25.01.2015
10.04.2022

Dodatek Matematyczny

DC

RACHUNEK CAŁKOWY

1. Całka Riemanna

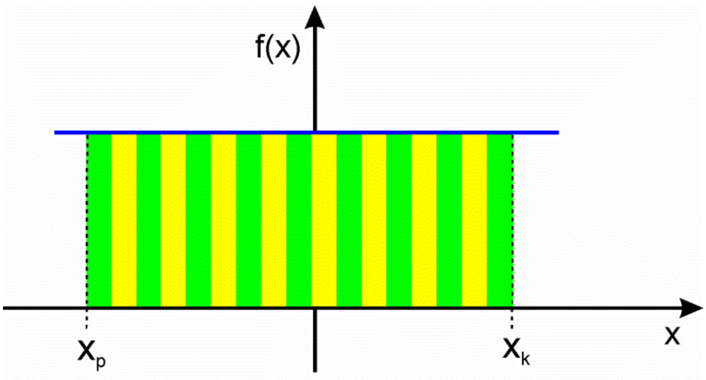
Wprowadzenie do rachunku całkowego zacznę od bardzo prostego zadania. Znaleźć pole powierzchni S pod funkcją stałą f(x)=C, na przedziale [x_p, x_k] (rys. 1.1). Możemy oczywiście skorzystać ze wzoru

$$S = \mathrm{f}(x)\Delta x = C\Delta x; \quad \Delta x = x_k - x_p \tag{1.1}$$

Możemy również podzielić obszar pod funkcją f(x) na N wąskich prostokątów o podstawie równej δx każdy i napisać wzór

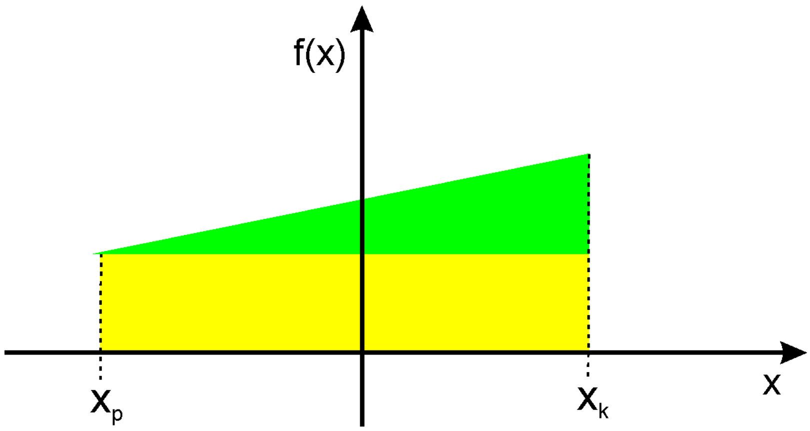
$$S = \sum_{i=1}^{N} C_i\, \delta x \tag{1.2}$$

Gdzie C_i jest wysokością i-tego prostokąta. W naszym przypadku wszystkie prostokąty są takiej samej wysokości, więc łatwo można sprowadzić wzór (1.2) do wzoru (1.1).

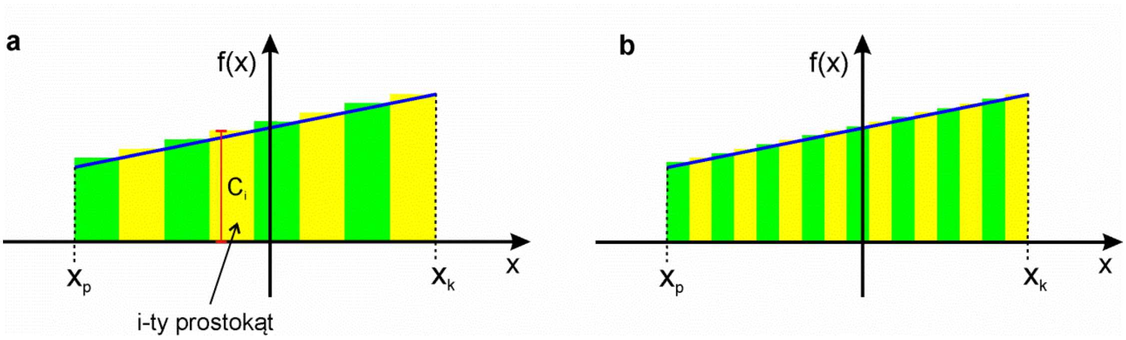


Rysunek 1.1. Podział pola pod funkcją stałą na serię prostokątów

A co jeżeli funkcja nie jest stała tylko liniowa: f(x)=ax+b. Sprawa jest ciągle prosta. Pole pod funkcją na przedziale [x_p, x_k] to suma pola prostokąta i trójkąta (rys.1.2). Oczywiście, nie bawię się tymi przykładami by się popisać znajomością prostych wzorów na obliczanie pól. Chcę dojść do możliwie ogólnej metody obliczania pól, która pozwoli nam wyjść poza funkcję stałą i liniową. Spróbuję więc policzyć pole funkcji liniowej metodą prostokątów, a następnie metodę tą uściślić i uogólnić. Rysunek (1.3a) przedstawia podziała na prostokąty pola pod wykresem funkcji liniowej. Widać, że pojawia się dodatkowa trudność. Prostokąty pokrywają obliczane pole z nadmiarem.



Rysunek 1.2. Jeszcze jeden przykład prostej funkcji, dla której łatwo oblicza się pole



Rysunek 1.3. a) obliczanie pola pod funkcją z rysunku (1.2), za pomocą wpisanych, tak jak na rysunku prostokątów, obarczone jest błędem nadmiaru; b) im mniejsza jest podstawa prostokątów, tym jest ich więcej i tym dokładniejszy otrzymujemy wynik.

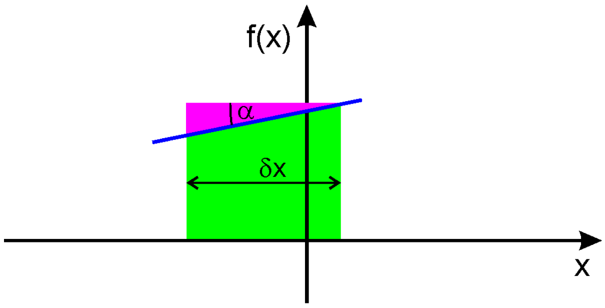
Co się stanie, gdy będę zagęszczał podział (rys. 1.3b)? Nadmiar z jakim liczę pole będzie coraz mniejszy, aż gdy przejdę do nieskończenie wąskich prostokątów, to jest gdy $\delta x \to dx$ nadmiar powinien zmaleć do zera. Tyle, że wtedy liczba prostokątów urośnie do nieskończoności. Będę musiał zsumować nieskończenie wiele prostokątów, każdy o nieskończenie małym polu. Wygląda to na karkołomne zadanie, ale jest wykonalne, a całą operację nazywamy całkowaniem. Ale po kolei

Najpierw pokażę powód dla którego możemy oczekiwać, że gdy $\delta x \to dx$, to część nadmiarowa maleje do zera. Pomoże mi w tym rysunek (1.4). Podzielę każdy prostokąt na dwie części, główną o polu $C_i\ \delta x$ i trójkątną o polu równym

$$\frac{1}{2}\underbrace{\delta x \tan(\alpha)}_{h}\delta x = \frac{1}{2}\tan(\alpha)(\delta x)^2 \qquad 1.3$$

Gdy $\delta x \to dx$, to pole części głównej dąży do $C_{id}dx$, a pole części trójkątnych do

$$\frac{1}{2}\tan(\alpha)(\mathrm{d}x)^2 \qquad 1.4$$



Rysunek 1.4. Przykładowy prostokąt z rysunku (1.3).

Pole prostokąta jest proporcjonalne do dx a trójkąta do dx^2. Powiedzmy, że sumujemy teraz nieskończenie małe odcinki dx. Oczywistym jest, że to sumowanie nieskończenie wielu, nieskończenie małych odcinków dx, jeżeli jest sensownie zdefiniowane, powinno dać skończony odcinek Δx. Sumowanie wyrażeń dx^2 da natomiast d$x\Delta x$, czyli wielkości nieskończenie małą. Przy liczeniu pola i-tego prostokąta C_i mnożymy przez Δx. W granicy nieskończenie małego dx, mamy $C_i \to f(x)$. Dla trójkątów jest to połowa $\tan(\alpha)$ mnożona przez dx^2, co w efekcie prowadzi do wyrażeń:

$$C_i\delta x - \frac{1}{2}\tan(\alpha)(\delta x)^2 \qquad 1.5$$

Przy $\delta x \to \mathrm{d}x$ mamy

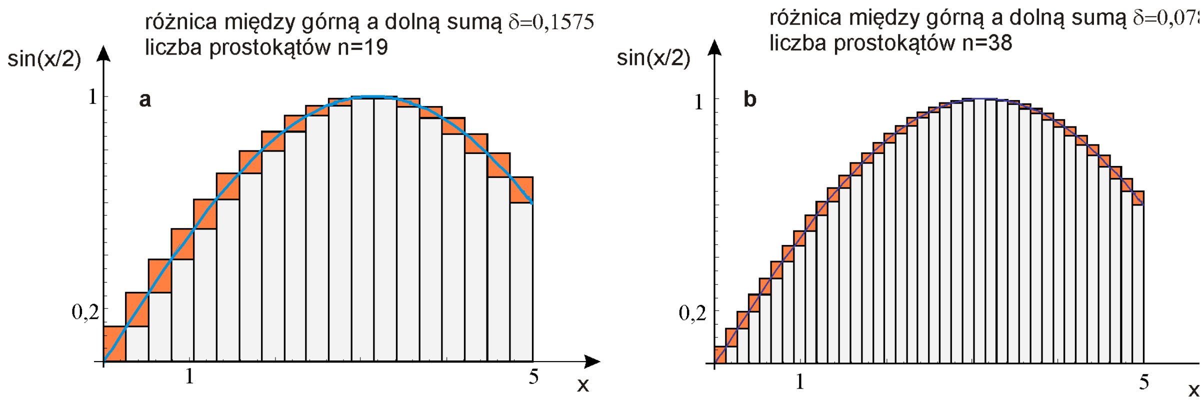
$$C_i\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\tan(\alpha)(\mathrm{d}x)^2 \qquad 1.6$$

Sumowanie (całkowanie) wszystkich takich elementów rozłożonych od x_p do x_k da

$$E - D\mathrm{d}x \qquad 1.7$$

W wyniku sumowania otrzymujemy skończoną liczbę E będącą sumą składników C_i dx oraz skończoną liczbę D przemnożoną przez nieskończenie małe dx. Tą drugą część jako nieskończenie małą odrzucamy. Pole figury jest zatem wyznaczone przez liczbę E będącą efektem sumowania nieskończenie wielu prostokątów o nieskończenie małej podstawie dx. Podobne rozumowanie przedstawiłem w temacie (TII 6) przy liczeniu środka ciężkości trójkąta równoramiennego.

