.1.6) przyjmie postać

$$W = -\gamma A^2 \omega_0^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \frac{2T\omega_0 + \sin(2T\omega_0)}{4\omega_0} \quad 4.1.7$$

Skorzystam z faktu, że

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad 4.1.8$$

Teraz wzór (4.1.7) przyjmie postać

$$W = -\frac{1}{2}\gamma A^2 T \omega_0^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \quad 4.1.9$$

Jeżeli liczymy wartość średnią energii traconej w czasie jednego okresu, to wynik (4.1.9) wypadałoby podzielić przez długość tego okresu.

$$\langle W \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = -\frac{1}{2}\gamma A^2 \omega_0^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} = -\frac{m}{2\tau} A^2 \omega_0^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \quad 4.1.10$$

Tutaj ostre nawiasy $\langle \rangle$ oznaczają wielkość średnią; w tym wypadku średnią energię traconą w czasie jednego okresu T . Skorzystałem nadto z wzoru (4.5).

Potrzebna nam będzie jeszcze średnia energia zgromadzona w układzie drgającym. Ponieważ amplituda drgań maleje w czasie, maleje również energia oscylatora. Z wcześniejszych rozważań wiemy, że energia całkowita E_c jest równa sumie energii kinetycznej E_k i potencjalnej E_p (1.1.7). Z tego mamy wzór

$$\langle E_c \rangle_T = \langle E_k + E_p \rangle_T = \langle E_k \rangle_T + \langle E_p \rangle_T \quad 4.1.11$$

Średnia energia kinetyczna wyrazi się wzorem

$$\langle E_k \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T E_k dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m \dot{x}^2 dt = \frac{m}{2T} \int_0^T \dot{x}^2 dt \quad 4.1.12$$

Korzystając ze wzoru (4.8) mamy

$$\langle E_k \rangle_T = \frac{m}{2T} \int_0^T (Ae^{-\beta t} [\omega_0 \cos(\omega_0 t) - \beta \sin(\omega_0 t)])^2 dt \quad 4.1.13$$

Podstawiłem $\omega \rightarrow \omega_0$, gdyż dalej zakładamy przypadek słabego tłumienia. Teraz postępujemy tak jak z wyrażeniem (4.1.5), w efekcie czynnik z eksponentem możemy wyłączyć przed znak całki.

$$\langle E_k \rangle_T = \frac{m}{2T} A^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \int_0^T \left(\omega_0 \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2\tau} \sin(\omega_0 t) \right)^2 dt \quad 4.1.14$$

a czynnik z funkcją sinus zaniedbać.

$$\langle E_k \rangle_T = \frac{m}{2T} \omega_0^2 A^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \int_0^T \cos^2(\omega_0 t) dt \quad 4.1.15$$

Postępując podobnie jak z wyrażeniem (4.1.6) mamy

$$\langle E_k \rangle_T = \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \quad 4.1.16$$

Czas na energię potencjalną. Wzór na energię potencjalną ma postać

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} \omega_0^2 m A^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \sin^2(\omega_0 t) \quad 4.1.17$$

Wyrażenie na średnią energię kinetyczną na okres ma postać

$$\langle E_p \rangle_T = \frac{1}{2} \omega_0^2 m A^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \int_0^T \sin^2(\omega_0 t) dt \quad 4.1.18$$

Ta całka liczy się dokładnie tak jak wyrażenie (4.1.15)

$$\langle E_p \rangle_T = \frac{1}{4} \omega_0^2 m A^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \quad 4.1.19$$

Wyrażenie na średnią energię całkowitą (4.1.11) przyjmie postać

$$\langle E_c \rangle_T = \langle E_k \rangle_T + \langle E_p \rangle_T = \frac{1}{2} \omega_0^2 m A^2 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \quad 4.1.20$$

Porównanie wzorów (4.1.10) i (4.1.20) pozwala zapisać nowy wzór na średnią moc traconą

$$\langle W \rangle_T = -\frac{\langle E_c \rangle_T}{\tau} \quad 4.1.21$$

Często używanym parametrem charakteryzującym oscylator z tłumieniem jest jego dobroć Q . Współczynnik dobroci zdefiniowany jest jako

Definicja 4.1.1: Współczynnik dobroci

Współczynnik dobroci jest równy stosunkowi energii zmagazynowanej, w czasie jednego okresu drgań do średniej energii traconej w czasie jednego okresu drgań pomnożonej przez 2π

$$Q = 2\pi \frac{\langle E_c \rangle_T}{\langle W \rangle_T T} = \frac{\langle E_c \rangle_T}{\langle W \rangle_T} \omega \quad 4.1.22$$

Korzystając z wyrażenia (4.1.21) oraz z faktu, że z założenia tłumienie jest słabe $\omega \approx \omega_0$ mamy

$$Q \approx \omega_0 \tau \quad 4.1.23$$

Jeżeli pomnożymy częstość ω_0 przez czas relaksacji τ , to otrzymamy liczbę radianów jakie „przebędzie” oscylator w czasie τ . Odwracając sprawę możemy stwierdzić, że dobroć mówi ile radianów musi przebyć układ drgający aby energia

drgań spadła e razy. Dzieląc dobroć Q przez 2π otrzymamy liczbę pełnych drgań po których energia oscylatora spadnie e razy.

Ocena czy dobroć układu drgającego powinna być duża czy mała zależy od konkretnej sytuacji. Na przykład w przypadku drgań sejsmicznych życzylibyśmy sobie aby dobroć skorupy ziemskiej była jak najmniejsza. Tabela (4.1). przedstawia wartości dobroci dla wybranych układów drgających. Z tabeli widać, że energia drgań struny fortepianowej obniża się e razy po około 160 pełnych cyklach. Dobroć skorupy ziemskiej silnie zależy od jej lokalnej budowy geologicznej – stąd duży wachlarz wartości jakie może przyjmować dobroć.

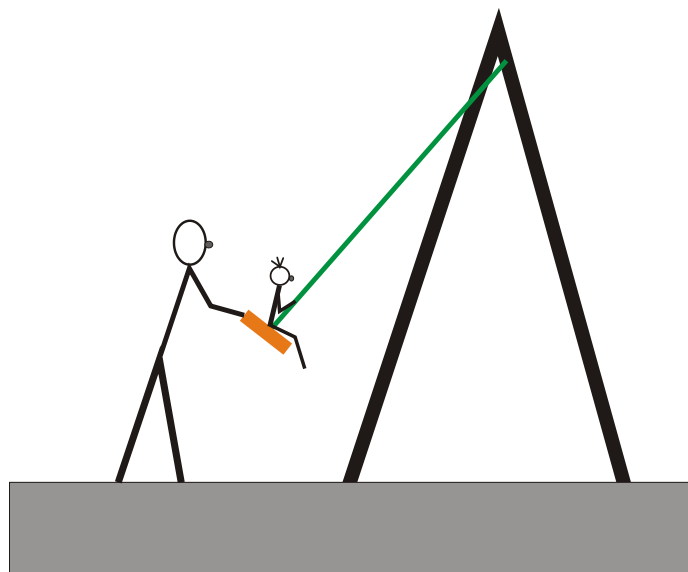
Układ	Dobroć Q
skorupa ziemska dla fal sejsmicznych	250-1400
rezonator mikrofal z wnęką z miedzi	10000
struna fortepianu lub skrzypiec	1000
wzbudzony atom	10^7
wzbudzone jądro ^{57}Fe	$3 \cdot 10^{12}$

Tabela 4.1. Wartość dobroci Q dla wybranych układów drgających

Nie należy wyników przedstawionych w tej części traktować, jak ogólnego przypadku analizy oscylatora harmonicznego z tłumieniem. Uzyskane wyniki zostały uzyskane dla szczególnego modelu siły oporu (4.1). Jest to przypadek ważny, z punktu widzenia praktycznych zastosowań, ale nie wyczerpuje wszystkich praktycznie istotnych wariantów oporów ruchu.

5. Drgania wymuszone ♦

Z faktem rozpraszania energii oscylatora (tłumienia drgań) wiąże się konieczność uzupełniania tej energii; oczywiście w tych przypadkach, w których zależy nam na podtrzymaniu drgań. Z problemem tym spotkali się konstruktorzy zegara z wahadłem. Do układu drgającego musimy wprowadzić siłę wymuszającą, która może uzupełnić rozpraszaną energię.



Rysunek 5.1. Tata huśtający dziecko działa jak generator drgań. Dobierając odpowiednio moment pchnięć w stosunku do ruchu huśtawki, może łagodnie rozhuścić dziecko, a następnie podtrzymywać rozhuśtaną huśtawkę w ruchu (uzupełnianie rozpraszanej energii)

Tata huśtający dziecko (rys. 5.1.), jeżeli chce utrzymać huśtawkę w ruchu, musi ją popychać – jest generatorem impulsowym, czyli takim, który włącza się na krótką chwilę przy odpowiednim położeniu huśtawki. My zajmiemy się generatorami harmonicznymi, których działanie opisuje wzór

$$F = F_0 \sin(\omega t) \quad 5.1$$

Równanie ruchu oscylatora harmonicznego z harmoniczną siłą wymuszającą przyjmie postać

$$F_0 \sin(\omega t) = m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} \quad 5.2$$

Wprowadzę oznaczenie

$$\alpha_0 = \frac{F_0}{m} \quad 5.3$$

co przy uwzględnieniu (4.5), pozwala zapisać (5.2) w postaci

$$\alpha_0 \sin(\omega t) = \ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x \quad 5.4$$

Ponieważ układ musi poddać się działającej sile wymuszającej możemy się spodziewać, że rozwiązanie tego równania ruchu ma postać (bardziej systematyczne rozwiązanie znajdziesz w dodatku (DF 2.3.2))

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad 5.5$$

Zbadam jakie warunki nałożone są na A i φ . W pierwszym kroku obliczę pierwszą i drugą pochodną x .

