

Temat

II

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

1. Zasady zachowania ♦

Zasady zachowania należą do grupy najsilniejszych reguł współczesnej fizyki. W przeciwieństwie do tzw. praw fizyki, których zakres stosowania jest ograniczony, od zasad zachowania nie ma odstępstw. Przynajmniej, w tym sensie, że do dnia dzisiejszego nie udokumentowano procesu fizycznego, w którym łamana jest któraś z zasad zachowania. Nie oznacza to, że zasady zachowania są całkowicie niezmiennie. Wraz z rozwojem fizyki pogłębia się nasze rozumienie wielkości podlegających zasadom zachowania. Pociąga to za sobą ewolucję samych zasad zachowania; w efekcie w ich rozumieniu stajemy się coraz bardziej subtelni. Siła zasad zachowania szczęśliwie łączy się z ich prostotą. Aby sformułować zasadę zachowania potrzebne są dwa elementy:

- ❖ Wielkość fizyczna podlegająca zachowaniu
- ❖ Układ izolowany ze względu na zachowaną wielkość - to jest taki układ, przez granice którego nie ma przepływu wielkości zachowanej; jednakże inne wielkości mogą przez granice układu izolowanego przepływać

Określenie 1.1. Wzorzec zasady zachowania

W układzie izolowanym wielkość zachowana jest stała

Określenie 1.2: Zasada zachowania energii

W układzie izolowanym energia jest stała

Określenie 1.3: Zasada zachowania pędu

W układzie izolowanym pęd jest stały

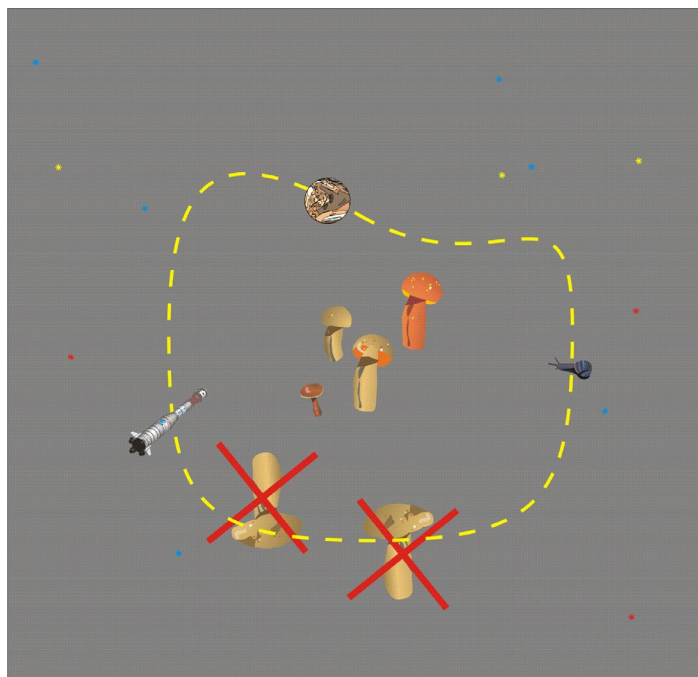
Określenie 1.4. Zasada zachowania momentu pędu

W układzie izolowanym moment pędu jest stały

Określenie 1.5. Zasada zachowania ładunku elektrycznego

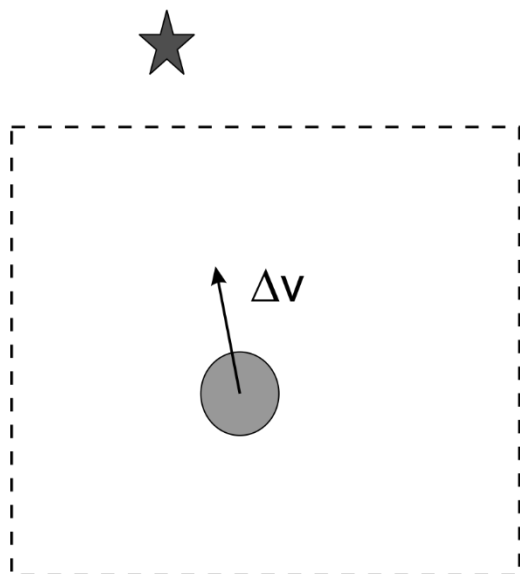
W układzie izolowanym całkowity ładunek elektryczny jest stały

Podkreślę tu dwa istotne fakty związane z zasadami zachowania. Po pierwsze układ izolowany nie musi być układem izolowanym przez barierą fizyczną. Często jest to układ, którego granice wyznaczone są czysto myślowo; w myśli zakreślamy granicę układu izolowanego. Po drugie przez układ izolowany nie może przenikać tylko wielkość podlegająca zachowaniu – wszystko co nie jest związane z przenoszeniem zachowanej wielkości przenikać do i z układu izolowanego jak najbardziej może (rys. 1.1).



Rysunek 1.1. Modne są obecnie dywagacje o wszechświatach równoległych do naszego. Oto powiedzmy, że gdzieś w jednym z takich wszechświatów obowiązuje egzotyczna dla nas zasada zachowania liczby grzybów. Układ izolowany ze względu na zasadę zachowania liczby grzybów to taki układ, przez którego granice nie mogą ani do ani z tego układu przenikać grzyby. Inne obiekty, nie będące przedmiotem zasady zachowania liczby grzybów, takie jak np. ślimaki, statki kosmiczne czy zbłąkane, pozbawione grzybów planety, mogą do tego układu wpływać i z niego wypływać. W przypadku przedstawionym na rysunku granice układu izolowanego są czysto myślowe, jak to zwykle, w przypadku zasad zachowania bywa. Gdy układ nie jest izolowany ze względu na przepływ grzybów, to chociaż zasada zachowania liczby grzybów dalej obowiązuje, to jej nie możemy stosować.

Nasz ładny obrazek wymaga uzupełnienia. Wyobraźmy sobie układ pokazany na rysunku (1.2). Przez granice układu izolowanego nie przepływa żadna energia. A jednak planeta wewnątrz układu izolowanego zwiększa swoją energię kinetyczną na skutek przyciągania przelatującej, poza granicami tego układu gwiazdy. W klasycznej teorii grawitacji oddziaływania grawitacyjnego nie wiążemy z żadnym przepływem. To dzieje się na zasadzie swoistego czary mary. Są dwa ciała i w jakiś magiczny sposób się przyciągają według prawa powszechnego ciążenia. Możemy tu mówić o fizycznej relizacji magii sympatycznej. Dwa podobne obiekty przyciągają się bo „czują do siebie” sypmatię. Takie oddziaływania nazywamy nielokalnymi i są uważane za bardzo kłopotliwe elementy teorii fizycznych. Współczesna teoria oddziaływań zdaje się być wolna od takich pułapek gdyż indentyfikuje nośniki oddziaływań, które przepływają przez granice układu izolowanego. Mimo to nie wszystko staje się przez to jasne i oczywiste.



Rysunek 1.2. Przerywana linia wyznacza granicę układu izolowanego. Znajdująca się wewnątrz układu izolowanego planeta zwiększa swoją prędkość (a zatem zmienia energię kinetyczną) w kierunku przelatującej poza granicami układu izolowanego gwiazdy. Zmianie energii planety nie towarzyszy przepływ żadnego nośnika, który mógłby przenosić energię przez granice układu izolowanego. Z tego powodu warunek braku takiego przepływu musimy uzupełnić o warunek braku oddziaływań sił zewnętrznych.

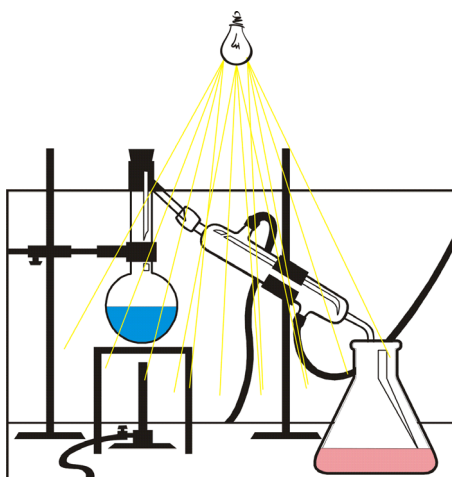
Ponieważ, od współczesnych teorii dzieli nas jeszcze trochę czasu, to musimy załatać dziury pokazane na rysunku (1.2) i stwierdzić, że układ izolowany to taki, przez który nie przepływa wielkości zachowana oraz nie ma oddziaływań zewnętrznych mogących naruszyć bilans wielkości zachowanej. Drugi postulat załatwiamy czasem mówiąc krótko: nie działają siły zewnętrzne.

Definicja 1.1. Układ izolowany ze względu na zasadę zachowania

Układ fizyczny jest izolowany ze względu na zasady zachowania, gdy przez jego granicę nie przepływa wielkości zachowana oraz nie działają na jego zawartość siły zewnętrzne

Trzeba pamiętać, że zasady zachowania spełnione są również w układach, które nie są izolowane. Nie odnosimy jednak tych zasad do nieizolowanych układów z prostej przyczyny. Próbuując wykorzystać zasady zachowania w układach nieizolowanych musimy znać dokładny bilans przepływu wielkości zachowanej do i z układu i to w każdej chwili czasu. Zwykle nie jest to możliwe i powoduje, że zasady zachowania w układach nieizolowanych są bezużyteczne.

W praktyce na układ izolowany nie nakładamy aż tak ostrych warunków, jak to jest określone w definicji (1.3), choćby z tego powodu, że idealny układ izolowany byłoby niezwykle trudno znaleźć. Ponieważ każda analiza układu fizycznego czyniona jest tylko z ograniczoną dokładnością, przyjmujemy, że przepływy wielkości zachowanej przez granice układu izolowanego, które są mniejsze od dokładności prowadzonej analizy możemy uznać za niebyłe. To samo dotyczy działania sił zewnętrznych. Jeżeli są małe, to je zanedbujemy. W praktyce powinniśmy zatem mówić nie o układzie izolowanym, lecz o układzie wystarczająco izolowanym (rys. 1.3).



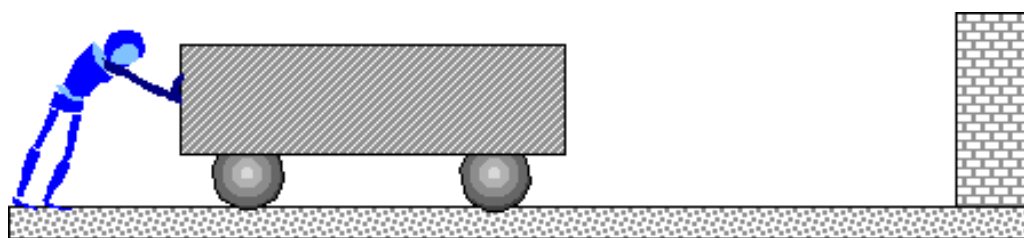
Rysunek 1.3. Powiedzmy, że analizujemy, korzystając z zasady zachowania energii, przepływ energii w podczas reakcji chemicznej zachodzącej w jakimś układzie doświadczalnym. Zakładamy, że układ, w którym znajduje się aparatura jest układem izolowanym (ze względu na energię). Ściśle rzecz biorąc nie jest to prawda. Do naszego układu wpływa, na przykład energia światła żarówki. Wiemy jednak, że energia ta jest bardzo mała w porównaniu z energią reakcji. Co ważniejsze, wiemy, że światło widzialne w niezauważalnym stopniu zakłóca bilans energii badanej reakcji chemicznej. Zatem z punktu widzenia badanej reakcji energia związana ze światłem przepływa przez układ niczego nie zmieniając. Możemy więc przyjąć, że nasz układ jest wystarczająco izolowany. Przy okazji warto zwrócić uwagę na fakt, że gdy badamy bilans energii (lub innej wielkości zachowanej) w jakimś układzie fizycznym, przez który przepływa strumień energii (lub innej wielkości zachowanej) w taki sposób, że nie zakłóca przebiegu badanych procesów, to analizowany układ fizyczny możemy uznać za izolowany. Przykładem jest wspomniana wyżej reakcja chemiczna, której przebiegu nie zakłóca światło. Inny przykład – przez Ziemię przenika silny strumień cząstek elementarnych zwanych neutrinami, które przenoszą energię, pęd i moment pędu. Jednakże prawdopodobieństwo, nawet bardzo, bardzo, bardzo małego wpływu tego strumienia neutrin na znaną nam materię jest tak małe, że spokojnie możemy fakt ich istnienia zaniedbać.

2. Energia ♦

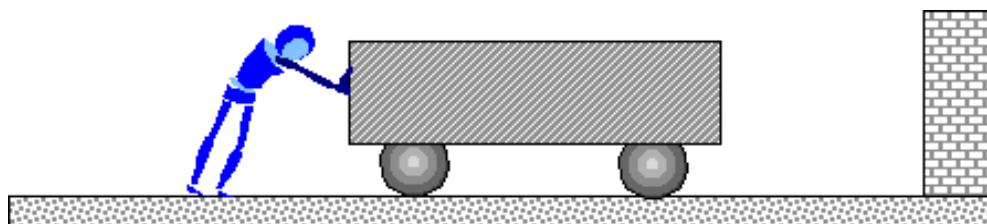
Bliższe spotkanie z zasadami zachowania zacznę od zasady zachowania energii. Wypadałoby w tym miejscu zastanowić się czym jest energia? Choć wydaje się, że intuicyjnie dość dobrze rozumiemy pojęcie energii, to kiedy przychodzi do sformułowania precyzyjnej odpowiedzi na pytanie: czym jest energia, sprawy okazują się mocno skomplikowane. Jest to ważną oznaką tego, że energia jest pojęciem elementarnym, takim jak na przykład czas. Spróbuj odpowiedzieć na pytanie czym jest czas? Nie będę więc tracił czasu na próbę zdefiniowania energii. Przejdę natomiast do omawiania zasady zachowania energii i jak mam nadzieję, podczas tegoż omawiania wasze rozeznanie w sprawach energii stanie się głębsze i precyzyjniejsze. To nie oznacza, że będziecie w stanie podać zadowalającą definicję energii.

W przyrodzie energia przejawia się w tak wielu różnorodnych sytuacjach, że skłonni jesteśmy wyróżniać różne jej rodzaje. Mówimy na przykład o energii kinetycznej (związanej z ruchem ciał), energii cieplnej, chemicznej, jądrowej. Nie ma jednak różnych rodzajów energii. Niezależnie od tego jak ją nazwiemy energia jest zawsze energią, a zasada zachowania energii dotyczy ogólnie całości energii w układzie izolowanym, bez rozróżniania jej rodzajów. Choć, w myśl zasady zachowania, ilość energii w układzie izolowanym musi pozostać stała, to jedna wyróżniona przez nas forma energii może przejść w inną (rys. 2.1). Na przykład przy spadaniu w polu grawitacyjnym energia potencjalna ciała przechodzi w energię kinetyczną tegoż ciała. W procesie spalania energia chemiczna wydzielą się w postaci energii cieplnej, a w maszynie parowej energia cieplna zamienia się na energię kinetyczną.

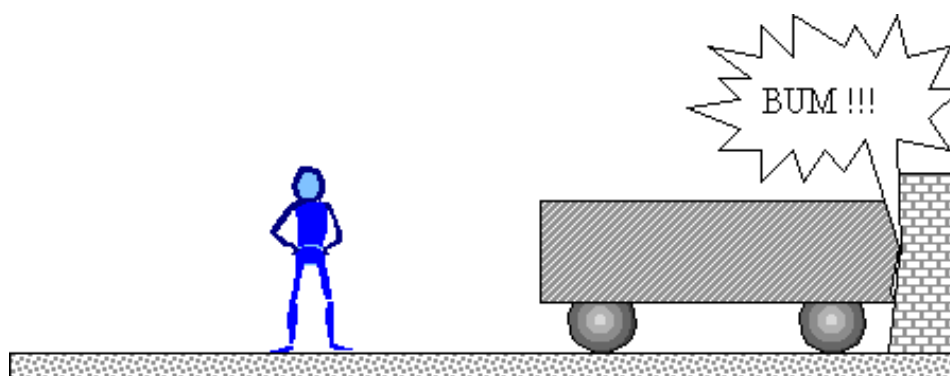
Skoro energia postrzegana przez nas, w różnych okolicznościach jest zawsze taką samą energią, to dlaczego podejmujemy wysiłek podziału energii na różne jej rodzaje? Takie podziały ułatwiają nam działanie. W różnych sytuacjach fizycznych stosujemy różne wzory na obliczanie energii. Jeżeli każdej metodzie obliczania energii przypiszemy inną nazwę, obliczanej w ten sposób energii, taką jak na przykład „energia kinetyczna”, to powołując się na tą nazwę wskazujemy jednocześnie, w jaki sposób należy obliczać energię. Szybko przekonacie się, że jest to wygodne. Często dyskutujemy nad rozwojem (lub rezygnacją z rozwoju) energetyki jądrowej, węglowej, wiatrowej, etc. Rozróżnienie rodzajów energii określa, w tym wypadku, sposób jej uzyskiwania. I to sposób uzyskania energii, którą możemy spożytkować w naszych urządzeniach mechanicznych i elektrycznych, a nie sama energia, może budzić nasz niepokój lub aprobatę. Te dwa przykłady pokazują, że podział energii na rodzaje jest użyteczny i często będę z niego korzystał.



Rysunek 2.1a. Ludzik zaczyna pchać spoczywający wózek. Przemiany biochemiczne w jego organizmie dostarczają energii mięśniom. Energia ta zostaje w części rozproszona jako ciepło (energia cieplna), a w części zamieniona na energię kinetyczną wózka – wózek rozpędza się.



Rysunek 2.1b. Powoli ludzikowi zaczyna brakować tchu. Przestaje pchać wózek, a ten dalej toczy się siłą inercji, zamieniając swoją energię kinetyczną na ciepło jakie wydziela się przy tarcia kół o szyny. Wózek zwalnia bieg.



Rysunek 2.1c. Kiedy zmęczony ludzik odpoczywa, wózek uderza w ścianę. W efekcie wózek zatrzymuje się, a jego energia kinetyczna spada do zera. Energia kinetyczna wózka zamienia się w energię cieplną, akustyczną, wewnętrzną, powodującą częściowe zniszczenie wózka i ściany oraz energię kinetyczną odrzuconych kawałków ściany. Wszystkie te różne nazwy przypisane energii wskazują na rodzaj procesów, w wyniku których energia przepływa między człowiekiem wózkiem i ścianą. Sama energia nie dzieli się na różne rodzaje.

Jak każda wielkość fizyczna energia ma wymiar. Przez wielkości podstawowe układu SI energia wyraża się w następujący sposób

Fakt 2.1: Wymiar energii

Przez wielkości podstawowe układu SI energia wyraża się wzorem

$$\text{energia} = \frac{\text{masa} \cdot \text{długość}^2}{\text{czas}^2} \quad 2.1$$

Przy tej okazji podkreślę, że jednostki podstawowe układu SI nie wyróżniają szczególnie ważnych wielkości fizycznych. Gdyby tak było, to wśród jednostek podstawowych powinna się znaleźć energia. Jednostki podstawowe zostały wybrane ze względu na wygodę w wyrażeniu innych jednostek przez te podstawowe. Gdybyśmy w jakimś układzie jednostek zdecydowali, że wśród wielkości podstawowych są energia, czas i długość, a nie masa, to wtedy masa wyrażałaby się przez wielkości podstawowe wzorem

$$\text{masa} = \frac{\text{energia} \cdot \text{czas}^2}{\text{długość}^2} \quad 2.2$$

Nie będę jednak definiował własnego układu jednostek podstawowych, gdyż jest to bardzo ciężka praca i raczej nikogo, nawet siebie, do takiego układu bym nie przekonał. Pozostanę przy układzie SI. Od tej pory, każda wielkość fizyczna, której wymiar wyrazi się wzorem (2.1) będzie dla nas energią. W sumie mogłoby nam to posłużyć za roboczą definicję energii, która brzmiała by tak: Każda wielkość fizyczna mająca wymiar dany wzorem (2.1) jest energią.

W układzie SI jednostka energii ma nazwę „dżul”. Zgodnie ze wzorem (2.1) mamy

Definicja 2.1: Dżul

W układzie SI jednostką energii jest jeden dżul [J]. Poprzez jednostki podstawowe dżul wyraża się w następujący sposób:

$$J = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \quad 2.3$$

Czy jeden dżul to duża czy mała energia? Przykładowo ciało o masie 1kg poruszające się z prędkością 1m/s (3.6km/h) ma energię kinetyczną równą połowie dżula. Przy prędkości 10m/s (36 km/h) energia kinetyczna tego ciała wynosi 50 dżuli. Do podgrzania jednego litra wody od temperatury 20°C do temperatury 100°C, pod ciśnieniem normalnym potrzeba, przy założeniu 100% wydajności procesu, 335000 dżuli energii. W skali naszego codziennego życia energia jednego dżula jest mała. Jednak w wielu dziedzinach nauki i techniki energia jednego dżula jest ogromna. Aby uniknąć posługiwania się bardzo małymi wartościami (takimi jak na przykład 3 trylionowe części dżula), w skali zjawisk atomowych, powszechnie używaną jednostką energii jest jeden *elektronowolt* 1[eV]. Definiuje się ją w następujący sposób:

Definicja 2.2: Elektronowolt [eV]

Jeden elektronowolt to energia, którą zyskuje elektron przy przejściu różnicy potencjałów elektrycznych równej jednemu woltowi.

Inaczej mówiąc jeżeli pomiędzy punktami *A* i *B* panuje napięcie (różnica potencjałów) jednego wolta, to elektron przechodząc z punktu *A* do punktu *B* zwiększy swoją energię kinetyczną o jeden elektronowolt.

Fakt 2.2.

Jeden elektronowolt to $1.602 \cdot 10^{-19}$ dżula.

Elektronowolt jest jednostką bardzo, bardzo, ..., bardzo małą. Doskonale nadaje się do wyrażenia energii w skali cząsteczek i atomu; i w tej skali jest powszechnie wykorzystywany. Ponadto jednostka zdefiniowana na bazie procesu przejścia elektronu między punktami o jednostkowej różnicy potencjałów wydaje się naturalna dla procesów atomowych. W energetyce powszechnie posługujemy się *kilowatogodziną*. Jest to jednostka rozliczeniowa między odbiorcami energii elektrycznej a jej dostawcami.

Definicja 2.3: Kilowatogodzina [kWh]

Jedna kilowatogodzina to energia, jaką zużywa przez jedną godzinę urządzenie o mocy tysiąca watów

Fakt 2.3.

Jedna kilowatogodzina to 3,6 miliona dżuli.

$$1\text{kWh} = 3600000\text{J}$$

2.4

W starych podręcznikach można się spotkać z jeszcze inną jednostką energii - *ergi* [erg]; nazwa pochodzi od greckiego ergon – praca. Jednostka ta należy do układu CGS.

Definicja 2.4: Erg [erg]

Jeden erg to energia równoważna pracy jaką siła równa jednej dynie wykonuje na drodze jednego centymetra.

Fakt 2.4.

$$1\text{erg} = 10^{-7}\text{J}$$

2.5

Kolejną, niegdyś powszechnie używaną, jednostką energii jest *kaloria* [cal]. Kaloria jest miarą energii cieplnej (choć nie ma przeszkód by nie wyrażać przez kalorię innych rodzajów energii) i w tej roli jest używana do dziś. Używano jej również do określania wartości opałowej jednostki masy paliwa.

Definicja 2.5: Kaloria [cal]

$$1 \text{ cal} = 4.1868 \text{ J}$$

$$1 \text{ cal} = 4.1868 \text{ J}$$

2.6

Powyższa definicja określa tzw. kalorię międzynarodową zdefiniowaną w 1929 roku

Fakt 2.5.

Dawniej kalorię definiowano w następujący sposób: Jedna kaloria to energia równa energii cieplnej potrzebnej na ogrzanie jednego grama wody od temperatury 14.5 do temperatury 15.5 stopnia Celsjusza, pod ciśnieniem jednej atmosfery. Dla tak zdefiniowanej kalorii przelicznik wynosi $1 \text{ cal} = 4.1855 \text{ J}$

Mamy jeszcze kalorię dietetyczną. Jak to często bywa w jednostkach panuje spory bałagan i kaloria dietetyczna jest kilokalorią „energetyczną”. Jeżeli na opakowaniu podana jest w kaloriach wartość energetyczna danego produktu w przeliczeniu np. na sto gram, to oznacza to ile, średnio rzecz biorąc, organizm przyswaja energii (ale liczonej w kilokaloriach) po spożyciu stu gram danego produktu.

Definicja 2.6: Kaloria dietetyczna

Dana masa produktu spożywczego ma wartość energetyczną jednej kalorii dietetycznej jeżeli po spożyciu tej masy tego produktu przeciętny ludzki organizm otrzymuje 1000 cal energii.

I tak na przykład zjedzenie produktu o wartości kalorycznej 100 kalorii dietetycznych na 100 gram oznacza, że przeciętny „zjadacz” przyswoi sobie, po zjedzeniu 100 gram tegoż produktu, sto kilokalorii energii. Tabelę (2.1) zamieszczam dla tych, którzy mają baczność na swoją wagę.

Podam jeszcze definicję dwóch bardziej egzotycznych jednostek energii. Energię głowic jądrowych wyraża się kilotonach trotylu.

Definicja 2.8: Kilotona trotylu [kt]

Kilotona trotylu jest równa energii wyzwolonej w czasie wybuchu tysiąca ton trotylu.

Fakt 2.5.

Jedna kilotona trotylu to

$$1 \text{ kt} = 4.184 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

2.7

W energetyce, gdy w grę wchodzi wielkie energie (na przykład bilanse światowych rezerw surowców energetycznych) energię wyraża się w jednostkach o nazwie *quad*.

Definicja 2.9: Quad

Jeden quad to energia równoważna $1.055 \cdot 10^{18} \text{J}$.

Przykładowo pod koniec XX wieku świat zużywał rocznie w postaci energii elektrycznej około 105 quads energii, a potwierdzone rezerwy węgla kamiennego opiewały na około 25000 quads podczas gdy ropy na niecałe 5000 quads.

Produkt - masa lub objętość lub ilość sztuk	Wartość kaloryczna [cal dietetyczna]
jedna bułka pszenna // 50g	125
jeden banan //200g	140
jeden baton Mars	275
chleb zwykły kromka // 50g	100
cukier // 100g	400
czekolada mleczna //100g	540
jabłka świeże // 100g	35
jedno jajko	80
kalafior //100g	16
kurczak białe mięso bez skóry // 100g	114
lody mleczne jedna gałka	30
łosoś //100g	200
mak // 100g	540
nutella //100g	580
orzechy laskowe // 100g	634
piwo jasne // 0,5l	230
Schab pieczony // 100g	240
Tabela 2.1. Przykładowe wartości kaloryczne wybranych produktów spożywczych. Wartość te należy traktować jako przybliżone. Dokładne wartości często zależą od danej partii produktu. Zwykle nie różnią się jednak więcej niż o 5% od podanych.	

Po tym krótkim przeglądzie ważniejszych jednostek, w których mierzymy energię przejdę do omówienia energii związanej z ruchem ciała o danej masie m , czyli energii kinetycznej. Zacznę od definicji.

Definicja 2.10: Energia kinetyczna

Energię związaną z ruchem ciała o masie m i prędkości o wartości v określoną wzorem (2.8) nazywamy jego energią kinetyczną.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad 2.8$$

W zapisie wektorowym mamy:

$$E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \quad 2.9$$

Łatwo możemy sprawdzić, że w układzie SI powyższy wzór daje nam, tak jak należy, jednostki energii – dżule

$$1\text{kg} \frac{1\text{m}^2}{1\text{s}^2} = 1\text{J} \quad 2.10$$

To, że masa razy prędkość do kwadratu ma wymiar energii nie pozostawia żadnych wątpliwości. Skąd się jednak, we wzorze (2.8), bierze czynnik $\frac{1}{2}$? Spróbuję ten wzór uzasadnić. Zacznę od spostrzeżenia: iloczyn siły o wartości F i przesunięcia s , w kierunku działania siły ma wymiar energii. W układzie SI mamy

$$[F s] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \text{m} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = [\text{J}] \quad 2.11$$

Zatem siła razy przesunięcie mierzona jest w jednostkach energii. Nawiasem mówiąc iloczyn siły i przesunięcia nazywamy pracą. Pokażę teraz, że wzór na energię kinetyczną (2.8) jest zgodny z drugim prawem Newtona. Zgodnie z tym prawem całkowita siła działająca na cząstkę jest równa iloczynowi masy tej cząstki i jej przyspieszenia.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad 2.12$$

Założmy, że na nieruchome ciało zaczyna działać stała siła o wartości F , pod wpływem której ciało to porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem o wartości $a=F/m$, w kierunku zgodnym z kierunkiem działania siły. Ciało to, w czasie Δt przebywa drogę

$$\Delta s = \frac{1}{2} a \Delta t^2 \quad 2.13$$

Wstawmy do wzoru na pracę $W=F \cdot s$ wzór na wartość siły i na przesunięcie

$$W = \underbrace{m a}_{\text{siła}} \underbrace{\frac{1}{2} a \Delta t^2}_{\text{przesunięcie}} = \frac{1}{2} m (a \Delta t)^2 = \frac{1}{2} m v^2 \quad 2.14$$

Dostaliśmy wzór na energię kinetyczną. Podkreślam, że w naszym przykładzie jedynym skutkiem działania siły jest zmiana prędkości ciała i co za tym idzie przyrost jego energii kinetycznej. Przedstawione tu rozumowanie wskazuje, że gdy korzystamy z zasad mechaniki newtonowskiej energia kinetyczna wyraża się wzorem (2.8).