Mogę teraz nakreślić ogólny schemat postępowania. Weźmy funkcję f(x) i wykreślmy jej wykres na przedziale od x_p do x_k. Jak obliczyć pole pod tą funkcją na tym przedziale? Trzeba obliczane pole aproksymować prostokątami o nieskończenie małych podstawach i pola takich prostokątów wysumować, czyli wycałkować. Dla przykładu policzę pole pod funkcją sin(x/2) na przedziale od x=0 do x=5 (rys. 1.5). Wartość dokładna wynosi 3.6023. Zacznę obliczenia od pola przybliżonego skończoną liczbą prostokątów. Szerokość każdego prostokąta będzie równa Δx. Wysokość prostokąta zostanie wyznaczona przez wartość funkcji albo z niedomiarem albo z nadmiarem. Całość ilustruje rysunek (1.5)

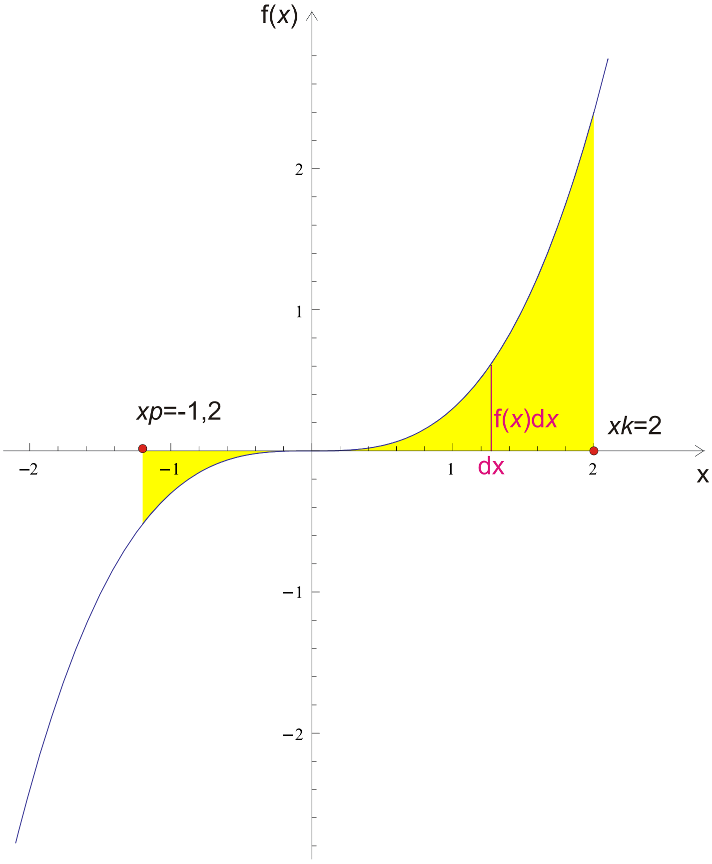


Rysunek 1.5. Obliczanie pola pod wykresem funkcji sin(x/2) za pomocą słupków, na przedziale [0, 5]. Suma pól szarych słupków daje wynik z niedomiarem (suma dolna). Dodając do tej sumy pola części pomarańczowej mamy wynik z nadmiarem (suma górna). Wartość dokładna pola pod tą funkcją, dla tego przedziału wynosi 3.6023. a) Przy 19 słupkach różnica między sumą górną i dolną wynosi 0.1575; b) Przy 38 słupkach różnica między sumą górną i dolną wynosi 0.0787. Gdy liczba słupków rośnie różnica między obiema sumami maleje do zera, a obie sumy zbliżają się do dokładnej wartości pola. Technika całkowania jest techniką obliczania wartości granicznej, gdy liczba słupków dąży do nieskończoności.

Wiemy, że gdy z liczbą słupków dążymy do nieskończoności, to różnica sumy pól słupków liczonych z nadmiarem i niedomiarem będzie dążyła do zera, a liczone w ten sposób pola będą dążyły do wartości dokładnej. Trzeba się tylko nauczyć liczyć takie nieskończone sumy. Tu pracę wykonali za nas matematycy pokazując co następuje:

- Jeżeli liczba podziałów rośnie do nieskończoności to suma górna i dolna są do siebie zbieżne.
- Istnieją metody pozwalające na obliczenie wartości tych sum przy liczbie podziałów dążącej do nieskończoności
- Wartość sumy nie zależy od sposobu drobnienia podziału na coraz mniejsze prostokąty, pod warunkiem, że długości wszystkich podziałów będzie dążyła do zera

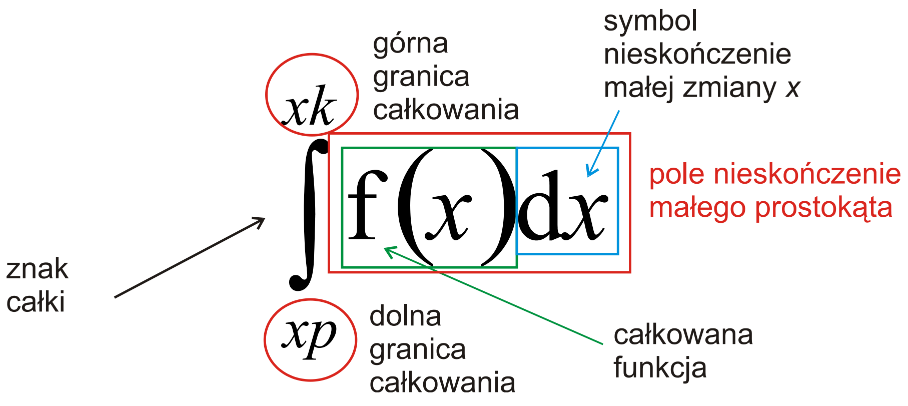
Przypomnę, że procedurę obliczania takiej sumy nazywamy całkowaniem. Można ją traktować jako uogólnienie operacji sumowania. „Sumujemy” czyli całkujemy nieskończenie wiele nieskończenie małych pól prostokątów f(x)dx (rys. 1.6).



Rysunek 1.6. Granica dolna *xp* i górna *xk* wskazują na jakim przedziale obliczamy pole pod krzywą. Na rysunku powyżej pokazany jest przykładowy bardzo cienki (powinien być nieskończenie cienki) prostokąt o polu f(*x*)d*x*. Całkowanie to sumowanie nieskończenie wielu nieskończenie cienkich prostokątów pokrywających obszar pod krzywą. Uwaga: gdy krzywa przyjmuje wartości ujemne musimy przyjąć że pokrywające tą część obszaru pod krzywą prostokąty mają pole o ujemnej wartości.

Symbolicznie operację całkowania zapisujemy przy użyciu specjalnego znaku (rys. 1.7).

Jak policzyć całkę w praktyce? To pytanie jest często mylone z pytaniem: czy rozumiesz dlaczego całki są liczone w ten a nie inny sposób? To są dwa zupełnie różne pytania. Przeciętny użytkownik komputera wie jak napisać list do cioci pod programem *Word.* Ale fakt posiadania tej umiejętności nie oznacza, że tenże użytkownik rozumie dlaczego po kliknięciu myszką na ikonę programu otwiera się edytor tekstu *Word*.



Rysunek 1.7. Oznaczenia używane do zapisu operacji całkowania

Podobnie jest z wieloma innym rzeczami, na przykład wiemy jak włączyć telewizor, co nie oznacza, że wiemy jak on działa. Wracając do całki – skupimy się nad metodą jej liczenia, a nie uzasadnieniem tej metody. Pożyteczną rzeczą jest przeczytać w książce z matematyki dowody poprawności przedstawionych metod, ale ja nie piszę podręcznika z matematyki, więc ograniczę się do opisania metody, której będziemy używać. Metoda jest następująca: Jeżeli masz obliczyć całkę funkcji f(x) w przedziale od xp do xk to,

- Oblicz całkę z tej funkcji w postaci nieoznaczonej – to znaczy bez granic. Niech wynikiem będzie funkcja w(x), która jest nazywana funkcją pierwotną do funkcji f(x)

$$\int \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = \mathrm{w}(x) \qquad 1.8$$

Nie wiesz co to jest całka nieoznaczona? Nawet nie musisz tego wiedzieć. Wystarczy, że wiesz, gdzie są tablice całek nieoznaczonych, lub umiesz wpisać polecenie: „oblicz całkę nieoznaczoną” w programie typu CAS. Nadto poświęcę całkom nieoznaczonym więcej czasu w rozdziale 2 tego dodatku.

- Mając obliczoną całkę nieoznaczoną funkcji f, możesz obliczyć całkę oznaczoną według wzoru

$$\int_{x_p}^{x_k} \mathrm{f(x)d}x = \mathrm{w}(x_k) - \mathrm{w}(x_p) \qquad 1.9$$

Proste prawda? Tabela (1.1) zawiera kilka przykładowych całek nieoznaczonych. Nawiasem mówiąc wzór (1.9) stanowi treść tzw. podstawowego twierdzenia analizy

Możemy również korzystać z twierdzeń ułatwiających obliczanie całek. Dzięki twierdzeniom całki z funkcji trudnych do całkowania możemy obliczyć poprzez obliczanie całek z funkcji łatwiejszych do całkowania. Do najważniejszych twierdzeń należy twierdzenie mówiące o tym, że operacja całkowania jest liniowa.