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad 5.6a$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \quad 5.6b$$

Wstawię to wyrażenie do równania ruchu (5.4)

$$\alpha_0 \sin(\omega t) = (\omega_0^2 - \omega^2) A \sin(\omega t + \varphi) + \frac{\omega}{\tau} A \cos(\omega t + \varphi) \quad 5.7$$

Korzystając z tożsamości trygonometrycznych mogę napisać

$$\begin{aligned} & \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\varphi) - \frac{\omega}{\tau} \sin(\varphi) \right] A \sin(\omega t) \\ & + \left[(\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\varphi) + \frac{\omega}{\tau} \cos(\varphi) \right] A \cos(\omega t) \\ & = \alpha_0 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad 5.8$$

To równanie może być spełnione tylko wtedy, gdy współczynnik przy funkcji $\cos(\omega t)$ jest równy zero a współczynnik przy funkcji $\sin(\omega t)$ jest równy α_0 .

$$\left[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\varphi) - \frac{\omega}{\tau} \sin(\varphi) \right] A = \alpha_0 \quad 5.9a$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\varphi) + \frac{\omega}{\tau} \sin(\varphi) = 0 \quad 5.9b$$

Z warunku (5.9b) mamy

$$-\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} = \tan(\varphi) \quad 5.10$$

Z warunku (5.9a) mamy

$$A = \frac{\alpha_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\varphi) - \frac{\omega}{\tau} \sin(\varphi)} \quad 5.11$$

Ze wzorów (5.9) możemy wyznaczyć wzory na $\sin(\varphi)$ i $\cos(\varphi)$

$$\cos(\varphi) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \quad 5.12a$$

$$\sin(\varphi) = -\frac{\omega/\tau}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \quad 5.12b$$

Wzór (5.11) na amplitudę A przyjmuje postać

$$A = \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \quad 5.13$$

Mając wzory (5.10) i (5.13), rozwiązanie (5.5) równania ruchu oscylatora z harmoniczną siłą wymuszającą (5.4) mogą zapisać w postaci

$$x(t) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \sin\left(\omega t + \underbrace{\arctan\left(-\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}_{\varphi}\right) \quad 5.14$$

Możemy teraz przystąpić do analizy otrzymanego rozwiązania. Zaczę od interpretacji czynnika fazowego φ . Wyznacza on przesunięcie w fazie między maksymalnym przemieszczeniem a maksymalną siłą. Dla siły wymuszającej (5.1) przesunięcie początkowe φ_p przyjęliśmy za równe zero

$$F = F_0 \sin(\omega t + (\varphi_p = 0)) \quad 5.15$$

W rozwiązaniu (5.5) uwzględniłem fakt, że maksimum siły wymuszającej może przypadać w innym momencie czasu niż maksymalne wychylenia układu drgającego; w rozwiązaniu pojawiło się dodatkowe przesunięcie fazy φ . Oznacza to, że w przypadku oscylatora wymuszonego siłą wymuszająca nie musi przybierać maksymalnej wartości przy maksymalnego wychylenia. Przyjrę się przypadkom szczególnym.

Przypadek pierwszy

Założmy, że siła wymuszająca ma małą częstość w porównaniu z częstością własną układu drgającego $\omega \ll \omega_0$. Wtedy wzór (5.10) przyjmie postać

$$\tan(\varphi) = -\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} \approx 0 \quad 5.16a$$

Wartości funkcji sinus i cosinus wynoszą:

$$\sin(\varphi) \approx 0 \text{ oraz } \cos(\varphi) = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \quad 5.16b$$

Czyli, dla częstości siły wymuszającej znacznie mniejszej od częstości własnej oscylatora siła i wychylenie są zgodne w fazie. Wzór na amplitudę przyjmuje postać

$$A \approx \frac{F_0}{k} \quad 5.17$$

Przypadek ten odpowiada tatusiowi, który chce bardzo wolno huścić dziecko, znaczenie wolniej niż wynosi częstość własna huśtawki. Aby to zrobić tatuś musi chwycić huśtawkę i cały czas ją prowadzić. W położeniu największego wychylenia wysiłek tatusia jest największy, a w położeniu równowagi najmniejszy – stąd przesunięcie fazowe między siłą i wychyleniem wynosi zero, $\varphi=0$. Między układem drgającym, a siłą wymuszającą drgania harmoniczne (def. 1.3.) nie ma, w tym przypadku, harmonijnej współpracy. Przy wolnym przemieszczaniu huśtawki przyspieszenia z tym związane są małe, w efekcie siła bezwładności ma mały wpływ na dynamikę układu drgającego. Dominuje siła wymuszająca drgania wahadła swobodnego, co ma swoje odzwierciedlenie we wzorze (5.17). Amplituda drgań, a zatem energia zgromadzona w układzie drgającym, w zanedbywalnym stopniu zależy od masy (masa to bezwładność), silnie natomiast zależy od współczynnika k .

Przypadek drugi

Założmy, że siła wymuszająca ma dużą częstość w porównaniu z częstością własną układu drgającego $\omega \gg \omega_0$. Wtedy mamy wyrażenie

$$\tan(\varphi) = -\frac{\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} \approx -1 \quad 5.18a$$

Jednocześnie

$$\cos(\varphi) = 0; \quad \sin(\varphi) = 0 \quad \text{oraz} \quad \varphi \approx -\pi \quad 5.18b$$

W tym przypadku wychylenie opóźnia się w stosunku do siły o pół okresu. Mamy ponadto

$$A \approx \frac{\alpha_0}{\omega^2} = \frac{F_0}{M \omega^2} \quad 5.19$$

Na wartość amplitudy duży wpływ ma masa układu, czyli jego bezwładność. Tu mamy do czynienia z tatusiem, który już od ponad roku sumiennie ćwiczy w klubie miłośników wielkich mięśni. Nie podoba mu się, że huśtawka waha się tak powoli. Chce aby jej częstość była znacznie większa od częstości własnej. Wyobraź go sobie. Huśtawka właśnie dochodzi do maksymalnego wychylenia powiedzmy do przodu. Ale tatuś uważa, że już dawno powinna wracać do położenia równowagi. Więc ciągnie ją energicznie w przeciwną stronę – stąd to duże przesunięcie fazy między siłą a wychyleniem. Gwałtowne zmiany prędkości, jakie mają miejsce przy szybkich wahaniami oznaczają duże przyspieszenia. Dlatego tak bardzo odczuwalny jest opór materii na przyspieszenie, czyli jej

bezwładność. Widać to we wzorze (5.19), gdzie masa układu jest w mianowniku, a stała sprężystości może być pominięta.

Przypadek trzeci

Niech teraz $\omega \approx \omega_0$. W tym przypadku

$$\cos(\varphi) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \approx 0 \quad 5.20a$$

$$\sin(\varphi) = \frac{-\omega/\tau}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \approx -1 \quad 5.20b$$

Oznacza, to że $\varphi \approx -\pi/2$. Maksimum siły wyprzedza maksimum wychylenia o 90° . Amplituda przyjmuje wartość

$$A = \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \approx \frac{\alpha_0 \tau}{\omega} \quad 5.21$$

Przypominam, że opory ruchu maleją dla $\tau \rightarrow \infty$, a co za tym idzie amplituda rośnie, i to do nieskończoności. Gdy $\omega \approx \omega_0$ mówimy, że występuje zjawisko rezonansu, które jak już wspominałem, ma ogromne znaczenie w technice i nauce. Teraz tatuś to inteligent. Obce jest mu używanie brutalnej siły. On woli kompromis i działanie inteligentne. Dogaduje się więc z huśtawką w sprawie częstości drgań. Dzięki temu może spokojnie pompować energię do huśtawki. W momencie gdy huśtawka dojdzie do maksymalnego wychylenia on zaczyna ją pchać w kierunku zgodnym z ruchem powrotnym. Stąd przesunięcie siły względem położenia o czwartą część okresu. Dalszą historię już znasz. Tatusia blokuje tylko tarcie. Kiedy energia wpompowana przy pojedynczym pchnięciu jest równa energii rozproszonej przez tarcie w czasie jednego okresu huśtawka nie zwiększa swojej amplitudy.

Uwaga 5.1

Przykłady z tatusiem nie do końca odpowiadają obliczonemu przykładowi z harmoniczną siłą wymuszającą. Po prostu tatuś taką siłą działać nie potrafi i co ważne nie musi (jest generatorem impulsowym). Nie mniej jakościowo wnioski w przypadku tatusia i harmonicznego wymuszania są podobne w swym charakterze.

Dlaczego między siłą a wychyleniem jest przesunięcie w fazie o $-\pi/2$? Rezonans oznacza maksymalnie efektywne pompowanie energii do układu drgającego, a moc jest iloczynem siły i prędkości $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Prędkość jest maksymalna w położeniu równowagi i tam warto działać największą siłą, bo wtedy moc wpompowana w układ jest największa. Gdyby największa siła działała

przy największym wychyleniu, gdy prędkości spada do zera, to wtedy moc przekazywana do układu drgającego byłaby równa zero.

Zjawisko rezonansu stowarzyszone jest z efektem pompowania energii do układu drgającego. Amplituda dana wzorem (5.21) jest maksymalną wartością amplitudy, dla danego układu drgającego. Jest to wartości amplitudy w momencie kiedy energia pompowana przez źródło jest równa energii rozpraszanej przez układ drgający. Teoretycznie rzecz biorąc, kiedy nie ma sił tarcia amplituda drgań rośnie z każdym kolejnym okresem w nieskończoność. Układ nigdy nie osiąga stanu równowagi. W praktyce nie jest możliwa budowa takiego układu. W rzeczywistych układach zawsze mamy do czynienia ze stratami energii. A jeżeli uda nam się mocno zredukować te straty to trafimy na inny problem. Konstrukcja układu może nie wytrzymać rosnącej z każdym okresem energii zmagazynowanej w układzie – w efekcie układ drgający może ulec zniszczeniu.

5.1. Moc pochłonięta ♣

Zajmę się energią pochłanianą przez układ drgający w czasie jednego cyklu drgań. Podobnie jak w przypadku drgań tłumionych, w pierwszym kroku policzę moc chwilową, tyle że teraz będzie to moc chwilowa generowana przez siłę wymuszającą. Energię pochłanianą wyznaczę dla stanu ustalonego oscylatora, to znaczy stanu, w którym ilość wpompowanej energii jest równa ilości rozproszonej energii przez tarcie. Oznacza to, że mogę ograniczyć się do liczenia mocy rozpraszanej na jeden cykl. Moc chwilowa jest równa sile przemnożonej przez prędkość ciała drgającego (4.1.1). Prędkość ciała drgającego obliczamy ze wzoru (5.14)

$$\dot{x}(t) = \frac{\alpha_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad 5.1.1$$

Podstawiając to wyrażenie, oraz wyrażenie na siłę (5.1) do wzoru (4.1.1) otrzymujemy

$$P_{ch} = \frac{M \alpha_0^2 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \sin(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \quad 5.1.2$$

Żeby obliczyć wartość pochłoniętej energii musimy moc chwilową pomnożyć przez czas, w którym ta moc jest absorbowana. To proste - prawda? Moc daje nam pojęcie o prędkości przepływu energii. Jak mamy prędkość i czas i chcemy obliczyć drogę (czyli całość przetransportowanej energii) to mnożymy tą prędkość przez ten czas. Tyle tylko, że w naszym przypadku prędkość nie jest jednostajna. Więc obliczenia wymagają całkowania. Nas jednak interesuje energia pochłonięta w czasie jednego okresu. Więc wprowadzę pojęcie średniej mocy absorbowanej w czasie jednego okresu (średnią mocą posługiwałem się również w przypadku drgań tłumionych). Jak wszystkie średnie, średnia moc

absorbowana w czasie jednego okresu jest to taka moc, która pomnożona przez czas jednego okresu jest równa energii zaabsorbowanej w czasie jednego okresu.