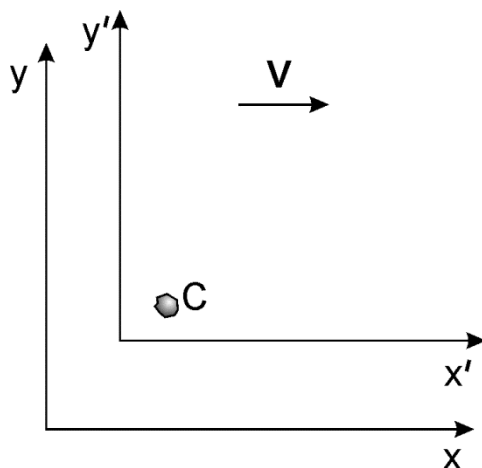
Masz prawo do poczucia, że coś tu jest postawione na głowie. Na wstępie stwierdziłem, że zasady zachowania należą do najbardziej ogólnych reguł współczesnej fizyki. Są ogólniejsze od praw fizycznych, takich jak drugie prawo Newtona. Czy zatem wypada uzasadniać wzór na energię kinetyczną ciała korzystając z drugiego prawa Newtona? To co zrobiłem należy rozumieć w ten sposób. Pokazałem, że wzór (2.8) jest spójny z drugim prawem dynamiki. I choć drugie prawo ma ograniczone zastosowanie, to w pewnym zakresie zjawisk (całkiem szerokim nawiasem mówiąc) jego stosowanie jest uzasadnione. Tam, gdzie jego stosowanie jest uzasadnione, uzasadnione jest korzystanie ze wzoru (2.8). W momencie gdy wzór (2.8) da nam złe wyniki (nie zgadzające się z doświadczeniem) możemy być pewni, że jednocześnie drugie prawo dynamiki przestaje być użyteczne. Zasada zachowania energii, być może w bardziej ogólnym ujęciu, dalej pozostaje w mocy. Musimy tylko znaleźć bardziej odpowiednie wzory na obliczanie jej wartości. Gdy zacznę omawiać szczególną teorię względności otrzymamy inny wzór na energię kinetyczną. Dla małych prędkości, w porównaniu z prędkością światła, ten nowy wzór będzie z dobrym przybliżeniem zgadzał się ze wzorem (2.8). Zatem, z punktu widzenia szczególnej teorii względności wprowadzony tu wzór jest wzorem przybliżonym. Prawdę mówiąc teoria względności zmusi nas do zmiany spojrzenia na zasadę zachowania energii. Ale nie odrzucimy bynajmniej zasad zachowania. Staną się one dla nas bardziej powiązane z głębszą strukturą teorii fizycznych.

No dobrze, kiedy już tak zacząłem wgryzać się w zagadnienie energii kinetycznej, to wyciągnę jeszcze jeden poważny i przykry problem

Fakt 2.6:

Wartość energii kinetycznej ciała zależy od wyboru układu współrzędnych

To dość oczywiste. Jeżeli w danym układzie współrzędnych K ciało o masie m ma prędkość wyrażoną wektorem $\mathbf{v}$, to w układzie współrzędnych K' związanym z tym ciałem, prędkość tego ciała jest równa zeru, co oznacza zerową energię kinetyczną (rys. 2.2). Z faktu (2.6) wynika dramatyczny kłopot: Nie można przypisać ciału konkretnej energii kinetycznej. A może nie jest tak źle. Może jest taki układ współrzędnych w którym energia kinetyczna ciała jest jego prawdziwą energią? Pomysł frapujący, ale jak znaleźć układ współrzędnych, dla obliczania prawdziwej energii kinetycznej? Który układ współrzędnych pokazany na rysunku (2.2) jest bardziej prawidłowy, to znaczy daje bardziej prawdziwą wartość energii kinetycznej ciała?



Rysunek 2.2. Niech ciało C porusza się względem układu xy z prędkością v . Wtedy energia kinetyczna tego ciała liczona w układzie xy ma wartość $\frac{1}{2}mv^2$. Niech układ $x'y'$ porusza się tak, że ciało C spoczywa w tym układzie. Wtedy prędkość ciała C w układzie $x'y'$ jest równa zero i energia kinetyczna tego ciała w tym układzie jest też równa zero. W dwóch różnych układach ciało C ma dwie różne energie kinetyczne.

Jeżeli nie znajdziemy sposobu na znajdowanie prawidłowych układów odniesienia, to nie oszukujmy się, nie będziemy w stanie przypisać ciału konkretnej wartości energii kinetycznej. Może się przy tym zdarzyć tak, że prawidłowy układ odniesienia istnieje, ale znalezienie metod jego identyfikacji przekracza możliwości człowieka. Chcę tu Cię uczulić na jedną sprawę. Nawet jeżeli taki prawidłowy układ istnieje, ale tak, że nie ma możliwości jego zidentyfikowania, to w zasadzie nie ma o czym mówić. Świadomość jego istnienia nie pomoże nam znaleźć prawdziwej energii cząstki. Tak czy inaczej energia kinetyczna cząstki pozostanie dla nas zależna od układu odniesienia. Niestety, na gruncie mechaniki newtonowskiej istnienie takiego układu jest wykluczone. Z drugiej strony mamy przekonanie, że jeżeli ciało ma energię, to jest to energia konkretna, która nie zależy od wyboru układu odniesienia. A jeżeli jednak zależy, to co z zasadą zachowania energii? To poważny problem, a na więcej światła w tych kwestiach musimy jeszcze poczekać. Jak pisałem na wstępie z upływem czasu nasze rozumienie zasad zachowania staje się coraz bardziej subtelne.

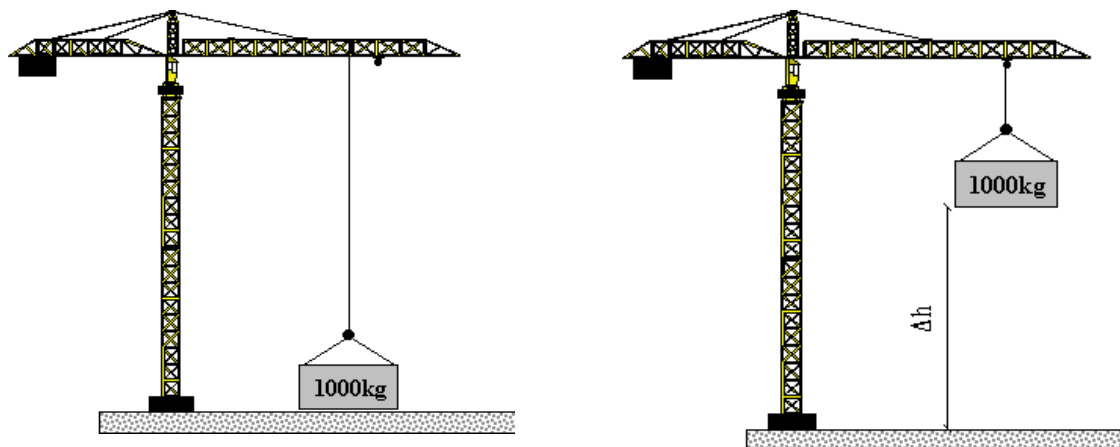
Uwaga 2.1:

Przy korzystaniu z zasady zachowania energii nie wolno zmieniać układu współrzędnych, na inny poruszający się względem układu wyjściowego

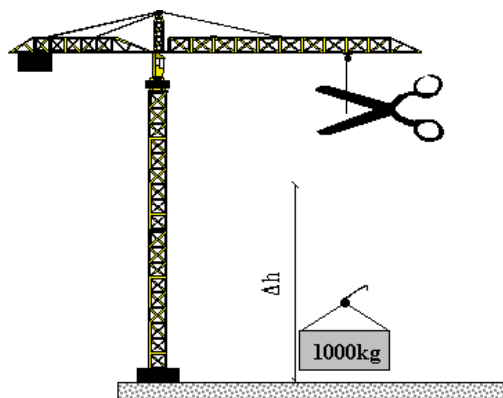
Uwagę (2.1) należy rozumieć tak: jak długo trzymamy się jednego układu współrzędnych, tak długo możemy korzystać z zasady zachowania energii. Zmiana układu współrzędnych, podczas analizy danego układu fizycznego, na układ, który się porusza względem układu wyjściowego, zwykle wprowadza

poważne błędy. To znaczy możemy to zrobić, pod warunkiem, że kontrolujemy skutki wynikające z takiej zmiany.

Kłopoty z zasadą zachowania energii na tym się nie kończą. Przyjrzyj się rysunkowi (2.3)



Rysunek 2.3. Ciężar spoczywa na poziomie gruntu. Jego energia kinetyczna jest równa zero. Następnie ciężar został powoli podniesiony na wysokość równą Δh . Na tej wysokości dźwig zatrzymał się. Energia kinetyczna ciężaru jest dalej równa zero.



Rysunek 2.3 ciąg dalszy. Ciężar został odcięty i spada w dół. Z każdą chwilą rośnie jego prędkość v , a zatem również energia kinetyczna. Przy uderzeniu o grunt energia kinetyczna zamienia się na energię cieplną, kinetyczną (wyrzuconych cząstek gruntu), akustyczną, etc.

Podnosząc ciężar do góry dźwig wykonuje pracę (równą sile dźwigu razy przesunięcie ciężaru). A praca to przecież energia. W końcu dźwig zatrzymuje się z ciężarem uniesionym na pewną wysokość. A co z energią wydatkowaną na podniesienia ciała? Przed unoszeniem energia ta była zawarta w paliwie. Potem paliwo uległo spaleni a wydzielona energia przepłynęła przez silnik i pozwoliła na wykonanie podnoszenia. Ale w czasie podnoszenia energia nie mogła zniknąć. Zatem gdzie się podzieliła? Ciało zawieszone na nieruchomym dźwigu wygląda dość niewinnie. W układzie związanym z dźwigiem energia kinetyczna tego ciała jest równa zero. Ale kiedy przetniemy linę ciało to zacznie się rozpędzać, czyli zacznie zwiększać swoją energię kinetyczną. Skąd ten przyrost

energii? Możesz tu słusznie zauważyć, że ciało to jest przyciągane przez pole grawitacyjne i działa siła ciężkości, która powoduje ruch przyspieszony. Ale i tak pozostaje jeden problem. Powiedzmy, że podnosimy jakąś masę na wysokość h , potem ją puszczamy i pozwalamy sile grawitacji wykonać pracę. Potem znowu je podnosimy i znowu pozwalamy grawitacji wykonać pracę. I tak za każdym razem wyciskamy z pola grawitacyjnego energię, czyli łamiemy zasadę zachowania energii. No niezupełnie, przecież podnosząc wykonujemy pracę przeciw sile pola grawitacyjnego. Jeżeli założymy, że siła pola grawitacyjnego jest stała i wynosi mg , co jest bardzo dobrym założeniem dla małych różnic wysokości, to wtedy praca W przy podnoszeniu ciała o masie m na wysokość h jest równa

$$W = \underbrace{mg}_{\text{siła przesunięcie}} \underbrace{h}_{\text{przesunięcie}} \quad 2.15$$

Przypominam, że g jest tu tzw. przyspieszeniem grawitacyjnym. Możemy teraz zmierzyć energię kinetyczną ciała spadającego przy powierzchni Ziemi. Dokładny pomiar nie jest łatwy, gdyż musimy uwzględnić siły oporu powietrza, lub użyć kolumny próżniowej, lub wymyśleć jakiś inny sprytny trik. Nie mniej można taki pomiar zrealizować i przekonać się, że energia kinetyczna ciała spadającego z wysokości h jest przy powierzchni Ziemi taka sama jak praca wykonana nad jego podniesieniem na wysokość h . Dalej jednak pozostaje pytanie: gdzie podziewa się energia wydatkowana na podniesienie ciała, w chwili, gdy wisi ono nieruchomo w górnym położeniu? W tej sytuacji postulat, że zasada zachowania energii działa w polu grawitacyjnym wygląda sensownie. Możemy więc przyjąć, że podczas podnoszenia ciała włożona w to podnoszenie praca zwiększa energię pola grawitacyjnego. Wtedy wyglądałoby to tak. Podnosimy ruchem jednostajnym ciało. Energia kinetyczna tego ciała pozostaje stała, a energia związana z pracą jaką wykonujemy przy podnoszeniu przepływa do pola grawitacyjnego. Nic dziwnego, że tej energii nie widać, skoro pola grawitacyjnego również nie widać. Widać natomiast, że pole grawitacyjne zyskało możliwość wykonania pracy. A fakt, że energia kinetyczna spadającego z wysokości h ciała, jest przy powierzchni ziemi równa pracy włożonej przy podnoszeniu tego ciała na wysokość h , utwierdza nas w przekonaniu, że zasada zachowania energii jest spełniona i że pole grawitacyjne może „ładować się energią”. Ale jak to ładowanie jest możliwe. Cóż, to dość trudna sprawa. Zresztą w XIX wieku, kiedy kształtowała się zasada zachowania energii, nie znano na to pytanie odpowiedzi. Ale żeby wiedzieć, że coś się dzieje nie musimy wiedzieć jak to coś się dzieje. W świetle tego co powiedziałem wyżej rozsądnie jest przyjąć następujące dwa postulaty:

Postulat 2.1:

Przy wykonaniu pracy przeciwko siłom pola grawitacyjnego energia wydatkowana na tą pracę przepływa do pola grawitacyjnego.

Postulat 2.2:

Przy spadaniu ciała pod wpływem pola grawitacyjnego energia pola grawitacyjnego przepływa do spadającego ciała.

A na okrasę definicja

Definicja 2.11: Energia potencjalna ciała w polu grawitacyjnym

Energia jaka przepływa z pola grawitacyjnego do danego ciała, w przypadku gdy ciało to obniżyło swoje położenie o Δh , jest równe spadkowi jego energii potencjalnej.

Dopiero się wszystko w miarę sensownie ułożyło a tu taka definicja! Dlaczego mówimy o energii potencjalnej ciała, a nie pola grawitacyjnego, skoro to pole grawitacyjne magazynuje energię? Przyczyna jest czysto praktyczna. Zwykle przy rozwiązywaniu problemów koncentrujemy uwagę na jakimś obiekcie a nie na całym polu grawitacyjnym. Trudno nam również posługiwać się energią pola grawitacyjnego Ziemi, gdyż jest ono tak ogromne, że dopływ energii związany z podniesieniem nawet kilkuset tonowego bloku praktycznie jej nie zmienia. Przyjęta definicja usuwa ten problem. Przez energię potencjalną ciała rozumiemy po prostu tą drobną część energii pola grawitacyjnego, którą pole wymienia z ciałem przy przejściu różnicy wysokości Δh . Pomyśl co jest łatwiejsze: stwierdzić, że pan Abacki zaczerpnął z oceanu dziesięć litrów wody, czy że po zaczerpnięciu przez pana Abackiego wody, ilość wody w oceanie zmieniła się z jakiejś ogromnie ogromnej liczby litrów (której i tak dokładnie nie znamy) na tą ogromnie ogromną liczbę litrów pomniejszoną o dziesięć litrów?

Przy małych różnicach wysokości Δh zmianę energii potencjalnej ciała o masie m w polu grawitacyjnym, które charakteryzujemy poprzez przyspieszenie grawitacyjne g , wyrażamy następującym wzorem:

$$\Delta E_p = m g \Delta h \quad 2.14$$

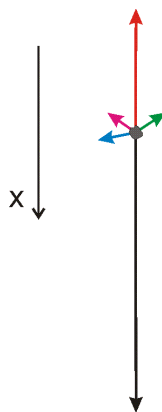
Przybliżenie przyjęte w tym wzorze polega na tym, że przyjmuje się, że przyspieszenie grawitacyjne g nie zależy od wysokości nad powierzchnią Ziemi. Przy powierzchni Ziemi średnie przyspieszenie grawitacyjne wynosi $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$. W temacie poświęconym klasycznej teorii grawitacji (TXVI) przekonasz się, że przybliżenie to jest bardzo dobre, nawet jeżeli ciało podnosimy na 5000 metrów nad poziom gruntu. Zauważ, że wyrażenie „ mg ” ma wymiar siły („ mg ” to siła przyciągania grawitacyjnego). Zatem $mg\Delta h$ ma wymiar energii (pracy) włożonej w podniesienie ciała o masie m na wysokość Δh , czyli wszystko jest w porządku. Przejdę teraz do prostych przykładów zadań, które można rozwiązać odwołując się do zasady zachowania energii.

3. Przykłady zadań ♦

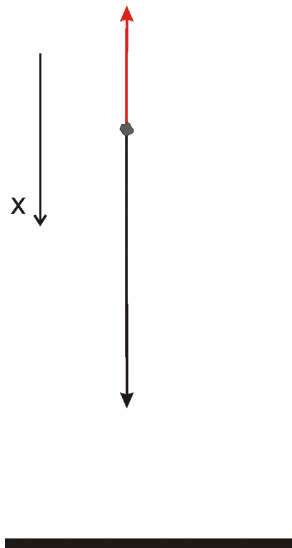
3.1. Zadanie 1

Kamień spada z wysokości $h=100\text{m}$. Oblicz prędkość upadku tego kamienia. Przyspieszenie grawitacyjne ma wartość $g=9.81\text{m/s}^2$. Zaniedbaj opory powietrza.

Kiedy kamień spada z pewnej wysokości działają na niego: siła grawitacji, siła oporu powietrza oraz wiele innych sił (rys. 3.1.1). Cała sytuacja wygląda na bardzo skomplikowaną. Jednak zgodnie z dyskusją na temat samej fizyki, to co teraz robimy nazywa się tworzeniem modelu sytuacji fizycznej, czyli postępujemy drogą krowy (§TI 1). W pierwszym kroku oddziaływanie innych sił niż grawitacja i opory powietrza uznajemy za tak małe, że je w modelu pomijamy (rys. 3.1.2). Przez to model staje się prosty. Dalej nie jesteśmy jednak w stanie go rozwiązać. Potrafimy liczyć energię kinetyczną i potencjalną ale nie potrafimy liczyć przepływów energii podczas tarcia kamienia o powietrze, czyli nie wiemy jak uwzględnić opory powietrza. Na szczęście w zadaniu jest powiedziane, że możemy opory powietrza pominąć. Jeżeli tak, to sytuacja robi się naprawdę prosta, gdyż na placu boju pozostaje jedna prosto określona siła – siła grawitacji (rys. 3.1.3).



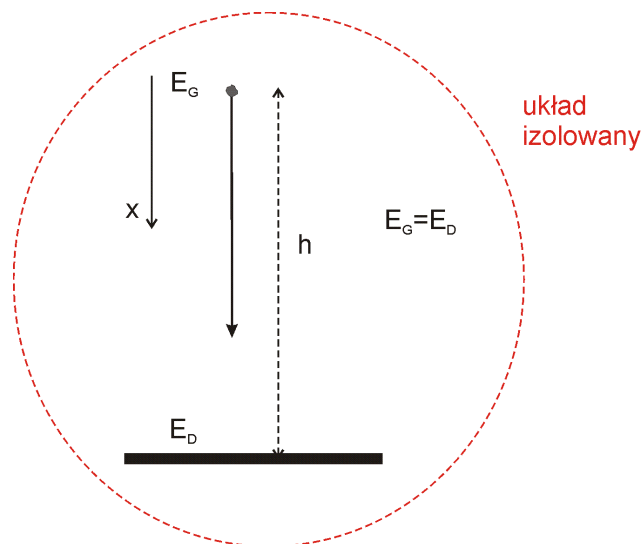
Rysunek 3.1.1. Kamień spada na powierzchnię Ziemi z wysokości h . Działa na niego siła grawitacji (reprezentowana przez czarną strzałkę), siła oporu powietrza (czerwona strzałka) oraz kilka innych mniejszych sił. Może to być na przykład: siła przyciągania przez Słońce (zielona strzałka) lub przez Księżyc (różowa strzałka), siła podmuchu wiosennego wiatru (niebieska strzałka). Oś x układu współrzędnych została wyznaczona tak aby pokrywała się z kierunkiem działania siły przyciągania grawitacyjnego.



Rysunek 3.1.2. Model jest zawsze uproszczoną reprezentacją realnej sytuacji. W naszym modelu na placu boju pozostały tylko dwie największe siły: siła grawitacji i siła oporu powietrza. Jest to ciągle jednak zbyt złożony model jak na nasze obecne możliwości

Wiemy, że na wysokości h ciało ma energię potencjalną mgh , a energię kinetyczną równą zero. Zatem całkowita energia w położeniu „na górze” wynosi

$$E_G = mgh + 0 = mgh \quad 3.1.1$$



Rysunek 3.1.3. W najprostszym modelu zostaje nam tylko siła oddziaływania grawitacyjnego. W układzie występują dwa rodzaje energii: potencjalna i kinetyczna, które umiemy wyliczyć. Uznając cały układ za izolowany ze względu na przepływ energii zadanie możemy rozwiązać wykorzystując zasadę zachowania energii.

Gdy kamień spadnie jego energia potencjalna skurczy się do zera, ale w chwili upadku będzie on miał niezerową prędkość v_x , a co zatem idzie niezerową energię kinetyczną. Całkowita energia ciała w momencie uderzenia jest równa

$$E_D = 0 + \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} \quad 3.1.2$$

Energia w położeniu „na dole” musi być równa energii w położeniu „na górze”; zgodnie z zasadą zachowania energii, mamy

$$E_G = E_D \rightarrow mgh = \frac{mv_x^2}{2} \quad 3.1.3$$

Rozwiązują to równanie otrzymujemy:

$$v_x = \sqrt{2gh} = 44.29 \text{ m/s} \quad 3.1.4$$

W ten sposób obliczyliśmy szukaną prędkość spadania kamienia. Zwracam uwagę na wygodę jaką dają nam zasady zachowania. Interesuje nas tylko bilans energii w położeniu górnym i dolnym. Cała historia spadania kamienia jest dla naszych obliczeń nieistotna.

Pozostaje pytanie czy obliczona prędkość jest dobra? Odpowiedź brzmi: Na pewno nie jest dokładna. A czy jest dobra – cóż, to kwestia konkretnych potrzeb. Dla nas jest dobra. Zadania, które robimy służą ćwiczeniu techniki rozwiązywania problemów fizycznych. Na tym etapie niczego nie projektujemy ani nie badamy. Trzeba się więc zawsze trzymać wskazań zawartych w treści zadania i jak piszą, że opory ruchu pomijamy to je pomijamy i koniec. Nawiasem mówiąc uproszczeń w modelu tej sytuacji jest więcej niż to zostało wypowiedziane. Na przykład powinniśmy uwzględnić fakt, że kamień, choć mały, to ma jednak pewne skończone rozmiary. Na jego różne punkty mogą działać nieco różne siły. My jednak milcząco przyjąłmy, że kamień jest tak mały, że można go traktować jak punkt materialny.

3.2. Zadanie 2

Śmigłowiec podnosi ciało o masie $m=500\text{kg}$ na wysokość $\Delta h=200\text{m}$. W efekcie całkowita energia ciała wzrosła o $\Delta E= 1025000\text{J}$. Oblicz jaką prędkość uzyska to ciało przy podnoszeniu. Załóż, że przed uniesieniem ciało to spoczywało. Przyjmij $g=10\text{m/s}^2$ i zaniedbaj opory ruchu.

Teraz już nie będę bawił się w tak rozbudowaną analizę zadania jak poprzednio. Od razu skorzystam z uproszczeń wynikających z treści zadania. Z treści zadania wynika, że powinniśmy skoncentrować się tylko na działaniu siły grawitacji.

Przy podnoszeniu na wysokość $\Delta h = 200\text{m}$ ciało o masie $m = 500\text{kg}$ zyskuje energię potencjalną E_p o wartości

$$\Delta E_p = m g \Delta h = 1000000J = 1MJ \quad 3.2.1$$

Ale z treści zadania wynika, że całkowita zmiana energii tego ciała wynosi $\Delta E = 1025000J$. Zatem do „zagospodarowania” zostało $E_z = 25000J$. Energia ta musiała zostać zamieniona na energię kinetyczną tego ciała (wniosek z tego, że śmigłowiec je nie tylko podnosił, ale również rozpędzał się), co odpowiada wzrostowi prędkości o

$$v = \sqrt{\frac{2 E_z}{m}} = 10 \frac{m}{s} = 36 \frac{km}{h} \quad 3.2.2$$

Ponieważ prędkość początkowa ciała była równa zero to prędkość końcowa jest równa obliczonemu przyrostowi prędkości czyli 36km/h.

Dyskusja 3.2.1: „... zaniedbaj opory ruchu”

Zrobione przez nas dwa zadania kończyły się zdaniem: „zaniedbaj opory ruchu”. Krótko rzecz ujmując opory ruchu to te procesy, które prowadzą do chaotycznej redystrybucji energii – rozpraszania energii. Praca polegająca na rozpędzaniu wózka nie jest chaotyczną redystrybucją energii. Pchający, w sposób uporządkowany, zwiększa prędkość wózka. Ale gdy wózek hamuje wskutek tarcia jego energia kinetyczna zamienia się na energię kinetyczną cząsteczek podłoża. Tyle, że ruch tych cząsteczek jest chaotyczny, poruszają się one we wszystkie strony, w efekcie podłoże jako całość nie uzyskuje dodatkowej prędkości. W szczególności przez opory ruchu będziemy rozumieć tarcie o podłoże, tarcie wewnętrzne (np. łańcuch rowerowy rozprasza energię trąc o koła zębate), opory hydrodynamiczne (na skutek ruchu w cieczy), opory aerodynamiczne (na skutek ruchu w powietrzu).

3.3 Zadanie 3

Kamień rzucono z wysokości $h=2m$ pod pewnym kątem do poziomu z prędkością początkową $v_0=6m/s$. Znaleźć prędkość kamienia w momencie upadku na ziemię. Zaniedbujemy opory ruchu. Przyspieszenie ziemskie $g=9.81m/s^2$.

Ponownie uznajemy, że działa tylko siła grawitacji, a kamień można potraktować jako ciało punktowe. W momencie wyrzucenia kamienia miał on prędkość początkową o wartości $v_p=6m/s$ oraz energię potencjalną równą mgh . Całkowita energia początkowa wynosiła

$$E_p = \frac{mv_p^2}{2} + mgh \quad 3.3.1$$

W momencie upadku kamień miało szukaną wartość prędkości końcowej v_k i związaną z nią energię kinetyczną, a jego energia potencjalna była równa zero. W momencie upadku, całkowita energia wynosiła:

$$E_k = \frac{mv_k^2}{2} \quad 3.3.2$$

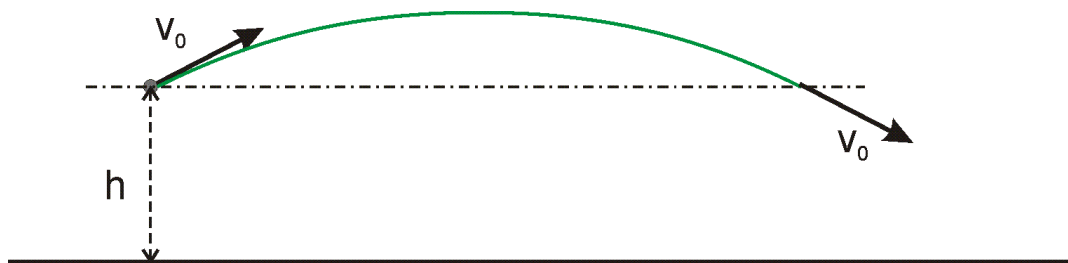
Z zasady zachowania energii wynika, że energia początkowa jest równa energii końcowej.

$$E_p = E_{kp} \Rightarrow \frac{mv_p^2}{2} + mgh = \frac{mv_k^2}{2} \Rightarrow v_p^2 + 2gh = v_k^2 \quad 3.3.3$$

Stąd łatwo obliczamy prędkość końcową

$$v_k = \sqrt{v_p^2 + 2gh} = 8.67 \text{ m/s} \quad 3.3.4$$

Łatwo miło i przyjemnie. Ale gdy ktoś zacznie za bardzo kombinować sprawy mogą przyjąć nieoczekiwany obrót. Ktoś może kombinować tak (rys. 3.3.1):



Rysunek. 3.3.1. Przy braku oporu ruchu ciała wyrzucone do góry z prędkością początkową v_0 odzyskuje taką samą wartość prędkości (ale jej kierunek i zwrot jest inny) przy powrocie na wysokość, z której zostało wyrzucone.