Twierdzenie 1.1: Liniowości operacji całkowania

Niech będą dwie całkowalne funkcje f(x) i g(x) oraz dwie liczby rzeczywiste a i b. Wtedy

$$\int \left(a\mathrm{f}(x) + b\mathrm{g}(x)\right)\mathrm{d}x = a \int \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + b \int \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x \qquad 1.10$$

Jak widać z powyższego wzoru stwierdzenie, że dana operacja (w naszym wypadku jest to operacja całkowania) jest liniowa załatwia dwie sprawy. Pierwsza sprawa: jak funkcja jest mnożona przez liczbę to całka z takiego wyrażenia jest równa iloczynowi tej liczby przez całkę tej funkcji. Czasem mówi się krótko (jest to kolokwialne stwierdzenie), że ze znakiem całki można wejść pod iloczyn liczby i funkcji. Druga sprawa: jak mamy sumę dwóch funkcji, to całka takiej sumy jest równa sumie całek z tych funkcji. Bez tych własności liczenie całek byłoby dużo trudniejszą sztuką (a i z liniowością nie jest łatwe).

$\mathbf{f}(\boldsymbol{x})$	$\int \mathbf{f}(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x}$
$x^n, \;\; n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$\frac{1}{ax \pm b}$	$\frac{1}{a}\ln(ax \pm b)$
$\sin(a\,x)$	$a\cos(a\,x)$
$\cos(a\,x)$	$-\,a\sin(a\,x)$
e^{ax}	$\frac{1}{a}\,e^{ax}$
$\tan(ax)$	$-\frac{1}{a}\ln\left(\cos(ax)\right)$
$\ln(ax)$	$x\ln(ax) - x$

Tabela 1.1. Tabela całek nieoznaczonych dla wybranych funkcji. Symbole a i b reprezentują dowolne liczby rzeczywiste.

Czas na prosty przykład. Obliczmy pole pod funkcją

$$\mathrm{f}(x) = x^3 + 2\cos(3x) \tag{1.11}$$

na przedziale od x_p=-1 do x_k=2
Krok pierwszy – korzystamy z twierdzenia o liniowości

$$\int_{x_p}^{x_k} (x^3 + 2\cos(3x))\mathrm{d}x = \int_{x_p}^{x_k} x^3\,\mathrm{d}x + 2\int_{x_p}^{x_k} \cos(3x)\mathrm{d}x \tag{1.12}$$

Krok drugi – korzystając z tablicy całek obliczmy pierwszą całkę nieoznaczoną

$$\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 \tag{1.13}$$

Krok trzeci – korzystając z tablicy całek obliczmy drugą całkę nieoznaczoną

$$2\int \cos(3x)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sin(3x) \tag{1.14}$$

Krok czwarty – całka nieoznaczona naszej funkcji ma postać

$$\int (x^3 + 2\cos\,(3x))\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}\sin(3x) \tag{1.15}$$

Krok piąty - dla górnej granicy *xk*=2 mamy

$$\frac{1}{4}(x=2)^4 + \frac{2}{3}\sin(3x=2) \approx 4 - 0{,}1863 = 3{,}8137 \tag{1.16}$$

Krok szósty - dla dolnej granicy *xd*=-1 mamy

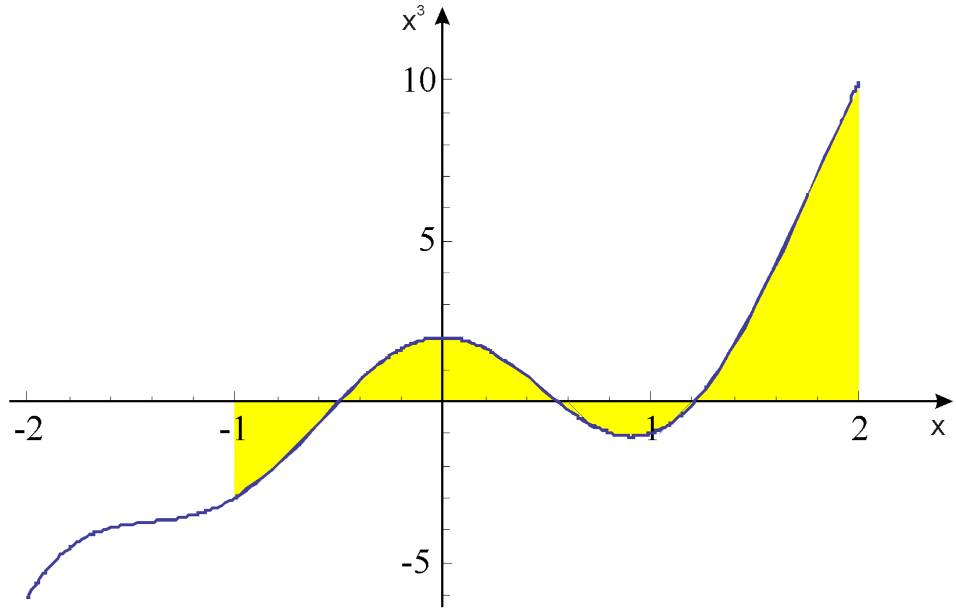
$$\frac{1}{4}(x=-1)^4 + \frac{2}{3}\sin(3x=-1) \approx \frac{1}{4} - 0{,}0941 = 0{,}1599 \tag{1.17}$$

Różnica między górną a dolną wartością jest szukaną wartością całki

$$\int_{xd}^{xg} (x^3 + 2\cos\,(3x))\mathrm{d}x \approx 3.8137 - 0.1599 = 3.6578 \tag{1.18}$$

Zatem pole pod naszą krzywą, na przedziale [-1, 2] wynosi 3.6578 (rys. 1.8).

Musisz zwrócić uwagę na ważki fakt. Na przedziałach, na których funkcja przyjmuje wartości ujemne, pole obliczane za pomocą całek jest ujemne. Pole obszaru zaznaczonego na żółto na rysunku (1.8) składa się z czterech fragmentów, przy czym dwóm przypisujemy wartości ujemne, a dwóm dodatnie. Całe pole jest sumą pól wszystkich fragmentów z uwzględnieniem znaków części składowych. Gdy więc funkcja ma takie samo pole po stronie wartości dodatnich jak po stronie wartości ujemnych, to pole całkowite jest równe zeru.



Rysunek 1.8. Wykres naszej funkcji jest całkiem złożony. Mimo to nie mieliśmy dużych problemów z obliczeniem pola pod wykresem w przedziale [-1, 2] – pole to zamalowane jest na żółto – UWAGA – pole obszaru znajdującego się pod osią x-ów dodaje się ze znakiem minus.

1.1. Chwila z pakietem Mathematica ♣

Zobaczmy jak wygląda całkowanie z użyciem pakietu CAS, na przykładzie pakietu Mathematica (§TI 5). Powiedzmy, że chcę obliczyć całkę nieoznaczoną

$$\int \sin(ax)\, x^3\, \mathrm{d}x \tag{1.1.1}$$

Gdzie a jest stałą. Podejrzewam, że całka ta przekracza wasze możliwości, chyba że za wsparcie macie porządne tablice matematyczne. Ale program Mathematica daje sobie szybko z nią radę. Trzeba tylko umieć zapisać odpowiednią instrukcję

$$Integrate[Sin[ax]x^3, x]//Simplify \tag{1.1.2}$$

Polecenie *Integrate* oznacza całkuj, a dodane na końcu *//Simplify* oznacza instrukcję ”uprość wyrażenie”. Oto odpowiedź programu

$$\frac{-ax(-6+a^2x^2)Cos[ax]+3(-2+a^2x^2)Sin[ax]}{a^4} \tag{1.1.3}$$

Łatwo i przyjemnie. Można oczywiście obliczyć również całkę oznaczoną. Jeżeli chcę powyższą całkę obliczyć w granicach od -3 do 10,1 to piszę tak (niech a=2)

$$Integrate[Sin[2x]x^3, \{x\underbrace{, -3, -10.1}_{\substack{granice\\ całkowania}}\}] \tag{1.1.4}$$

W odpowiedzi program wyświetla liczbę 24.0676.

Obliczenie całki nieoznaczonej z funkcji tan[ax]e^{bx} sprawiłoby problem nawet komuś, kto z całkami jest przyzwoicie obyty, chyba że za wsparcia miałby bardzo dobre tablice. Znacznie przyjemniej jest napisać polecenie

$$Integrate[Tan[ax]Exp[bx],x]//FullSimplify \tag{1.1.5}$$

Użycie instrukcji *FullSimplify* oznacza, że spodziewamy się w wyniku funkcji specjalnych, dla których potrzeba silniejszych algorytmów upraszczania wyrażeń. Ceną za ich użycie jest dłuższy czas wykonywania operacji upraszczania; w tym wypadku niezauważalnie dłuższy. Zaraz po poleceniu „wykonaj" mamy wynik

$$\frac{\mathrm{e}^{bx}(-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ax})^{\frac{\mathrm{i}b}{2a}}(Beta[-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ax},-\frac{\mathrm{i}b}{2a},0]+Beta[-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ax},1-\frac{\mathrm{i}b}{2a},0])}{2a} \tag{1.1.6}$$