Rachunki prowadzimy podobnie jak w przypadku drgań tłumionych. Gdy już przez nie przejdziemy otrzymamy następujący wynik

$$P_T = \frac{1}{2} M \alpha_0^2 \frac{\frac{\omega^2}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2} \quad 5.1.3$$

Jest to jeden z ważniejszych wzorów teorii drgań. Przypomnę jeszcze raz co ten wzór oznacza. Jest to średnia moc absorbowana przez układ drgający, pobudzany harmonicznym, w czasie jednego okresu (w stanie ustalonym). Przy rezonansie ($\omega_0 = \omega$) średnia moc absorbowana wynosi

$$P_T = \frac{1}{2} M \alpha_0^2 \tau \quad 5.1.4$$

Ważne jest również aby pamiętać, że otrzymany wzór jest poprawny w przypadku, gdy tłumienie jest słabe (warunek 4.1). Nie zawsze jest to prawdziwe. Przy odpowiednio dużych prędkościach drgającego ciała opory ruchu rosną szybciej niż wynika to ze wzoru (4.1). Musimy wtedy określić wzór na opory ruchu na nowo i rozwiązać nową postać równania (5.1.4).

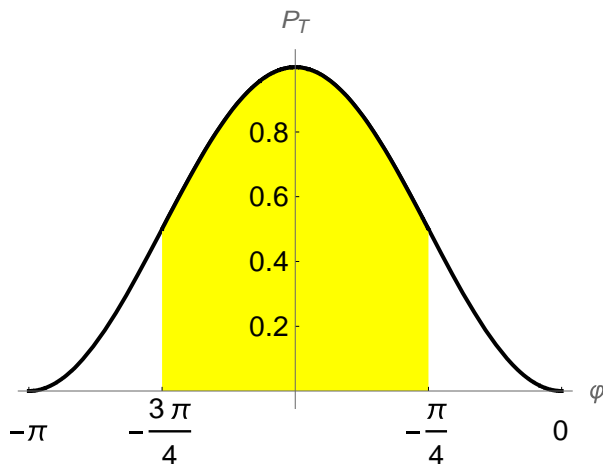
Mógłbym teraz wykreślić wartość mocy P_T jako funkcję częstości ω . Jednak zwykle robi to się inaczej – wykreśla się wartość mocy P_T w zależności od kąta przesunięcia fazowego φ . Nie jest to trudne, gdyż częstość i przesunięcie fazowe związane są zależnością (patrz wzory (5.12)).

$$\tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{1}{\text{ctg}(\varphi)} \quad 5.1.5$$

Korzystając z powyższego wyrażenia wzór (5.1.3) na średnią moc absorbowaną w czasie jednego okresu możemy zapisać w postaci

$$P_T = \frac{1}{2} M \alpha_0^2 \frac{C}{1 + \text{ctg}^2(\varphi)} \quad 5.1.6$$

Dobrym obyczajem przy rysowaniu wykresów tego typu zależności jest ich normowanie. Do tego celu służy stała C . Ma ona taką wartość, by największa wartość P_T wynosiła jeden. Dlaczego tak? Bo interesuje nas przebieg krzywej rezonansowej, a nie jej konkretna wartości dla danego kąta φ . A gdy będziemy potrzebowali konkretnej wartości to unormowaną funkcję wystarczy przemnożyć przez największą wartość funkcji nienormowanej, czyli podzielić przez stałą C . Rysunek (5.1.1) pokazuje przebieg unormowanej funkcji danej wzorem (5.1.6).



Rysunek 5.1.1. Unormowana krzywa absorpcji energii P_T na jeden okres w ruchu harmonicznym z wymuszeniem harmonicznym (5.4). Żółty obszar odpowiada wartościom kąta φ dla którego poziom absorpcji energii jest nie niższy niż $1/e$ wartości maksymalnej.

Kąt przesunięcia fazowego φ zależy od częstości ω siły wymuszającej (5.1.5). Dla częstości rezonansowej, gdy $\varphi = \pi/2$ absorbowana moc jest największa, czego należało się spodziewać. Dla wartości φ odchodzących od $\pi/2$ moc absorbowana maleje, chociaż działająca siła wymuszająca jest taka sama. Jednak im bardziej φ oddali się od $\pi/2$ tym w mniejszym stopniu częstość siły wymuszającej dopasowana jest do częstości własnej układu drgającego. W takiej sytuacji układ zachowuje się tak jak huśtawka napędzana ręką rozkojarzonego tatusia. Czasem pchnięcie tatusia dodaje huśtawki energii, a czasem tą energię obniża. Dla $\varphi = -\pi$ lub $\varphi = 0$ średnia energia absorbowana jest równa zero.

Zapytajmy teraz dla jakich wartości ω w porównaniu z częstością ω_0 moc absorbowana spada do połowy swojej największej wartości? Największą wartość moc absorbowana przyjmuje przy rezonansie. Bierzemy zatem połowę wartości mocy absorbowanej dla rezonansu (5.1.4) i przyrównujemy ją do wzoru na moc absorbowaną (5.1.3). W ten sposób mamy równanie

$$\frac{1}{4} M \alpha_0^2 \tau = \frac{1}{2} M \alpha_0^2 \frac{\omega^2 / \tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2} \quad 5.1.7$$

Stąd mamy

$$\frac{\omega}{\tau} = \omega_0^2 - \omega^2 = \underbrace{(\omega_0 - \omega)}_{\Delta\omega} (\omega_0 + \omega) \approx 2\omega_0 \Delta\omega \quad 5.1.8$$

Przybliżenie $\omega_0 \approx \omega$ bierze się stąd, że w praktyce, przy zachowaniu warunku słabego tłumienia krzywa rezonansowa jest w swej górnej połowie wąska. Zatem od ω_0 do częstości dla której krzywa spada do połowy jest „niedaleko”. Zauważ, że $\Delta\omega$ jest połową przedziału częstości od wartości rezonansowej do częstości, dla której moc absorbowana spada do połowy. Ze wzoru (5.1.8) mamy

$$\omega \approx 2\omega_0 \tau \Delta\omega = 2Q \Delta\omega \quad 5.1.9$$

W powyższym wzorze skorzystałem ze wzoru (4.1.23) na dobroć Q układu drgającego (przy słabym tłumieniu). Możemy teraz wyrazić szerokość półwkową przez dobroć układu drgającego

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q}$$

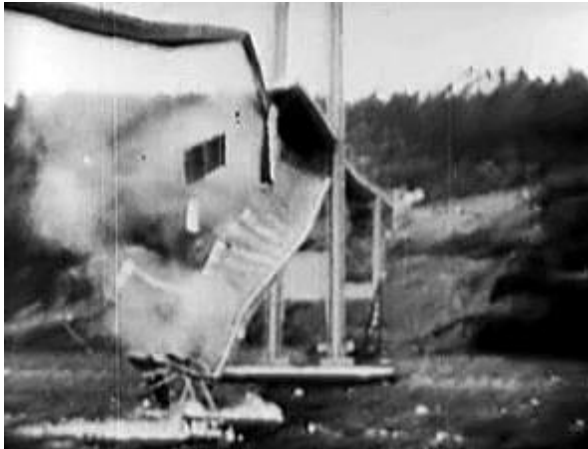
5.1.11

W praktyce często próbujemy dostroić siłę wymuszającą do częstości rezonansowej układu, gdyż pozwala nam to efektywnie pompować do układu energię. Nie zawsze udaje się wstrzelić idealnie w częstość rezonansową. Dobroć układu drgającego daje nam pojęcie o szerokości krzywej rezonansowej. Generalnie wyższa dobroć układu zmniejsza szerokość krzywej ale zwiększa moc absorbowaną przy rezonansie.

Skutki rezonansu mogą być zarówno pozytywne jak i negatywne. Skutki negatywne zwykle oznaczają wpompowanie niebezpiecznie dużej energii do jakiegoś istotnego układu. Szczególnie jest to odczuwalne tam, gdzie występują duże obciążenia. Na przykład silnik samolotu swą cykliczną pracą działa jak cykliczna siła wymuszająca drgania. Jeżeli częstość drgań wymuszanych jest bliska częstości drgań własnych innych podzespołów samolotu, a tłumienie tych drgań jest małe lot może zakończyć się tragicznie. Pozytywnie wykorzystujemy rezonans w telekomunikacji. Dostrojenie obwodu odbiornika do częstości nadajnika powoduje, że możemy odbierać wybraną stację radiową bez zakłóceń ze strony stacji pracujących na innej częstości. O rezonansie było przy omawianiu zjawiska Mösbauera (§TIV 6). Rysunki (TIV 6.4 i 6.9) pokazują w jakim zakresie częstości następuje efektywne pompowanie energii przez foton do jądra atomowego. Kształt tych krzywych jest taki sam jak krzywej (5.1.1). Nic w tym dziwnego są to przecież krzywe rezonansowe.

Zjawisko rezonansu nie ogranicza się tylko do drgań harmonicznym i harmonicznym sił wymuszających. Tatuś huśtający dziecko jest przykładem impulsowej siły wymuszającej. Przykładem nieharmonicznego układu drgającego są mosty. W 1826 roku oddano do użytku most Broughton nad rzeką Irwell w Anglii. W 1831 roku na most wkroczył oddział 72 żołnierzy. Żołnierze, jako to mają w zwyczaju, maszerowali zgodnym rytmem, rozhuśtując swoimi miarowymi krokami konstrukcję mostu. Słowem wstrzelili się w częstotliwość rezonansową mostu. W efekcie most się rozhuśtał i zawalił. Część żołnierzy odniosła obrażenia ale nikt nie zginął. W 1940 roku pod wpływem silnych podmuchów wiatrów rozhuśtał się a następnie zawalił most na rzece Tacoma w USA (rys. 5.2). Most huśtał się w złożony sposób i jego ruch nie dał się opisać prostym równaniem z jedną funkcją harmoniczną. Wiemy jednak, że zarówno ruch mostu jak i działanie siły wymuszającej można opisać za pomocą analizy fourierowskiej poprzez rozkład na funkcje harmoniczne. Jeżeli częstości występujące w rozkładzie fourierowskim funkcji wymuszającej i w układzie drgań własnych mostu pasują do siebie, a siły tłumienia są małe, w zakresie tych częstości następuje pompowanie energii do konstrukcji mostu. Każdy projektant mostów i innych budowli lub urządzeń musi być na takie problemy wyczulony. Nie zawsze się to udaje. Otwarta w czerwcu 2000 roku w Londynie kładka dla pieszych zaczęła niebezpiecznie drgać pod wpływem ruchu ludzi (rys. 5.3). Aby

uniknąć nieszczęścia, do czasu poprawienia konstrukcji kładki, ograniczono liczbę pieszych jaka mogła na niej przebywać.