Na początku ciało ma prędkość $v_0=6\text{m/s}$ i nawet jeżeli zostanie wyrzucone pionowo do góry to i tak wracając z powrotem na ziemię, przy braku oporów ruchu, odzyska na wysokości początkowej $h=2\text{m}$ te swoje $v_0=6\text{m/s}$. Zatem niezależnie od tego jak zostało wyrzucone, całą dodatkową prędkość δv ciało zyskuje na drodze prowadzącej od wysokości początkowej do powierzchni ziemi. Ile zyska tej prędkości? Zgodnie z zasadą zachowania energii mamy

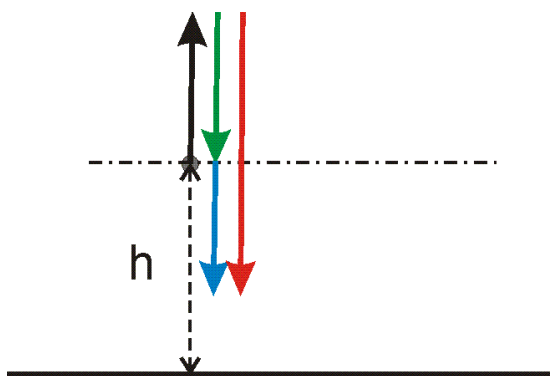
$$\frac{m \delta v^2}{2} = mgh \Rightarrow \delta v = \sqrt{2gh} \approx 6.26 \text{ m/s} \quad 3.3.5$$

Teraz tą zyskaną prędkość musimy dodać do prędkości początkowej. Tu pojawia się istotna trudność. Nie znamy kierunku prędkości początkowej i nie za bardzo wiemy jak dodać do niej prędkość, którą zyskało ciało na skutek obniżenia swojej początkowej wysokości. Musisz pamiętać, że prędkości są wektorami i aby je dodać musimy znać kierunki i zwroty tych wektorów. Tą drogą zadania nie rozwiążemy; na szczęście dla rozwiązującego zadanie samo się obroniło, przed jego wątpliwym sprytem. Ja jednak chciałbym pokazać pułapkę, z którą wiąże się rozumowanie zilustrowane na rysunku (3.3.1). Dlatego uprość nieco całe zadanie.

Powiedzmy, że kamień wyrzucamy pionowo do góry (rys. 3.3.2). Zatem wracając w dół kamień odzyskuje swoją prędkość początkową i z prędkością początkową, od punktu wyjścia, kontynuuje spadek, tyle że pionowo w dół. Skoro znamy wartość, kierunek i zwrot tej prędkości i wiemy, że kierunek i zwrot prędkości nabytej jest taki sam, to możemy już obie prędkości dodać, otrzymamy:

$$v_k = v_p + \delta v = 12.26 \text{ m/s} \quad 3.3.6$$

Rozwiązując tą nową wersję zadania poprzednią metodą uzyskamy ten sam wynik co poprzednio (3.3.4), czyli 8.67m/s. Oba rozwiązanie ewidentnie się różnią - gdzie tkwi problem?



Rysunek 3.3.2. Wyrzucamy kamień pionowo do góry z prędkością początkową o wartości v_0 (czarna strzałka). Przy spadku w dół kamień odzyskuje prędkość o wartości v_0 , ale przeciwnie skierowaną (zielona strzałka). Obliczamy prędkość δv jaką uzyska kamień przy spadku z wysokości h ze wzoru $\delta v = \sqrt{2gh}$ (niebieska strzałka). Ponieważ kierunek i zwrot prędkości ciała na wysokości h jest taka sama jak prędkości δv , obie wartości możemy do siebie dodać. W ten sposób wartość prędkości końcowej wynosi $v_k = v_0 + \delta v$, Ale dla $v_0 > 0$ wzór ten nie jest zgodny z zasadą zachowania energii.

Jeżeli od otrzymanej pierwotnie prędkości 8.67m/s (3.3.4) odejmiemy prędkość początkową 6m/s to otrzymamy przyrost wartości prędkości

$$\delta v = 8.67 - 6 = 2.67 \text{ m/s} \quad 3.3.7$$

Ten przyrost prędkości jest mniejszy niż wyliczony ze wzoru (3.3.5) 6.26m/s.

Postawmy sprawę tak: O ile należy zwiększyć prędkość ciała, które ma prędkość początkową v_p , aby jego energia kinetyczna wzrosła o wartość mgh ? Pytanie to możemy zapisać w postaci równania

$$\frac{mv_p^2}{2} + mgh = \frac{m(v_p + \delta v)^2}{2} \quad 3.3.8$$

W efekcie otrzymamy równanie kwadratowe na δv .

$$\delta v^2 + 2\delta v v_p - 2gh = 0 \quad 3.3.9$$

Równanie kwadratowe, jak to równanie kwadratowe, wymaga określenia wyróżnika Δ

$$\Delta = 4v_p^2 + 8gh \quad 3.3.10$$

I możemy napisać rozwiązania

$$\delta v_{1,2} = \frac{-2v_p \mp \sqrt{v_p^2 + 2gh}}{2} = -v_p \mp \sqrt{v_p^2 + 2gh} \quad 3.3.11$$

Równanie kwadratowe daje dwa rozwiązania. Rozwiązanie ze znakiem minus przy pierwiastku jest ujemne. Rozwiązanie to oznacza tylko tyle, że wymaganą energię kinetyczną otrzymamy również wtedy, gdy ciało nabierze odpowiedniej prędkości lecąc pionowo w górę. Lecąc w górę ciało hamuje, więc przyrost prędkości jest ujemny. To rozwiązanie nas nie interesuje. Ale warto zwrócić uwagę na kompletność matematyki, która „nie przeoczyła” takiej możliwości. Drugie rozwiązanie jest tym czego potrzebujemy, zapiszemy je tak

$$\delta v = \sqrt{v_p^2 + 2gh} - v_p \quad 3.3.12$$

Widać od razu, że jeżeli prędkość początkowa wynosi $v_p=0$, to wtedy

$$\delta v = \sqrt{2gh} \quad 3.3.13$$

I tylko wtedy, gdy składowa pionowa prędkości początkowej jest równa zeru, obie metody rozwiązywania poprzedniego zadania dadzą ten sam wynik. W pozostałych przypadkach przyrost prędkości liczony ze wzoru (3.3.12) nie daje poprawnych wyników.

Można to podsumować w ten sposób. Jeżeli ciało ma na początku niezerową składową prędkości w dół, to ma za mało czasu na nabranie prędkości wynikającej z równości $mv^2/2 = mgh$. Pomyśl prędkość ciała rośnie zgodnie ze wzorem

$$\delta v = g\Delta t \quad 3.3.14$$

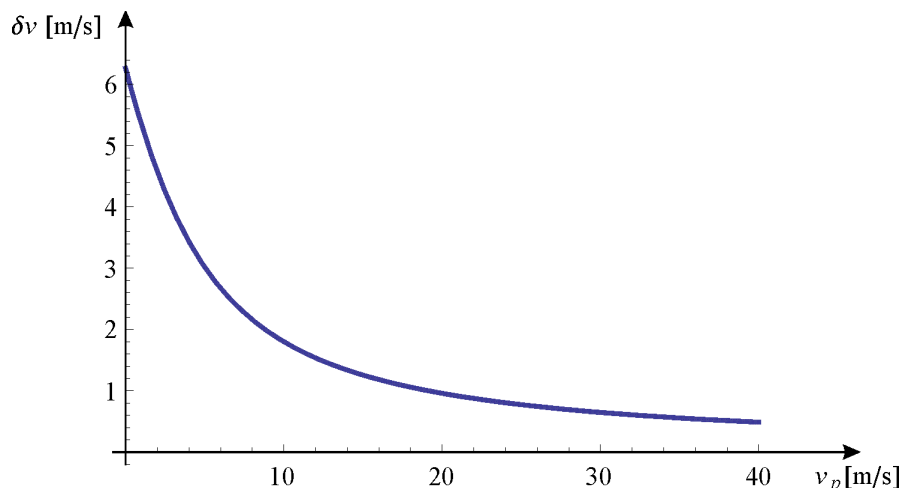
gdzie Δt jest czasem spadania ciała. Gdy ciało ma niezerową składową pionową prędkości początkowej czas spadania robi się krótszy, a przez to przyrost prędkości jest mniejszy (rys. 3.3.3).

Aby potwierdzić te dywagacje na temat czasu spadku obliczmy ten czas na dwa sposoby. Mając wzór (3.3.12) i (3.3.14) możemy obliczyć czas spadania ciała, gdy składowa pionowa jego prędkości początkowej wynosi v_p .

$$\Delta t = \frac{\sqrt{v_p^2 + 2gh} - v_p}{g} \quad 3.3.15$$

Zróbmy to samo ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym

$$h = v_p\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2 \quad 3.3.16$$



Rysunek. 3.3.3. Tak maleje przyrost prędkości Δv opisany wzorem (3.3.12), wraz z rosnącą prędkością początkową. Wysokość z której spada ciało wynosi, tak jak w zadaniu, $h=2\text{m}$. Dla $v_p=0$ mamy $\Delta v=6,26\text{m/s}$.

Gdy rozwiążesz ten wzór ze względu na Δt , otrzymasz wyrażenie

$$\Delta t = \frac{\pm \sqrt{v_p^2 + 2gh} - v_p}{g} \quad 3.3.17$$

Rozwiązanie z minusem odrzucamy z tych samych względów co w rozwiązaniu (3.3.11). Oba wzory (3.3.16) i (3.3.20) są takie same. Widać z nich w szczególności, że gdy v_p rośnie maleje czas spadku ciała. Obliczanie naszego zadania drugą metodą nie uwzględniło tego faktu. Przyrost energii kinetycznej liczyliśmy ze wzoru (3.3.5), czyli tak jakby ciało nie miało żadnej początkowej prędkości w dół. Pisząc równanie (3.3.3) uwzględniliśmy wyłącznie, czyli bez niepotrzebnego kombinowania, bilanse energii kinetycznej i potencjalnej w chwili początkowej i końcowej. Taka metoda, polegająca na konsekwentnym obliczaniu energii początkowej i końcowej, a następnie ich porównaniu, choć może wydawać się pozbawiona sprytu czy polotu nie zawiera niebezpiecznych pułapek.

Zwraca również uwagę na fakt, że prędkość końcowa jest taka sama w przypadku rzutu pionowo w górę, jak i pod kątem. Byłaby ona również taka sama gdyby ciało rzucić z tą samą prędkością początkową w dół. Wiąże się to z tym, że jedynym źródłem energii jest tu początkowa energia kinetyczna i energia potencjalna związana z różnicą wysokości między punktem wyrzutu a gruntem. Gdy obie te wielkości są takie same, taki sam jest wynik końcowy.

3.4. Dlaczego tak prosto?

Przerobiliśmy kilka przykładów na zastosowanie prawa zachowania energii, przyznając niezbyt ambitnych przykładów. Za tą prostotą przykładów stoją dwie przyczyny. Goła zasada zachowania energii plus dwa wzory, jeden na obliczanie

energii kinetycznej a drugiej energii potencjalnej, to za mało, żeby poszaleć. Gdy dodamy do tego zasadę zachowania pędu, to będziemy mogli przeanalizować zderzenia sprężyste (§TIV 4). Każda kolejna zasada poszerzy krąg naszych możliwości. Po drugie sformułowanie zasady zachowania energii to dopiero początek zabawy. Aby była ona użyteczna musimy wiedzieć jak mierzyć energię i jak ją obliczać. Wielkość fizyczna powinna być mierzalna i obliczalna. W przeciwnym wypadku jest dla fizyki mało użyteczna. Oczywiście nie wszystkie pojęcia będące w naszym życiu ważne muszą być mierzalne. Wystarczy tu wspomnieć pojęcia określające stan naszego ducha takie jak miłość czy nadzieja. Ale ani miłości ani nadziei nie włączamy w zakres fizyki. Są tacy, którzy twierdzą, że stany psychiczne będzie można kiedyś opisywać tak jak opisujemy złożone zjawiska fizyczne inni twierdzą, że to nigdy nie nastąpi. Ponieważ nie wiemy jak będzie, trzymamy się tego co teraz jest. A teraz stany psychiczne nie są częścią fizyki choć są dla nas istotne. Spekulacje na temat tego co będzie w dalszej przyszłości pozostawmy sobie na miłe pogawędki przy lampce wina.

Jak do tej pory nasze narzędzia do operowania pojęciem energii są szczupłe. Potrafimy obliczyć energię ciała związaną z jego prędkością względem danego układu współrzędnych, oraz zmianę tej energii związanej z przesunięciem ciała w polu grawitacyjnym Ziemi, przy jej powierzchni (gdy możemy uznać, że pole jest stałe). W następnym podrozdziale nauczymy się liczyć energię potencjalną sprężyny, a w temacie poświęconym termodynamice (T XVIII) będziemy obliczali energię związaną ze zjawiskami cieplnymi. Nasze możliwości zastosowania zasady zachowania energii będą się poszerzały, ale zawsze znajdą się liczne zagadnienia, w których okażą się niewystarczające. Nie oznacza to, że zasada zachowania energii w takich przypadkach nie obowiązuje. Oznacza to tylko, że nie mamy narzędzi do jej zastosowania.

Przekonacie się, że tak jest zawsze. Sformułowanie ogólnego prawa lub zasady nie daje nam samo w sobie możliwości rozwiązywania związanych z nim problemów. Zasada zachowania energii to nie zaklęcie, które wystarczy wypowiedzieć by stało się rozwiązanie problemu. Jej sformułowanie to dopiero punkt startowy, od którego możemy zacząć uczyć się metod i narzędzi matematycznych, które pozwolą nam zrobić z niej użytek. Inaczej rzecz ujmując zasada zachowania energii to dopiero skrzypce, które ktoś dał nam do ręki. To, że je już w ręku mamy nie zmienia faktu, że nie potrafimy na nich zagrać. Skrzypce w naszych rękach to dopiero początek przygody.

4. Zasada energii minimalnej ♦

Wiemy już, że ciała podnoszone w polu grawitacyjnym zyskują energię potencjalną. Energia potencjalna pojawia się również w innych procesach. Wiemy również, że ciała mające energię potencjalną potrafią ją uwolnić, to znaczy zamienić na inny rodzaj energii - na przykład energię kinetyczną. Pozostaje nam jeszcze zastanowić się nad pytaniem: Kiedy ciało posiadające energię potencjalną uwalnia ją na zewnątrz? Odpowiedź zawarta jest w poniższej zasadzie

Określenie 4.1: Zasada energii minimalnej

Ciało dąży do stanu o minimalnej energii potencjalnej zawsze wtedy kiedy nie prowadzi to do złamania innych zasad zachowania.

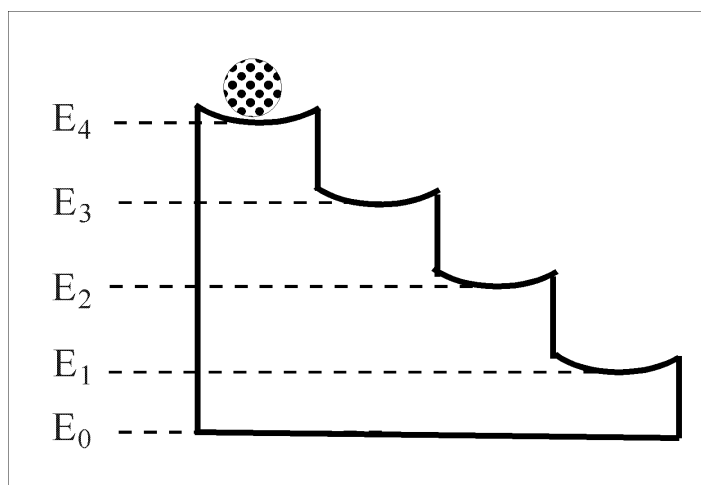
Zasada energii minimalnej wyraża bardzo ważny fakt: układ fizyczny zawsze dąży do obniżenia swojej energii potencjalnej. Powstrzymać go przed tym mogą tylko inne zasady zachowania, gdyż w procesie uwalniania energii potencjalnej żadna inna zasada zachowania nie może ucierpieć. Ba, te inne zasady potrafią zmusić układ do zwiększenia swojej energii potencjalnej. Przykładowo, kamień podrzucony w górę, w myśl zasady energii minimalnej, bardzo chciałby zmniejszać swoją energię potencjalną. Ale nie może tego robić, bo złamałby zasadę zachowania energii. Musi unosić się do góry i zwiększać swoją energię potencjalną aż do wyhamowania. Po wyhamowaniu może zacząć robić to co lubi, czyli zmniejszać energię potencjalną. Sens wprowadzonej zasady ilustruje sytuacja przedstawiona na rysunku (4.1).



Rysunek 4.1. Piłka sama z siebie nie może spaść z komody.

Na rysunku (4.1) piłka leży na poziomej powierzchni komody. W przedstawionej sytuacji piłka, zgodnie z zasadą energii minimalnej „chciałaby spaść w dół i obniżyć swoją energię potencjalną. Nie może jednak sama z siebie tego zrobić, gdyż jej spadek w dół blokują siły wiążące materiał, z którego

wykonana jest komoda. Przełamanie tych sił, co wiąże się ze zniszczeniem komody, wymaga wyzwolenia energii, której piłka wyzwolić sama z siebie nie może. Piłka mogłaby również dojść do krawędzi komody, ale i na to potrzebna jest dawka energii. Piłka musi ruszyć z miejsca czyli zwiększyć swoją energię kinetyczną i pokonać siłę tarcia. Jednak gdy ta energia zostanie jej dostarczona i piłka dotrze do krawędzi, to zacznie spadać. Zauważ, że gdyby piłka po przekroczeniu krawędzi komody nie spadła, to zasada zachowania energii nie zostałaby złamana; podobnie jak każda inna zasada fizyczna oprócz tej, którą właśnie sformułowaliśmy jako *zasadę energii minimalnej*. Dlatego stwierdziłem, że zasada ta pozwala nam powiedzieć kiedy coś się zacznie dziać.



Rysunek 4.2. Przykład układu z poziomami energetycznymi

Rysunek (4.2) przedstawia przykład innego układu. W każdym dołku piłka jest w oczywisty sposób uwięziona. Trzeba jej dostarczyć energii aby mogła przeskoczyć krawędź dołka i spaść niżej. Możliwy jest również ruch do góry. Wymaga to jednak silniejszego i dobrze wycelowanego uderzenia. Przykład ten ilustruje dwa ważne fakty.

Fakt 4.1: energia progowa

Zainicjowanie jakiegoś procesu fizycznego, w układzie który pozostawał w równowadze, wymaga dostarczenia energii – tzw. energii progowej

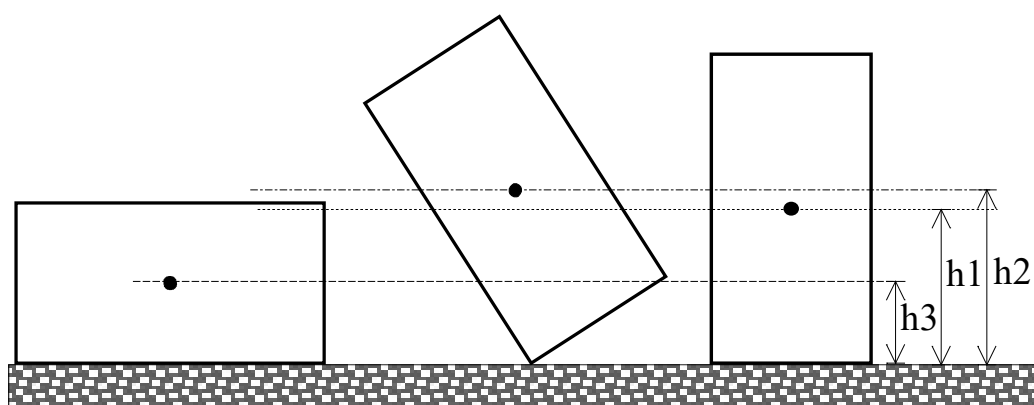
Na przykład główka zapalki wymaga dostarczenia energii przez potarcie o draskę. Potem następuje zapłon, w wyniku którego zapalka oddaje więcej energii niż uzyskała podczas potarcia. W wyniku spalania zapalka obniża swoją energię potencjalną (oczywiście nie grawitacyjną energię potencjalną, tylko nazwijmy ją „chemiczną” energią potencjalną). Dostarczenie energii progowej pozwala przełamać barierę wyznaczoną przez zasady zachowania.

Fakt 4.2: poziomy energetyczne

Układy fizyczne pełne są tzw. poziomów energetycznych, w których dany układ (ciało) może trwać w stanie równowagi trwałej (trwać stabilnie).

W układzie z rysunku (4.2) mamy cztery poziomy energetyczne. Z punktu widzenia energii poziomy to dołki na wykresie wartości energii potencjalnej ciała. Z dołków tych można się wydostać tylko kosztem wydatkowania energii nie mniejszej niż głębokość dołka, liczona w jednostkach energii; w naszym przykładzie głębokość ta jest równa głębokości geometrycznej dołka h_d przemnożonej przez masę ciała m i przyspieszenie grawitacyjne g . Piłka, której dostarczono energię progową wędruje na niższy poziom i oddaje zgromadzoną energię (zmniejsza swoją energię potencjalną). Piłka uderzona do góry absorbuje energię uderzenia i jeżeli tylko została uderzona z odpowiednią siłą i w odpowiednim kierunku może wpaść do wyższego dołka (zwiększa swoją energię potencjalną). Końcowy bilans oddanej lub pochłoniętej energii jest równy różnicy energii potencjalnej pomiędzy poziomami między którymi doszło do przejścia.

Zgodnie z zasadą energii minimalnej układy fizyczne „lubią” zajmować stany o jak najmniejszej energii potencjalnej. Na szczęście zasada zachowania energii (a również i inne zasady zachowania) chronią świat przed dramatycznymi konsekwencjami niczym niepowstrzymanej realizacji zasady energii minimalnej. Szafa na rysunku (4.3) stoi na krótkim boku. Z punktu widzenia zminimalizowania energii potencjalnej szafy korzystniej jest stać na długim boku, gdyż środek masy (czarny punkt) jest wtedy niżej; co pociąga za sobą zmniejszenie grawitacyjnej energii potencjalnej. Ale aby przewrócić się na długi bok szafa musi stanąć na krawędzi, co oznacza chwilowe zwiększenie energii potencjalnej (środek masy idzie do góry).

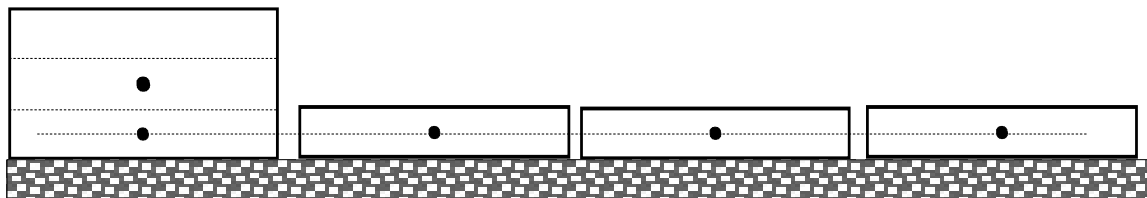


Rysunek 4.3. Przewrócenie szafy wymaga dostarczenia jej energii do podniesienia się na krawędź

Sama z siebie szafa tego nie zrobi – zabrania tego zasada zachowania energii. W tym wypadku energia potrzebna do postawienia szafy na rogu jest energią

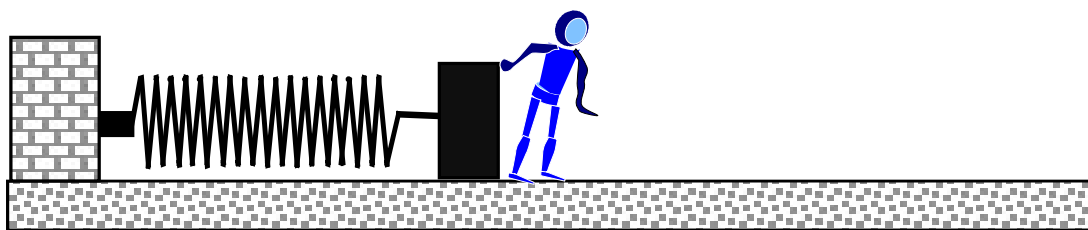
progową dla procesu przewracania się szafy na drugi bok. Jeżeli szerokość szafy jest większa od jej głębokości to zasada energii minimalnej powinna „zmusić” szafę do położenia się „na plecy”. Ale tu również barierę wyznacza energia progowa. Trzy możliwe stabilne położenia szafy: na nogach, na boku i na plecach wyznaczają trzy schodki (poziomy energetyczne szafy) takie jak na rysunku (4.2). Najniżej jest schodek odpowiadający leżeniu „na plecach” (pozycja o najmniejszej energii potencjalnej).

Na dobrą sprawę nawet szafa położona na plecach może jeszcze zmniejszyć swoją energię potencjalną. Gdyby ją przeciąć na powiedzmy trzy części, każdą położyć na poziomie podłogi, to energia potencjalna całości uległaby zmniejszeniu, ale nie byłaby to szafa, tylko pokawałkowana szafa (rys. 4.5). Na szczęście takie rozczłonkowanie nie może nastąpić samo z siebie, gdyż wymaga włożenia energii w zerwanie wiązań między cząsteczkami materiału szafy.

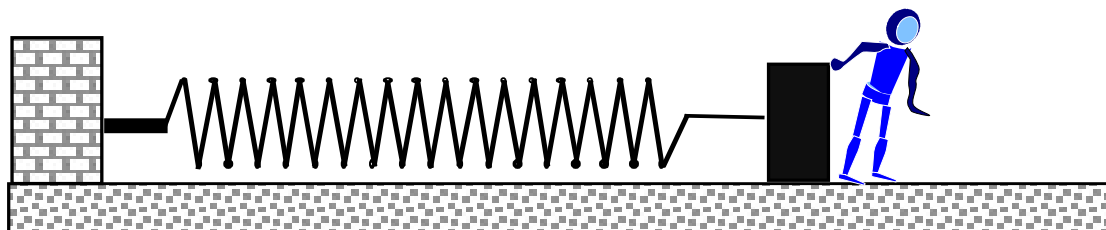


Rysunek. 4.5. Energię potencjalną szafy można obniżyć rozczłonkowując ją na kawałki.

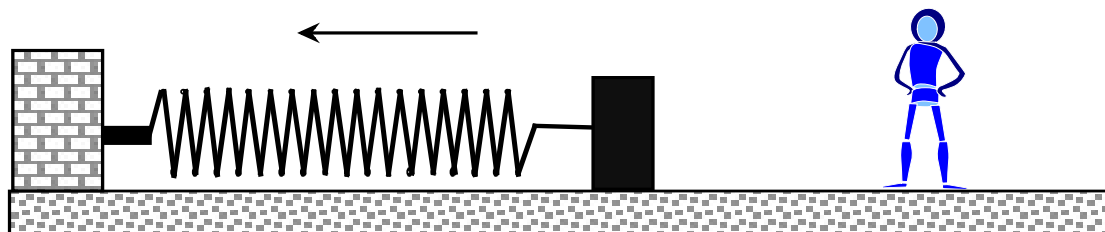
Wracamy do energii potencjalnej – teraz nieco inny przykład, przedstawiony na rysunku (4.6). Ludzik pracowicie naciąga sprężynę, wykonując przy tym pracę. Rozsądnym wydaje się przypuszczenie, że praca wydatkowana przez ludzika została zmagazynowana w rozciągniętej sprężynie. Możemy powiedzieć, że wzrosła energia potencjalna sprężyny. Zgodnie z zasadą energii minimalnej sprężyna nabrała ochoty do zmniejszenia tej swojej energii potencjalnej i jak tylko ludzik ją puści zaczyna się kurczyć. W efekcie jej energia potencjalna staje się energią kinetyczną rozpędzonych fragmentów sprężyny oraz masy do niej przyczepionej. Tu również jak w przypadku pola grawitacyjnego zamiast mówić o energii potencjalnej sprężyny, możemy mówić o energii potencjalnej przyczepionego ciała. Dla większości zagadnień nie ma znaczenia, gdzie umieszczamy zbiornik energii potencjalnej. Dobrze jest jednak pamiętać, że to sprężyna gromadzi energię potencjalną.



Rysunek 4.6a. Sprężyna jest z jednego końca przymocowana do muru a z drugiego do pewnego ciała o masie m . W chwili początkowej sprężyna nie jest naciągnięta, a masa m jest nieruchoma.