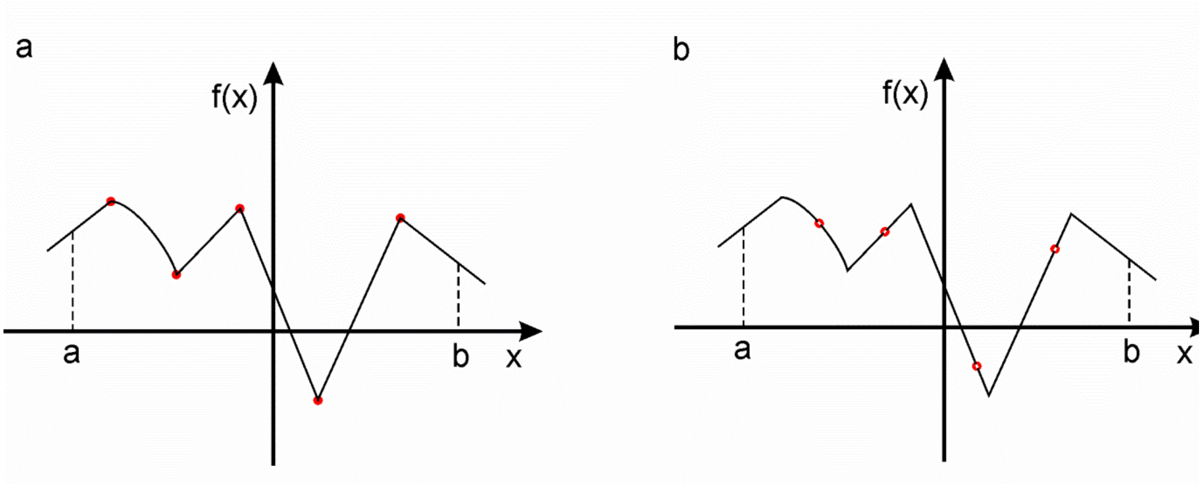
W wyniku mamy funkcję specjalną oznaczoną jako *Beta*; tzw. beta funkcję Eulera. Mamy ponadto jednostkę zespoloną $i=\sqrt{-1}$. Cóż Mathematica podaje wynik możliwie najogólniejszy, rzeczą użytkownika jest albo potraktować tenże wynik mniej ogólnie, albo wpisać do instrukcji całkowania dodatkowe założenia zawężające tą ogólność, na przykład do liczb rzeczywistych. Tu Mathematica potraktowała stałe a i b możliwie ogólnie czyli jako liczby zespolone, stąd w wyniku jednostka urojona.

Aby korzystać z programów zawierających moduły CAS do obliczania całek wystarczy około dwóch godzin nauki podstaw programu. Nie miej jednak złudzeń, że program tego typu zwolni użytkownika ze znajomości matematyki. Mówiąc krótko, trzeba rozumieć jakie możliwości i ograniczenia niesie ze sobą technika całkowania, żeby mieć korzyści z tego typu programów. Inteligencja leży po stronie użytkownika, żmudne obliczenia z zastosowaniem wielu pomocniczych reguł, których użytkownik może nie pamiętać, leżą po stronie programu.

A tak przy okazji, zabawni są studenci przynoszący prace z ewidentnymi głupotami, którzy za wytłumaczenia mają stwierdzenie w rodzaju „Excel mi tak zrobił". Zawsze za programem takim jak Excel czy Mathematica jest użytkownik wpisujący dane i polecenia. Głupoty jakie może wyprodukować program świadczą o ignorancji użytkownika, czy to w zakresie umiejętności obsługi programu, czy też w zakresie wiedzy na temat danego zagadnienia, nie są więc podstawą do zwalania winy na program.

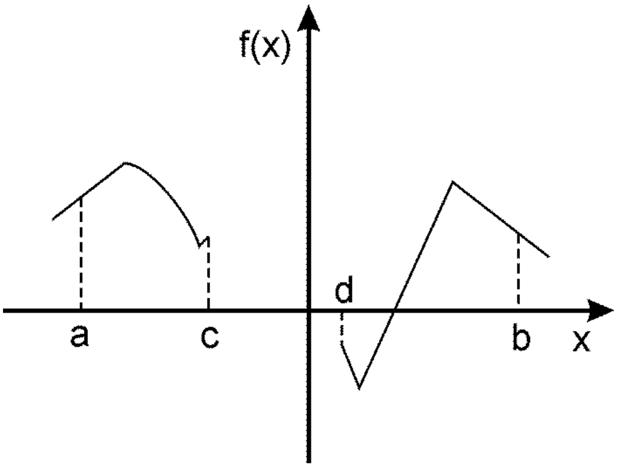
1.2. Funkcje całkowalne

Podobnie jak nie ze wszystkich funkcji możemy obliczyć pochodne (§MB 1.2), nie ze wszystkich funkcji możemy obliczyć całki. Które funkcje są całkowalne? Całkowanie okazuje się być bardziej elastyczną operacją od obliczania pochodnej. Na przykład całkowalne są funkcje z szpicami (rys. 1.2.1a), które w punktach, gdzie jest szpic nie są różniczkowalne. Co więcej całkowalne są również funkcje z izolowanymi punktowymi „dziurami" (funkcje nieciągłe na pojedynczych izolowanych punktach) (rys. 1.2.1b).



Rysunek 1.2.1. a) funkcja f(x) ze „szpicami" (szpice znajdują się wewnątrz czerwonych kółek) jest całkowalna; b) funkcja z izolowanymi punktowymi „dziurami", gdzie jej wartość jest nieokreślona jest całkowalna. Punkty nieciągłości znajdują się wewnątrz czerwonych kółek.

Dziura jest izolowana, kiedy po obu jej stronach funkcja jest jednoznacznie określona na skończonym przedziale. W miejscu izolowanej punktowej dziury nie znamy wartości funkcji. Ale niezależnie od tej wartości pole pod punktem jest równe zeru. Suma, nawet wielu zerowych pól jest równa zeru. Można więc stwierdzić, że takie izolowane punktowe dziury nic nie zmieniają w kwestii pola pod krzywą na zadanym przedziale [a,b].



Rysunek 1.2.2. Funkcja f(x) nie jest określona na skończonym podprzedziale [c,d], przedziału [a,b].

Dlaczego funkcja, która jest nieokreślona na skończonym podprzedziale przedziału [a, b] nie jest całkowalna? W końcu tam, gdzie nie jest określona możemy nie liczyć pola, uwzględniając tylko pole w pozostałych przedziałach (rys. 1.2.2). Pamiętaj jednak, że całkę liczymy na przedziale $[a,b]$. Gdy pominiemy podprzedział $[c,d]$, to całka będzie policzona na przedziale $[a,c]$ i $[d,b]$, a nie na przedziale $[a,b]$. Funkcja będzie zatem całkowalna na przedziałach $[a,c]$ i $[d,b]$, a nie na przedziale $[a,b]$. Ale funkcja z rysunku (1.2.1b) nie jest określona aż w kilku punktach, a mówimy, że jest całkowalna. To prawda jednak w przypadku gdy dziury są jednopunktowe, to pole z funkcją bez takich dziur i z funkcją zawierającą takie dziury jest identyczne. Dlatego mówimy, że funkcja z jedno punktowymi dziurami jest całkowalna na przedziale $[a,b]$. Gdybyśmy uzupełnili funkcję z rysunku (1.2.2) na przedziale (c,d), to pole pod taką uzupełnioną funkcją byłoby zwykle różne od pola nieuzupełnionej funkcji.

1.3. Całki z funkcji o wartościach wektorowych

Funkcje o wartościach wektorowych całkujemy w taki sam sposób jak to było w przypadku różniczkowania takich funkcji. Jedno zadanie obliczenia całki z funkcji N-wymiarowej zamieniamy na N zadań polegających na obliczeniu całek jednowymiarowych. Dla przykładu powiedzmy się prędkość punktu dana jest przez wektor **v** o współrzędnych

$$\mathbf{v}\left(\mathrm{v_x}(t), \mathrm{v_y}(t), \mathrm{v_z}(t)\right) \tag{1.3.1}$$

Wtedy wektor przemieszczenia wyraża się wzorem

$$\mathbf{r} = \int_{t_o}^{t_k} \mathbf{v}\mathrm{d}t = \left(\int_{t_o}^{t_k} v_x \mathrm{d}t\,, \int_{t_o}^{t_k} v_y \mathrm{d}t\,, \int_{t_o}^{t_k} v_z \mathrm{d}t\right) \tag{1.3.2}$$

2. Całka nieoznaczona

Pierwszym krokiem przy obliczaniu całek oznaczonych jest wyznaczenie postaci całki nieoznaczonej z danej funkcji. Choć możemy do tego celu używać tablic całek lub programów typu CAS, to z całką nieoznaczoną wiążą się pewne istotne fakty, których nie możemy pominąć. Zadanie obliczenia całki nieoznaczonej można sformułować tak: Mamy funkcję f(x) znaleźć taką funkcje F(x), że:

$$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x) \tag{2.1}$$

Funkcję F(x) nazywamy funkcją pierwotną do funkcji f(x).

Definicja 2.1: Funkcja pierwotna

Funkcja pierwotna dla danej funkcji f(x), to taka funkcja F(x), której pochodna F' (x) jest równa funkcji f(x)

Z definicji (2.1) widać, że znajdowanie całki nieoznaczonej możemy traktować jako operację odwrotną do obliczania pochodnej. Jaka jest funkcja pierwotna do funkcji cos(x)? Wiemy, że sin′(x)=cos(x), stąd od razu mamy

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) \tag{2.2}$$

Ale uwaga, obliczmy pochodną funkcji sin(x)+C, gdzie C jest funkcją stałą.