Rysunek 5.2. Most w Tacoma zawałił się na skutek drgań pobudzonych przez silny wiatr w listopadzie 1940 roku; źródło Wikipedia.



Rysunek 5.3. Millenium Bridge w Londynie. Otwarty 10 czerwca 2000, został zamknięty 12 czerwca. Duży ruch pieszych (ok. 2000 osób na moście) powodował wzbudzenie silnych drgań konstrukcji mostu. Do czasu modyfikacji konstrukcji mostu (luty 2002) ruch pieszych był na moście limitowany; źródło Wikipedia.

5.2. Rezonans raz jeszcze ♣

Rezonans jest bardzo ważnym zjawiskiem i nie możemy się z nim tak łatwo rozstać. Przypomnę inną postać (1.15) rozwiązania równania ruchu drgań harmonicznym. W dalszej części, dla uproszczenia zapisu, będę pomijał kreski nad A i B . Przyjmujemy zatem, że rozwiązanie równania ruchu oscylatora harmonicznego ma postać.

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad 5.2.1$$

Postać równania na siłę wymuszającą F (5.1), uogólnię dodając dowolne przesunięcie fazowe. Dla urozmaicenia uzależnię siłę wymuszającą od funkcji cosinus.

$$F = F_0 \cos(\omega t + \delta_0) \quad 5.2.2$$

Równanie ruchu przyjmie postać

$$m\ddot{x} = -kx - m\Gamma\dot{x} + F_0 \cos(\omega t + \delta_0) \quad 5.2.3$$

W porównaniu z oznaczeniami przyjętymi wcześniej (4.1) i (4.3) dokonałem zamiany $\gamma \rightarrow \Gamma$

$$\gamma = m\Gamma \Rightarrow \Gamma = \frac{\gamma}{m} \quad 5.2.4a$$

Duże gamma to współczynnik oporu na jednostkę masy. Pozwoli mi to na symetryczny zapis wyrażen związanych z energią potencjalną i kinetyczną. Związek między czasem relaksacji a współczynnikiem Γ ma znaną (4.5) postać

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad 5.2.4b$$

równanie (5.2.3) mogę zapisać w postaci

$$\alpha_0 \cos(\omega t + \delta_0) = \omega_0^2 x + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \ddot{x} \quad 5.2.4$$

Wstawiając (5.2.1) do równania ruchu (5.2.3) otrzymamy warunki na A i B . Ale zanim dostaniemy te warunki muszą obliczyć pierwszą i drugą pochodną z $x(t)$.

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t) - B\omega \sin(\omega t) \quad 5.2.5a$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t) - B\omega^2 \cos(\omega t) \quad 5.2.5b$$

Dodatkowo lewą stronę równania (5.2.4) zapiszę w postaci

$$\alpha_0 \cos(\omega t + \delta_0) = \alpha_0 [\cos(\omega t) \cos(\delta_0) - \sin(\omega t) \sin(\delta_0)] \quad 5.2.6$$

Powstawiam teraz (5.2.5) oraz (5.2.6) do (5.2.4) i otrzymam długie wyrażenie, które napiszę tu od razu w formie uporządkowanej ze względu na wyrażenia stojące przy funkcjach $\sin(\omega t)$ i $\cos(\omega t)$

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) \left[\alpha_0 \cos(\delta_0) - B\omega_0^2 - \frac{A}{\tau} \omega + B\omega^2 \right] \\ + \sin(\omega t) \left[-\alpha_0 \sin(\delta_0) - A\omega_0^2 + \frac{B}{\tau} \omega + A\omega^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad 5.2.7$$

Rozumując podobnie jak w przypadku równania (5.8) stwierdzamy, że równanie powyższe może być spełnione tylko wtedy, gdy współczynniki przy funkcji $\cos(\omega t)$ i $\sin(\omega t)$ są równe zeru. Stąd mamy dwa równania

$$\alpha_0 \cos(\delta_0) + B(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{A}{\tau} \omega = 0 \quad 5.2.8a$$

$$-\alpha_0 \sin(\delta_0) - A(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{B}{\tau} \omega = 0 \quad 5.2.8b$$

Z równań tych wyznaczę współczynniki A i B . Z pierwszego równania mam

$$A = \frac{\tau}{\omega} [\alpha_0 \cos(\delta_0) + B(\omega_0^2 - \omega^2)] \quad 5.2.8c$$

$$B = \frac{\tau}{\omega} [\alpha_0 \sin(\delta_0) + A(\omega_0^2 - \omega^2)] \quad 5.2.8d$$

Podstawiając równanie (5.2.8c) do równania (5.2.8b) mam

$$-\alpha_0 \sin(\delta_0) - \frac{\tau}{\omega} \alpha_0 \cos(\delta_0) (\omega_0^2 - \omega^2) + B \left[\frac{\tau}{\omega} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega}{\tau} \right] = 0 \quad 5.2.8e$$

Stąd mogę wyliczyć współczynnik B

$$B = \frac{\alpha_0 \sin(\delta_0) \frac{\omega}{\tau} + \alpha_0 \cos(\delta_0) (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2} \equiv A_{el} \quad 5.2.9a$$

Podstawiając równanie (5.2.8d) do równania (5.2.8a) mam

$$\alpha_0 \cos(\delta_0) + \frac{\tau}{\omega} \alpha_0 \sin(\delta_0) (\omega_0^2 - \omega^2) + A \left[\frac{\tau}{\omega} (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{\omega}{\tau} \right] = 0 \quad 5.2.8f$$

Stąd mogę wyliczyć współczynnik A

$$A = \frac{\alpha_0 \frac{\omega}{\tau} \cos(\delta_0) + \alpha_0 \sin(\delta_0) (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2} \equiv A_{ab} \quad 5.2.9b$$

Gdy $\delta_0=0$ rozwiązanie (5.2.9a-b) upraszcza się do postaci

$$B = \frac{\alpha_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2} \equiv A_{el} \quad 5.2.10a$$

$$A = \frac{\alpha_0 \frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2} \equiv A_{ab} \quad 5.2.10b$$

Chwilę początkową możemy zawsze obrać tak, że $\delta_0=0$, więc ograniczę się do rozwiązań postaci (5.2.10).

We wzorach (5.2.9) i (5.2.10) wprowadziłem dwa nowe oznaczenia A_{ab} (amplituda absorpcyjna) i A_{el} (amplituda elastyczna). Korzystając z tych oznaczeń rozwiązanie równania ruchu (5.2.4) mogę zapisać w postaci

$$x(t) = A_{ab} \sin(\omega t) + A_{el} \cos(\omega t) \quad 5.2.11$$

Prędkość w tym ruchu wyraża się wzorem

$$\dot{x}(t) = A_{ab}\omega\cos(\omega t) - A_{el}\omega\sin(\omega t) \quad 5.2.12$$

Nazwa amplituda absorpcyjna dla wyrazu (5.2.10b) bierze się z faktu, że średnia moc absorbowana zależy tylko od tegoż wyrazu. Usredniona po czasie energia absorbowana przez wyraz A_{el} (5.2.10a) jest równa zero, czyli tyle ile energii „pochłonie” ta część wyrażenia na drgania wymuszone w jednej części cyklu tyle odda w jego drugiej części. Tak zachowuje się ciało doskonale elastyczne (np. doskonale elastyczna sprężyna) – stąd nazwa tego wyrazu: „amplituda elastyczna”. Uwaga: jest tak wtedy, kiedy harmoniczna siła wymuszająca zdefiniowana jest przez cosinus, przy takim dobraniu chwili początkowej, że $\delta_0=0$; ale to właśnie założyliśmy. Aby zobaczyć to zerownie mocy pochłoniętej przez część z A_{el} , zaczniemy od wyrażenia na moc chwilową układu

$$P(t) = F(t)\dot{x}(t) = F_0(A_{ab}\omega\cos^2(\omega t) - A_{el}\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t)) \quad 5.2.13$$

Moc średnią absorbowaną w czasie jednego okresu liczymy tak jak każdą średnią, to jest obliczamy sumę po przedziale (w naszym przypadku okresie) i dzielimy przez długość przedziału

$$P_T = \langle P(t) \rangle_T = \frac{F_0}{T} \int_t^{t+T} (A_{ab}\omega\cos^2(\omega t) - A_{el}\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t)) dt \quad 5.2.14$$

Tego typu całki już obliczałem (4.1.6). Przypomnę, że

$$\int_t^{t+T} \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}T; \quad \int_t^{t+T} \cos(\omega t)\sin(\omega t) dt = 0 \quad 5.2.15$$

Stąd mamy

$$P_T = \frac{1}{2}F_0\omega A_{ab} \quad 5.2.16$$

Co biorąc pod uwagę (5.2.10b) ma taką samą postać jak wzór (5.1.3). Pokazałem, że średnia moc absorbowana nie zależy od amplitudy elastycznej. Wykonując podobne rachunki do powyższych możemy to również pokazać obliczając usrednioną utratę energii kinetycznej na skutek tarcia

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \underbrace{M\Gamma\dot{x}(t)}_{F_{tarcia}} \dot{x}(t) dt = M\Gamma \langle \dot{x}^2(t) \rangle_T \\ &= \frac{1}{2}M\Gamma\omega^2(A_{ab}^2 + A_{el}^2) \end{aligned} \quad 5.2.17$$

Korzystając ze wzorów (5.2.10) można pokazać, że wzór (5.2.17) przekształca się w wzór (5.2.16). Jak należało się spodziewać, ponieważ zajmujemy się tu stanem stacjonarnym układu drgającego, średnia moc absorbowana musi być równa średniej mocy rozpraszanej na skutek sił oporu ruchu. Ponownie wykonując

podobne do powyższych rachunki można pokazać, że średnia energia zmagazynowana w układzie drgającym równa sumie średniej energii kinetycznej i potencjalnej wynosi.

$$E_T = \frac{1}{2} M \langle \dot{x}^2(t) \rangle_T + \frac{1}{2} M \omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle_T$$

$$= \frac{1}{4} M (\omega^2 + \omega_0^2) (A_{ab}^2 + A_{el}^2) \quad 5.2.18$$

Dla małych częstości siły wymuszającej $\omega \ll \omega_0$, w wyrażeniu (5.2.18) dominuje czynnik związany z energią potencjalną. Widać to ze wzoru (5.2.12) na prędkość, która jest proporcjonalna do częstości ω . W takim przypadku wychylenia są względnie duże a prędkości względnie małe (więc na przykład sprężyna się mocno rozciąga, co daje dużą zmianę energii potencjalnej). Dla dużych częstości wymuszających $\omega \gg \omega_0$ dominuje czynnik związany z energią kinetyczną. Przy dużej częstości ω wychylenia wahadła są względnie małe, a prędkości względnie duże. W stanie rezonansu $\omega = \omega_0$ uśredniona energia kinetyczna jest równa uśrednionej energii potencjalnej. Przy rezonansie średnia energia oscylatora (5.2.18) jest równa średniej energii traconej na okres, która dana jest wzorem (5.2.16).