Rysunek 4.6b. Ludzik naciąga sprężynę wykonując przy tym pracę. Załóżmy, że ludzik robi to powoli i tak, że po krótkiej chwili po ruszeniu prędkość jego ruchu jest stała. Po tej krótkiej chwili, praca ludzika nie zwiększa energii kinetycznej ani sprężyny ani ciężarka. Przy powolnym ruchu sprężyna i ciężarek rozgrzewają się w stopniu zbyt małym aby „skonsumować” istotną część pracy ludzika. Pominiemy więc również starty związane z tarcie. Mówimy, że praca ludzika zamienia się na energię potencjalną sprężyny. Postulujemy, że sprężyna jest akumulatorem energii.



Rysunek 4.6c. Ludzik puszcza sprężynę, która kosztem zgromadzonej energii potencjalnej kurczy się i jednocześnie wykonuje pracę nad przymocowanym ciężarkiem. Energia potencjalna sprężyny zamienia się na energię kinetyczną własnych fragmentów i energię kinetyczną ciężarka. Doświadczenie pokazuje, że energia włożona bilansuje się z energią zmagazynowaną przez sprężynę w czasie jej naciągania. wet jeżeli nie wiemy jak to robi.

5. Uwagi na temat pracy ♦

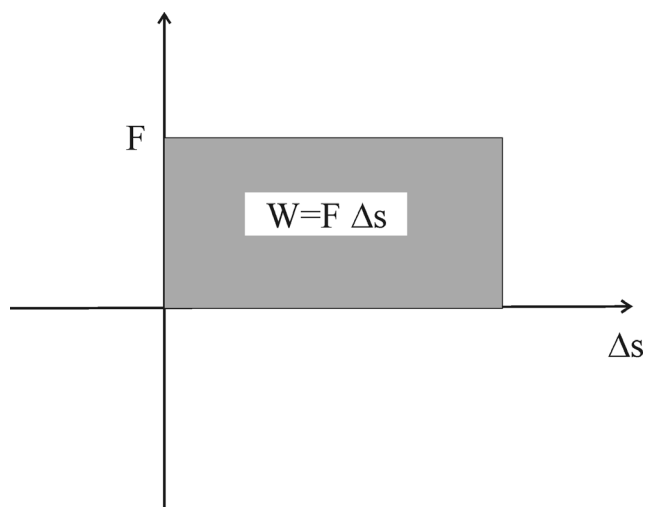
Z energią ściśle związane jest pojęcie pracy. Praca w fizyce definiowana jest jako iloczyn siły i drogi, wzdłuż której ta siła działa. Niech stała siła o wartości F przesunie, zgodnie z kierunkiem swojego działania, ciało o odcinek Δs . Wtedy wykonana przez tą siłę praca jest równa

$$W = F \Delta s \quad 5.1$$



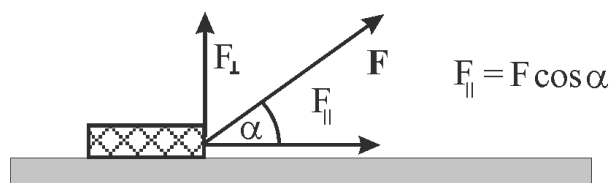
Rysunek 5.1. W fizyce praca jest równa wartości działającej siły pomnożonej przez drogę, wzdłuż której ta siła działa

Na sprawę możemy popatrzeć geometrycznie. Praca jest równa polu prostokąta wyznaczonego przez wartość stałej siły F i przesunięcia Δs (rys. 5.2).



Rysunek 5.2. Przy stałej sile praca jest równa polu prostokąta o bokach F i Δs

A co, jeżeli siła nie jest równoległa do przesunięcia? Niech przy tym samo przesunięcie odbywa się po linii prostej. Wtedy rozkładamy działającą siłę na składową równoległą $F_{\parallel}$ i składową prostopadłą $F_{\perp}$ do kierunku przesunięcia. Składowa prostopadła nie wnosi żadnego wkładu do wykonanej pracy – ciało nie przesuwa się do góry (rys. 5.3). Pracę obliczamy wykorzystując składową równoległą do kierunku przesunięcia, przez co sprowadzamy zagadnienie do poprzedniego przykładu (zastosowaliśmy drogę wiadra (TI 4)).



$$W = F_{||} \Delta s = F \cos \alpha = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}$$

Rysunek 5.3. Praca jako iloczyn skalarny wektora stałej siły i wektora przesunięcia.

Zauważ, że pracę możemy wyrazić jako iloczyn skalarny dwóch wektorów: wektora siły $\mathbf{F}$ i wektora wyznaczającego przesunięcie ciała $\Delta \mathbf{s}$.

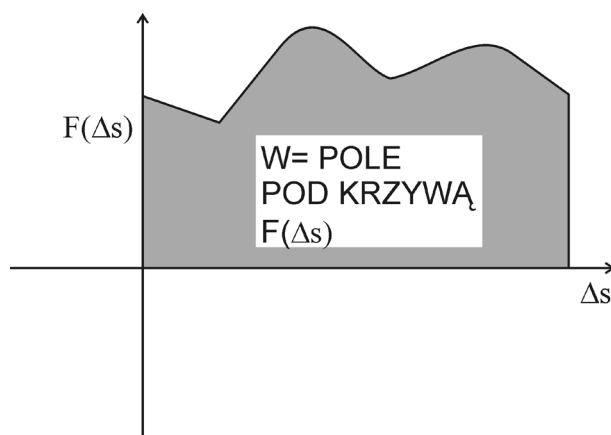
$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} \quad 5.2$$

Powyższy wzór jest podstawą do definicji pracy.

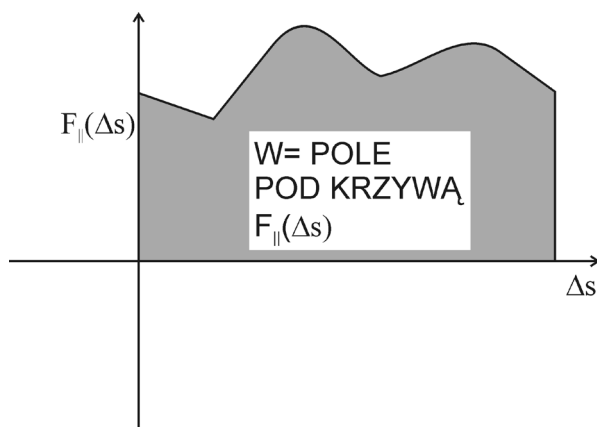
Definicja 5.1: Praca

Praca W wykonana przez siłę $\mathbf{F}$ nad danym ciałem jest równa iloczynowi wartości przesunięcia $\Delta \mathbf{s}$ tego ciała przez wartość rzutu wektora tej siły na kierunek przesunięcia danego ciała.

Rozpatrzmy przypadek gdy siła jest równoległa do wektora przesunięcia $\Delta \mathbf{s}$, ale nie jest stała. Jak w takiej sytuacji obliczyć pracę? Okazuje się, że geometryczna interpretacja wzoru na pracę przy stałej sile stosuje się również do tego bardziej ogólnego przypadku. Praca jest równa polu pod funkcją $F(\Delta s)$ (rys. 5.4). Jeszcze bardziej złożony przypadek mamy, gdy zmienna siła nie jest równoległa do wektora przesunięcia. Wtedy, w każdym punkcie toru, wektor siły możemy rozłożyć na część równoległą do wektora przesunięcia $F_{||}$ i składową prostopadłą $F_{\perp}$ (znów droga wiadra). Od razu wiadomo, że praca jest równa polu pod funkcją $F_{||}(\Delta s)$, opisującej zależność składowej wektora siły równoległej do przesunięcia od tegoż przesunięcia (rys. 5.5). Co ważne istnieją narzędzia matematyczne pozwalające na realizację takich obliczeń.

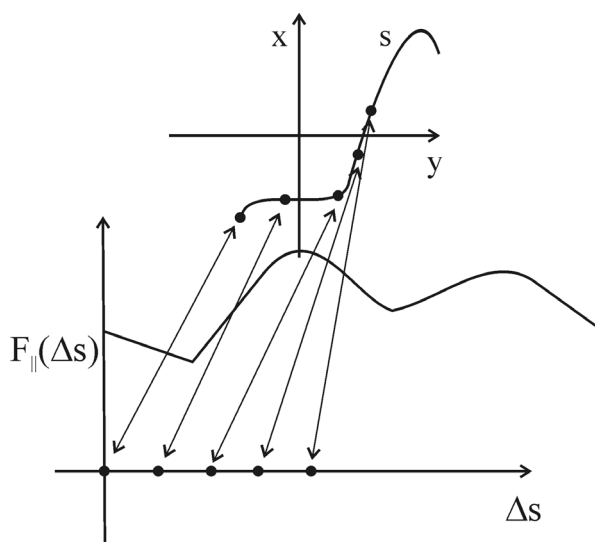


Rysunek 5.4. Gdy wartość siły zmienia się wzdłuż toru punktu materialnego, a wektor siły jest równoległy do przesunięcia, w każdym punkcie toru, to wtedy praca dalej jest równa polu pod krzywą $F(\Delta s)$



Rysunek 5.5. Tą samą regułą stosujemy również wtedy, gdy siła nie jest równoległa do przesunięcia. Tyle, że wtedy do obliczeń musimy wydzielić składową siły równoległą do przesunięcia, w każdym punkcie toru.

Zrezygnujemy z założenia, że przesunięcie Δs odbywa się wzdłuż linii prostej. Może to być dowolny tor w przestrzeni dwu lub trójwymiarowej (rys. 5.6). Jednak tor jest linią, a linia ma długość, dlatego wykres zależności przesunięcia i siły nawet dla toru biegnącego w trzech wymiarach możemy narysować w prosty sposób; odkładając na poziomej osi odpowiednie wartości przesunięcia Δs , z zachowaniem, w każdym punkcie kąta między wektorem przesunięcia a kierunkiem działania siły, co oznacza, że sprowadzamy w ten sposób zagadnienie do zagadnienia już rozwiązanego.



Rysunek 5.6. Każda krzywa s może być odwzorowana na oś układu współrzędnych tak aby odległości między punktami na tej krzywej były takie same jak odległości pomiędzy odpowiadającymi im punktami na osi. Otrzymujemy linię, którą możemy nazwać „wyprostowaną” krzywą s . W takiej sytuacji $F_{||}$ oznacza składową wektora działającej siły, która jest styczna do krzywej s w każdym jej punkcie. W ten sposób sprowadziliśmy problem do już uprzednio rozwiązanego, kiedy zmienna siła działa wzdłuż prostoliniowego przesunięcia.

Powróć do sytuacji kiedy zmienna siła działa na cząstkę poruszającą się wzdłuż prostoliniowego toru (rys. 5.5). W każdym punkcie toru wydzielamy z wektora siły $\mathbf{F}$ składową $F_{||}$ równoległą do przesunięcia. Jeżeli narysujemy wykres $F_{||}$ jako funkcję przesunięcia Δs , to pole pod tą krzywą jest równe wykonanej pracy.

Obliczanie pola pod krzywymi jest zadaniem rachunku całkowego (§DC). Korzystając z rachunku całkowego i z faktu, że pracę możemy traktować jak pole pod wykresem $F_{||}(S)$ pracę możemy zdefiniować ogólniej niż za pomocą wzoru (5.2)

Definicja 5.2: Praca

Praca W wykonana przez siłę nad danym ciałem na drodze od punktu początkowego s_p do punktu końcowego s_k jest równa całce z iloczynu składowego wektora działającej na to ciało siły $\mathbf{F}$ i wektora nieskończenie małego przesunięcia $d\mathbf{s}$ tego ciała. Przy czym całkowanie należy przeprowadzić wzdłuż drogi od punktu początkowego s_p do punktu końcowego s_k .

$$W = \int_{s_p}^{s_k} \mathbf{F}(\mathbf{s}) \cdot d\mathbf{s} \quad 5.3$$

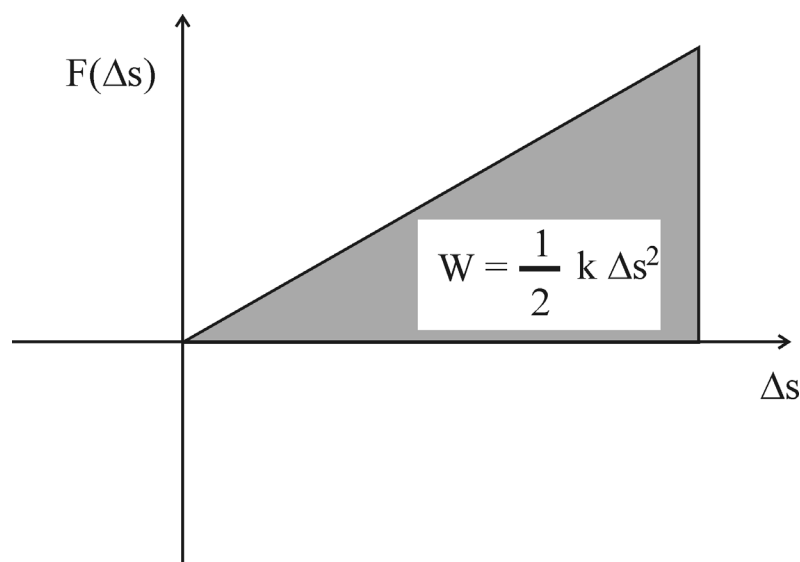
Obliczanie całek typu (5.3) komplikuje się dla torów nie będących linią prostą. Odpowiednie całki nazywamy całkami krzywoliniowymi. Niestety, są one na tyle ważne, że jeszcze w tym temacie wezmę się za ich obliczanie.

5.1. Siła wymuszająca ruch harmoniczny

Łatwo przyjdzie nam policzenie pracy w przypadku, w którym siła rośnie proporcjonalnie do przesunięcia i jest do tego przesunięcia równoległa. Dla przykładu, w ten sposób działają sprężyny. Im bardziej sprężyna jest rozciągnięta, tym większej trzeba użyć siły do jej jeszcze większego rozciągnięcia. Przyjmijmy zatem, że siła potrzebna do przesunięcia ciężarka (na przykład przymocowanego do sprężyny) jest równa

$$F = k \Delta s \quad 5.1.1$$

k jest współczynnikiem proporcjonalności. Im większe jest k tym mocniejsza jest sprężyna. Widać, że siła poruszająca ciężarek rośnie wraz ze wzrostem przesunięcia. Wykres zależności $F(\Delta s)$ wygląda znajomo (rys. 5.1.1).



Rysunek 5.1.1. Wykres zależności siły danej wzorem (5.3.5) od przesunięcia. Na szaro zaznaczone jest pole pod wykresem

Aby obliczyć pracę wykonaną przy rozciąganiu sprężyny wystarczy obliczyć pole tak powstałego trójkąta. Praca wynosi

$$W = \left(\frac{1}{2} k \Delta s \right) \Delta s = \frac{1}{2} k \Delta s^2 \quad 5.1.2$$

Oczywiście pracę możemy obliczyć korzystając z ogólnego wzoru całkowego (5.3). Ruch jest jednowymiarowy wobec tego możemy przyjąć, że $s=x$ i zapisać

$$W = \int_0^{\Delta x} F dx = \int_0^{\Delta x} kx dx = k \int_0^{\Delta x} x dx \quad 5.1.3$$

Dolna granica całki jest równa zeru, gdyż zakładamy, że sprężynę rozciągamy od położenia równowagi. Górna granica wskazuje wielkość rozciągnięcia, to jest Δx . Całka nieoznaczona z funkcji $f(x) = x$ ma postać

$$\int_0^{\Delta x} x dx = \frac{1}{2} x^2 \quad 5.1.4$$

Stąd mamy wynik na pracę ma postać

$$W = \frac{1}{2} k \Delta x^2 \quad 5.1.5$$

Otrzymaliśmy dokładnie ten sam wzór (5.2.2), który uzyskaliśmy wykorzystując wzór na pole trójkąta.

Gdy naciągamy sprężynę, na której jest ciężarek, to działamy siłą daną wzorem (5.2.1). Z drugiej strony sprężyna działa na ciężarek siłą F_h o takiej samej wartości ale przeciwnie skierowaną

$$F_h = -k \Delta s \quad 5.1.6$$

Gdy puścimy ciężarek, to pod wpływem naciągniętej sprężyny będzie on wykonywał drgania harmoniczne. Efektem działania siły danej wzorem (5.1.6), przy braku innych sił, jest zawsze ruch drgający harmoniczny (§TVIII 1). Dlatego nieraz jeszcze z siłą tej postaci będziemy się spotykać. Nawiasem mówiąc praca wykonana przy naciągnięciu sprężyny jest równa energii zgromadzonej w takiej naciągniętej sprężynie, co zgodnie z rysunkiem (4.6) i tekstem pod tym rysunkiem, możemy uznać za energię potencjalną ciała zawieszonego na sprężynie. Wzór (5.1.5) określa zatem energię potencjalną sprężyny, lub ciała zawieszonego na sprężynie. Czas na proste zadanie

Przykład 5.1.1

Na ciało o masie $m=1\text{kg}$ działa stała siła o wartości $F = 10\text{N}$ i tylko ta siła.

W efekcie ciało przesunęło się w kierunku działania siły o odcinek $\Delta s=5\text{m}$.

Jak zmieniała się prędkość tego ciała? Opory ruchu pomijamy.

Wykonana praca wynosi $W=F \cdot \Delta s$. Ponieważ wszystko dzieje się wzdłuż ustalonej prostej możemy zrezygnować z notacji wektorowej i napisać $W=F \cdot \Delta s$. Włożona w przesunięcie ciała praca zostaje zamieniona na wzrost jego energii kinetycznej, czyli na wzrost Δv wartości prędkości ciała. Mamy równanie

$$F \Delta s = \frac{m \Delta v^2}{2} \quad 5.1.7$$

Stąd obliczamy Δv

$$\Delta v = \sqrt{\frac{2F\Delta s}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 [N] 5[m]}{1[kg]}} = 10 \sqrt{\frac{kg \cdot m \cdot m}{kg \cdot s^2}} = 10 \frac{m}{s} \quad 5.1.8$$

Skąd wiemy, że praca zostaje całkowicie zamieniona na energię kinetyczną ciała? W zadaniu wyraźnie stwierdzone jest, że na ciało działa tylko jedna siła. Nie ma żadnych oporów ruchu, które mogłyby przeciwdziałać tej jednej sile. Zatem energia nie ma gdzie się podziać, poza przyrostem energii kinetycznej ciała.

Dygresja 5.1.1: praca w fizyce

Zwróć uwagę na to, że mówiąc o pracy w fizyce mamy na myśli proces, związany z przepływem energii, z jednego układu do drugiego, związany z uporządkowanym ruchem tego drugiego układu. Kiedy naciągamy sprężynę za jej koniec, to pod wpływem przyłożonej siły, przesuwamy się koniec sprężyny, a wykonana praca jest równa tej sile razy przesunięcie. Energia z tym związana przepływa ze źródła siły do sprężyny. Gdy sprężyna kurczy się ciągnąc za sobą ciężarek, to sama staje się źródłem siły, której działanie powoduje zwiększenie energii kinetycznej ciężarka i poszczególnych części sprężyny. Tak zdefiniowana praca nie zbyt dobrze pasuje do zwyczajowego pojęcia pracy. Powiedzmy, że murarz prosi swojego pomocnika o przytrzymanie betonowego bloczka, gdyż właśnie zauważył, że musi poprawić położenie bloczka, który znajduje się poniżej warstwy, którą układa. Pomocnik chwycił bloczek i cały czas trzyma go na stałej wysokości. Murarz się nieco grzebie, przy poprawkach, a pomocnik czuje jak mu ręce słabną, ale nie chce wyjść na cieniasa, więc zaciska zęby i dalej utrzymuje bloczek na tej samej wysokości. Pomocnik jest przekonany, że właśnie wykonał ciężką pracę, ale z punktu widzenia definicji fizycznej, praca wykonana przez pomocnika jest równa zero. Bloczek był cały czas na tej samej wysokości i ani nie zwiększył ani nie zmniejszył swojej energii. Tak więc z punktu widzenia bloczka nic się nie wydarzyło- nie było przepływu energii związanej z przesunięciem. Czy to znaczy, że nie było żadnej pracy? Ano w myśl fizyki nie było. Co prawda organizm pomocnika rozpraszał ciepło do otoczenia. Ale transport ciepła nie jest związany z uporządkowanym ruchem. To że podgrzejemy kamyk nie oznacza, że zacznie się on przesuwać.

5.2. Moc

Mówiąc o pracy nie możemy pominąć pojęcia mocy. W fizyce moc jest ilością energii, a w szczególności pracy wydzielonej w jednostce czasu. Zatem

Definicja 5.2.1: Moc

Moc to energia (praca) wydzielona (wykonana) w jednostce czasu

$$P = \frac{dW}{dt} \quad 5.2.1$$

Od strony formalnej, moc to pochodna pracy po czasie. Szkolny wzór

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad 5.2.2$$

stosuje się tylko wtedy gdy przepływ pracy (energii) jest stały w czasie. W układzie SI jednostką mocy jest Wat [W]

Definicja 5.2.2: Wat

Jeden wat jest energią jednego dżula wydzieloną w czasie jednej sekundy

$$1W = \frac{1J}{1s} = \frac{1kg \cdot 1m^2}{1s^3} \quad 5.2.3$$

Warto wspomnieć o innych, ciągle jeszcze powszechnie stosowanych, jednostkach mocy.

Definicja 5.2.3: koń mechaniczny (metryczny) [KM]

Jeden koń mechaniczny jest energią jaką średnio rzecz biorąc ma zaprzęg z jednym koniem.

Fakt 5.2.1

Jeden koń mechaniczny to

$$1KM = 735.49875W \quad 5.2.4$$

Jednostkę tę wprowadzili Niemcy w XIX wieku aby móc porównywać moc maszyn parowych z mocą konia. Swoją jednostkę wzorowali na brytyjskim koniu parowym [HP] wprowadzonym wcześniej w Wielkiej Brytanii w tym samym celu.

Definicja 5.2.4: koń parowy [HP]

Jeden koń parowy jest energią jaką średnio rzecz biorąc ma zaprzęg z jednym koniem.

Fakt 5.2.2

Jeden koń parowy to

$$1KM = 745,69987W \quad 5.2.5$$

Przykład 5.2.2

Rozważmy następujący przykład. Pociąg jedzie ze stałą prędkością o wartości $v=20m/s$. Lokomotywa ciągnie skład z siłą o wartości $F=2MN$ (2000000N) równoległą do kierunku prędkości. Oblicz moc silników lokomotywy zakładając, że w układzie nie ma strat mocy.

Brak strat mocy oznacza, że przyjmujemy, że cała moc silników lokomotywy zużytkowana jest na ciągnięcie składu. W ciągu sekundy lokomotywa ciągnie skład na drodze 20m. Wykonana na tej drodze praca jest równa

$$W = F \cdot \Delta s = 40MJ \quad 5.2.6$$

Ta praca jest wykonana w ciągu sekundy mamy zatem moc równą

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta s}{\Delta t} = \frac{40 \text{ MJ}}{1 \text{ s}} = 40 \text{ MW} \quad 5.2.7$$

Oto druga metoda rozwiązywania tego zadania. Korzystamy z faktu, że $\Delta s / \Delta t$ jest prędkością pociągu

$$P = \frac{F \cdot \Delta s}{\Delta t} = F \cdot v = 2 \text{ MN} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 40 \text{ MW} \quad 5.2.8$$

Zatem dla układu poruszającego się pod wpływem siły F z prędkością v moc możemy wyrazić wzorem

$$P = F \cdot v \quad 5.2.9$$

Łatwo ten wzór uogólnić na przypadek, gdy siła nie jest równoległa do prędkości; musimy wtedy wektor siły przemnożyć skalarnie przez wektor prędkości.

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad 5.2.10$$

Wiem, że póki co nie zajmujemy się szczególnie głębokimi sprawami. Ale bez takich pojęć jak energia, praca czy moc trudno brnąć w dżunglę zwaną fizyką. Dlatego trzeba na początku trochę pocierpieć. Na cierpliwych czeka nagroda w postaci możliwości zrozumienia bardziej subtelnych zagadnień współczesnej fizyki. Muszę jeszcze wprowadzić kilka istotnych pojęć. Jak mam nadzieję, choć proste i podstawowe, to jednak nie będą całkiem nudne. Dla bardziej niecierpliwych i ambitnych mam mały przerywnik od tego przeglądu podstawowych pojęć fizyki. Chcę teraz pokazać jak obliczamy pracę w przypadku pokazanym na rysunku (5.6).

5.3. Całki krzywoliniowe ♣

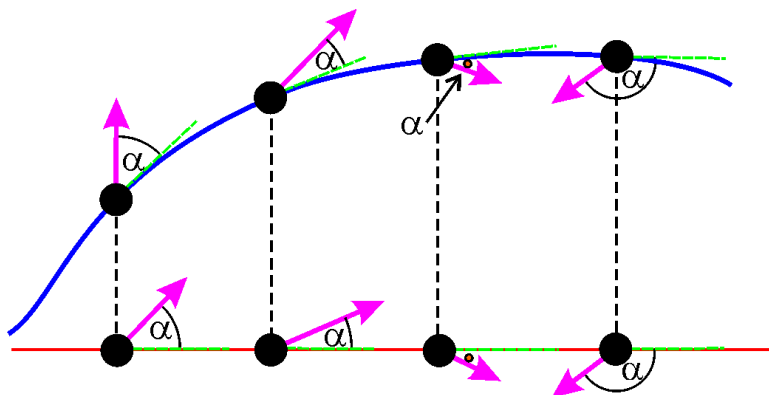
Mamy następujące zagadnienie. Punkt materialny o masie m przesuwa się wzdłuż dwuwymiarowej krzywej (rys. 5.3.1), przy czym w każdym punkcie krzywej działa na tą masę siła $\mathbf{F}$. Jaka jest praca tej siły nad tą masą, wykonana, przy przejściu wzdłuż zadanego fragmentu krzywej? Ponieważ w każdym punkcie toru obliczamy iloczyn skalarny siły $\mathbf{F}$ i nieskończenie małego przesunięcia $d\mathbf{r}$, to w każdym punkcie toru mamy nieskończenie małą liczbę, reprezentującą nieskończenie małą pracę wykonaną na odcinku $d\mathbf{r}$

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = |\mathbf{F}| \cos(\alpha) d\mathbf{r} \quad 5.3.1$$

Cała praca jest równa

$$W = \int_{s_p}^{s_k} dW = \int_{s_p}^{s_k} |\mathbf{F}| \cos(\alpha) d\mathbf{r} \quad 5.3.2$$

Bieda leży w tym, że musimy całkować wzdłuż krzywej i całka (5.3.2) musi w jakiś sposób „wiedzieć” jak biegnie krzywa. Taką całkę, która sumuje zbiór wkładów (5.3.1), wzdłuż zadanej krzywej nazywamy całką krzywoliniową.