$$(\sin(x) + C)' = \sin'(x) + C' = \sin'(x) = \cos(x) \tag{2.3}$$

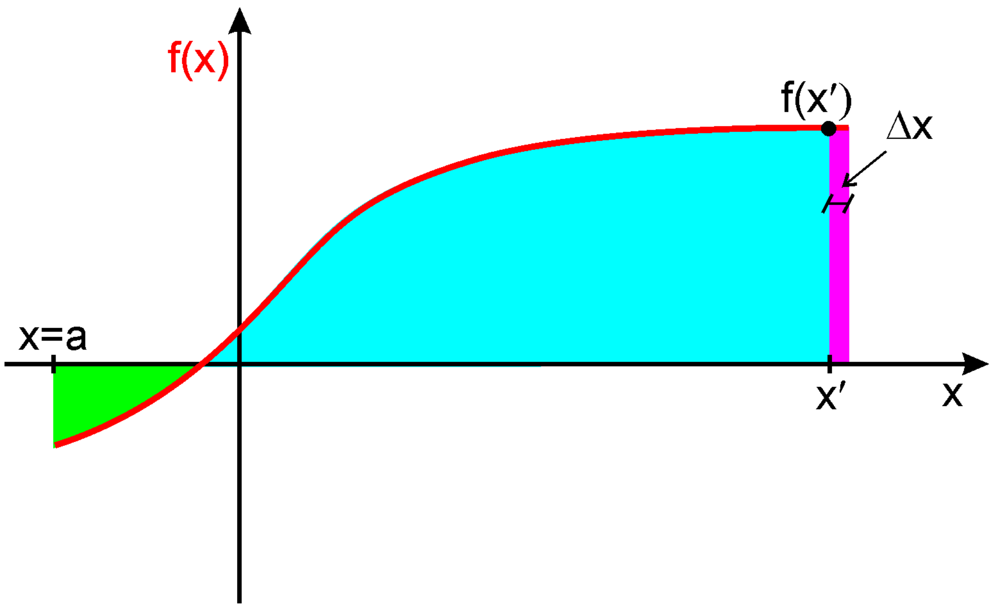
Dodanie funkcji stałej do prawej strony wyrażenia (2.2) niczego nie zmieni, gdyż pochodna z funkcji stałej jest równa zeru. Zatem pełna funkcja pierwotna do funkcji cos(x) ma postać

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C \tag{2.4}$$

Dość beztrosko zdefiniowałem sobie całkę nieoznaczoną jako operację odwrotną do różniczkowania. Wcześniej użyłem całki nieoznaczonej do obliczania całek oznaczonych, które pozwalają na obliczanie pól pod krzywymi. Czy jednak całki nieoznaczone służące do obliczania całek oznaczonych to te same całki nieoznaczone, które zdefiniowane zostały w tym rozdziale? Musimy się temu bliżej przyjrzeć.

Rozważmy funkcję s(a, x), której wartościami są wielkości pola pod krzywą wyznaczoną przez funkcję f(x), w przedziale od a do x (rys. 2.1)

$$\mathrm{s}(a, x') = \int_{a}^{x=x'} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \tag{2.5}$$



Rysunek 2. 1. Kolorowe obszary pokazują pole pod funkcją f(x) w przedziale od x=a do x=x'. Pole zaznaczone na zielono ma wartość ujemną. Funkcja s(a, x) ma wartość pola obliczonego na przedziale [a, x]. Przyrost pola, w punkcie x', przy bardzo małych Δx jest z dobrą dokładnością równy Δs=f(x')Δx. Przy Δx→0, przyrost ten dąży do ds=f(x')dx, stąd mamy: ds/dx=f(x')

Dla niewielkiego przyrostu argumentu, od punktu x', do punktu x'+Δx, przyrost funkcji s(a, x), możemy zapisać w postaci

$$\Delta \mathrm{s} = \mathrm{s}(a, x' + \Delta x) - \mathrm{s}(a, x') \approx \mathrm{f}(x')\Delta x \qquad 2.6$$

Dzieląc strony równania (2.6) przez Δx mamy

$$\frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta x} = \frac{\mathrm{s}(a, x' + \Delta x) - \mathrm{s}(a, x')}{\Delta x} \approx \mathrm{f}(x') \qquad 2.7$$

Wyrażenie to określa iloraz różnicowy dla funkcji s. Z (§DB 1.9) wiemy, że przechodząc do granicy Δx→0, otrzymujemy wzór na pochodną funkcji s

$$\mathrm{s}'(a, x') = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{s}(a, x' + \Delta x) - \mathrm{s}(a, x')}{\Delta x} = \mathrm{f}(x') \qquad 2.8$$

Zamieniłem znak równość przybliżonej ≈ na znak równości =, gdyż im mniejsze jest Δx, tym lepiej spełniona jest prawa część przybliżonej równości (2.6). Dla Δx→0 możemy się spodziewać przejścia do wartości dokładnych. Zatem widać, że pochodną funkcji pola s(a, x), w punkcie x=x' jest funkcja f(x) obliczona w punkcie x'. Ale funkcja s(a, x) jest określona jako całka oznaczona (2.5). Możemy więc zapisać

$$\left(\int_{a}^{x=x'} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x \right)' = \mathrm{f}(x') \qquad 2.9$$

Jak widać operację całkowania możemy traktować jako odwrotną do różniczkowania.

Nie pokazaliśmy ciągle, że funkcja pierwotna zdefiniowana w def. (2.1) to ta sama funkcja, która jest używana do obliczania całek nieoznaczonych. W dowodzie tego faktu pomocne jest twierdzenie o wartości średniej.

Twierdzenie 2.1: o wartości średniej w rachunku całkowym

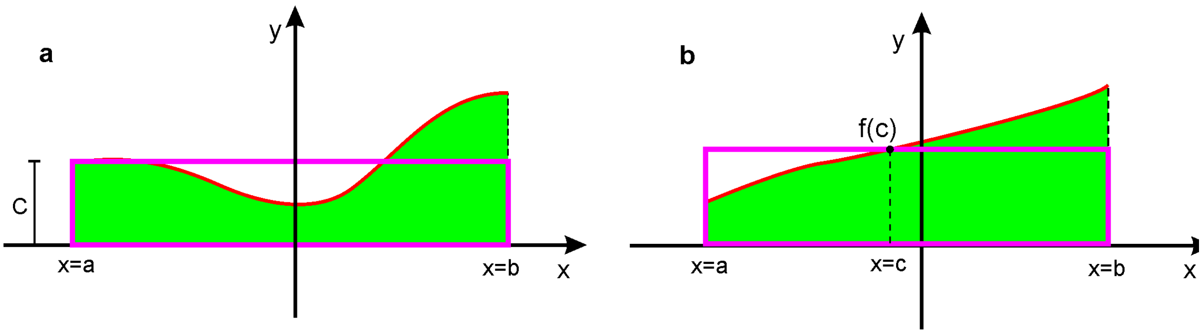
Jeżeli funkcja f jest ograniczona, tak, że m≤f(x)≤M i całkowalna to istnieje taka liczba C, że m≤C≤M, że

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = C(b-a) \qquad 2.10$$

Gdy funkcja f jest ciągła, istnieje ponadto takie c∈[a,b], że

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = \mathrm{f}(c)(b-a) \qquad 2.11$$

Zamiast ścisłego dowodu podam graficzne uzasadnienie twierdzenia o wartości średniej



Rysunek 2.2. a) zielony obszar to pole pod ograniczoną funkcją (o skończonych wartościach) obliczoną na przedziale [a,b]. Twierdzenie o wartości średniej mówi, że istnieje taka wartość c, że prostokąt o wysokości c i podstawie b-a, ma to samo pole co zielony obszar; b) podobnie jak poprzednio szukamy wysokości f(c) prostokąta takiej że jego pole jest równe polu zielonego obszaru. Tym razem funkcja musi być ciągła, gdyż wartość c mogłaby by wypaść w punkcie nieciągłości i odpowiednia wartość f(c) nie byłaby określona.

Twierdzenie 2.1: Podstawowe twierdzenie analizy matematycznej

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale (a,b) oraz

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x \mathrm{f}(s)\mathrm{d}s \qquad 2.12$$

to F(x) jest funkcją pierwotną funkcji f(x), na przedziale (a,b); czyli

$$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x) \qquad 2.13$$

Aby to pokazać obliczmy przyrost funkcji F

$$\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x) = \int_a^{x+\Delta x} \mathrm{f}(s)\mathrm{d}s - \int_a^x \mathrm{f}(s)\mathrm{d}s = \int_x^{x+\Delta x} \mathrm{f}(s)\mathrm{d}s \qquad 2.14$$

Korzystając z twierdzenia o wartości średniej (2.1) mamy

$$\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x) = \int_x^{x+\Delta x} \mathrm{f}(s)\mathrm{d}s = \mathrm{f}(c)\Delta x \qquad 2.15$$

Dzieląc stronami przez Δx i przechodząc do granicy $\Delta x \to 0$, widzimy, że $\mathrm{f}(c) \to \mathrm{f}(x)$ oraz mamy

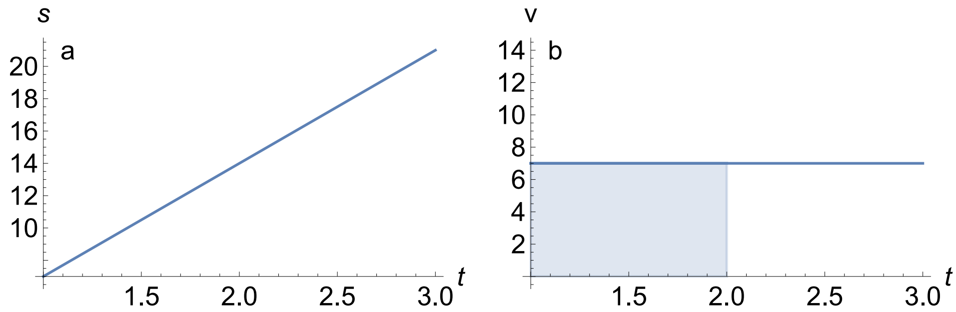
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{F}(x+\Delta x) - \mathrm{F}(x)}{\Delta x} = \mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x) \qquad 2.16$$

Co dowodzi twierdzenia.