Związki między amplitudą A (5.21) i amplitudami A_{ab} (5.2.10b) i A_{el} (5.2.10a) są takiej samej postaci jak (1.18)

$$A = \sqrt{A_{ab}^2 + A_{el}^2} \quad 5.2.17a$$

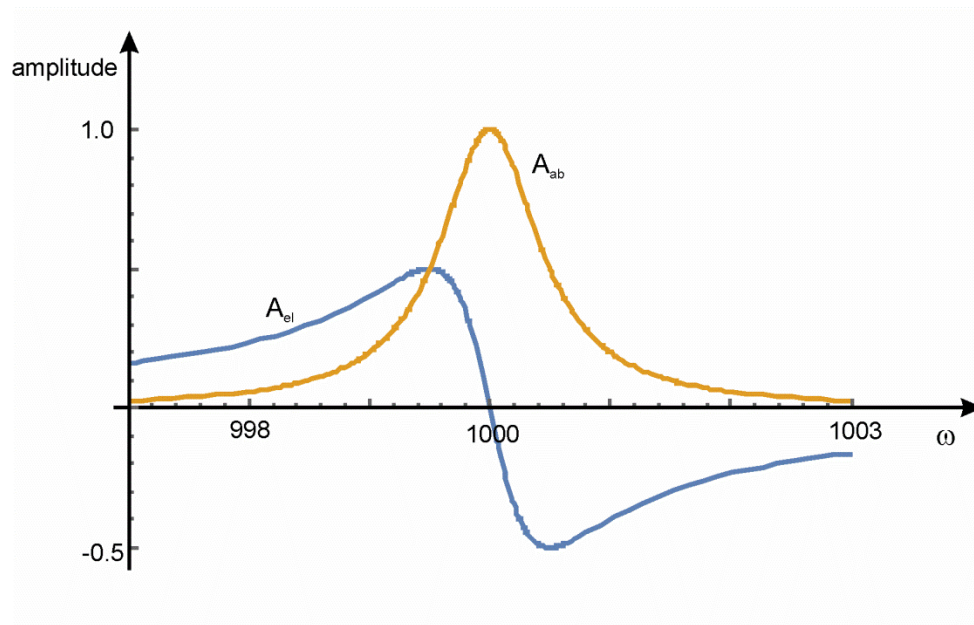
Analogiczne wyrażenie do (1.19) mamy również na związek między przesunięciem fazowym φ (5.5) a amplitudami (5.2.10)

$$\varphi = \arctan\left(\frac{A_{ab}}{A_{el}}\right) \quad 5.2.17b$$

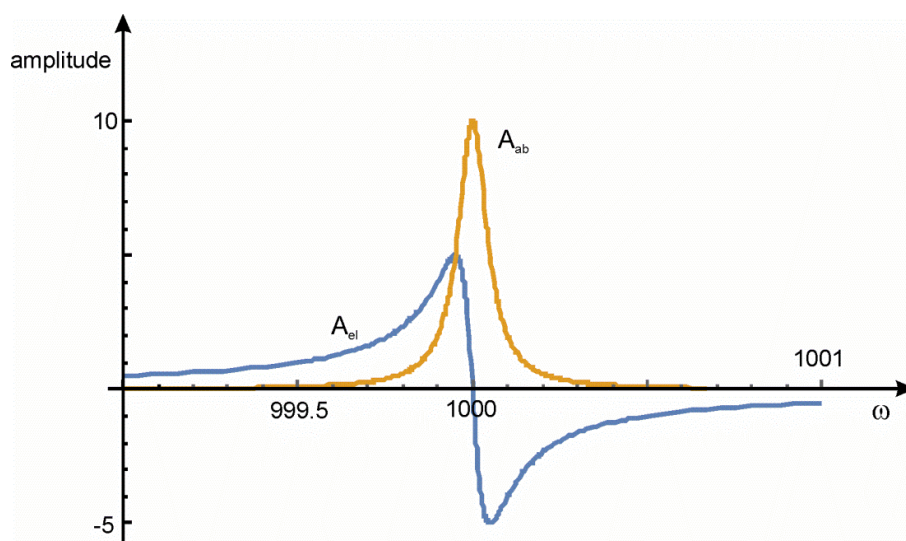
Pouczającym jest również obliczenie stosunek amplitudy elastycznej A_{el} do amplitudy absorpcyjnej A_{ab} .

$$\frac{A_{el}}{A_{ab}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\gamma \omega} \quad 5.2.18$$

Gdy jesteśmy blisko rezonansu $\omega_0 \approx \omega$ powyższe wyrażenie jest duże, co oznacza, że dominuje amplituda absorpcyjna A_{ab} . Dla rezonansu amplituda elastyczna jest równa zero i nie wpływa na postać drgań. Można powiedzieć, że układ drgający „łapczywie” chłonie energię. Gdy mocno oddalimy się od rezonansu, powyższe wyrażenie staje się duże i możemy pominąć wyrazy stojące przy amplitudzie absorpcyjnej A_{ab} ; z dala od rezonansu dominuje czynnik związany z amplitudą elastyczną. Układ bawi się w swoistego ping ponga. Przejmuje energię aby zaraz potem pozbyć się jej. Wszystkie te zależności uwidaczniają wykresy na rysunku (5.2.1 i 5.2.2).



Rysunek 5.2.1. Krzywe reprezentujące amplitudę elastyczną i absorpcyjną jako funkcję częstości wymuszającej ω dla parametrów: $\omega_0=1000\text{rad/s}$, $\tau=1\text{s}$, $m=1\text{kg}$, $F_0=1000\text{N}$. Widać, że w okolicy rezonansu amplituda absorpcyjna osiąga maksimum, a amplituda elastyczna ma wartość zero.



Rysunek 5.2.2. Krzywe reprezentujące amplitudę elastyczną i absorpcyjną jako funkcję częstości wymuszającej ω dla parametrów jak na rysunku (5.2.1) z wyjątkiem czasu relaksacji, który jest teraz dziesięciokrotnie dłuższy: $\tau=10\text{s}$. Krzywe są znacznie węższe (zwróć uwagę na węższy zakres częstości ω i na wyższą wartość energii w rezonansie). Ponieważ czas relaksacji jest dłuższy energia wpompowana w układ (w stanie stacjonarnym) jest większa. Mniejsze tłumienie oznacza zatem węższe okno rezonansowe i większą pochłoniętą energię.

Oba omówione przedstawienia zjawiska rezonansu opisują dokładnie to samo zjawisko. Różnią się tym, że uwypuklają różne jego aspekty. Oscylator harmoniczny, na który działają harmoniczne siły wymuszającej pojawia się w zaskakująco wielu działach fizyki. Będziemy więc nieraz korzystać z przedstawionych tu faktów ubierając je w znaczenia związane z konkretną sytuacją fizyczną. To w sumie optymistyczne, że stosunkowo prosty model oscylatora harmonicznego pozwoli na zgłębianie zaawansowanych tematów fizyki współczesnej. Dlatego czas poświęcony na zrozumienia oscylatora nigdy nie jest czasem straconym.

I choć wydaje się, że wszystko co podstawowe i istotne o harmonicznym drganiu wymuszonym zostało powiedziane to pozostała nam jeszcze analiza dokładnego rozwiązania ruchu harmonicznego oscylatora wymuszonego.

5.3. Pełne rozwiązanie dla oscylatora wymuszonego ♣

Rozwiązanie (5.14) jest rozwiązaniem szczególnym równania różniczkowego wymuszonego oscylatora. Aby uzyskać pełne rozwiązanie musimy znaleźć rozwiązanie dopełniające, czyli rozwiązanie równania

$$0 = m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} \quad 5.3.1$$

Ale jest to równanie ruchu oscylatora harmonicznego z tłumieniem (4.2.1). Przeanalizuję tu tłumienie podkrytyczne (rys. DF 2.3.1 i komentarz), wtedy rozwiązanie równania (5.3.1) ma postać (DF 2.3.24). Rozwiązanie ogólne równania ruchu dla oscylatora harmonicznego wymuszonego, jest zgodnie z twierdzeniem (DF 2.2.1) sumą obu rozwiązań szczególnego i dopełniającego. Dla przypadku tłumienia podkrytycznego mam

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}}(\bar{B}\cos(\bar{\omega}t) + \bar{A}\sin(\bar{\omega}t)) + \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \sin\left(\omega t + \arctan\left(-\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right) \quad 5.3.2$$

Przez $\bar{\omega}$, oznaczyłem częstość drgań niewymuszonego, tłumionego oscylatora harmonicznego, która zwykle jest różna od częstości ω siły wymuszającej. W celu wyznaczenia stałych przyjmę ogólną postać warunków początkowych

$$x(0) = x_0 \quad 5.3.7a$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad 5.3.7b$$

Dla $t=0$ (5.3.7) przechodzi w

$$x(0) = x_0 = \bar{B} + C \sin(\varphi) \quad 5.3.8$$

$$C = \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \quad 5.3.8a$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad 5.3.8b$$

Prędkość wyraża się wzorem

$$\dot{x}(0) = v_0 = -\frac{1}{2\tau}\bar{B} + \bar{\omega}\bar{A} + C\omega \cos(\varphi) \quad 5.3.9$$