Rysunek 5.3.1. Punkt materialny przesuwa się wzdłuż krzywej (niebieska linia). W każdym punkcie krzywej działa siła; różowe strzałki to wektory tych sił narysowane w czterech wybranych punktach. Wektor przesunięcia $d\mathbf{r}$ jest w każdym punkcie styczny do krzywej. Ponieważ $d\mathbf{r}$ jest nieskończenie mały na rysunku, zamiast tych wektorów, wyrysowane są kierunki styczne do krzywej (zielone odcinki). Kąt α , jest kątem między wektorem przesunięcia $d\mathbf{r}$, a styczną do krzywej. Elementarna praca, w każdym punkcie krzywej, wynosi $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Zauważ, że w każdym punkcie, krzywej, układ wektorów $\mathbf{F}$ i $d\mathbf{r}$ możemy sprowadzić na prostą (czerwona linia), tak aby zachowany został kąt między wektorami $\mathbf{F}$ i $d\mathbf{r}$, a wektory $d\mathbf{r}$ leżały wzdłuż jednej prostej. Obliczanie pracy po niebieskiej krzywej, zgodnie ze wzorem (5.3.2) jest równoważne obliczeniu tej pracy wzdłuż czerwonej prostej. W tym sensie realizujemy procedurę zilustrowaną na rysunku (5.6)

Nadanie nazwy to sprawa prosta i przyjemna. Znacznie mniej prostą sprawą jest znalezienie metody obliczania takich całek. Do rozwiązania problemu użyjemy parametrycznego opisu krzywej. Mamy co prawda wzór (5.4.2), ale musimy się go nauczyć wykorzystywać. W dwóch wymiarach ogólny wzór na parametryczny opis krzywej ma postać (DFI)

$$s(t) = \{x(t), y(t)\} \quad 5.3.3a$$

Widać z tego, że każda współrzędna stała się funkcją parametru t . Funkcja $x(t)$ pokazuje jak przesuwa się punkt wzdłuż osi x -ów, a funkcja $y(t)$ pokazuje jak przesuwa się punkt wzdłuż osi y -ów. Obie współrzędne wyznaczają położenie punktu na płaszczyźnie, dla każdego t . Nie ma chyba wątpliwości jak zapisać parametryczne równanie krzywej w N -wymiarowej przestrzeni

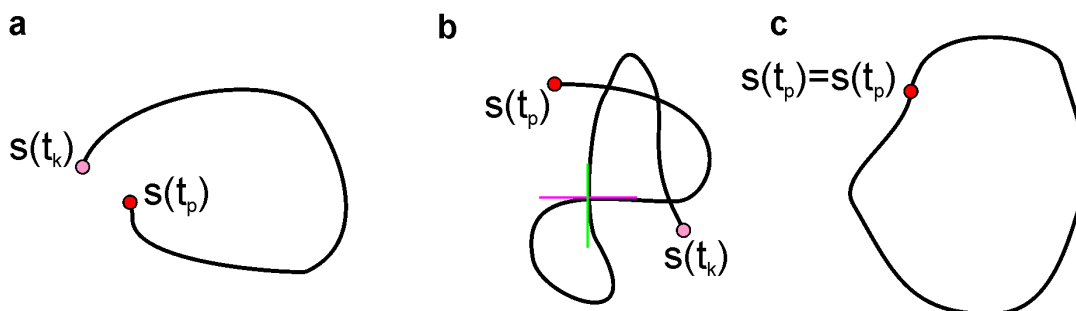
$$s(t) = \{x_1(t), \dots, x_N(t)\} \quad 5.3.3$$

W (DF) znajdziesz przykłady krzywej opisanych parametrycznie. Ograniczę się tu do krzywych nie mających przecięć, to jest bez punktów wielokrotnych (rys. 5.3.2). Na przecięciach trudno jest ustalić kierunek wektora stycznego,

a wektor przesunięcia $d\mathbf{r}$ jest styczny do krzywej. Będę jednak dopuszczał specjalną klasę krzywych z jednym punktem wielokrotnym, to jest krzywe zamknięte

Definicja 5.3.1: Krzywa zamknięta

Niech będzie zdefiniowana krzywa ciągła $s(t)=\{x(t), y(t), z(t)\}$, gdzie $t \in [t_p, t_k]$. Krzywa ta jest zamknięta, gdy $s(t_p)=s(t_k)$ (rys. 5.3.2c)

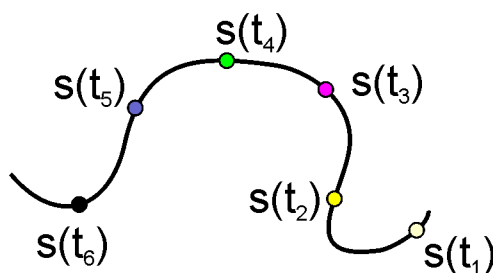


Rysunek 5.3.2. a) krzywa bez punktów wielokrotnych; b) krzywa z dwoma przecięciami. W punktach przecięcia nie można zdefiniować jednoznacznie stycznej; c) krzywa zamknięta – z jednym punktem wielokrotnym nie będącym przecięciem.

Parametryzacja krzywej, to jest ciągłe odwzorowanie odcinka $[t_p, t_k]$ w płaszczyznę lub przestrzeń, definiuje nam tzw. krzywą skierowaną. Krzywa skierowana ma orientację, to jest wyróżniony kierunek. Oznaczę teraz symbolem E^N N wymiarową przestrzeń fizyczną, to jest taką przestrzeń jaką odbieramy naszymi zmysłami. Wiem, że to mało ścisła definicja, ale przez to, że mamy dobrą intuicję takiej przestrzeni, zupełnie nam na razie wystarczy. Już niedługo uściślę całą definicję.

Definicja 5.3.2: Krzywa skierowana

Ciągłe odwzorowanie odcinka $[t_p, t_k]$ w przestrzeń euklidesową E^N określa krzywą skierowaną. Wyróżniony kierunek na krzywej jest zgodny z ruchem punktu na krzywej przy zmianie parametru t od wartości mniejszych do wartości większych



Rysunek 5.3.3. Krzywa skierowana ma dziedziczony od przedziału liczbowego wyróżniony kierunek. Niech $t_1 < \dots < t_6$, wtedy poruszamy się zgodnie z orientacją krzywej, gdy przechodzimy ją odwiedzając punkty kolejno $s(t_1), \dots, s(t_2)$.

Zauważ, że sama krzywa, na przykład narysowana na płaszczyźnie nie rozróżnia żadnego kierunku. Odwzorowanie przedziału liczbowego $[t_p, t_k]$ przenosi uporządkowanie tegoż przedziału na krzywą. Słowem krzywa dziedziczy orientację po przedziale liczbowym.

Iloczyn skalarny wektora siły $\mathbf{F}\{F_x, F_y\}$ i przesunięcia $d\mathbf{r}\{dx, dy\}$ ma we współrzędnych kartezjańskich postać

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy \quad 5.3.4$$

Zgodnie z interpretacją geometryczną różniczek funkcji, mamy zależności

$$dx = x'(t)dt \text{ oraz } dy = y'(t)dt \quad 5.3.5$$

Wzór (5.4.4) przejdzie w

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x x'(t)dt + F_y y'(t)dt = (F_x x'(t) + F_y y'(t)) dt \quad 5.3.6a$$

W N -wymiarowej przestrzeni mamy

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (F_1 x'_1(t) + \dots + F_N x'_N(t)) dt \quad 5.3.6$$

Zatem praca wzdłuż krzywej s wyrazi się wzorem

$$W = \int_{s_p}^{s_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_p}^{s_k} F_x x'(t)dt + F_y y'(t)dt \quad 5.3.7$$

Wzór (5.3.7) ma już postać, którą możemy bezpośrednio wykorzystać do obliczeń. Zanim przejdę do przykładów podam wynikającą z dotychczasowych rozważań definicję skierowanej całki krzywoliniowej. Przy okazji całość dokonam pewnych uogólnień. Składowe siły $\{F_x, F_y\}$, są kreślone w każdym punkcie krzywej. Są więc funkcjami współrzędnych na płaszczyźnie. Zamiast pisać $F_x(x, y)$ i $F_y(x, y)$ możemy przyjąć, że mamy dwie funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$. Z punktu widzenia matematyki nie jest istotne co te funkcje oznaczają. Wtedy

Definicja 5.3.2: Całka krzywoliniowa skierowana

Niech S będzie regularnym łukiem skierowanym w przestrzeni o parametryzacji danej wzorem (5.3.3) i niech będą dane dwie funkcje dwóch zmiennych $P(x,y)$ i $Q(x,y)$, określone i ciągłe we wszystkich punktach łuku S . Całką skierowaną z funkcji $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ po łuku zdefiniowana jest przez wyrażenie

$$\int_{s_p}^{s_k} Pdx + Qdy$$

$$= \int_{s_p}^{s_k} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt$$
5.3.8a

Łatwo jest ten wzór uogólnić na N wymiarów. Niech $\{P_i\}$ będzie zbiorem funkcji, postaci $P_i(x_1, \dots, x_N)$, ciągłych i określonych na skierowanym łuku S . Wtedy całka krzywoliniowa skierowana wyrazi się wzorem

$$\int_{s_p}^{s_k} P_1 dx_1 + \dots + P_N dx_N$$

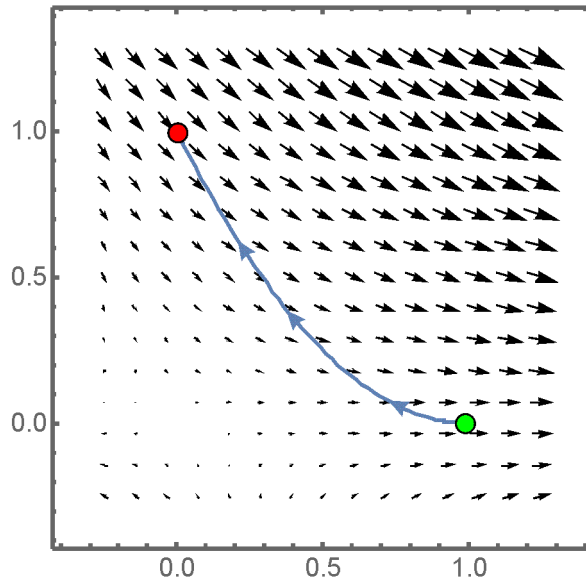
$$= \int_{s_p}^{s_k} [P_1(x_1(t), \dots, x_N(t))x'_1(t) + \dots + P_N(x_1(t), \dots, x_N(t))x'_N(t)] dt$$
5.3.8

Jak widzisz poradzenie sobie z procedurą z rysunku (5.6) nie było takie trudne. Rzecz sprowadza się do wykorzystania wzoru (5.3.8). Oczywiście, samo obliczanie całek dla konkretnego zadania, to zupełnie inna para kaloszy. Niemniej w prostych przypadkach nie powinno być dramatu; spróbujmy

Rozważmy pole wektorowe dane wzorem

$$\mathbf{F}(\underbrace{x+y}_{F_x}, \underbrace{-y}_{F_y})$$
5.3.9

Krótko: jeżeli każdemu punktowi płaszczyzny przyporządkujemy wektor dany wzorem (5.3.9), to mamy zdefiniowane na płaszczyźnie pole wektorowe. Korzystając z programu Mathematica możemy narysować pole wektorowe (rys. 5.3.4) opisane wzorem (5.3.9).



Rysunek 5.3.4. Pole wektorowe wraz z torem, wzdłuż którego liczymy pracę. Punktu początkowy wypada tam, gdzie parametr $s=0$, co daje współrzędne $(x=1, y=0)$, punkt końcowy wypada tam, gdzie parametr $s=1$, co daje współrzędne $(x=0, y=1)$. Punkt początkowy zaznaczony jest na zielono, a końcowy na czerwono.

Obliczmy pracę tej siły przy przesunięciu wzdłuż toru, danego równaniem parametrycznym.

$$x(s) = 1 - s; \quad y(s) = s^2 \quad 5.3.10$$

Od punktu początkowego $s=0$ do punktu końcowego $s=1$. Zgodnie ze wzorem (5.3.8) obliczamy pochodne funkcji (5.3.10) opisujących parametryczne równanie toru

$$x'(s) = -1; \quad y'(s) = 2s \quad 5.3.11$$

Mamy już gotowe wszystkie cegiełki potrzebne do obliczeń. Obliczamy całki z dwóch składników sumy (5.3.8a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_x(s) x'(s) ds &= \int_0^1 [x(s) + y(s)] x'(s) ds \\ &= \int_0^1 [(1-s) + s^2] (-1) ds = - \int_0^1 (s^2 - s + 1) ds \quad 5.3.12a \\ &= - \left(\frac{1}{3} s^3 - \frac{1}{2} s^2 + s \right) \Big|_0^1 = - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 F_y(s) y'(s) ds &= \int_0^1 [-y(s)] y'(s) ds = \int_0^1 -(s^2 - 2s) ds \\
 &= -2 \int_0^1 s^3 ds = -\frac{1}{2} s^4 \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}
 \tag{5.3.12b}$$

Suma obu całek daje szukaną pracę

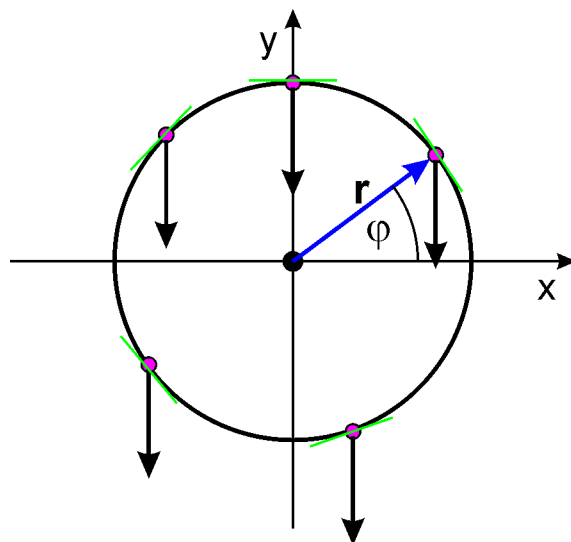
$$W = \int_0^1 F_x(s) x'(s) ds + \int_0^1 F_y(s) y'(s) ds = -\frac{4}{3}
 \tag{5.3.12c}$$

Wartość pracy jest ujemna, gdyż jak widać z rysunku (5.3.4) punkt przebiega tor przeciwnie do lokalnego kierunku działania wektorów siły. Oznacza, to, że to nie pole popycha punkt, ale punkt pcha się przeciw siłom pola. W tym celu musi zużywać energię. Skąd ją czerpie? To teraz nie ważne. Dodam, że aby była spełniona zasada zachowania energii pole musi magazynować energię poruszającego się punktu. Punkt reprezentuje tu oczywiście układ fizyczny. Gdybyśmy zmienili kierunek ruchu punktu, to jest przebiegali tor od punktu czerwonego do zielonego, to pole popychałoby punkt zwiększając na przykład jego energię kinetyczną. Wtedy praca miała by taką samą wartość, ale przeciwny znak.

$$W = \int_1^0 F_x(s) x'(s) ds + \int_1^0 F_y(s) y'(s) ds = \frac{4}{3}
 \tag{5.3.13}$$

Wynika to również z własności całki oznaczonej, której wartość zmienia znak przy zamianie dolnej i górnej granicy całkowania (tw. DC 1.2)

Warto przeliczyć jeszcze jeden bardziej fizyczny przykład. Powiedzmy, że mamy ciało o masie m i pole sił grawitacyjnych działające na to ciało o współrzędnych $F(0, -mg)$ (rys. 5.3.5). Ciało porusza się po okręgu o promieniu ρ . Jaką pracę wykona pole po przejściu całego okręgu?



Rysunek 5.3.5. Poruszamy się po torze kołowym w polu grawitacyjnym (czarne strzałki). Układ współrzędnych zaczepiony jest w środku okręgu. Tor sparametryzowany jest kątem φ . Przesunięcia punktu są styczne, w każdym punkcie, do toru. Kierunki styczne narysowane są w wybranych punktach jako zielone odcinki. Gdy obiegamy cały okrąg, to praca wykonana przez pole grawitacyjne jest równa zero niezależnie od tego czy obiegamy okrąg zgodnie czy przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara.

Początek układu współrzędnych ustawię w środku okręgu. W takim układzie współrzędnych okrąg o promieniu ρ ma równanie parametryczne

$$x(\varphi) = \rho \cos(\varphi); \quad y(\varphi) = \rho \sin(\varphi) \quad 5.3.14$$

Tym razem parametrem jest kąt φ , liczony przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara (rys. 5.3.5). Z punktu widzenia parametryzacji krzywej nie jest istotne czy dla nas parametrem jest kąt, czas, czy cokolwiek innego. Ważnym jest by parametr przebiegał w gładki sposób pewien odcinek. U nas kąt φ przebiega odcinek od 0 do 2π . Pochodne z wyrażeń (5.3.14) mają postać

$$x'(\varphi) = -\rho \sin(\varphi); \quad y'(\varphi) = \rho \cos(\varphi) \quad 5.3.15$$

Korzystając z (5.3.8a) obliczamy pracę

$$\int_0^{2\pi} F_x(\varphi) x'(s) d\varphi = \int_0^{2\pi} 0 x'(s) d\varphi = 0 \quad 5.3.16a$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F_y(\varphi) y'(s) d\varphi &= \int_0^{2\pi} -mg\rho \cos(\varphi) d\varphi \\ &= -mg\rho \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) d\varphi = 0 \end{aligned} \quad 5.3.16b$$

Praca jest równa sumie całek obu całek i wynosi zero. Zwracam wam uwagę, że

$$F_x(\varphi) = 0 \quad 5.3.17a$$

$$F_y(\varphi) = -mg \quad 5.3.17b$$

Obie składowe siły są stałe, ale na potrzeby obliczeń muszą być zapisane jako funkcje parametru φ . Wyrażenia (5.3.17) mówią po prostu, że dla każdego φ składowa x -owa siły przyjmuje wartość zero, a składowa y -owa przyjmuje wartość $-mg$.

Widać od razu, że jeżeli jedna ze składowych pola sił $\mathbf{F}$ jest równa zeru, to dla każdej krzywej postaci

$$x(s) = f(s); \quad y(s) = \rho \sin(s) \quad 5.3.18$$

Gdzie f jest funkcją różniczkowalną a s zmienia się od 0 do 2π , praca wzdłuż tej krzywej pola sił $\mathbf{F}(0, -mg)$ będzie równa zeru. Wynika to z tego, że wyrażenie (5.3.16a) przyjmie postać

$$\int_0^{2\pi} F_x(s) x'(s) d\varphi = \int_0^{2\pi} 0 x'(s) d\varphi = 0 \quad 5.3.19$$

Dlaczego tak się dzieje? Przyjrzyj się rysunkowi (5.3.6). Ponieważ siła jest iloczynem skalarnym wektora przesunięcia i siły liczy się tylko ta część przesunięcia, która działa wzdłuż kierunku siły. Wszystkie te przesunięcia sumują się do wartości drogi od dołu do góry i od góry do dołu. Gdy kończymy na tej samej wysokości co zaczynamy drogi od dołu do góry są takie same, a ich wektory są przeciwnie skierowane. Stąd wkład do pracy przy przejściu od dołu do góry ma taką samą wartość ale przeciwny znak do wkładu pracy przy przejściu od góry do dołu.

Weźmy dla przykładu krzywą daną wzorem (rys. 5.3.7)

$$x(s) = \cos^2(2\pi s^2); \quad y(\varphi) = 0.5 \sin(4\pi s) + 1 \quad 5.3.20$$

Dla $t=0$ i $t=1/2$ krzywa kończy się w punkcie o tej samej współrzędnej y . Obliczmy pochodną z (5.3.20). Ja skorzystam z funkcjonalności pakietu Mathematica

$$D[\{(\text{Cos}[2\pi t^2])^2, 0.5\text{Sin}[4\pi t] + 1\}, t]$$

Polecenie oblicz
pochodną po t .

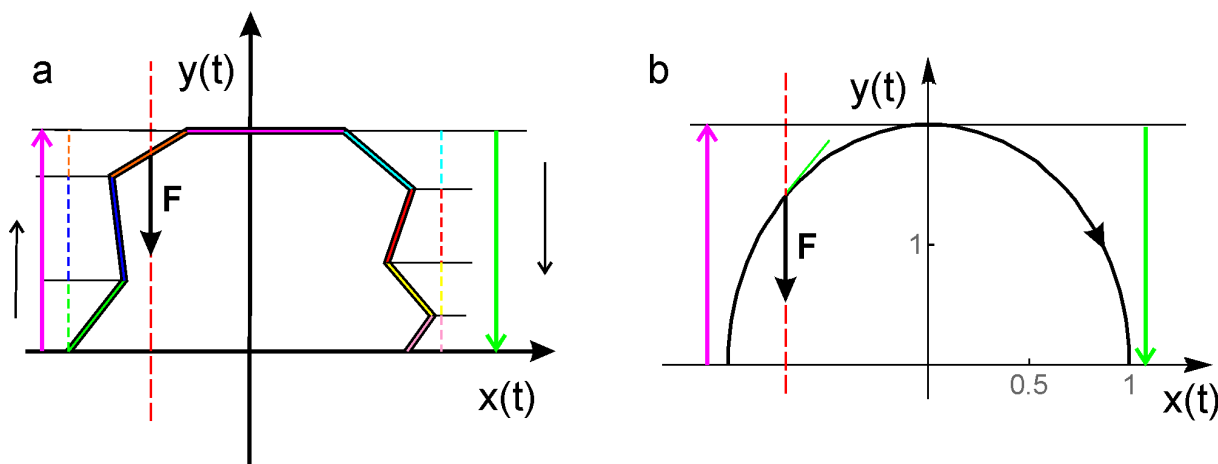
$$\{-8\pi t \text{Cos}[2\pi t^2] \text{Sin}[2\pi t^2], 2\pi \text{Cos}[4\pi t]\}$$

Wynik

M. 5.3.1. Instrukcja D o składni $D[f[x], x]$ oblicza pochodną z funkcji $f(x)$ po zmiennej x .

Pochodna obliczona z funkcji zdefiniowanej parametrycznie wyznacza współrzędne wektora stycznego do danej krzywej. Ekstrema funkcji pokazanej

na rysunku (5.3.5) wystąpią w punktach, gdzie wektor nie odchyła się w kierunku osi y , czyli jego składowa y -owa jest równa zero

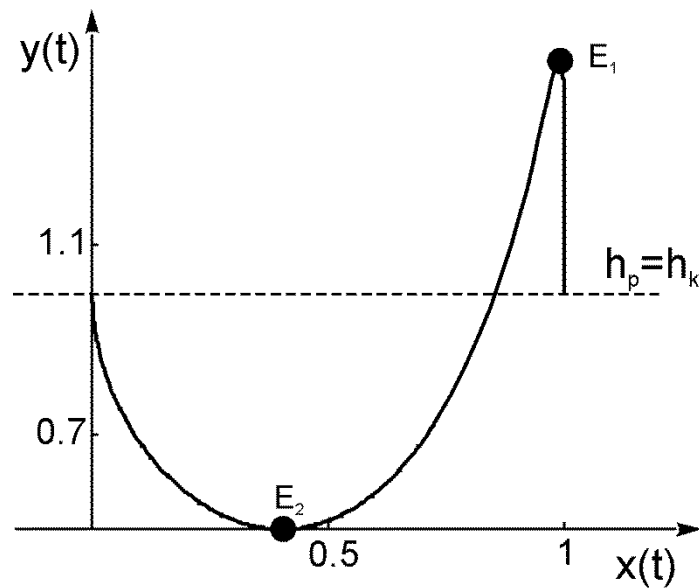


Rysunek 5.3.6. a) mamy tor złożony z odcinków r_i . Niech r_i oznacza wektor pokazujący przesunięcie wzdłuż i -tego odcinka o wartości równej długości tego odcinka. Pole sił F jest stałe, równoległe do osi y i przeciwne do niej skierowane. Zauważ, że iloczyn skalarny $F \cdot r_i$ możemy traktować jako rzutowanie wektora r_i na kierunek równoległy do wektorów siły F (przerywana czerwona linia). Praca wykonana na odcinku r_i jest zatem równa iloczynowi długości rzutu tego odcinka na kierunek działania siły i wartości siły. Rzuty odcinków pokazują przerywane linie narysowane w kolorach kolejnych odcinków. Strzałki z boku torów pokazują kierunek ruchu. Z lewej strony idziemy do góry (przeciwie do kierunku siły) a z prawej do dołu (zgodnie z kierunkiem siły). Całkowita praca, gdy idziemy do góry jest równa iloczynowi sumy długości wszystkich rzutów odcinków z lewej strony (wielka różowa strzałka) i wartości siły. Podobnie jest z prawej strony, tyle, że z prawej strony idziemy w dół (wielka zielona strzałka), więc wyrażenie z prawej strony ma taką samą wartość bezwzględną jak z lewej strony, i przeciwny znak. Praca na całej drodze jest sumą tych dwóch składowych i jest równa zero; b) gdy tor jest linią ciągłą przesunięcia stają się nieskończenie małe dr . Ale ich rzuty na kierunek stałej siły sumują się do całkowitej drogi przebytej od dołu do góry (wielka różowa strzałka), a po przeciwnej stronie od góry do dołu (wielka zielona strzałka). Ponieważ z obu stron krzywej idziemy w przeciwne strony w stosunku do siły sumy z obu stron kasują się.

$$2\pi \cos(4\pi t) = 0$$

5.3.21

Na przedziale $t \in [0, 1/2]$ warunek ten jest spełniony dla $t = 1/8$ i $t = 3/8$. Odpowiadające tym wartościom punkty na krzywej pokazane są na rysunku (5.3.7). Niech wektor działającej siły ma współrzędne $F(0, -1)$. Niech punkt przemieszcza się od punktu startowego dla $t = 1/2$ do końcowego dla $t = 0$. Od punktu początkowego ($t = 1/2$) do pierwszego ekstremum E_1 ($t = 3/8$) rzut punktu na oś y przesuwa się przeciwie do zwrotu osi, a zatem zgodnie z kierunkiem działania siły.



Rysunek 5.3.7. Krzywa opisana równaniem parametrycznym (5.3.20). Zauważ, że krzywa ma końce w punktach o tej samej współrzędnej y . Przy sile działającej wzdłuż osi y praca wykonana przez te siły, na tym torze będzie równa zero.

Zgodnie ze wzorem (5.3.7) praca na tym odcinku jest równa

$$\int_{1/2}^{3/8} -1 \cdot 2\pi \cos(4\pi t) dt = -2\pi \int_{1/2}^{3/8} \cos(4\pi t) dt = 0.5 \quad 5.3.22a$$

Wykonana praca przez siłę jest dodatnia. Zauważ, że nie obliczałem pracy przy przesunięciu wzdłuż składowej x , gdyż działająca w tym kierunku siła jest równa zero. Na odcinku od pierwszego ekstremum E_1 ($t=3/8$) do drugiego ekstremum E_2 ($t=1/8$) rzut punktu na oś y przesuwa się zgodnie ze zwrotem osi y , to jest przeciwnie do działającej siły. Praca na tym odcinku jest równa

$$\int_{3/8}^{1/8} -1 \cdot 2\pi \cos(4\pi t) dt = -2\pi \int_{3/8}^{1/8} \cos(4\pi t) dt = -1 \quad 5.3.22b$$

Wykonana praca przez siłę jest ujemna. To znaczy, że to punkt wykonuje pracę przeciw zadanej sile. Na odcinku od drugiego ekstremum E_2 ($t=1/8$) do punktu końcowego rzut punktu na oś y przesuwa się zgodnie przeciwnie do zwrotu osi y , to jest zgodnie z kierunkiem działania siły. Praca na tym odcinku jest równa

$$\int_{1/8}^0 -1 \cdot 2\pi \cos(4\pi t) dt = -2\pi \int_{1/8}^0 \cos(4\pi t) dt = 0.5 \quad 5.3.22c$$

Suma prac (5.3.22a-c) wynosi zero. Moglibyśmy to uzyskać licząc od razu całe wyrażenie

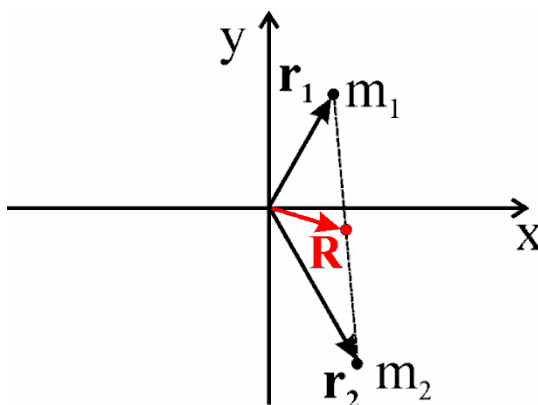
$$\int_{1/2}^0 -1 \, 2\pi \cos(4\pi t) dt = -2\pi \int_{1/2}^0 \cos(4\pi t) = 0 \quad 5.3.23$$

Jak dotarłeś tu bez strat (rozumiesz co zostało powiedziane), to muszę Cię pochwalić. W drugim wykładzie przebrnąłeś przez ładny kawałek matematyki. Przyznaj, że sama idea całek krzywoliniowych trudna nie jest. W konkretnych przypadkach mogą się pojawić złożone wyrażenia podcałkowe, ale to już inna kwestia. Ja doбираłem przykłady tak, by całki były proste, bo nie o ćwiczenie z całkowania tu chodzi, a o „pomaganie” techniki obliczeń pracy dla zmiennych sił i zakrzywionych torów. Zobacz z czym się już możesz zmierzyć. Żadne tam liczenie pracy w stałym polu sił wzdłuż prostej. Pole może być zmienne jak na rysunku (5.3.1), a tor może być linią krzywą w dwóch wymiarach. Z trzecim wymiarem też nie miałbyś kłopotu. Po prostu doszłaby jeszcze jedna składowa wektora siły $F_z(s)$ i funkcja $z(s)$ opisująca przebieg toru w trzecim wymiarze. A zabawa się dopiero zaczyna.

6. Środek masy ♦

Rozważmy dwa punkty o masie m_1 i m_2 . W danym układzie współrzędnych położenie tych punktów określamy przez podanie wektorów wodzących – $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$. Położenie środka masy dla układu dwóch punktów materialnych określamy poprzez wektor $\mathbf{R}$ dany wzorem (rys. 6.1)

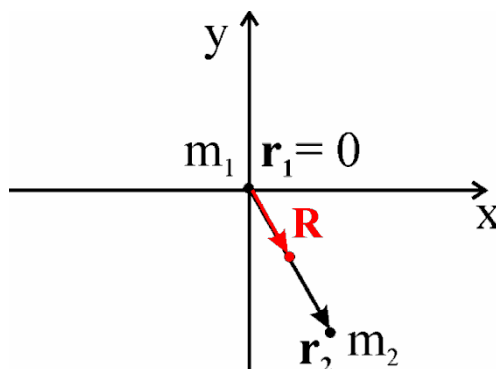
$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad 6.1$$



Rysunek 6.1. Wektor $\mathbf{R}$ wyznacza położenie środka masy dla dwóch mas punktowych m_1 i m_2 .