2.1. Nieco historii

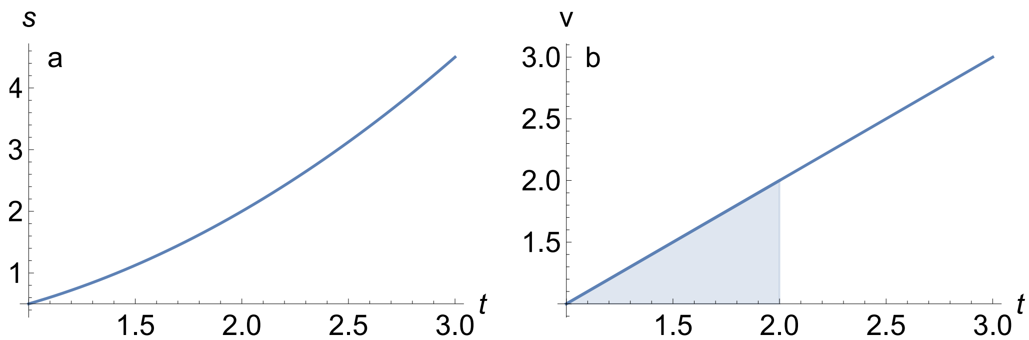
Podstawowe twierdzenie analizy nazywane jest również twierdzeniem Newtona – Leibnitza. Newton był na mecie pierwszy, ale nie kwapił się z publikowaniem swoich wyników. Leibnitz doszedł do wzoru swoją drogą, choć opierał się na pogłoskach o osiągnięciach Newtona. Zresztą obaj mocno opierali się na osiągnięciach poprzedników, w tym Kartezjusza, Fermata, Archimedesa, i matematyków średniowiecznych. Ani Newton ani Leibnitz nie udowodnili tego twierdzenia w sposób ścisły. Nowe idee w matematyce są z początku określone w dość mglisty sposób, dopiero z czasem opierają się na ścisłych definicjach i dowodach. Ścisłe określenie podstaw analizy okazało się bardzo trudnym zadaniem. Z drugiej strony narzędzia analizy wprowadzone przez Newtona i Leibnitza okazały się tak użyteczne, że na brak ścisłości przymykano oko. Spójrzmy jakie intuicje doprowadziły do sformułowania podstawowego twierdzenia analizy

Drogę do twierdzenia otwierała geometria analityczna, której podstawy opracował Kartezjusz. Geometria analityczna pozwalała opisywać krzywe równaniami i traktować je w sposób dynamiczny. Weźmy pod uwagę ruch jednostajny prostoliniowy. Rysunek (2.1.1a) przedstawia wykres przebytej drogi *s* w zależności od czasu *t*. Prędkość *v* w ruchu jednostajnym jest stała, a jej wykres to linia równoległa do osi czasu (rysunek 2.1.1b). Droga w ruchu jednostajnym to iloczyn prędkości i czasu, czyli pole prostokąta na rysunku (2.1.1b).



Rysunek 2.1.1. Droga w ruchu jednostajnym prostoliniowym; a) wykres przebytej drogi *s* jako funkcji czasu (w zakresie czasu od 1 sekundy do 2 sekund), dla prędkości *v*=7m/s; b) zależność prędkości od czasu. Pole powierzchni zakreślonego prostokąta jest równe drodze przebytej w czasie jednej sekundy

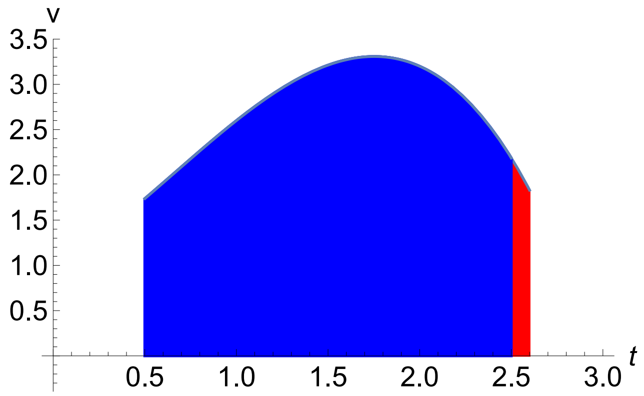
Rysunki (2.1.2 a i b) przedstawiają te same zależności dla ruchu jednostajnie przyspieszonego. To co wiemy, to to, że podobnie jak w ruchu jednostajnym, pole pod wykresem prędkości od czasu (2.1.1b i 2.1.2b) jest równe przyrostowi przebytej drogi w danym zakresie czasu.



Rysunek 2.1.2. Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym; a) wykres przebytej drogi *s* jako funkcji czasu (w zakresie czasu od 1 do 2 sekund), dla przyspieszenia a=1m/s^2; b) zależność prędkości od czasu (przy założeniu, że prędkość w chwili t=1s była równa zeru). Pole powierzchni zakreślonego trójkąta jest równe drodze przebytej w czasie dwóch sekund

Kiedy czas płynie pozioma kreska ograniczająca zakreślony na niebiesko obszar przesuwa się w prawo, a przebyta droga zwiększa się tak jak zwiększa się zakreślone pole (rys. 2.1.3). Oznacza to, że w bardzo małym przedziale czasu Δt, mamy zależność

$$\Delta s = \Delta A \approx v\Delta t \qquad 2.1.2$$



Rysunek 2.1.3. Droga przebyta przez punkt, którego prędkość opisana jest funkcją v(t) jest równa polu pod wykresem v(t), w zadanym przedziale czasu. Gdy dodadamy do chwili końcowej dodatkowy bardzo mały czas Δt, pole to wzrośnie o wartość prawie równą czerwonemy prostokątowi. Dla nieskończenie małego przystostu czasu dodatkowe pole jest równe v(t)dt

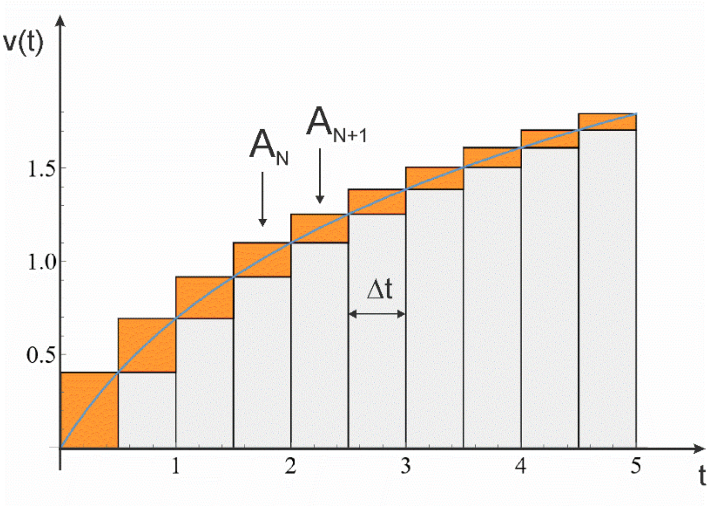
Zatem z jednej strony mamy prędkość jako pochodną przyrostu pola (czyli przyrostu drogi) po czasie

$$v \approx \frac{\Delta A}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \qquad 2.1.1$$

Z drugiej strony przebytą drogę możemy przedstawić jako prędkość przyrostu pola w czasie, czyli tak

$$\mathrm{d}A = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = A'\mathrm{d}t \qquad 2.1.2$$

Stwierdziłem, że pole pod wykresem zależności v(t) jest równe przebytej drodze w danym przedziale czasu. Tylko skąd to wiemy? Wiemy to z rozumowania przeprowadzonego dla rysunku (1.5). Spróbujmy powtórzyć je nieco inaczej. Przybliżamy pole prostokątami, albo z nadmiarem albo z niedomiarem (rys. 2.1.4). Im mniejsza będzie szerokość przedziału Δt, tym dokładny będzie wynik. Przy nieskończenie małym przedziale dt otrzymamy wynik dokładny. Problem leży w tych nieskończenie małych wartościach, do których odwoływali się Newtona i Leibnitz. Były one skutecznym narzędziem obliczeniowym, ale ich natura była wysoce podejrzana. W efekcie rozumowanie matematyczne prowadzone z udziałem nieskończenie małych było matematycznie podejrzane. O nieskończenie małych pisałem już przy okazji rachunku różniczkowego (§DB 4)



Rysunek 2.1.4. Pole pod krzywą v(t) może być przybliżane przez zbiór prostokątów branych z nadmiarem, lub niedomiarem

Wracając do rysunku (2.1.4). Zapostuluję istnienie takiego ciągu liczb $A_1,\ldots A_N$, że

$$v_i \Delta t = A_i - A_{i-1} \tag{2.1.3}$$

Gdzie v_i jest i-tą wartością funkcji prędkości v. Pole pod krzywą będzie równe sumie kolejnych różnic

$$A = \sum_{i=2}^{N} \Delta A_i = \left(A_2 - A_1\right) + \left(A_2 - A_1\right) + \ldots + \left(A_N - A_{N-1}\right) = A_N - A_1 \tag{2.1.4}$$

Gdy przejdziemy do nieskończenie małych $\Delta t \to \mathrm{d}t$, to mamy

$$\mathrm{A} = \int_a^b \mathrm{v}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{A}(b) - \mathrm{A}(a) \tag{2.1.5}$$

Biorąc pod uwagę (2.1.1) widzimy, że funkcja A jest funkcją pierwotną w stosunku do funkcji y(t). Wzór (2.1.5) wyraża podstawowe twierdzenie analizy.

Pokazane tu rozumowanie nie ma ścisłego charakteru. Ale jak już wspominałem rachunek różniczkowo-całkowy w pierwszym okresie swojego rozwoju takiej ścisłości nie miał. Nabierał jej w trakcie swojego rozwoju. Teraz czas na nieco techniki rachunku całkowego

3. Kilka metod całkowania

Całkowanie jest czynnością trudniejszą od obliczania pochodnych. Wiąże się to z zasadniczą różnicą między oboma rachunkami. Do obliczania pochodnych (lub różniczek) w danym punkcie wystarcza informacja o najbliższym otoczeniu tego punktu. Pochodna $y'(x)$ funkcji $y(x)$ wyznacza nachylenie stycznej w każdym punkcie krzywej będącej wykresem funkcji $y(x)$, dla każdego x. Całka dana wzorem

$$s(x) = \int_{x_p}^{x} f(x) dx \tag{3.6}$$

definiuje funkcję zależną od x. Tylko teraz aby obliczyć wartość tej funkcji dla danego x, musimy znać przebieg funkcji od x_p do x. I tak dla każdego x. Całe zadanie jest przez to trudniejsze. Będziemy oczywiście obliczali funkcje pierwotne do funkcji całkowanej (całki nieoznaczone). Gdy mamy funkcję pierwotną, to obliczenie całki nieoznaczonej jest już prostym krokiem.