Do rozwiązania mamy układ równań (5.3.8) i (5.3.9). Układ ten ma rozwiązanie

$$\bar{A} = -\frac{1}{2\bar{\omega}\tau}(2C\tau\bar{\omega}\cos(\varphi) + C\sin(\varphi) - x_0 - 2v_0\tau) \quad 5.3.10a$$

$$\bar{B} = x_0 - C\sin(\varphi) \quad 5.3.10b$$

Podstawiając (5.3.10) do (5.3.7) i porządkując wyrazy mamy

$$x(t) = p_1 + p_2 + p_3 \quad 5.3.11$$

$$p_1 = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[x_0 \cos(\bar{\omega}t) + \left(\frac{v_0}{\bar{\omega}} + \frac{x_0}{2\tau\bar{\omega}} \right) \sin(\bar{\omega}t) \right] \quad 5.3.11a$$

$$p_2 = Ce^{-\frac{t}{2\tau}} \left[\frac{1}{\bar{\omega}} \left(\omega \cos(\varphi) + \frac{1}{2\tau} \sin(\varphi) \right) \sin(\bar{\omega}t) + \sin(\varphi) \cos(\bar{\omega}t) \right] \quad 5.3.11b$$

$$p_3 = C \sin(\omega t + \varphi) \quad 5.3.11c$$

Jak widać ogólne rozwiązanie jest bardziej złożone od tego, które analizowaliśmy wyżej. Ogólne rozwiązanie składa się z trzech członów, z których ostatni p_3 odpowiada rozwiązaniu (5.14). Zauważ jednak, że człony p_1 i p_2 mnożone są przez czynnik eksponentyjny, który wraz z czasem robi się coraz mniejszy. Możemy więc powiedzieć, że po odpowiednio długim czasie rozwiązanie ogólne (5.11) przechodzi w rozwiązanie szczególne (5.14)

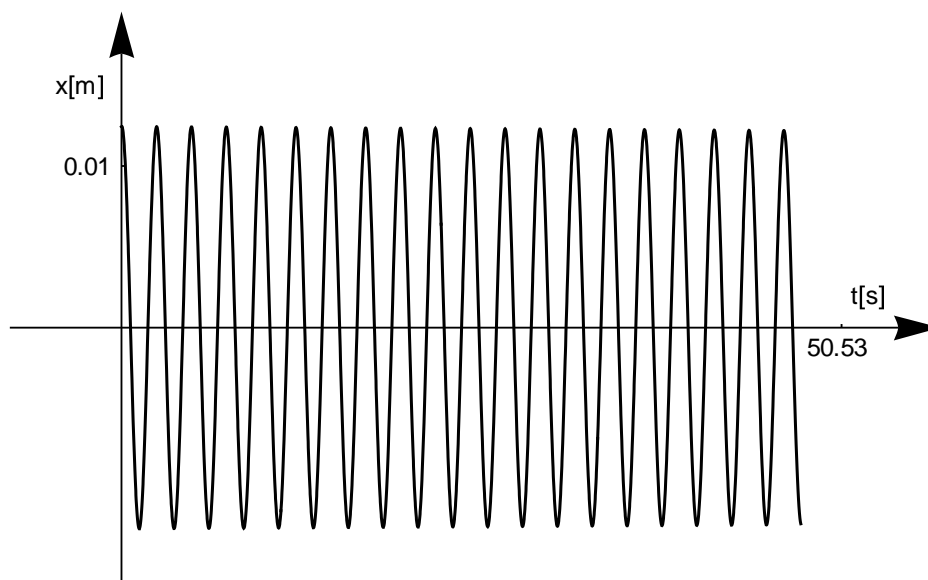
$$\lim_{t \rightarrow \infty} (p_1 + p_2 + p_3) = p_3 \quad 5.3.12$$

Czas, po którym dwa pierwsze człony p_1 i p_2 są zaniedbywalnie małe zależy od wartości siły tłumienia.

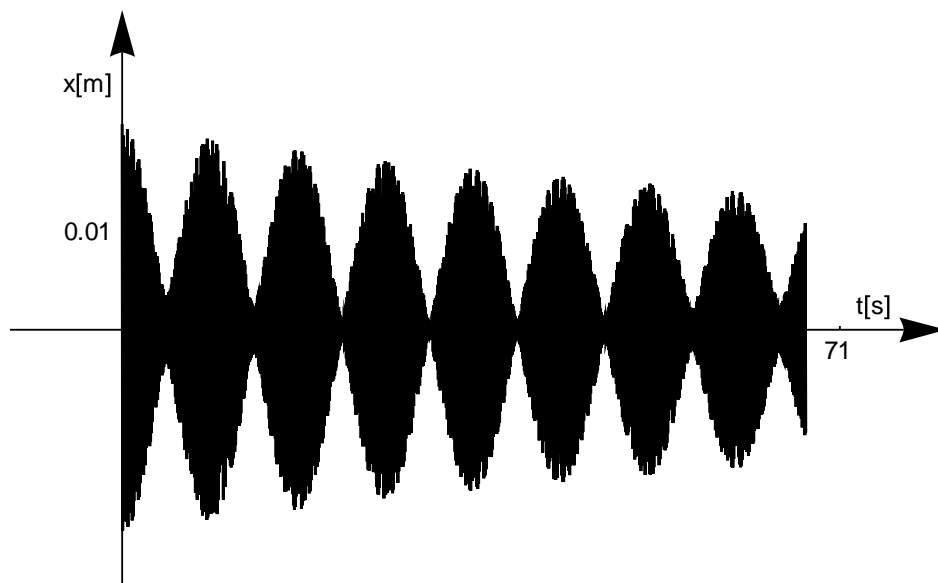
Pierwszy składnik p_1 ma postać rozwiązania równania ruchu (1.15) opisującego drgania oscylatora harmonicznego z częstością $\bar{\omega}$, która jest

częstością analizowanego oscylatora (5.3.5) ale bez siły wymuszającej. Wartości stałych przy funkcjach cosinus i sinus zależą od warunków początkowych. Ze względu na czynnik eksponentialny drgania te zanikają w czasie. Drugi składnik ma również postać (1.15), dla tej samej częstości co pierwszy składnik, teraz jednak parametry tych drgań zależne są od siły wymuszającej, nie zależą natomiast od warunków początkowych. Gdy mamy do czynienia z przypadkiem słabego tłumienia to zgodnie z (4.2.1) mamy $\bar{\omega} \rightarrow \omega_0$.

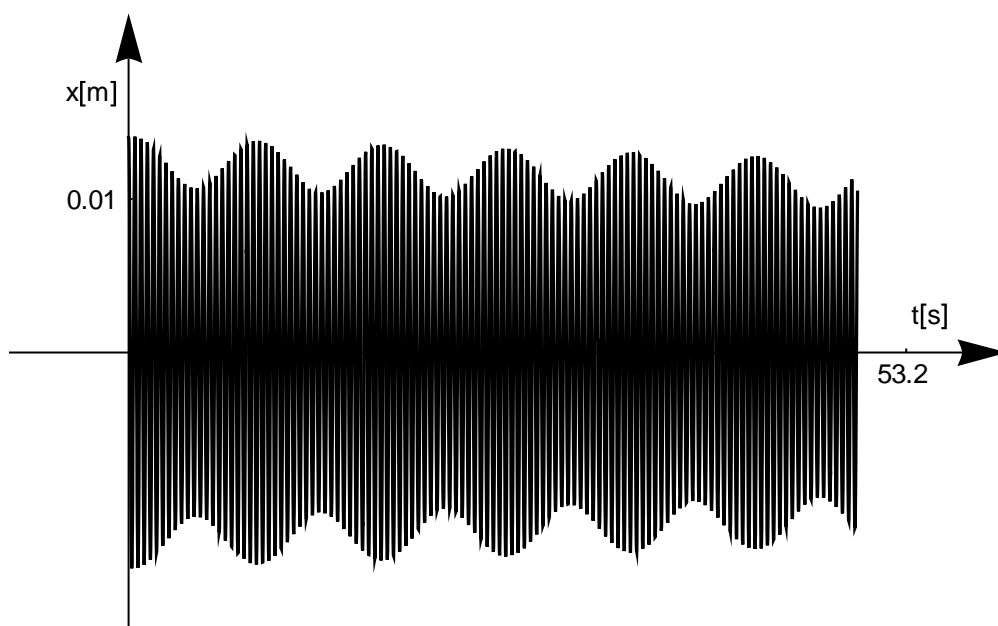
Przyjrzyjmy się przypadkowi słabego tłumienia gdy częstość siły wymuszającej jest bliska częstości drgań własnych $\omega \approx \omega_0$. Mamy wtedy złożenie drgań harmonicznym zachodzących z częstością ω_0 opisanych przez składniki p_1 i p_2 , oraz drgań zachodzących z częstością ω siły wymuszającej (5.3.11c). Ponieważ obie częstości są sobie bliskie możemy się spodziewać zjawiska dudnień (§2.1). Przypuszczenie to potwierdzają rysunek (5.3.1-4)



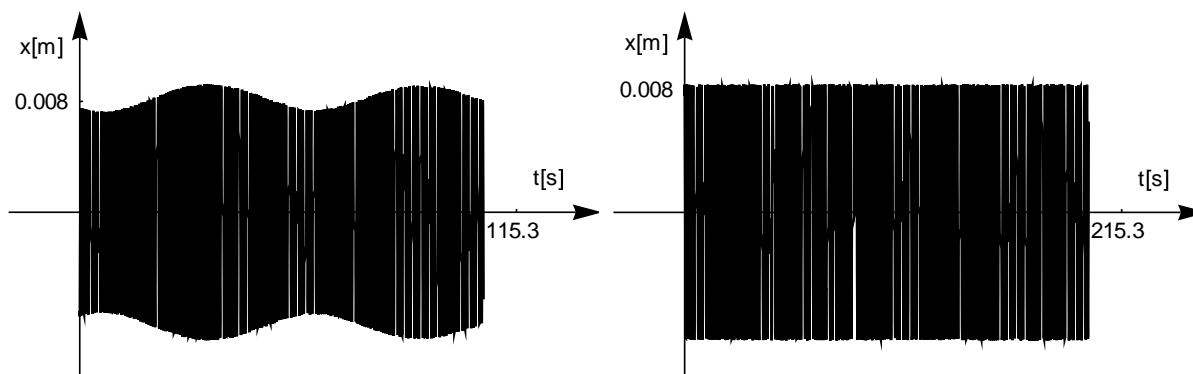
Rysunek 5.3.1. Wykres części p_1+p_2 dla parametrów: $F_0=10\text{N}$, $\tau=12\text{s}$, $\omega_0=244.95\text{rad/s}$, $\omega=247.4\text{rad/s}$, $\varphi=-3.12$ rad (obliczone ze wzoru 5.12), $x_0=0\text{m}$, $v_0=24.5\text{m/s}$ ($v_0=A\omega_0$, dla $t=0$ przyjąłem $A=0.1$). Czas zmienia się w zakresie od 50 do 50.5 sekund. Jesteśmy jeszcze daleko od warunku rezonansu, dla którego kąt przesunięcia fazowego φ jest bliski $-\pi/2$ (5.20). W 50 sekundzie ruchu amplituda jest dziesięć razy mniejsza niż na początku ($A=0.1$), co jest efektem tłumienia.