W przypadku dwóch punktów wygodnie jest wybrać układ współrzędnych tak, aby jeden z punktów leżał w jego początku. Przy tak wybranym układzie współrzędnych wektor $\mathbf{R}$ wskazujący położenie środka masy wyraża się wzorem.

$$\mathbf{R} = \frac{m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad 6.2$$



Rysunek 6.2. Dla dwóch punktów wygodnie jest tak wybrać układ współrzędnych, aby jedna z mas punktowych była w jego początku.

Podaną wyżej definicję możemy uogólnić na przypadek większej liczby punktowych mas.

Definicja 6.1: Środek masy układu punktów materialnych

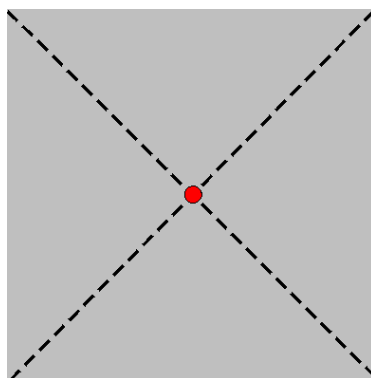
Położenie środka masy układu N punktów materialnych określa wektor zdefiniowany wzorem

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad 6.3$$

Jak wiemy każdą wielkość wektorową możemy przedstawić we współrzędnych - $\mathbf{R}(R_x, R_y, R_z)$; przy czym:

$$R_x = \frac{\sum_{i=1}^N m_i r_{xi}}{\sum_{i=1}^N m_i}; \quad R_y = \frac{\sum_{i=1}^N m_i r_{yi}}{\sum_{i=1}^N m_i}; \quad R_z = \frac{\sum_{i=1}^N m_i r_{zi}}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad 6.4$$

Środek masy można również obliczyć w przypadku ciał o ciągłym rozkładzie gęstości masy. Wymaga to jednak zastosowania rachunku całkowego. W przypadku ciał o wyraźnej symetrii położenie środka masy możemy odgadnąć. Dla przykładu ciała o symetrii sferycznej mają swój środek masy w środku danej sfery lub kuli. Jednorodny kwadrat będzie miał środek masy (czerwony punkt na rysunku 6.3) na przecięciu swoich przekątnych.



Rysunek 6.3. Środek masy jednorodnego kwadratu można wyznaczyć korzystając z jego symetrii.

Gdy chcemy policzyć środek masy ciała o ciągłym rozkładzie masy to dzielimy to ciało na – no właśnie, na nieskończenie małe fragmenty o nieskończenie małej masie oznaczanej jako dm . Następnie sumujemy takie nieskończenie małe fragmenty mnożone przez wektor położenia $\mathbf{r}$. Takich nieskończenie małych kawałków jest nieskończenie dużo, więc sumowanie zastępujemy całkowaniem.

$$\mathbf{R} = \frac{\int_V \mathbf{r} dm}{\int_V dm = M} = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} dm \quad 6.5$$

Granice całkowania oznaczyłem tu przez symbol V oznaczający objętość ciała, dla którego liczymy położenie środka masy. W tym kontekście V oznacza po prostu: całkuj po całej objętości ciała. W mianowniku dostajemy całkę po masach wszystkich fragmentów czyli po prostu masę M całego ciała. Oczywiście i tym razem możemy rozłożyć wektor położenia środka masy $\mathbf{R}$ na składowe.

$$R_x = \frac{\int_V r_x dm}{\int_V dm = M} = \frac{1}{M} \int_V r_x dm \quad 6.6a$$

$$R_y = \frac{\int_V r_y dm}{\int_V dm = M} = \frac{1}{M} \int_V r_y dm \quad 6.6b$$

$$R_z = \frac{\int_V r_z dm}{\int_V dm = M} = \frac{1}{M} \int_V r_z dm \quad 6.6c$$

Często przy obliczaniu środka masy uwzględnia się fakt, że masa, jest równa gęstości ciała ρ razy jego objętość V . Jeżeli mamy do czynienia z nieskończenie małym fragmentem ciała to wtedy możemy zapisać

$$dm = \rho(r)dV \quad 6.7$$

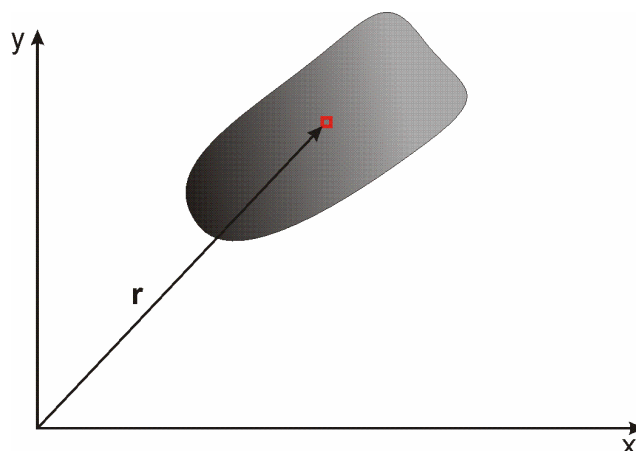
Tutaj dV , jest nieskończenie małą objętością fragmentu o nieskończenie małej masie dm . Zapis $\rho(\mathbf{r})$ wskazuje, że gęstość ciała nie musi być stała i dla różnych punktów może przybierać różne wartości – jest zatem funkcją wektora położenia $\mathbf{r}$. Teraz wzór na położenie środka masy przybierze postać (rys. 6.4)

$$\mathbf{R} = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho(r) dV}{M} \quad 6.8$$

Dygresja 6.1: O gęstości

Gęstość ciała definiujemy jako stosunek jego masy do objętości m/V . Wzór ten daje nam poprawną wielkość dla ciał o stałej gęstości, w przeciwnym razie obliczamy średnią gęstość ciała. Jeżeli będziemy teraz zmniejszać objętość wokół wybranego punktu P o wektorze położenia $\mathbf{r}$, tak że $V \rightarrow 0$, to również masa wewnątrz tej objętości będzie malała do zera; możemy zapisać $m(V) \rightarrow 0$. Pochodna funkcji $m(V)$ jest równa gęstości ρ masy w punkcie: $\rho(\mathbf{r}) = dm/dV$. Przyjmijmy, że Stąd mamy $dm = \rho(\mathbf{r})dV$. Dla danego punktu o wektorze położenia $\mathbf{r}$, funkcja $m(V)$ pokazuje jak zmienia się masa dla różnych objętości V obejmujących ten punkt. Wiemy, że dla nieskończenie małego otoczenia punktu P zmiana ta jest liniowa, to znaczy dwa razy

większej objętości odpowiada dwa razy większa masa, a dla zależności linowej mamy wzór dm/dV

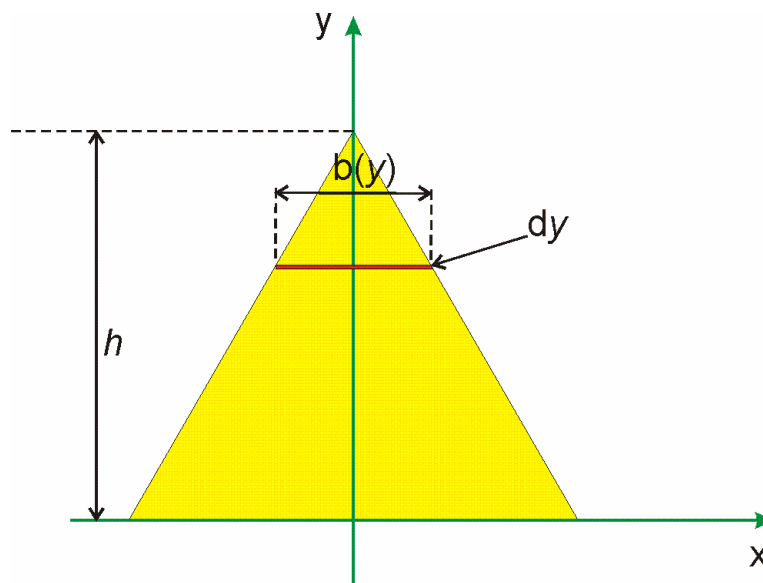


Rysunek 6.4. Każde ciało można podzielić na bardzo małe komórki; najlepiej nieskończenie małe o nieskończenie małej objętości dV . Narysowane ciało nie ma stałej gęstości (im jaśniej tym mniejsza gęstość) ale w obszarze nieskończenie małej komórki możemy uznać, że gęstość ciała jest stała i równa gęstości w danym punkcie $\mathbf{r}(x,y)$. Nieskończenie małą masę tego fragmentu możemy zapisać jako $dm = \rho(x,y) dV$.

Dla przykładu wyznaczmy środek masy trójkąta równobocznego (rys. 6.5.). Moglibyśmy korzystać ze wzoru ogólnego (6.8), ale tam, gdzie się da warto wykorzystać symetrię ciała. Ponieważ trójkąt wygląda po obu stronach osi y tak samo możemy się spodziewać, że środek masy leży gdzieś na tej osi. Pierwszą współrzędną środka masy mamy wyznaczoną, bez większego wysiłku. W kierunku osi y trójkąt się zwęża i położenie środka masy wzdłuż tej osi musimy wyliczyć. Podzielmy trójkąt na nieskończenie cienkie paski, tak jak na rysunku. Masa dm takiego paska jest nieskończenie mała i równa

$$dm = b(y)dy\sigma = dS_y\sigma \quad 6.9$$

Tutaj uwzględniliśmy fakt, że szerokość paska b zależy od jego położenia na osi y ; stąd zamiast b piszemy funkcję $b(y)$, której wartość jest równa szerokości paska na wysokości y , σ jest gęstością powierzchniową trójkąta – liczoną w kg/m^2 , a dS_y oznacza pole paska w położeniu y .



Rysunek 6.5. Szkic do obliczenia środka masy dla trójkąta równobocznego

Obliczenie pola nieskończenie cienkiego paska ze wzoru $dS_y = b(y)dy$, może wydawać się nieodpowiednie, gdyż pasek ma ścięte boki. Powinniśmy więc zastosować wzór na sumę pasków o kształcie czerwonego trapezu pokazanego na rysunku (6.6). Zwróć uwagę, że pole takiego trapezu można przedstawić jako różnicę pola prostokąta i sumy pól żółtych trójkątów. Pole żółtych prostokątów jest proporcjonalne do iloczynu dwóch nieskończenie małych wielkości dx i dy



Rysunek 6.6. Zamiast pola trapezu (zaznaczony na czerwono) liczymy pole prostokąta. Jednak pole prostokąta jest większe od pola trapezu o pole dwóch żółtych trójkątów. Pole każdego z tych trójkątów jest proporcjonalny do iloczynu dwóch nieskończenie małych wielkości dx : $\delta x \rightarrow 0$ i dy : $\delta y \rightarrow 0$. W takim wypadku potraktowanie trapezu jako prostokąta nie obniża dokładności wyniku.

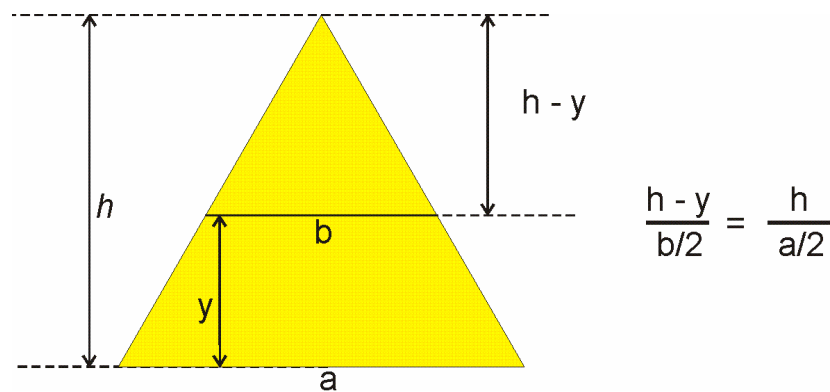
Zapiszmy to tak

$$\text{pole trapezu} = b(y)dy - 2 \left(\frac{1}{2} dy dx \right) \quad 6.10$$

Sumując (całkując) pola takich trapezów obliczamy dwie całki. Pierwsza całka jest po wyrazie $b(y)dy$ a druga po wyrazie zawierającym $dydx$; przy czym obie całki liczymy po dy . Z pierwszej całki dostaniemy skończoną wartość. Z drugiej całki otrzymamy

$$\int_0^h dy dx = hdx \quad 6.11$$

czyli skończoną wartość h przemnożoną przez nieskończenie małe dx . Przez to mnożenie przez dx drugi składnik pozostanie nieskończenie mały i możemy go pominąć w naszych obliczeniach. W efekcie całkę po nieskończenie wielu nieskończenie cienkich, prostokątnych paskach $b(y)dy$ możemy uznać za równą całce po czerwonych trapezach. Musimy jeszcze ustalić postać funkcji $b(y)$. Z rysunku (6.7) mamy



Rysunek 6.7. Szkic do wyznaczenia postaci funkcji $b(y)$

Czyli

$$b(y) = a - \frac{a y}{h} = a - \frac{2}{\sqrt{3}} y \quad 6.12$$

Możemy teraz skorzystać ze wzoru (6.6b). Podstawiając do tego wzoru wyrażenie (6.12) mamy

$$R_y = \frac{\int_0^h b(y) \sigma y dy}{M} = \frac{\int_0^h \left(a - \frac{2}{\sqrt{3}} y \right) \sigma y dy}{M} \quad 6.13$$

Obliczmy występujące tu całki nieoznaczone (DC2)

$$\int a \sigma y dy = \frac{1}{2} a \sigma y^2 \quad 6.14a$$

$$\int \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma y^2 \right) dy = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \sigma y^3 \quad 6.14b$$

Całka nieoznaczona z całego wyrażenia wynosi więc

$$\frac{\int \left(a - \frac{2}{\sqrt{3}}y\right) \sigma y dy}{M} = \frac{\frac{1}{2} a \sigma y^2 - \frac{2}{3\sqrt{3}} \sigma y^3}{M = \frac{1}{2} h a \sigma} \quad 6.15$$

Tutaj M oznacza całkowitą masę trójkąta. Aby obliczyć całkę oznaczoną musimy podstawić do powyższego wyrażenia wartość granicy górnej $y \rightarrow h$ i odjąć wyrażenie otrzymane po podstawieniu wartości granicy dolnej $y \rightarrow 0$ (5.4). Ale podstawienie $y \rightarrow 0$ daje wyrażenie o wartości zero, zatem wystarczy tylko podstawić wartość granicy górnej $y \rightarrow h$.

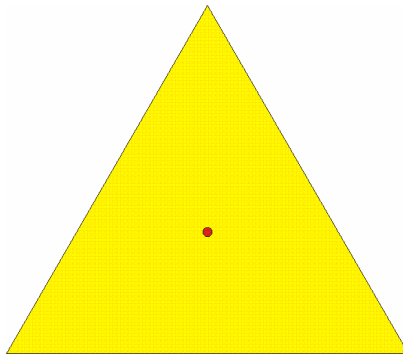
$$R_y = \frac{\frac{1}{2} a \sigma h^2 - \frac{2}{3\sqrt{3}} \sigma y^3}{\frac{1}{2} h a \sigma} = h - \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{h^2}{a} \quad 6.16$$

Dla trójkąta równobocznego mamy

$$\frac{h}{\frac{a}{2}} = \tan(60^\circ) = \sqrt{3} \quad 6.17$$

Korzystając z tego faktu obliczamy współrzędną y -ową położenia środka masy (rys. 6.8.)

$$R_y = h - \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{h^2}{a} = h - \frac{2}{3} h = \frac{1}{3} h \quad 6.18$$



Rysunek. 6.8. Wyznaczone położenie środka masy trójkąta równobocznego

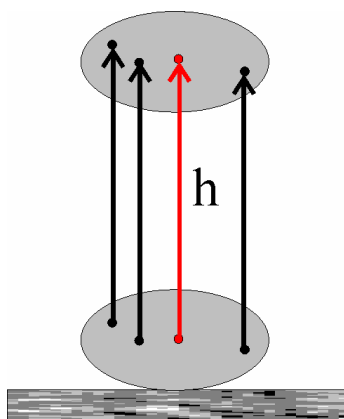
Skorzystaliśmy tu z magii rachunku całkowego. Jeżeli całkujemy po N zmiennych nieskończenie małych, ale wykonujemy mniej całe niż zmiennych, to całe wyrażenie i tak będzie nieskończenie małe i można je pominąć. Warto to zapisać w postaci faktu:

Fakt 6.1: iloczyn wielkości nieskończenie małych

Jeżeli mamy całkę n -krotną, to wyrażenia będące iloczynem $n+1$ lub więcej wyrazów nieskończenie małych możemy uznać za równe zero.

Przy okazji omawiania środka masy warto przyjrzeć się zagadnieniom obliczania energii potencjalnej w polu grawitacyjnym. Wiemy jak zmienia się energia potencjalna ciała punkowego przy podnoszeniu go na wysokość Δh , przy założeniu, że Δh , można uznać za małe.

$$\Delta E_p = mg\Delta h \quad 6.19$$



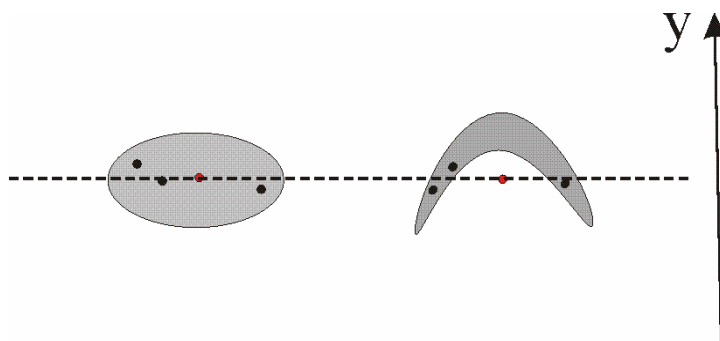
Rysunek 6.9. Gdy przesunięcie każdego punktu ciała jest takie samo możemy się ograniczyć do wyznaczenia wartości tego przesunięcia dla dowolnie wybranego punktu.

Równie łatwo jest policzyć przyrost energii potencjalnej, gdy podnosimy ciało rozciągle, przy założeniu, że podczas podnoszenia ciało nie zmienia swojego kształtu i nie obraca się (rys. 6.9).

$$\Delta E_p = g\Delta h \sum_{i=1}^N m_i = g\Delta h m \quad 6.20$$

We wzorze (6.20) Δh oznacza przyrost wysokości dla każdego punktu ciała, w tym również jego środka masy (czerwony punkt na rysunku 6.9). Symbol m_i oznacza masę i -tego punktu ciała. Jak widać ze wzoru (6.20) obliczając zmianę energii potencjalnej takiego ciała możemy skupić się na jednym, dowolnym jego punkcie; póki co nie ma znaczenia na którym. Bardziej ogólny przypadek wyróżni punkt wskazujący środek masy ciała.

Rozważmy sytuację, w której nasze ciało zostało zdeformowane w taki sposób, że jego środek masy nie zmienił położenia wzdłuż osi y (rys. 6.10). Przy czym wybieramy układ współrzędnych tak, że oś y – jest antyrównoległa do wektora przyspieszenia ziemskiego $\mathbf{g}$.



Rysunek 6.10. Deformacja ciała przeprowadzona w taki sposób, że jego środek masy pozostaje w swoim pierwotnym położeniu nie zmienia wartości energii potencjalnej tego ciała.

Korzystając z definicji wektora położenia środka masy możemy zapisać

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i m_i}{M} \quad 6.20$$

gdzie wektory primowane oznaczają wektory wodzące opisujące położenie punktów ciała po deformacji. Odejmując wyrażenie z primami od wyrażenia bez primów mamy

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}_i) m_i \quad 6.21$$

gdyż jak zostało powiedziane położenie środka masy ciała przed i po deformacji jest takie samo. Każde wektorowe wyrażenie można, z definicji, rozbić na współrzędne. Tutaj ograniczymy się do współrzędnej y , gdyż ciało podnosimy wzdłuż osi y . Rozważmy współrzędną y ; Rozpisując składową y -ową ostatniego wyrażenia otrzymujemy

$$0 = \sum_{i=1}^N m_i (y'_i - y_i) = \sum_{i=1}^N m_i \Delta h_i \quad 6.22$$

Mnożąc to równanie przez g mamy.

$$0 = \sum_{i=1}^N m_i g (y'_i - y_i) = \sum_{i=1}^N m_i g \Delta h_i \quad 6.23$$

Oznacza to, że przyrost energii potencjalnej jest równy zeru. Zatem gdy położenie środka masy nie zmienia się deformacja ciała nie prowadzi do zmiany jego energii potencjalnej. Ten wniosek wyraźnie wyróżnia środek masy jako punkt szczególny. Sprawdź, że dla innych punktów nie jest już tak prosto. Nie pozostaje nam nic innego jak zrobić jeszcze jedno uogólnienie.

Powiedzmy, że każdy punkt ciała podnosimy na nieco inną wysokość, tak, że w efekcie otrzymujemy ciało i podniesione i zdeformowane. Niech przed

podniesieniem środek masy ciała jest na wysokości y , a po podniesieniu i zdeformowaniu na wysokości $y+\delta y$. Mamy zatem wzory na położenie środka masy przed i po podnoszeniu

$$y = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{M} \quad 6.24a$$

$$y + \delta y = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y'_i}{M} \quad 6.24b$$

Odejmując wzór (6.24a) od wzoru (6.24b) mamy

$$\delta y = \frac{\sum_{i=1}^N m_i (y'_i - y_i)}{M} \Rightarrow M \delta h = \sum_{i=1}^N m_i (y'_i - y_i) \quad 6.25$$

Gdzie δy to zmiana wysokości środka masy. Mnożąc obie strony przez wartość przyspieszenia ziemskiego g mamy

$$Mg\delta y = \sum_{i=1}^N \underbrace{m_i g (y'_i - y_i)}_{\delta E_{pi}} \quad 6.26$$

Z prawej strony mamy sumę przyrostów energii potencjalnej punktów ciała, czyli zmianę energii potencjalnej całego ciała. Z lewej strony mamy iloczyn masy ciała M przyspieszenia ziemskiego g i zmiany wysokości środka masy ciała. Oznacza to, że żeby obliczyć zmianę energii potencjalnej ciała wystarczy wykonać obliczenia dla środka masy przyjmując, że cała masa ciała znajduje się w tymże środku masy. I działa to również wtedy gdy podczas podnoszenia ciało ulega zniekształceniu.

Dyskusja 6.2: środek masy może leżeć poza ciałem

Zwróć uwagę na fakt, że środek masy danego ciała może leżeć poza tym ciałem. Jest to punkt powołany do życia przez definicję (6.1). Kształt tej definicji określa własności środka masy. Wśród tych własności jest również i ta, że energia potencjalna ciała podnoszonego i zdeformowanego zmienia się tak, jakby się zmieniała energia punktu reprezentującego tenże środek masy, gdyby punkt ten miał masę całego ciała. Definicja środka masy powoduje, że posługujemy się abstrakcyjnym punktem, któremu przypisujemy masę ciała i który może leżeć poza ciałem, do którego się odnosi. Z drugiej strony punkt ten jest bardzo użyteczny przy analizie problemów mechanicznych, wobec tego jego abstrakcyjny charakter nie musi nam przeszkadzać. Jest to przykład wysoce abstrakcyjnej konstrukcji, której główną zaletą jest prostota połączona z użytecznością. Moglibyśmy podać najróżniejsze definicje na położenie różnych punktów i nadać im również nazwy. Na przykład dla układu N punktów o całkowitej masie M mogę zdefiniować położenie punktu takim wzorem

$$\mathbf{R}_t = \alpha \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i^3 \cos\left(\frac{m_i}{M}\right)}{\sum_{i=1}^N \tan\left(\frac{m_i}{M}\right)} \quad 6.27$$

gdzie α to stała o wymiarze jeden przez kwadrat długości. Punkt, który leży w miejscu danym wzorem (6.27) mogę nazwać „tajemniczością masy”; głównie dlatego że nie wiem do czego ewentualnie taką punkt mógłby być przydatny. Z tego też powodu szczerze wątpię by „tajemniczość masy” znalazła kiedykolwiek, jakiegokolwiek zastosowanie.

Dyskusja 6.3.

Do kwestii środka masy można podejść również formułując następujące zadanie: Znajdź ogólny wzór na położenie takiego punktu przestrzeni, który ma następującą własność: jeżeli całą masę tego ciała umieścimy w tym punkcie, to zmianę energii potencjalnej tego ciała, przy jego przemieszczeniu i deformacji można będzie obliczyć jako zmianę energii potencjalnej tegoż punktu. Zwracam uwagę na fakt, że takie zadanie może nie mieć rozwiązania. Byłoby rzeczą niezwykle użyteczną gdybyśmy każde zadanie w fizyce mogli rozwiązywać poprzez znalezienie takiego wzoru na położenie pojedynczego punktu, że praktycznie całe zadanie dałoby się sprowadzić do śledzenia losów tego szczególnego punktu. Zwykle taki punkt nie istnieje. To, że udało się taki punkt znaleźć dla zagadnienia obliczania energii potencjalnej w polu grawitacyjnym jest niezwykle szczęśliwą okolicznością.

Skoczek wzwyż jest przykładem ciała unoszącego się do góry a jednocześnie ulegającego deformacji. Wysokość skoku zależy od siły odbicia, zamienionej na początkową energię kinetyczną skoczka. Znając tą początkową energię kinetyczną możemy obliczyć jak wysoko wzniesie się środek masy skoczka. Skoczek może tak zmieniać układ ciała, że chociaż on sam przejdzie

nad poprzeczką jego środek masy przesunie się pod poprzeczką. Ta sztuczka pozwala mu przeskakiwać, przy tej samej początkowej energii kinetycznej, wyżej zawieszone poprzeczki (rys. 6.11). Najlepsi skoczkowie potrafią przenieść swój środek masy 10cm pod poprzeczką¹.



Rysunek 6.11. A środek masy (czerwone koło) myk pod poprzeczką

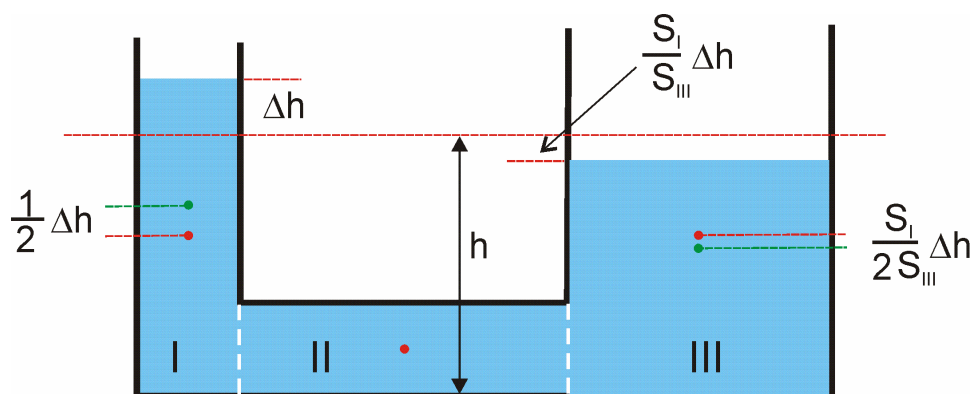
6.1. U-zbiornik

Zapraszam do nieco bardziej rozbudowanego przykładu. Pokażę kilka oczywistych zależności. Dzięki temu, że zależności te są oczywiste nie będzie wątpliwości, że wprowadzone pojęcia i zasady dają się skutecznie stosować.

Rysunek (6.1.1) pokazuje zbiornik w kształcie asymetrycznej litery U; U-zbiornik. U-zbiornik podzielony jest (ale tylko w myśli) na trzy części oznaczone symbolami I, II i III. Długa linia czerwona pokazuje poziom, przy którym w obu ramionach zbiornika poziom cieczy jest taki sam. Lustro cieczy

¹ Można o tym przeczytać w książce: Krzysztof Ernst, *Fizyka Sportu*, PWN, Warszawa 2010.

sięga wtedy wysokości h ponad dno naczynia. Czerwone punkty pokazują położenie środków masy poszczególnych części cieczy, gdy poziom cieczy z obu stron jest taki sam. Położenie środków masy cieczy zgromadzonej w części I i III to oczywiście $\frac{1}{2} h$. Zakładamy teraz, że równość poziomów w obu ramionach została naruszona. W pierwszej części poziom cieczy jest wyższy o Δh od h . W drugiej części poziom cieczy będzie niższy o $\frac{S_I}{S_{III}} \Delta h$. Tutaj S_I i S_{III} oznaczają pole powierzchni pierwszej i trzeciej części U-naczynia. Nie interesuje nas z jakiego powodu doszło do zaburzenia poziomu cieczy. Zakładamy tylko, że całkowita objętość cieczy pozostała niezmienną.