3.1. Całkowanie przez części

Istnieje jednak grupa twierdzeń, która pomaga w obliczaniu całek nieoznaczonych. Jednym z tych twierdzeń jest przytoczone już twierdzenie o liniowości (1.1). Do wyprowadzenie drugiego użytecznego twierdzenia wykorzystam wzór (DB 1.1.2) na pochodną iloczynu dwóch funkcji

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{3.1.1}$$

Scałkujmy obie strony (3.1.1)

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx = \int [f(x) \cdot g(x)]'\, dx = f(x) \cdot g(x) \tag{3.1.2}$$

Stąd mamy następujące dwa wzory

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx \tag{3.1.3a}$$

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx \tag{3.1.3b}$$

Wzory (3.1.3) wyrażają metodę całkowania przez części. Pozwalają one całkować iloczyn dwóch funkcji, pod warunkiem, że znamy funkcję pierwotną jednej z nich

Prostym przykładem, w którym metoda całkowania przez części bardzo dobrze się spisuje jest całkowanie funkcji

$$\int x\, e^{ax} \mathrm{d}x \tag{3.1.4}$$

Wykorzystam wzór (3.1.3b) przyjmując, że

$$\mathrm{f}(x) = x \Longrightarrow \mathrm{f}'(x) = 1 \tag{3.1.5a}$$

$$\mathrm{g}'(x) = e^{ax} \Longrightarrow \mathrm{g}(x) = \frac{1}{a} e^{ax} \tag{3.1.5b}$$

mamy

$$\int x\, e^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} x e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} \mathrm{d}x \tag{3.1.6}$$

Obliczmy całkę

$$\int \frac{1}{a} e^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int e^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a^2} e^{ax} - C \tag{3.1.7}$$

Po wstawieniu ostatniego wyrażenia do (2.1.6) mamy

$$\int x\, e^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} + C = \frac{1}{a} e^{ax} \left(x - \frac{1}{a} \right) + C \tag{3.1.8}$$

Ważną techniką obliczania całek jest całkowanie przez podstawianie

3.2. Całkowanie przez podstawianie

Całkowanie przez podstawianie jest najpopularniejszą metodą obliczania całek. Wymaga jednak sporej dozy matematycznej intuicji. Powiedzmy, że funkcja podcałkowa da się zapisać w postaci

$$\int \mathrm{f}\big(\mathrm{g}(x)\big) \mathrm{g}'(x) \mathrm{d}x \tag{3.2.1}$$

Dokonamy podstawienia

$$t = \mathrm{g}(x) \Longrightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{g}'(x) \mathrm{d}x \tag{3.2.2}$$

Wtedy całka (3.2.1) przejdzie do postaci

$$\int \mathrm{f}(\mathrm{t}) \mathrm{d}t \tag{3.2.3}$$

Oczywiście podstawianie ma wtedy sens gdy prowadzi do obliczenia całki o prostszej postaci. Dla przykładu obliczymy całkę

$$\int \tan(x) \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x \tag{3.2.4}$$

Dokonujemy podstawienia

$$t = \cos(x) \Longrightarrow \mathrm{d}t = -\sin(x) \mathrm{d}x \tag{3.2.5}$$

Dalej mamy

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x = \int \frac{-\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos(x)| + C \qquad 3.2.6$$

Nasze narzędzia do obliczania całek wzbogacę jeszcze przed podanie jednego prostego i często wykorzystywanego twierdzenia.

Twierdzenie 3.2.1: O stałej pod znakiem funkcji

Niech

$$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x) \qquad 3.2.7$$

wtedy

$$\int \mathrm{f}(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{F}(ax) \qquad 3.2.8.$$

Dowód tego twierdzenia wynika ze znanej nam już własności liniowości pochodnej (DB 1.1.1)

$$\mathrm{F}'(x) = \mathrm{f}(x) \Rightarrow \mathrm{F}'(ax) = a\mathrm{f}(ax) \qquad 3.2.9$$

Możemy zatem zapisać

$$\mathrm{F}'(ax) = a\mathrm{f}(ax) \Rightarrow \mathrm{f}(ax) = \frac{1}{a}\mathrm{F}'(ax) \qquad 3.2.10$$

Zatem

$$\int \mathrm{f}(ax)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a}\mathrm{F}'(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \mathrm{F}'(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{F}(ax) \qquad 3.2.11$$

Dla przykładu

$$\int \cos\left(\frac{3}{4}\pi x\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{3\pi}\sin\left(\frac{3}{4}\pi x\right) + C \qquad 3.2.12$$

3.3. Całki o nieskończonych granicach (niewłaściwe)

Niekiedy przynajmniej jedna z granic całek jest nieskończona. Mówimy wtedy o całkach niewłaściwych. Nazwa bierze się stąd, że nieskończoność jest w klasycznej teorii liczb obiektem cokolwiek podejrzanym. Całki o granicach nieskończonych mogą być rozbieżne, wtedy ich wartość osiąga nieskończoność. Przykładem takie całki jest

$$\int_0^\infty x^3 = \infty \qquad 3.3.1$$

Jeżeli jednak funkcja podcałkowa wystarczająco szybko maleje do zera, całka niewłaściwa może być zbieżna, na przykład

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}; \quad \alpha > 0 \qquad 3.2.2$$

Całki niewłaściwe zdarzają się w fizyce dość często, trzeba się więc z nimi szybko oswoić. Potrafią sobie z nimi radzić pakiety CAS. Przykład podaje tabela (M. 3.4.1), w którym obliczamy całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(2+x^2\right)\sqrt{4+3x^2}} \qquad 3.3.3$$

Integrate[1/((2 + x^2)Sqrt[4 + 3x^2]), {x, −∞, ∞}]	Instrukcja obliczenia całki
ArcCosh[$\sqrt{\frac{3}{2}}$]	Wynik

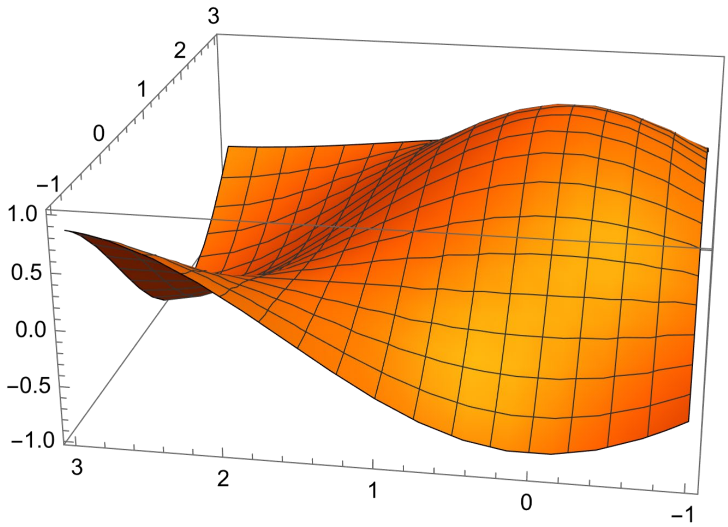
M. 3.3.1. Obliczanie całki (3.4.3) w pakiecie Mathematica. W odpowiedzi mamy funkcję arccosh (arcus cosinus hiperboliczny).

4. Całki wielokrotne

Rysunek (4.1) przedstawia wykres funkcji

$$f(x,y)=\sin(x)\cos(y) \qquad 4.1$$

określonej na płaszczyźnie. Każdemu punktowi płaszczyzny *xy* przyporządkowujemy wartość. Jak możemy obliczyć objętość pod wykresem tej funkcji?



Rysunek 4.1. Fragment wykresy funkcji danej wzorem (4.1)

W tym przypadku jest to stosunkowo proste. Musimy obliczyć całkę podwójną postaci

$$\int_{y=a}^{y=b}\int_{x=c}^{x=d}\sin(x)\cos(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad 4.2$$

Zaczynamy oczywiście od podwójnej całki nieoznaczonej

$$\iint\sin(x)\cos(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad 4.3$$

Całka jest prosta, gdyż jest iloczynem funkcji zależnych wyłącznie od *x* i wyłącznie od *y*. Możemy ją więc sfaktoryzować, czyli rozłożyć na iloczyn całek pojedynczych

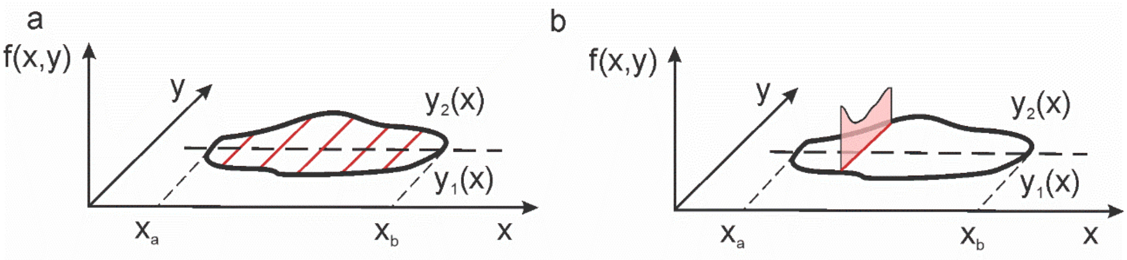
$$\iint\sin(x)\cos(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\sin(x)\,\mathrm{d}x\int\cos(y)\,\mathrm{d}y=-\cos(x)\sin(y) \qquad 4.4$$

Teraz możemy podstawić granice, otrzymujemy

$$\int_{y=a}^{y=b}\int_{x=c}^{x=d}\sin(x)\cos(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\cos(d)\sin(b)+\cos(c)\sin(a) \qquad 4.5$$

Należy również pamiętać, że część, z każdej funkcji, czyli tej zależnej od x i od y, leżąca pod płaszczyzną zerową daje wkład ujemny, podobnie jak to było z całką pojedynczą.

Faktoryzacja daje nam możliwość sprowadzenia obliczania całki wielokrotnej do iloczynu całej pojedynczych, czyli do przypadku, który już znamy. Nie zawsze faktoryzacja jest możliwa. Powiedzmy, że całkujemy funkcję f(x,y) nad obszarem wyznaczonym przez krzywą zamkniętą pokazaną na rysunku (4.2a) jako czarny kontur.