Rysunek 5.3.2. Wykres części $p_1+p_2+p_3$ dla parametrów takich jak na rysunku (5.3.1). Wykres przypomina wykres dudnień (rys. 2.1.3), z tą różnicą, że w czasie spada amplituda drgań. Przedział czasowy rysunku to dwadzieścia jeden sekund – od 50 do 70s ruchu. Dzięki temu dobrze widać obwiednię drgań. Nie widać natomiast pojedynczych oscylacji, które są zbyt gęste jak na rozdzielczość rysunku.



Rysunek 5.3.3. Wykres części $p_1+p_2+p_3$ dla parametrów: $F_0=10\text{N}$, $\tau=12\text{s}$, $\omega_0=244.95\text{rad/s}$, $\omega=257.4\text{rad/s}$, $\varphi=-3.13\text{ rad}$ (obliczone ze wzoru 5.3), $x_0=0\text{m}$, $v_0=24.5\text{m/s}$ ($v_0=A\omega_0$, dla $t=0$ przyjąłem $A=0,1$). W stosunku do rysunku (5.3.1 i 5.3.2) zwiększyła się różnica między częstością drań własnych ω_0 i siły wymuszającej ω . W efekcie wzrosła częstość dudnień, z drugiej strony modulacja dudnień stała się płytsza. Przedział czasu tego rysunku od 50 do 53.2 sekundy ruchu jest znacznie krótszy niż dla rysunku (5.3.2).



Rysunek 5.3.4. Wykres części $p_1+p_2+p_3$ dla parametrów takich jak na rysunku (5.3.1). Przedział czasowy rysunku z lewej wynosi od 110 do 115s. Zmalała amplituda (efekt tłumienia) drgań jak również głębokość modulacji dudnień (efekt zanikania części p_1+p_2). Przedział czasowy rysunku z prawej wynosi od 210 do 215s. Praktycznie nie widać dudnień. Część p_1+p_2 ma zanedbywalnie małe wartości, a amplituda drgań przestała praktycznie spadać. Możemy uznać, że drgania weszły w stan stacjonarny. Stan stacjonarny oznacza, że drgania opisane są tylko członem p_3 .

Przypominam, że analizowałem ogólne rozwiązanie dla harmonicznego oscylatora wymuszonego przy tłumieniu podkrytycznym. Dla tłumienia krytycznego i nadkrytycznego rozwiązania ogólne otrzymujemy podobnie. Nie są one takie same jak rozwiązanie dla przypadku podkrytycznego. Jednak wyraz p_3 dalej jest obecny i z biegiem czasu staje się dominujący, gdyż pozostałe wyrazy silnie zanikają w czasie.

W standardowym wykładzie nie omawia się wyłożonych tu kwestii. W praktyce zwykle interesują nas stany stacjonarne, to jest takie, które układ osiąga po odpowiednim długim czasie od włączenia. Żle się dzieje wtedy, kiedy zapominamy, że rozwiązanie stanu stacjonarnego nie jest rozwiązaniem ogólnym. Mam nadzieję, że będziesz o tym teraz pamiętać, tym bardziej, że tego typu niebezpieczeństwa pojawiają się w różnych działach fizyki, a czasem nie można zaniedbać efektów związanych z dochodzeniem do stanu stacjonarnego.

5.4. Drgania – inne przedstawienie ♣

Rozwiązywanie równań różniczkowych jest trudną sztuką. Dlatego opracowane zostały różne metody przedstawienia samych rozwiązań. Czasem takie inne przedstawienie rozwiązania daje nam wystarczająco dużo informacji o badanym układzie fizycznym, kosztem mniejszego wysiłku obliczeniowego. Bywa również, że owe inne metody dają głębszy wgląd w fizykę układu. Pokażę przykład takich innych rozwiązań dla równania ruchu oscylatora harmonicznego.

Rysunek (DF 1.2.2b) przedstawia rozwiązanie równania różniczkowego w postaci pola wektorowego. Poszerzymy zakres zastosowań tej techniki. Niech będzie dane równanie różniczkowe

$$\dot{x} = f(x(t)) \quad 5.4.1$$

Definicja 5.4.1: Równanie autonomiczne

Równanie postaci (5.4.1), w której prawa strona nie zależy jawnie od czasu nazywamy równaniem autonomicznym.

Sformułowanie, „f nie zależy jawnie od czasu”, oznacza, że zależność od czasu musi być ukryte pod inną zmienną, od której zależy f. W (5.4.1) taką „kryjącą” zależność od czasu zmienną jest x. Okazuje się, że każde równanie postaci

$$\dot{x} = f(t, x) \quad 5.4.2$$

Można sprowadzić do równania autonomicznego. Przyjmijmy, że

$$x' = \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix}; \quad f' = \begin{bmatrix} f \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \text{oraz } s = t \quad 5.4.3$$

Tu s jest nową zmienną niezależną, której zadaniem jest krycie zależności od zmiennej t. Wtedy równanie (5.4.2) przejdzie w

$$\dot{x}' = f'(x') \quad 5.4.4$$

Przy czym różniczkujemy względem nowej zmiennej s. Widać, że (5.4.4) nie zależy jawnie od t, jest więc równaniem autonomicznym.

Powrócę do równania oscylatora harmonicznego dla przypadku wahadła matematycznego (1.9.b). Zapiszę go w postaci

$$\dot{\omega} = -k\varphi \quad 5.4.5$$

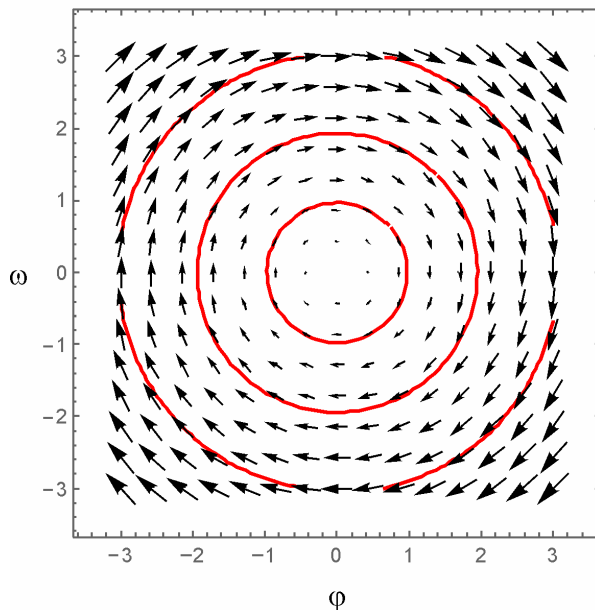
$$\omega = \dot{\varphi} \quad 5.4.5b$$

Gdzie ω jest prędkością kątową.

Uwaga: 5.4.1:

No i mamy mieszmasz w oznaczeniach. Zwykle przez ω oznaczałem częstość wahadła wyrażoną w radianach. Ale równie „zwykle” przez ω oznaczałem prędkość kątową rozumianą jako zmiana współrzędnej kątowej punktu w czasie (§TV 3.1). Teraz rozumiem ω na to drugie zwykle, czyli jako prędkość kątową kulkę wahadła.

Otrzymaliśmy układ równań autonomicznych. Równanie (5.4.5) przedstawia przyrost współrzędnej φ , a równanie (5.4.5b) przyrost współrzędnej ω . Oba przyrosty są po prostu współrzędnymi wektora stycznego do trajektorii wahadła wykreślonej we współrzędnych $\{\varphi, \omega\}$. Mieszane współrzędne położenia i prędkości definiowały nam przestrzeń fazową (§TV 1.3). Zatem rozwiązanie tego układu równań różniczkowych przedstawię w przestrzeni fazowej $\{\varphi, \omega\}$, w postaci pola wektorowego (rys. 5.4.1)



Rysunek 5.4.1. Zgodnie z (5.4.5) pole wektorowe wyrysowane w przestrzeni fazowej $\{\varphi, \omega\}$ ma współrzędne $\{\omega, -k\varphi\}$. Widać, że linie pola tworzą współśrodkowe okręgi.

Rysunek (5.4.1) przedstawia rozwiązanie układu równań (5.4.5). Wiemy, że dla wahadła matematycznego jest ono spełnione tylko dla małych wychyleń φ . To oznacza, że dla dużych wartości kąta φ podane rozwiązanie nie opisuje dynamiki układu. Pełne równanie wahadła matematycznego ma postać (1.2.2), co możemy zapisać jako

$$\ddot{\varphi} = -k\sin(\varphi) \quad 5.4.6$$

W przestrzeni fazowej otrzymamy układ dwóch równań autonomicznych

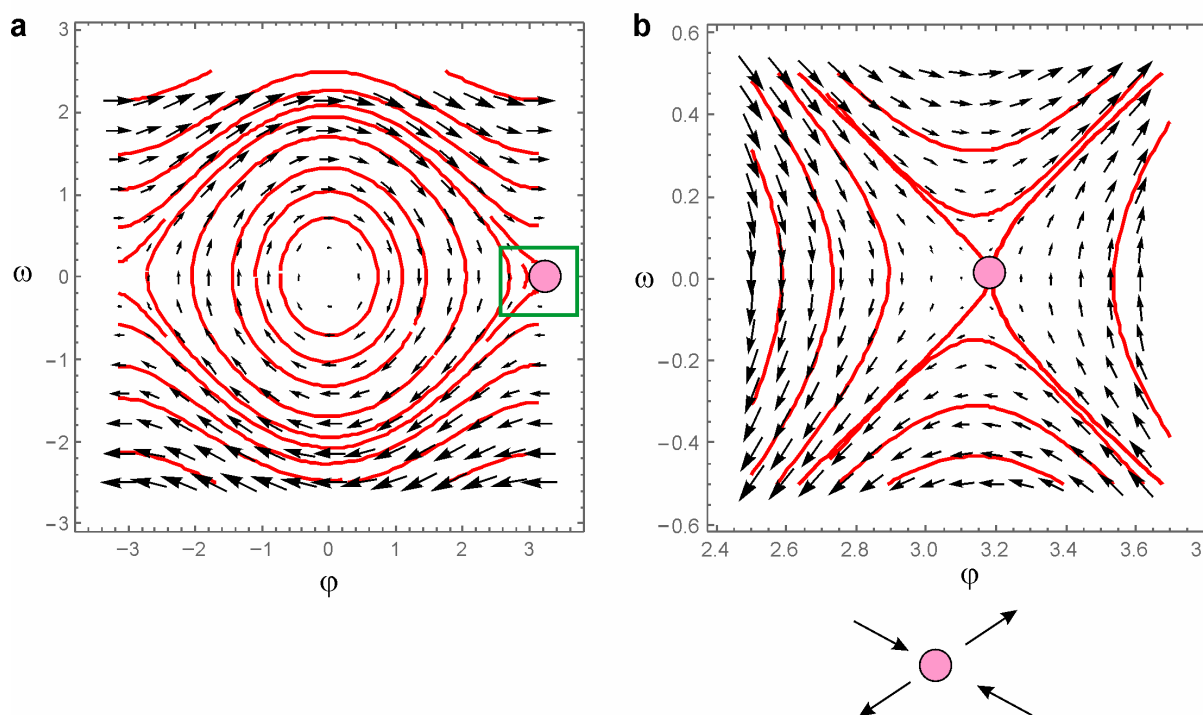
$$\dot{\omega} = -k\sin(\varphi) \quad 5.4.6a$$

$$\omega = \dot{\varphi} \quad 5.4.6b$$

Odpowiedni wykres pokazuje rysunek (5.4.2). Zamknięte trajektorie, zbliżone kształtem do okręgu odpowiadają swym charakterem wykresowi (3.4.1). Im dalej od centrum tego obszaru tym bardziej wydłużone są odnośne zamknięte trajektorie. Gdy zbliżamy się do obszaru oznaczonego różowym dyskiem, długości wektorów spadają do zera.