Rysunek 6.1.1. U-zbiornik z zaznaczonym podziałem i poziomami cieczy

Policzymy energię potencjalną cieczy w U-naczyniu jako funkcję różnicy poziomów Δh . Całkowita energia potencjalna cieczy jest sumą energii potencjalnej trzech części I, II i III. W przypadku ciał o regularnej geometrii i jednorodnej gęstości środek masy pokrywa się ze środkiem symetrii tych ciał. Części I, II i III naczynia to prostopadłościany, a ich środek symetrii wypada w przecięciu przekątnych. Skorzystamy z tych faktów obliczając energię potencjalną. Przyjmujemy, że zero energii potencjalnej mają ciała, których środki masy są na poziomie dna naczynia $h=0$; wtedy energia potencjalna cieczy w pierwszej części U-naczynia wynosi

$$E_I = \underbrace{\rho S_I (h + \Delta h)}_{\substack{\text{II} \\ m}} \underbrace{g \frac{1}{2} (h + \Delta h)}_{\substack{\text{II} \\ g}} = \frac{1}{2} \rho g S_I (h + \Delta h)^2 \quad 6.1.1$$

W powyższym wzorze ρ - jest gęstością cieczy, g to oczywiście przyspieszenie ziemskie. Środek masy słupa cieczy leży w połowie jego wysokości

(w przypadku prostopadłościennego naczynia) stąd, we wzorze powyżej, mamy wielkość $\frac{1}{2}(h+\Delta h)$. Dla cieczy w trzeciej części U-naczynia przez analogię możemy napisać

$$\begin{aligned} E_{III} &= \rho S_{III} \left(h - \frac{S_I}{S_{III}} \Delta h \right) g \frac{1}{2} \left(h - \frac{S_I}{S_{III}} \Delta h \right) \\ &= \frac{1}{2} \rho g S_{III} \left(h - \frac{S_I}{S_{III}} \Delta h \right)^2 \end{aligned} \quad 6.1.2$$

Energię potencjalną drugiej części cieczy oznaczmy po prostu jako E_{II} ; dlaczego? Dlatego, że jest ona cały czas taka sama. Zakładamy, że przesunięcie słupa cieczy jest na tyle małe, że druga część naczynia jest cały czas całkowicie wypełniona, w efekcie ciecz w drugiej części naczynia nie zmienia energii potencjalnej. Całkowita E_c energia potencjalna cieczy w całym naczyniu wynosi

$$\begin{aligned} E_c &= E_I + E_{II} + E_{III} \\ &= \frac{1}{2} \rho g \left[S_I (h + \Delta h)^2 + S_{III} \left(h - \frac{S_I}{S_{III}} \Delta h \right)^2 \right] + E_{II} \end{aligned} \quad 6.1.3$$

Dla jakiego Δh energia potencjalna osiąga swoje minimum? Aby odpowiedzieć na to pytanie znajdziemy pochodną powyższego wyrażenia ze względu na Δh , a następnie przyrównamy ją do zera.

$$\frac{dE_c}{d(\Delta h)} = \rho g \left[S_I (h + \Delta h) - S_{III} \left(h - \frac{S_I}{S_{III}} \Delta h \right) \frac{S_I}{S_{III}} \right] \quad 6.1.4$$

Porządkujemy powyższe wyrażenie i przyrównujemy prawą stronę do zera

$$\rho g \left[S_I + \frac{S_I^2}{S_{III}} \right] \Delta h = 0 \quad 6.1.5$$

Widać, że równanie to jest spełnione, gdy $\Delta h=0$.

Wynika stąd, że minimum energii potencjalnej ma miejsce wtedy, gdy poziom cieczy z obu stron U-naczynia jest taki sam. Zatem zgodnie z zasadą energii minimalnej (okr. 4.1) ciecz w naczyniu powinna dążyć do przyjęcie równego poziomu z obu stron. Jest to mało odkrywczy wniosek, ale przynajmniej pokazuje, że wprowadzone techniki dobrze się sprawują. Spójrzmy czy ciecz nie napotyka w swym dążeniu do wyrównania poziomów na jakieś przeszkody; to znaczy spróbujemy zbadać czy samoistne wyrównanie poziomu cieczy nie łamie zasady zachowania energii. W tym celu prawą stronę wyrażenia na całkowitą energię potencjalną (6.1.3) zapiszę grupując wyrażenia przy Δh^2

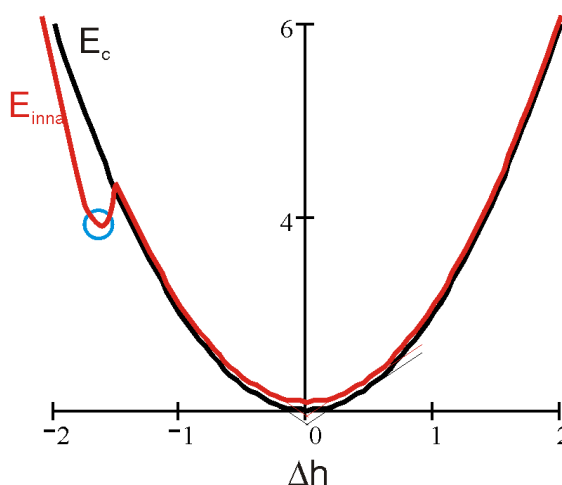
$$E_c = a \Delta h^2 + c \quad 6.1.6$$

Gdzie wprowadziłem wielkości pomocnicze a i c

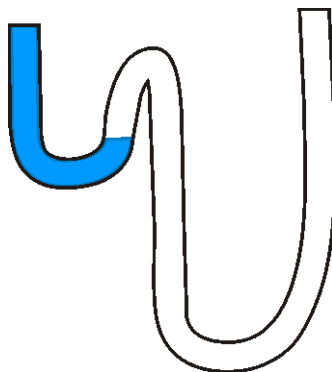
$$a = \frac{1}{2} \rho g \left(S_I + \frac{S_I^2}{S_{III}} \right) \quad 6.1.6a$$

$$c = \frac{1}{2} \rho g (h^2 S_I + h^2 S_{III}) + E_{II} \quad 6.1.6b$$

Oba współczynniki a i c są dodatnie, tak więc E_c jest zwykłą funkcją kwadratową zmiennej Δh . Ma to duże znaczenie dla naszych rozważań. Ciecz ma minimum energii potencjalnej, gdy jej poziomy po obu stronach są takie same $\Delta h=0$. Zatem gdy z jednej strony poziom cieczy jest wyższy niż z drugiej, to z tej wyższej strony, kosztem obniżenia energii potencjalnej, ciecz może bez przeszkód zacząć opadać, a z niższej strony również bez przeszkód odpowiednio się podnosić. Czarna linia na wykresie (6.1.2) obrazuje zmianę energii potencjalnej cieczy wraz ze zmianą Δh . Zauważ, że gdy wędrujemy do punktu o minimalnej wartości z prawej lub lewej strony funkcja stale opada (monotonicznie maleje, jak mówią matematycy). To właśnie gwarantuje nam, że ciecz może bez przeszkód dążyć do wyrównania poziomów w U-naczyniu. Czerwoną linią wykreślona jest inna krzywa E_{inna} , która zawiera z lewej strony dodatkowy dołek. Gdyby wykres energii potencjalnej naszej cieczy wyglądał w taki sposób, to po zajęciu poziomu odpowiadającemu obszarowi w dołku (niebieskie kółko) ciecz mogłaby (ze względu na tarcie) nie mieć wystarczającej energii kinetycznej na wspięcie się na brzeg tego dołka. W efekcie jej część mogłaby się w tym dołku zatrzymać. Poziomy cieczy w naczyniu nie wyrównałby się. Mielibyśmy dodatkowy stabilny poziom energetyczny, który mogłaby zająć ciecz. Przykład naczynia z takim dodatkowym poziomem pokazuje rysunek (6.1.3).



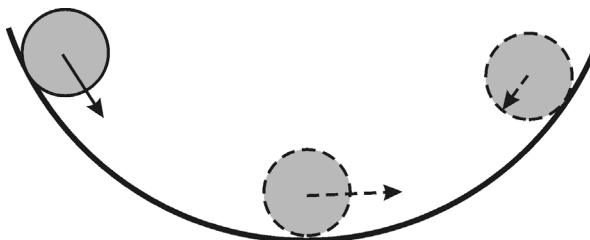
Rysunek 6.1.2. Energia potencjalna cieczy w U-zbiorniku zależy od Δh , tak jak to pokazuje czarna linia. Gdy na skutek czynnika zewnętrznego poziom cieczy ulega zaburzeniu, to ciecz wraca samoistnie do poziomu równowagi. Czerwona linia pokazuje inną możliwą sytuację. Teraz po lewej stronie występuje lokalny dołek energii potencjalnej. Wpadając w ten dołek, na skutek rozpraszania energii przez tarcie, część cieczy może nie mieć wystarczającej energii aby się z niego wydostać.



Rysunek 6.1.3. W U-rurce z dodatkowym zagięciem część cieczy nie powróci do jej dolnej części. Po drodze pojawi się dodatkowe minimum lokalne energii i w tym minimum część cieczy może utknąć. Ewidentnie widać, że kiedy poziom cieczy w obu stronach dodatkowego zagięcia wyrówna się, to ciecz „straci” motywację do dalszego ruchu. Pozostanie jednak kwestia ruchu bezwładnego. Rozpędzony słup cieczy nie zatrzyma się od razu w lokalnym położeniu równowagi, tylko z rozpędu podjedzie jeszcze do góry. To ile cieczy pozostanie w lokalnym minimum tego układu zależy od takich kwestii jak tarcie o ścianki naczynia czy lepkość cieczy. Gdy pojawiają się lokalne minima energii (poziomy energetyczne), analiza zachowania układu staje się bardziej złożona. **Drugi rysunek z przelaną częściowo cieczą**

Kiedy pojawiają się lokalne minima energii potencjalnej (poziomy energetyczne), analiza zachowania układu staje się bardziej złożona. Gdy zmiana energii potencjalnej jest, przy odchodzeniu od minimum, monotoniczna sytuacja jest prosta.

Kiedy poziom cieczy w U-rurce opada jej energia potencjalna zamienia się na kinetyczną. Ponieważ energia musi być zachowana ciecz nie może się nagle zatrzymać w stanie o najmniejszej energii potencjalnej, tylko kosztem energii kinetycznej jej poziom podnosi się po drugiej stronie U-rurki poza poziom równowagi. A potem zaczyna bieg z powrotem. Ciecz w U-rurce zachowuje się jak kulka w misce, która stacza się na dno, ale się tam nie zatrzymuje tylko wbiega pod górkę, tyle że po drugiej stronie; a potem zaczyna bieg z powrotem (rys. 6.1.4).



Rysunek 6.1.4. Przy braku tarcia kulka puszczona z brzegu dołka, po przejściu punktu na dnie dołka, wespnie się na przeciwległy bok. Potem zawróci i tak bez końca.

I co z naszą zasadą, wedle której ciecz powinna zajmować położenie o najmniejszej energii potencjalnej, a nie przelatywać przez to położenie tam

i z powrotem? Wszystko jest w porządku, gdyż zasada energii minimalnej mówi, że układ dąży do zajęcia stanu o minimalnej energii potencjalnej wtedy, gdy nie narusza to innych zasad zachowania. Nagłe zatrzymanie się kulki na dnie dołka naruszyłoby zasadę zachowania energii. W praktyce kulka zatrzyma się na dnie dołka (po kilku wahnięciach tam i z powrotem), gdyż energia kinetyczna kulki rozpraszana jest przez tarcie. Nie mniej warto jeszcze zasadzie minimalnej energii i samej energii potencjalnej poświęcić trochę czasu.

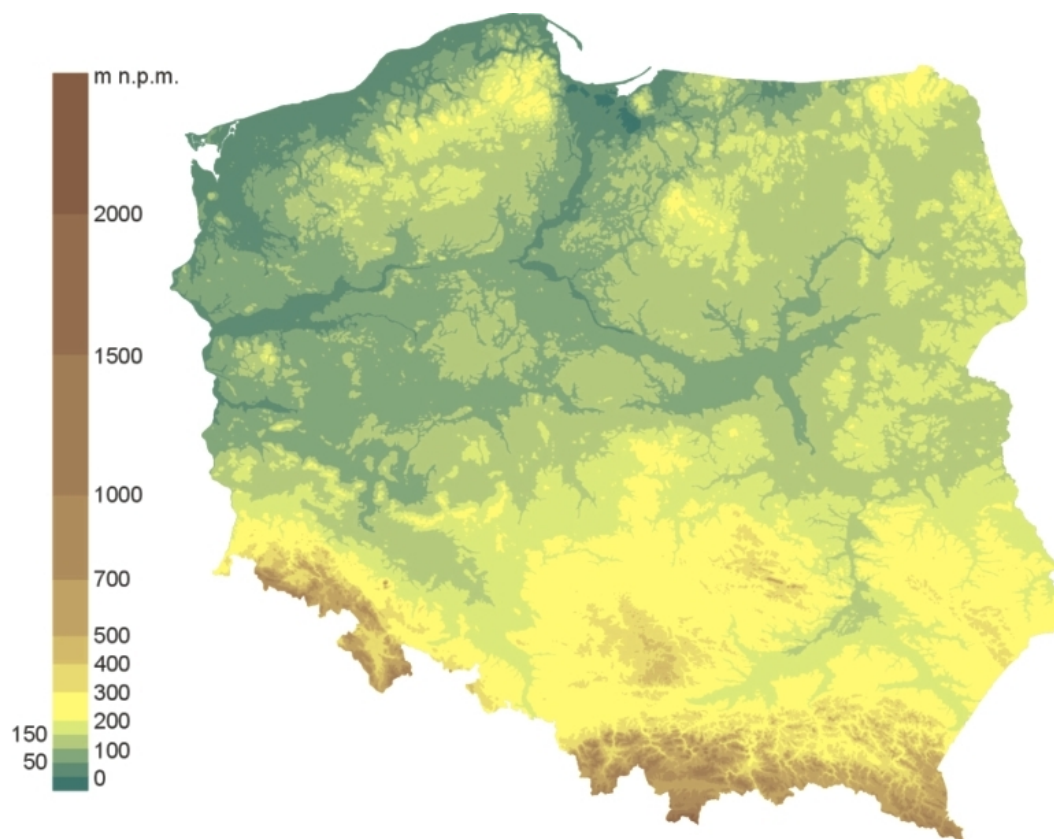
7. Potencjał ♦

Sprawniejszy opis matematyczny zmian energii potencjalnej wymaga zdefiniowania pola skalarnego. Do zdefiniowania pola skalarnego potrzebujemy zbioru skalarów, na przykład liczb rzeczywistych $\mathcal{R}$, oraz przestrzeni $\mathcal{V}$ – może to być płaszczyzna, powierzchnia kuli czy nasza zwykła przestrzeń trójwymiarowa. Pole skalarne jest takim przyporządkowaniem, które każdemu punktowi przestrzeni przypisuje jeden skalar. W drugą stronę nie żądamy jednoznaczności, to znaczy tę samą liczbę może dostać wiele różnych punktów przestrzeni.

Definicja 7.1: Pole skalarne

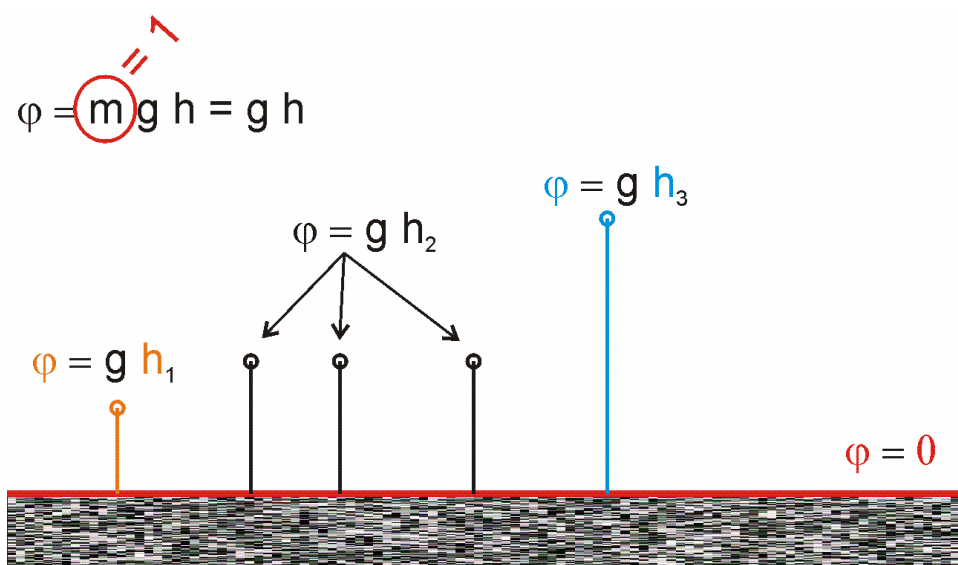
Pole skalarne jest odwzorowaniem przestrzeni $\mathcal{V}$ w zbiór skalarów $\mathcal{R}$ takim, że każdemu punktowi $x \in \mathcal{V}$ odpowiada dokładnie jeden skalar $r \in \mathcal{R}$.

Bardzo dobrym przykładem pola skalarnego jest mapa na której zaznaczona jest wysokość danego punktu nad poziom morza (rys. 7.1).



Rysunek 7.1. Na tej mapie pole skalarne jest reprezentowane w miłą dla oka sposób. Pasek z lewej strony pokazuje przyporządkowanie poszczególnym barwom liczb. Każdy punkt płaszczyzny zamalowany jest jakimś kolorem, a przez to ma przyporządkowaną odpowiadającą temu kolorowi liczbę.

Innym przykładem pola skalarnego jest pole potencjału grawitacyjnego. Aby zdefiniować to pole każdemu punktowi przestrzeni przypisujemy liczbę równą energii potencjalnej jaką punkt o jednostkowej masie ma w tym punkcie przestrzeni; czyli liczbę równą iloczynowi gh (rys. 7.2). Takie pole skalarne jest sensownie zdefiniowane w ograniczonym obszarze przestrzeni; Wartość przyspieszenia g zmienia się z wysokością, co dla różnicy poziomów rzędu dziesiątków kilometrów daje odczuwalne różnice między przyjętą a mierzoną wartością. Wzór gh nie nam nie mówi co się dzieje pod powierzchnią Ziemi. W wielu praktycznych problemach te ograniczenia są dla nas bezbolesne.



Rysunek 7.2. Każdy punkt przestrzeni ma przyporządkowaną liczbę równą energii potencjalnej punktowej, jednostkowej masy – czyli mamy zdefiniowane pole skalarne. W przykładzie przyjąłem, że zero energii potencjalnej ($h=0$) przypada przy powierzchni Ziemi.

Jak już mamy zdefiniowane pole skalarne, to warto zdefiniować linie (powierzchnie) równej wartości, czyli izolinie, izopowierzchnie.

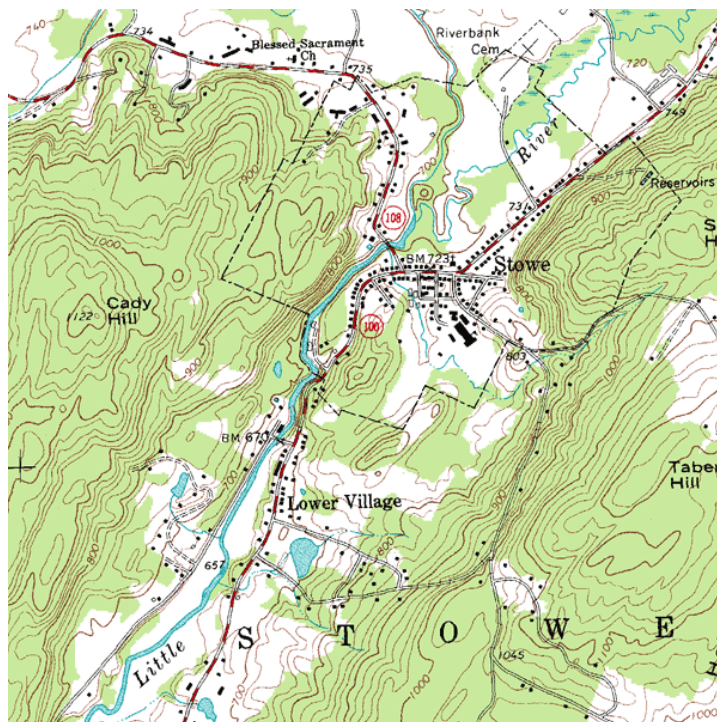
Definicja 7.2: Linie (powierzchnie) ekwiskalarne pola skalarnego

Liniami (powierzchniami) ekwiskalarnymi pola skalarnego nazywamy zbiór punktów, którym przyporządkowano tę samą wartość pola

Przykładem linii ekwiskalnych są poziomicę na mapie, tzw. warstwie (rys. 7.3).

Dygresja 7.1: linie (powierzchnie) ekwiskalarne)

W wielu praktycznych zastosowaniach linie (powierzchnie) ekwiskalarne mają specyficzne nazwy. Gdy pole skalarne opisuje rozkład ciśnienia to mówimy o liniach (powierzchniach) izobarycznych. Dla pola opisującego rozkład temperatury mamy izotermy, etc.



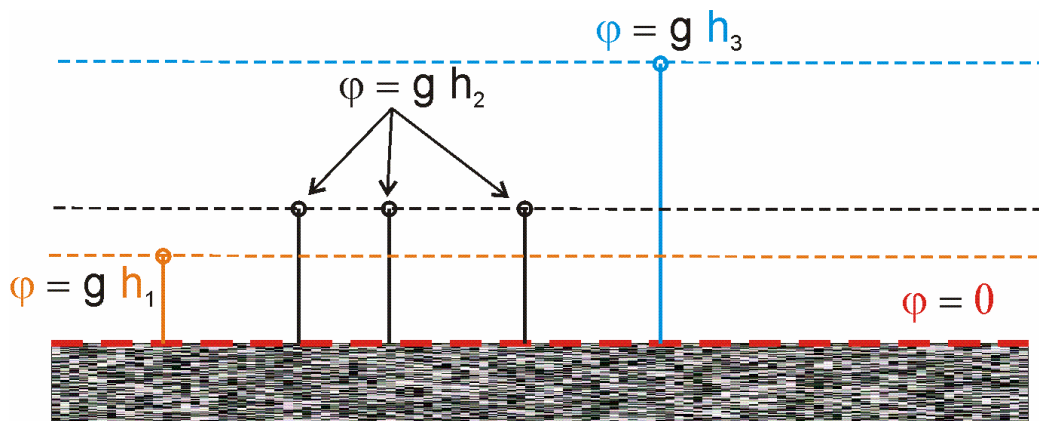
Rysunek 7.3. Linie na mapie (izolinie) łączą punkty o tej samej wysokości nad poziomem morza.

Pole potencjału grawitacyjnego ma również swoje linie ekwiskalarne (rys. 7.4). W przypadku pola grawitacyjnego takie linie mają swoją własną nazwę – linie ekwipotencjalne.

Definicja 7.3: Linie (powierzchnie) ekwipotencjalne

Linie (powierzchnie) ekwiskalarne pola skalarne opisującego rozkład potencjału nazywamy liniami (powierzchniami) ekwipotencjalnymi.

W trójwymiarowym przypadku izolinie stałyby się izopowierzchniami, czyli powierzchniami ekwipotencjalnymi.



Rysunek 7.4. Linie ekwiskalarne równego potencjału (linie ekwipotencjalne) przy powierzchni Ziemi.

Samo pole skalarne wiele nam jeszcze nie daje. Musimy mieć narzędzia, dzięki którym będziemy mogli wykorzystać informacje zawarte w danym polu skalarnym. Będą to oczywiście narzędzia matematyczne. Do najpopularniejszych narzędzi należą operatory. Teraz spotkamy się z pierwszym przykładem operatora – operatorem gradientu

Definicja: 7.4: Operator gradientu

Operator gradientu jest taką operacją matematyczną, która każdy punkt pola skalarne zamienia na wektor wskazujący kierunek największego wzrostu tego pola. Taki wektor będziemy nazywać wektorem gradientu. Przy czym długość tego wektora wskazuje na szybkość wzrostu pola skalarne.

Na mapie z poziomiami operator gradientu „osadza” w wybranym punkcie wektor pokazujący w którą stronę podejście jest najbardziej strome a jego wartość jest tym większa im bardziej strome jest podejście. We współrzędnych kartezjańskich operator gradientu ma postać

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad 7.1$$

Jego działanie na pole skalarne φ w punkcie (x,y,z) opisuje wzór (7.2)

$$\nabla \varphi(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y, z); \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y, z); \frac{\partial}{\partial z} \varphi(x, y, z) \right) \quad 7.2$$

Jak widać w wyniku działania operatora gradientu otrzymujemy trzy liczby, które reprezentują trzy współrzędne wektora gradientu w trójwymiarowej przestrzeni. Na płaszczyźnie byłby tylko dwie współrzędne.

Wektor gradientu ma ciekawe własności. Więcej na ten temat powiem w temacie Pola i Operatory. Tutaj jedynie dodam, że wektor gradientu jest zawsze prostopadły do linii (powierzchni) ekwiskalarnej danego pola skalarne, przechodzącej przez punkt, w którym obliczamy gradient.

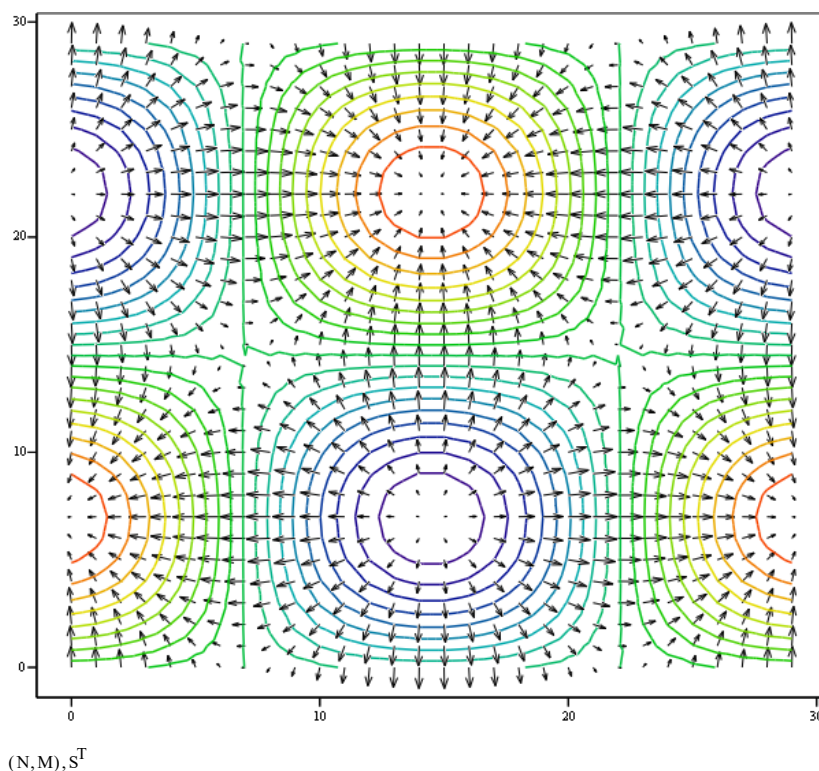
Z definicji wynika również, że aby móc się posługiwać polem skalarnym pole to musi być gładkie. Oznacza to, że linie (powierzchnie) ekwiskalarne nie mogą mieć dziur, uskoków, czy choćby nawet szpiców. Na dziurach, uskokuach i szpicach nie da się obliczać pochodnych i operator gradientu jest nieużyteczny. Na szczęście pola skalarne, z którymi będziemy mieli do czynienia są odpowiednio gładkie. Poniżej podaję przykład pola skalarnego zdefiniowanego na płaszczyźnie

$$\varphi(x, y) = \sin(x) \cos(y) \quad 7.3$$

wraz z obliczonymi wektorami gradientu.

$$\nabla\varphi(x, y) = (\cos(x) \cos(y); -\sin(x) \sin(y)) \quad 7.4$$

Rysunek (7.5) przedstawia to pole wraz z wyrysowanymi wektorami gradientu. Zauważ, że wektory gradientu są prostopadłe do odpowiednich izolinii.



Rysunek 7.5. Linie ekwiskalarne dla pola zdefiniowanego wzorem (7.3) oraz wektory gradientu tego pola. Jak widać wektory są prostopadłe do izolinii i skierowane w kierunku największego wzrostu pola.