Rysunek 4.2. Całkowanie funkcji w dwóch wymiarach; a) czarna linia przedstawia kontur wyznaczający obszar całkowania (granice całkowania) leżący w płaszczyźnie xy. Dolną granicę konturu wyznacza funkcja $y_1(x)$ a górną $y_2(x)$. Dla ustalonego x_u możemy wykreślić linię równoległą do osi y i biegnącą od dolnej do górnej część konturu granicznego; b) nad każdą taką linią zdefiniowana jest funkcja f(x_u,y) zmiennej y. rysunek pokazuje przebieg jednej takiej wybranej funkcji oraz pole pod nią zawarte.

Podzielmy pole konturu na bardzo dużo cienkich pasków biegnących równolegle do osi y od jednego do drugiego brzegu konturu. Na rysunku (4.2a) narysowane są kolorem czerwonym przykłady takich pasków. Nad każdym takim paskiem powierzchnia f(x,y) staje się krzywą, tak jak to pokazuje rysunek (4.2.b). Policzymy pole pod taką krzywą. Jeżeli to pole pomnożymy przez szerokość paska Δx (w granicy dx), to otrzymamy bardzo małą (w granicy nieskończenie małą) objętość (rys. 4.2b). Wyraża to wzór

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \int_{\mathrm{y}_1(x)}^{\mathrm{y}_2(x)} \mathrm{f}(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{4.6a}$$

We wzorze (4.6a) całkowanie jest po y przy ustalonym x. Sumowanie po takich elementarnych objętościach da nam objętość pod funkcją f(x,y) nad zadanym obszarem.

$$\mathrm{d}V = \int_{x_d}^{x_g} \left[\int_{\mathrm{y}_1(x)}^{\mathrm{y}_2(x)} \mathrm{f}(x,y)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \tag{4.6b}$$

Wzór (4.6b) zapisujemy w skrócie tak

$$\mathrm{d}V = \int_{x_d}^{x_g} \int_{\mathrm{y}_1(x)}^{\mathrm{y}_2(x)} \mathrm{f}(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{4.6c}$$

Zgodnie z konwencją zaczynamy całkowanie od całki wewnętrznej, czyli w naszym przypadku tej po y. Całkę w jednej z postaci (4.6 b-c) nazywamy całką iterowaną.

Definicja 4.1: Całka iterowana

Całka iterowana to całka, w której wielokrotnie powtarza się całkowanie jednokrotne kolejno względem różnych zmiennych, traktując pozostałe zmienne jako stałe parametry

Z przedstawionego tu schematu wynika, że możemy zmienić porządek całkowania i zapisać całkę iterowaną (4.6c) w postaci

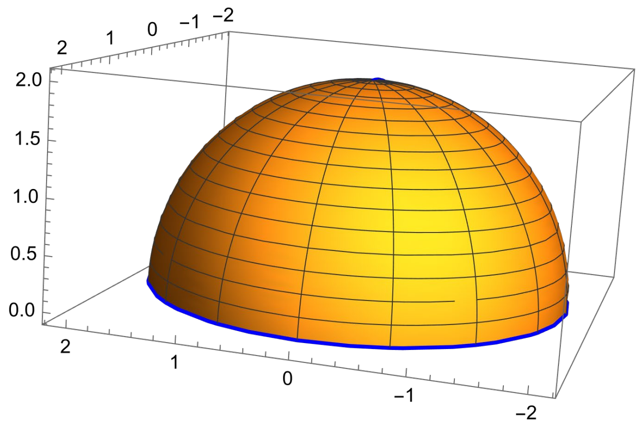
$$\mathrm{d}V = \int_{y_d}^{y_g} \int_{\mathrm{x}_1(y)}^{\mathrm{x}_2(y)} \mathrm{f}(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4.6d}$$

Wtedy jednak granice całowania po zmiennej x wyznaczone są przez funkcje $\mathrm{x}_1(y)$ i $\mathrm{x}_2(y)$.

Fakt 4.1:

W całkach iterowanych możemy dowolnie przyjąć kolejność iteracji

Zrobimy prosty przykład, obliczymy pole powierzchni pod połówką sfery o promieniu r (rys. 4.3).



Rysunek 4.3. Półsfera o promieniu r=2. Niebieska linia wyznacza kontur ograniczający obszar całkowania

Równanie takiej sfery ma postać

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{4.7}$$

Funkcją f(x,y) będzie tu wysokość z=f nad płaszczyzną xy

$$\mathrm{z}(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \tag{4.8}$$

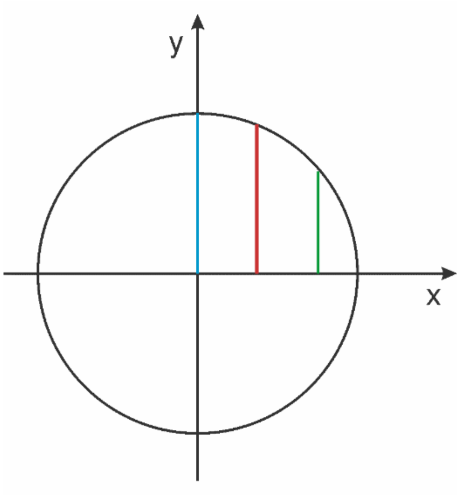
Kontur, pod którym całkujemy, to koło będące kołem wielkim sfery, które możemy opisać dwoma funkcjami

$$\mathrm{y}(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \tag{4.8a}$$

Wykorzystamy wysoką symetrię półsfery. Niech y zmienia się od zera do

$$\sqrt{r^2 - x^2} \tag{4.8b}$$

Nadto niech x niech zmienia się od zera do r. Taka zmienność x i y wykreśla ćwiartkę koła (rys. 4.3)



Rysunek 4.3. Gdy x zmienia się od zera do $+r$, a y przyjmuje wartości dodatnie, całość pokrywa ćwiartkę koła. Rysunek pokazuje trzy linie dla trzech wartości ustalonego x, wzdłuż który obliczamy pierwszą całkę po y. Dla niebieskiej linii (dla x=0), zakres zmienności y jest od 0 do r. Dla linii czerwonej i niebieskiej dany jest przez wzór (4.8b).

Mamy więc

$$\frac{V}{4} = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \qquad 4.9$$

Liczmy pierwszą całkę

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{r^2 - x^2 - y^2} + \left(r^2 - x^2\right)\arcsin\frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)\right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \qquad 4.10$$

$$= \frac{r^2 - x^2}{2}\frac{\pi}{2}$$

Druga całka

$$\int_0^a \frac{r^2 - x^2}{2}\frac{\pi}{2}\mathrm{d}x = \frac{\pi r^3}{6} \qquad 4.11$$

Po przemnożeniu tego wyniku przez 4 dostajemy wartość objętości zawartej pod półkulą czyli wzór na połowę objętości kuli.

Wiem, wiem, trochę skakałem przy tych obliczeniach. Jak policzyłem funkcję pierwotną dla pierwszej całki? Sięgnąłem po tablice całek, a może użyłem programu CAS, a może pamiętałem wyniki…., co za różnica. Nie wszystko będę liczył dokładnie bo to zajmuje dużo miejsca. Ważne jest że wy również macie dostęp do różnych źródeł pozwalających na wyliczenie takich całek. A propos systemów CAS. Obsługują one, jak najbardziej, całki wielowymiarowe. Popatrzymy na przykłady obliczone w pakiecie Mathematica. W pierwszym przykładzie policzę całkę (4.1)

Integrate[Sin[x]Cos[y], y, x]	Instrukcja
−Cos[x]Sin[y]	Wynik

M. 4.1. Obliczanie całki (4.1). Przykład zaczerpnięty z dokumentacji programu Mathematica

Nieco bardziej złożony przykład. Obliczymy całkę z następującej funkcji

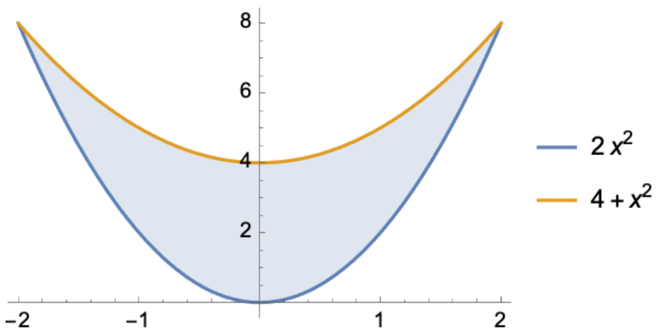
$$\mathrm{f}(x,y)=8-\frac{3y}{2}-\frac{3xy}{3}+\frac{x^2y}{3}+\frac{x^3y}{3} \qquad 4.12$$

W granicach wyznaczonych przez przecięcie dwóch krzywych wyznaczonych przez równania

$$\mathrm{y}(x)=2x^2 \qquad 4.12a$$

$$\mathrm{y}(x)=4+x^2 \qquad 4.12b$$

Obszar ten (leżący między obiema krzywymi) pokazany jest na rysunku (4.4)



Rysunek (4.4). Obszar wyznaczony przez dwie krzywe dane przez wzory (4.12)

Widać, że krzywe przecinają się w punktach dla x=-2 i x=2. Dlatego całkować będziemy o współrzędnej x w tych właśnie granicach. Granice współrzędnych y, dla każdego x wyznaczać będą funkcje: dolną granicę (4.12b) a górną (4.12a). Mamy więc do obliczenia całkę

Integrate[8 - (3*y)/3 - (3*x*y)/3 + (x^2*y)/3 + (x^3*y)/3, {x, -2, 2}, {y, 2*x^2, 4 + x^2}]	Instrukcja
$\frac{20224}{315}$	Wynik
M. 4.2. Obliczanie całki z funkcji (4.12) w obszarze pokazanym na rysunku (4.4). Przykład zaczerpnięty z dokumentacji programu Mathematica	

Przedstawioną tu metodę obliczania całek wielokrotnych można uogólnić na całki potrójne, poczwórne po *N*-krotne.