Aby fizycznie zinterpretować ten wykres musimy pomyśleć o wahadle w postaci kulki na cienkim pręcie (rys. 3.4.4a). Przy wychyleniu o kąt π (wahadło jest do górny nogami) jego prędkość jest najmniejsza. Możemy sobie również wyobrazić, że wahadło ma dokładnie tyle energii, aby wspiąć się do położenia „do góry nogami” i ani odrobiny więcej. W takiej sytuacji wahadło zatrzyma się w położeniu „do góry nogami” (jego prędkość spadnie do zera). Ten stan wahadła „leży” pod różowym dyskiem. Będzie to oczywiście stan równowagi chwiejnej (rys. TIII 5.1.1), tak że najdrobniejszy impuls z zewnątrz spowoduje, że wahadło spadnie na jedną lub na drugą stronę. Ilustruje to dolna część rysunku (3.4.2b). Prędkości w sąsiedztwie najwyższego położenia kulki są małe, stąd konieczność

powiększenia tej części rysunku. Widać, że po przejściu różowego dysku wektory zmieniają zwrot. By to mogło nastąpić na szczycie prędkość musi spaść do zera.



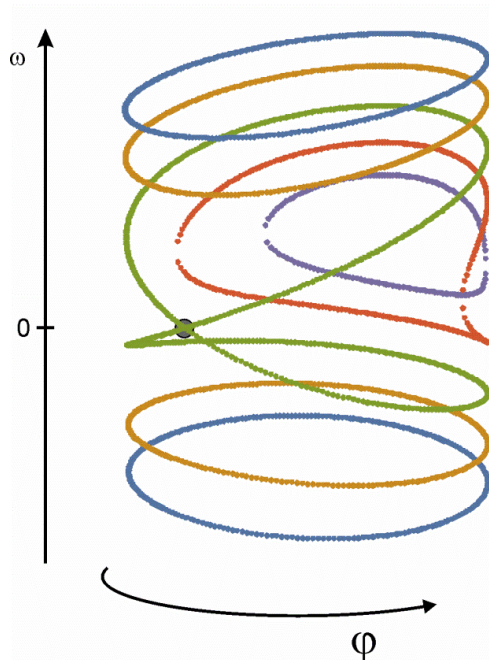
Rysunek 5.4.2. Pole wektorów stycznych i wybrane trajektorie wahadła opisanego równaniem ruchu (5.4.6) we współrzędnych $\{\varphi, \omega\}$. a) Obraz ogólny – widać, że trajektorie wahadła tworzą dwie rodziny krzywych – krzywe zamknięte oraz otwarte. Po obu stronach obszaru krzywych zamkniętych znajdują się punkty, w których pole wektorowe zanika; b) powiększony obszar zanikania pola wektorowego. Na rysunku (a) obszar z rysunku (b) leży wewnątrz zielonego prostokąta. Rysunek poniżej pokazuje orientację wektorów pod różowym kółkiem.

Krzywe otwarte wcale otwarte nie są. Wartość φ zmienia się od $-\pi$ do π . To znaczy, że kulka wahadła, poruszając się po jednej z otwartych trajektorii, po dośrobie do krawędzi wykresu przeskakuje na drugą stronę kartki. Wiemy już, że takie skoki mają miejsce, gdy ruchy cykliczne chcemy przedstawić na płaszczyźnie euklidesowej (§TV 4). Jest na to lekarstwo. Wystarczy skleić obie krawędzie wykresu (5.4.2a) w walec (rys. 5.4.3). Przy interpretacji rysunku (5.4.3) należy pamiętać, że trajektorie czerwona i fioletowa nie biegną wokół walca.

Możemy również skorzystać z usług współrzędnych (φ, ν) . Dla wykreślenia wykresu fazowego w tych współrzędnych odwołam się do zasady zachowania energii. Wahadło składa się z lekkiego sztywnego pręta z masywną aczkolwiek niezbyt dużą kulką na końcu pręta (rys. 5.4.4a). W dalszej analizie zaniedbamy masę pręta. W oznaczeniach z rysunku (5.4.4a) wysokość na jaką wznosi się kulka przy kącie wychylenia φ , wyraża się wzorem

$$h = (L - L\cos(\varphi))$$

5.4.7



Rysunek 5.4.3. Po sklejeniu rysunku (5.4.2.a) otrzymamy ciągłe trajektorie punktu. Trajektorie zamknięte na rysunku (5.4.2a) nie obejmują pełnego kąta na walcu (linia fioletowa i czerwona). Wykres rysowany jest z pojedynczych punktów i widać, że dla maksymalnego kąta wychylenia, gdzie wahadło zwalnia gęstość punktów maleje. Zielona trajektoria pokazuje przypadek z dzióbkiem. Dzióbek (oznaczony szarym punktem) oznacza przecięcie się trajektorii. W tym przypadku, dla kąta $\varphi=\pi$, wahadło zatrzymuje się w najwyższym punkcie trajektorii. Przecięcie oznacza, że w tym punkcie, wahadło może równie łatwo zacząć spadać na lewą jak i na prawą stronę. Otwarte trajektorie z rysunku (5.4.2) zamykają się w linii otaczające walec. Dla dodatnich wartości ω wahadło obraca się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a dla ujemnych wartości ω , zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.

Energia całkowita wahadła jest stała i równa sumie energii kinetycznej i potencjalnej

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 + (L - L\cos(\varphi))mg \quad 5.4.8$$

Stąd możemy wyliczyć wartość prędkości

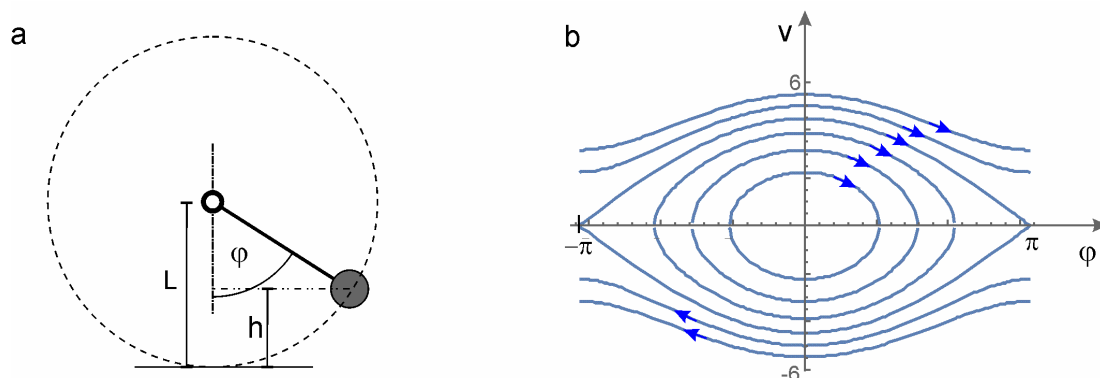
$$v = \sqrt{\frac{2E_c - 2L(1 - \cos(\varphi))mg}{m}} \quad 5.4.9$$

Gdy energia wahadła jest taka, że na samej górze (dla $\varphi=\pi$) zatrzymuje się to

$$E_c = 2mgL \quad 5.4.10$$

a prędkości jest równa

$$v = \sqrt{2gL} \sqrt{\frac{1 + m\cos(\varphi)}{m}} \quad 5.4.11$$



Rysunek 5.4.4. a) Wahadło zbudowane jest z lekkiego pręta (masę pręta zaniedbujemy) i masywnej kulki na jego końcu; b) trajektorie wahadła we współrzędnych $\{\varphi, v\}$, dla różnych wartości całkowitej energii wahadła. Wykres został sporządzony dla wahadła o masie $m=0.1\text{kg}$, długość $L=0.5\text{m}$, energia całkowita, idąc od najmniejszego okręgu $E_c=0.25\text{J}$, 0.5J , 0.75J , 1J , 1.25J , 1.5J . Dla $E_c=1\text{J}$ wahadło wspina się do najwyższego punktu wychylenia i tam ustaje w ruchu. W tym punkcie wahadło znajduje się w stanie równowagi chwiejnej. Powyżej tej energii wahadło kręci się w koło, co reprezentują otwarte trajektorie. Trajektorie te są faktycznie zamknięte, tyle że topologia kartki papieru nie odpowiada topologii ruchu cyklicznego. Aby pozbyć się nieistniejących nieciągłości ruchu wykres należałoby narysować na powierzchni walca (rys. 5.4.3).

Rysunek (5.4.4b) pokazuje wykres ruchu wahadła w przestrzeni fazowej (φ, v) . Ma on bardzo podobny przebieg jak wykres linii z rysunku (5.4.2a). Tego powinniśmy się spodziewać, jako że wartość prędkości kątowej $\dot{\varphi}$, jest w prosty sposób zależna od wartości prędkości liniowej wahadła. Aby uniknąć nieistniejącej w ruchu wahadła nieciągłości wykres (5.4.4b) należałoby sporządzić na walcu (rys. 5.4.3).

Rysunki (5.4.2-4) obrazują to co zostało pokazane na rysunkach (TV 1.3.5-6). Gdy układ jest izolowany zasada zachowania energii dzieli trajektorie punktu w przestrzeni stanów (przestrzeń fazowa jest również przestrzenią stanów) na rozłączone zbiory. Trajektorie wyznaczone dla danej całkowitej energii wahadła nie przecinają się z trajektoriami dla innych energii.