Kolor czerwony na rysunku (7.5) oznacza okolice szczytu a niebieski okolice dna doliny. Zauważ, że przy dochodzeniu do szczytu (dna doliny) długości wektorów gradientu maleją. Odpowiada to znanemu faktowi, że przy szczycie (przy dnie doliny) nachylenie stoku zmniejsza się do zera. Na samym szczycie lub na dnie doliny wektor gradientu jest wektorem zerowym. Taki wektor nie ma ani kierunku ani zwrotu. Cóż izolinia na szczycie lub na dnie doliny

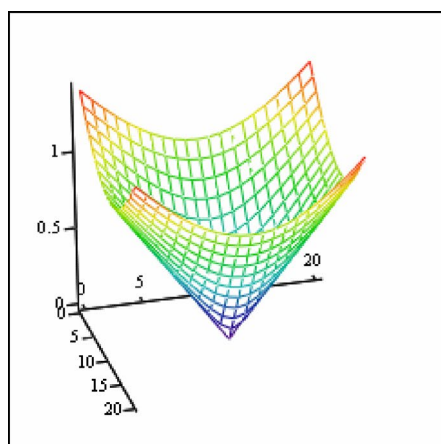
redukuje się do punktu. Jak wyznaczyć wektor prostopadły do punktu? Na szczęście w przypadku wektora zerowego nie mamy tego problemu.

Oto przykład pola skalarnego, które w punkcie znajdującym się w początku układu współrzędnych nie pozwala obliczyć gradientu.

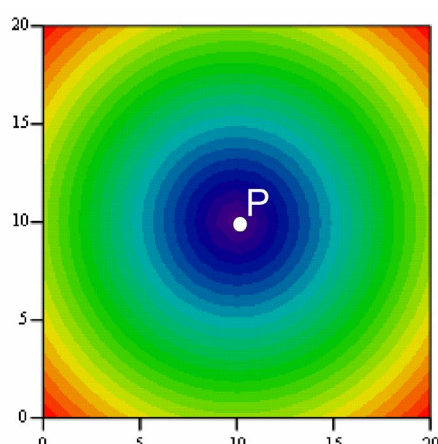
$$\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad 7.5$$

$$\nabla\varphi = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad 7.6$$

Dla $x=0$ i $y=0$ wyrażenie (7.6) jest wyrażeniem nieoznaczonym typu $0/0$.



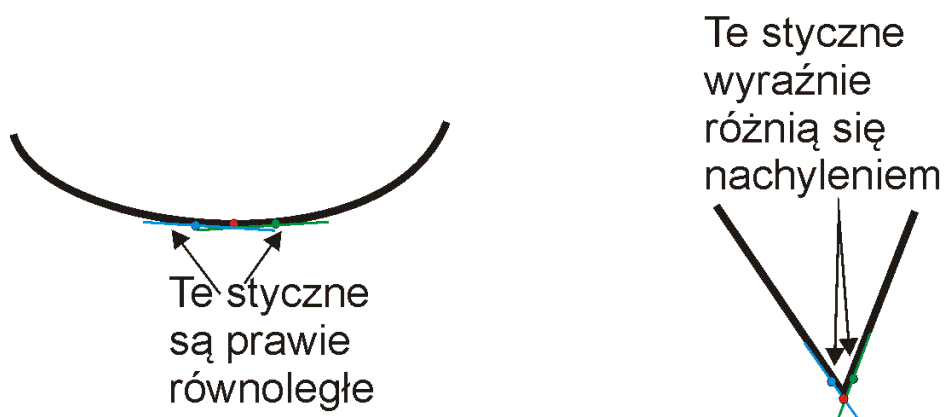
F



F

Rysunek 7.6. Wykres trójwymiarowy i poziomicowy (konturowy) pola zdefiniowanego wzorem (7.5). W początku układu współrzędnych wartości pola rosną we wszystkich kierunkach z taką samą skończoną intensywnością. Ewentualne przypisanie wartości zerowej gradientowi w punkcie gdzie jest szpic też nie jest dobrym rozwiązaniem. Odchodząc od szpicu o dowolnie małą odległość trafiamy na punkt, gdzie wektor gradientu ma skończoną wartość. Pole wektorowe staje się nieciągłe.

Tu problem jest nieco innej natury. Kiedy wychodzimy z normalnej doliny nachylenie stoku powoli rośnie. Kiedy opuszczamy dno szpicu nachylenie stoku rośnie skokowo (rys. 7.7). Operator gradientu jest operatorem różniczkowym a takie twory nie lubią wartości zmieniających się skokowo (rys. DB 1.2.2). W efekcie gradient w punkcie na szpicu jest źle określony.

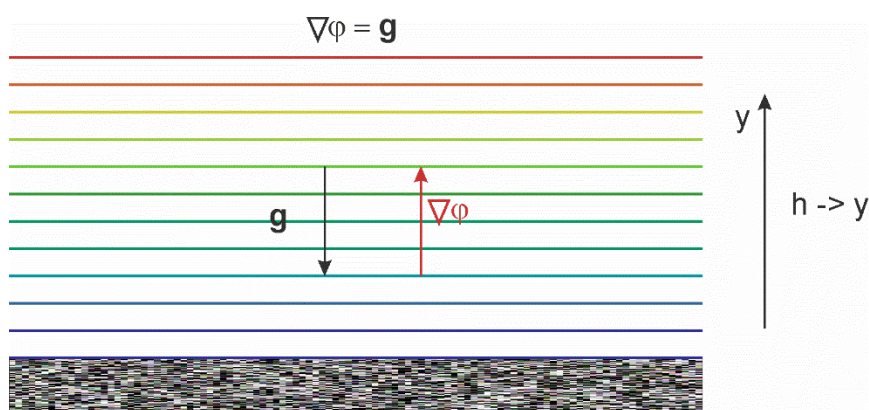


Rysunek 7.7. Gdy powierzchnia jest gładka to, styczne do blisko siebie leżących punktów są do siebie prawie równoległe. Tak też jest z sąsiadami punktu w najniższym punkcie doliny. W przypadku szpicu, styczne do punktów leżących nawet bardzo blisko punktu na szpicu różnią się wyraźnie kątami nachylenia. Przy minięciu szpicu następuje skokowa zmiana kąta nachylenia stycznej.

Obliczę wartość operatora gradientu dla grawitacyjnego pola potencjalnego (rys. 7.8) danego wzorem

$$\varphi = gy \quad 7.7$$

Posłużyłem się wartością długości g wektora przyspieszenia grawitacyjnego $\mathbf{g}$.



Rysunek 7.8. Zbiór linii ekwipotencjalnych (czerwony to większe wartości). Wektor gradientu jaki uzyskujemy w wyniku działania operatora gradientu wskazuje kierunek wzrostu potencjału – zgodny z kierunkiem osi y . Wektor przyspieszenie pola grawitacyjnego jest, przy takiej orientacji osi układu współrzędnych, ujemny i ma współrzędne $\mathbf{g}(0, g, 0)$. Czerwona strzałka pokazuje przykładowy wektor gradientu; jest on przeciwnie skierowany do wektora $\mathbf{g}$ ale równy temu wektorowi co do długości.

Działając na tak zdefiniowane pole operatorem gradientu (7.1) mam

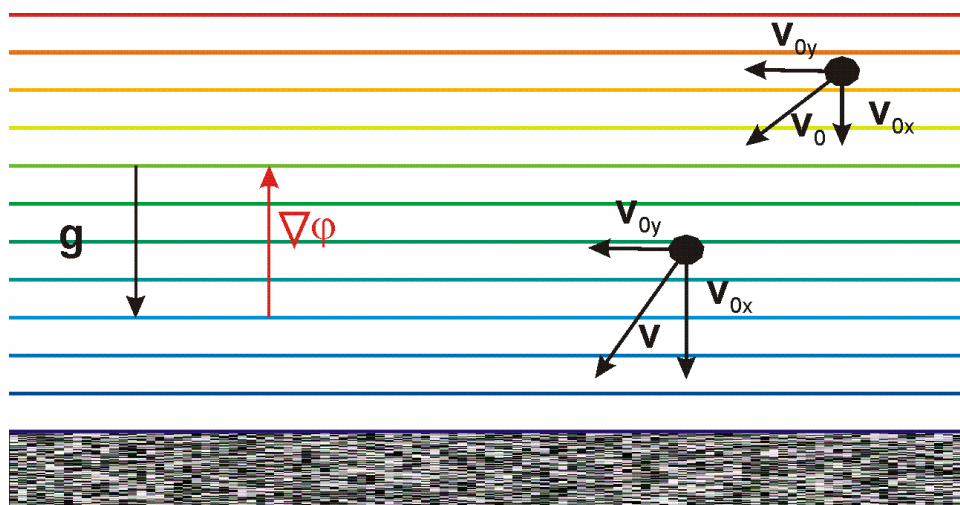
$$\nabla(gy) = (0, g, 0) \quad 7.8$$

Zgodnie z zasadą minimalnej energii w polu grawitacyjnym ciało dąży do obniżenia energii potencjalnej – spada w dół - a zatem kieruje się przeciwnie do obliczonego właśnie wektora gradientu. Choć obliczyliśmy wektor gradientu tylko dla tego jednego przypadku, to jest pola grawitacyjnego, to jest to ogólna zasada obowiązująca w przypadku każdego fizycznego pola potencjalnego – oczywiście tam gdzie to pole jest dostatecznie gładkie.

Określenie 7.1: Ogólna wersja zasady minimalnej energii

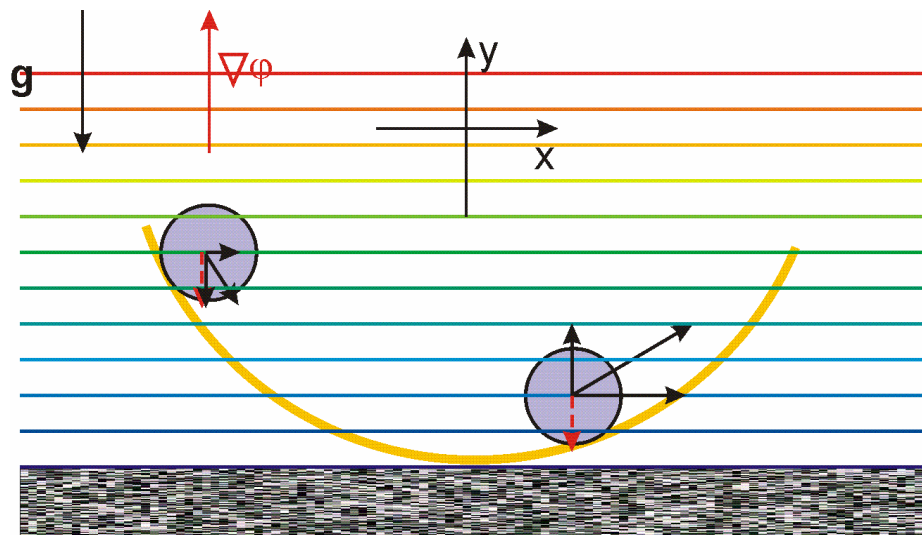
Pod wpływem pola potencjalnego układ zmienia swój stan tak, że kierunek tych zmian jest przeciwny do kierunku wektora gradientu tego pola, a natężenie tych zmian jest proporcjonalne do wielkości tego wektora gradientu

Spójrz na przykład na rysunku (7.9). W pewnym momencie kamień porusza się skośnie, z prędkością v_0 , w polu grawitacyjnym które możemy scharakteryzować przez podanie odpowiedniego pola skalarowego - pola potencjału grawitacyjnego. Pod wpływem tego pola układ zmienia swój stan. Ale co konkretnie ulega zmianie? Rozłożymy prędkość kamienia na składową normalną i styczną do linii ekwipotencjalnych. Składowa styczna v_{0y} pozostaje w tym ruchu nie zmieniona. Składowa normalna v_{0x} wzrasta. Tak więc zmiana następuje przeciwnie do kierunku jakie mają wektory gradientu obliczone dla tego pola, co jest zgodne z naszą uogólnioną zasadą energii minimalnej.



Rysunek 7.9. W tym polu wektor prędkości kamienia zmienia się tylko w kierunku osi x-ów. Kierunek zmian jest przeciwny do kierunku wektora gradientu.

Łatwo nam będzie również zinterpretować ruch kulki w dołku (rys. 7.10) czy wahania poziomej cieczy w U-naczyniu.



Rysunek 7.10. Kulka z lewej strony stacza się w dół. Czarne strzałki pokazują wektor prędkości tej kulki oraz jego składowe x -ową i y -ową. Kulka z prawej strony minęła położenie równowagi i wspina się do góry. Tu również czarne strzałki pokazują wektor prędkości i jego składowe. W tym przypadku składowa y -owa wektora prędkości jest przeciwnie skierowana niż w pierwszym przypadku, ale jej wartość również maleje. Choć składowe y -owe skierowane są przeciwnie, to kierunek zmian tych składowych (czerwone strzałki narysowane linią przerywaną) jest w obu przypadkach taki sam. W obu przypadkach czerwone strzałki skierowane są przeciwnie do kierunku gradientu pola.

Możemy powiązać siłę z pojęciem gradientu. W polu grawitacyjnym wygląda to tak, że w każdym punkcie pola siła działająca na jednostkową masę ($\mathbf{F}/m$) jest równa wektorowi gradientu wziętemu ze znakiem minus.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -m\nabla\varphi \Rightarrow \mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\nabla\varphi \quad 7.9$$

Jest to jeden z najważniejszych wzorów fizyki, więc sprawię relacji między siłą a gradientem z pola potencjalnego będziemy się jeszcze przyglądać. Sprawdźmy jak to działa w naszych przykładach. Współrzędne wektora pola grawitacyjnego, zgodnie z rysunkiem (7.8), to: $\mathbf{g}(0, -g, 0)$, zatem mamy

$$\mathbf{g} = -\nabla\varphi = -\nabla(gy) = (0, -g, 0) \quad 7.10$$

Otrzymaliśmy wzór na współrzędne wektora przyspieszenia grawitacyjnego.

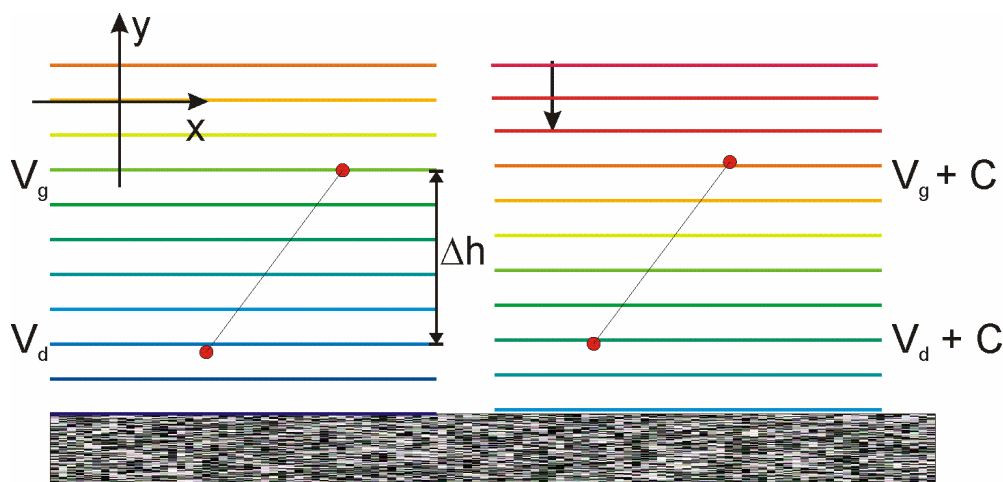
Temat gradientu zwińczymy, na tym etapie, jeszcze jedną uwagą. Powiedzmy, że mamy pole skalarne φ . Zdefiniujmy nowe pole skalarne φ' w następujący sposób

$$\varphi' = \varphi + C \quad 7.11$$

Tutaj C oznacza stałą liczbę (rys. 7.11). Tak więc w każdym punkcie przestrzeni wartość pola potencjału zwiększamy o C . Obliczymy teraz gradient z pola φ'

$$\nabla\varphi' = \nabla(\varphi + C) = \nabla\varphi + \nabla C = \nabla\varphi \quad 7.12$$

Dodanie stałej wartości do pola skalarnego nie zmienia jego gradientu. Ma to ważne konsekwencje; na przykład w polach potencjalnych różniących się o wartość stałą wszystkie siły są takie same.



Rysunek 7.11. Oba rysunki przedstawiają tę samą sytuację fizyczną. Czerwony punkt o masie m jest przenoszony po linii prostej z dołu do góry. Jednak potencjał pola z lewej strony różni się od tego z prawej o stałą wartość (stąd przesunięcie kolorów linii ekwipotencjalnych). Fakt ten nie zmienia różnicy wartości pomiędzy liniami przebiegającymi przez te same punkty przestrzeni. Oznacza to, że gradienty obu pól są takie same.

Fakt, że zmiana wartości pola skalarnego o stałą nie zmienia jego gradientu daje nam wygodę wyboru punktu, w którym potencjał grawitacyjny jest równy zero.

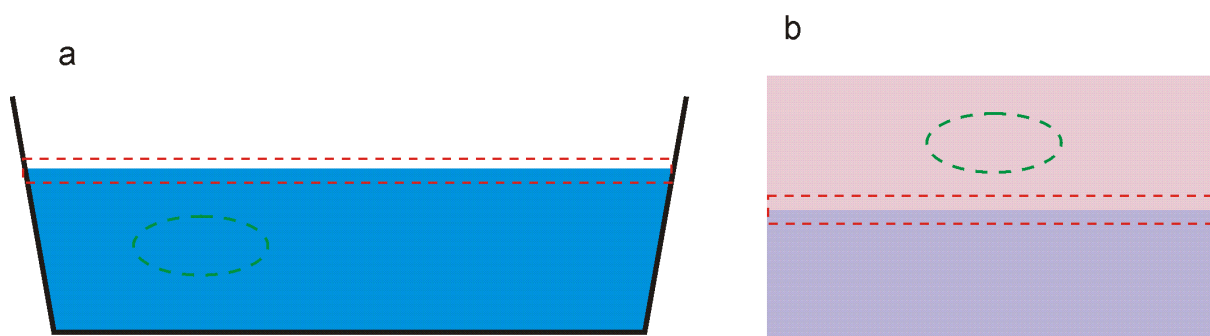
Przy przenoszeniu ciała w polu grawitacyjnym, powiedzmy z dołu do góry rośnie energia potencjalna ciała o wartość $\Delta E = mg\Delta h$. Wzór ten możemy również zapisać w postaci

$$\Delta E = m(g h_g - g h_d) = m(V_g - V_d) \quad 7.13$$

Czyli zmiana energii potencjalnej, przy przeniesieniu ciała z jednego punktu do drugiego jest równa masie tego ciała pomnożonej przez różnicę potencjału grawitacyjnego tych punktów. Przy czym nie ma znaczenia czy pole potencjału jest określone tak jak z prawej strony rysunku (7.11) czy tak jak z jego lewej strony. W obu przypadkach różnica potencjałów grawitacyjnych ma tę samą wartość. Możemy więc powiedzieć, że różnica potencjałów w polu grawitacyjnym jest równa pracy jaką wykonujemy nad ciałem o jednostkowej masie przy przeniesieniu tego ciała między tymi punktami.

8. Napięcie powierzchniowe ♦

Zjawiska zachodzące na brzegu pomiędzy dwiema częściami układu fizycznego są zdecydowanie bardziej frapujące i złożone niż to co dzieje się we wnętrzu każdej z tych części. Rysunek (8.1) pokazuje przykłady brzegów części układu fizycznego. Trzeba pamiętać, że w realnych układach fizycznych nie ma ostro wyznaczonych granic. Sytuację dobrze obrazuje brzeg lasu, który nie da się wyrysować jako cienka linia o jednoznacznie określonym przebiegu. Między pozalasem a lasem jest zawsze obszar przejściowy, gdzie mieszają się cechy charakterystyczne dla lasu i pozalasu. Przez granicę będę rozumiał taki przejściowy obszar.



Rysunek 8.1. a) Ciecz w naczyniu ma brzeg złożony z granicy między objętością cieczy a ścianami naczynia oraz granicą między objętością cieczy i powietrzem. Należy pamiętać, że granica nie jest po prostu linią, powinniśmy raczej mówić o obszarze granicznym, gdzie mieszają się wpływy dwóch różnych środowisk. Aby to uwidocznic obszar graniczny ciecz-powietrze został zaznaczony w postaci prostokąta narysowanego czerwona przerywaną linią. Przykład obszaru znajdującego się wewnątrz cieczy zaznaczony jest zieloną przerywaną linią. W obszarze tym wpływ powietrza, czy ścianek naczynia jest zanedbywalnie mały; b) Dwa kawałki ciała stałego mają dwa różne obszary graniczne. Jeden z nich to granica z otaczającym powietrzem, a drugi to granica przejścia pomiędzy oboma ciałami. Ponownie dla zaznaczenia, że granica jest pewnym obszarem przejściowym a nie linią, granica pomiędzy oboma ciałami zaznaczona została jako prostokątny obszar. Przykład obszaru wewnątrz ciała różowego zaznaczony jest przerywaną linią zieloną.

Dlaczego fizyka brzegu jest bardziej złożona od fizyki wnętrza? Obszar brzegu to miejsce w którym stopniowo słabną wpływy jednego środowiska a rosną wpływy drugiego środowiska. To wzajemne oddziaływanie powoduje, że własności układu w obszarze przejściowym mogą być zupełnie inne niż własności wewnątrz dwóch stykających się środowisk. Zauważ, że zachowanie się wody w zbiorniku wodnym przy powierzchni jest zupełnie inne niż w głębinie. W głębinie nie ma choćby zjawiska falowania, które powoduje pomarszczenie się powierzchni wody, nie ma również piany, rozbryzgów wody, etc.

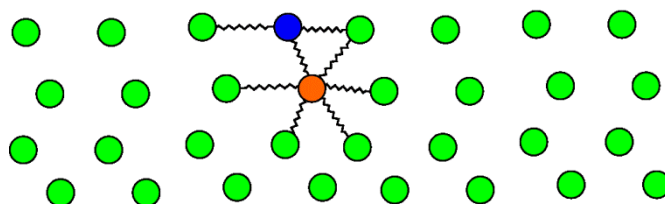
Zajmę się teraz granicą między ciecżą a powietrzem. Aby ustalić uwagę będę pisał na temat wody. Jednak to co powiem stosuje się również do innych cieczy. Na granicy woda-powietrze woda zachowuje się tak jakby pokryta była delikatną błonką. Z faktu tego korzystają niektóre owady, na przykład nartniki (rys. 8.2). We wnętrzu zbiornika wody (to znaczy pod powierzchnią) takiej błonki nie ma. Z jednej strony sprawa się upraszcza bo nie ma potrzeby uwzględniania własności tej błonki, z drugiej strony jej brak powoduje, że fizyka wnętrza ciecży jest uboższa. Ta, jakby błonka jest zatem zjawiskiem pogranicza.



Rysunek 8.2. Nartnik unosi się na wodzie dzięki napięciu powierzchniowemu. Przyjrzyj się powierzchni wody. Nogi nartnika nie zanurzają się pod powierzchnię wody. Powierzchnia wody ugina się tak jakby pokryta była cienką błoną; źródło zdjęcia Wikipedia.

Dlaczego ciecż, taka jak woda, tworzy coś co zachowuje się jak błonka? Sprawa jest złożona i jeżeli chcemy stworzyć sensowny model tej sytuacji musimy sięgnąć po model atomowy. Częsteczki w ciecży (dla wody są to cząsteczki H_2O) zachowują się tak jakby były połączone sprężynkami. Oczywiście nie są połączone sprężynkami, tylko jeszcze raz podkreślam, zachowują się tak, jakby były połączone sprężynkami. Lub inaczej mówiąc siły działające między cząsteczkami możemy wyobrazić sobie jako pochodzące od sprężynek. Cząsteczka ciecży znajdująca się wewnątrz ciecży odczuwa oddziaływania ze strony sąsiadów ze wszystkich stron (rys. 8.3). Cząsteczka ciecży na powierzchni „przyczepiona” jest tylko do cząsteczek znajdujących się głębiej pod powierzchnią ciecży. Nie może jednak zbyt blisko zbliżyć się do swoich sąsiadów, gdyż przy bliskich odległościach siły stają się odpychające. Tak też jest w przypadku połączenia sprężynką. Istnieje położenie równowagi, w którym sprężyna jest nie naciągnięta (mamy tam minimum energii potencjalnej sprężynki). Przy rozciąganiu sprężyny czujemy, że sprężyna stawia opór, przyciąga nas, przy skracaniu czujemy również opór; sprężyna nas odpycha. Kiedy delikatnie położymy lekki przedmiot na powierzchni ciecży, taki jak

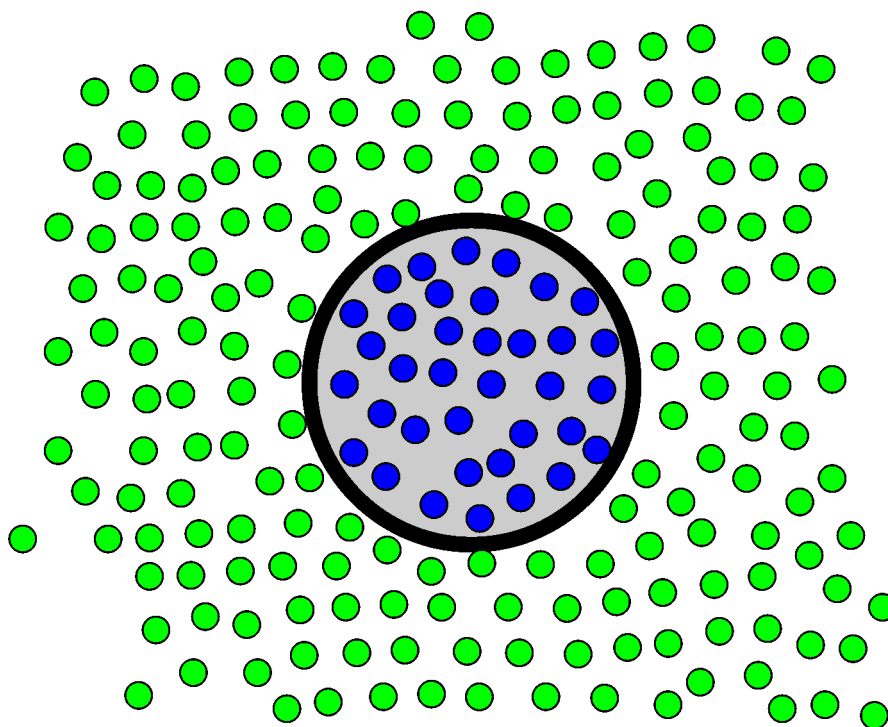
metalowa igła, to cząsteczki cieczy przy powierzchni zostaną popchnięte w kierunku sąsiadów, ale sąsiedzi je odepchną i w efekcie igła, choć metal ma większą gęstość od wody, będzie pływała po powierzchni wody. Ściślej rzecz ujmując położona na powierzchni wody igła będzie dążyła do zmniejszenia swojej energii potencjalnej, czyli będzie się „starła” opaść niżej. W efekcie zaczną popychać w dół cząsteczki wody. Popychane cząsteczki wody zbliżą się do sąsiadów położonych niżej, w efekcie czego „sprężynki” między nimi skrócą się i wzrośnie energia potencjalna tych ściśniętych sprężynek. Gdzieś po drodze zdarzy się minimum energii potencjalnej, rozumianej tu jako suma energii potencjalnej ściśniętych sprężynek i grawitacyjnej energii potencjalnej igły. To minimum to taki punkt, że gdyby igła poszła jeszcze trochę niżej to obniżyłaby swoją energię potencjalną, ale sprężynki łączące cząsteczki wody zwiększyłyby swoją energię potencjalną tak, że całkowita energia potencjalna igły i cząsteczek wody uległaby zwiększeniu. Mamy zatem dołek energii potencjalnej układu igła-sprężynki łączące cząsteczki wody. Cały układ zatrzyma się w tym dołku i igła będzie pływała unoszona przez coś co będzie wyglądało na ciekłą błonkę na powierzchni wody.



Rysunek 8.3. Cząsteczki wody powiązane są ze sobą siłami zachowującym się jak sprężynki. Gdy dwie cząsteczki zbyt blisko siebie zbliżą działająca siła jest siłą odpychającą. Gdy dwie cząsteczki się od siebie oddalą działająca siła staje się siłą przyciągającą. Rysunek wyróżnia dwie cząsteczki. Jedna z nich (pomarańczowa) znajduje się wewnątrz objętości wody. Cząsteczka ta ma ze wszystkich stron sąsiadów. Siły działające od sąsiadów nie wyróżniają żadnego kierunku. Cząsteczka niebieska, jest cząsteczką przy powierzchni. Ponad cieczą nie ma już żadnych sąsiadów w postaci innych cząsteczek wody, a co zatem idzie również oddziaływań związanych z posiadaniem sąsiadów. Siły działają od strony objętości wody. Przy delikatnym nacisku na niebieską cząsteczkę obniży ona lekko swoje położenie i zbliży się do cząsteczek poniżej. W efekcie pojawi się siła odpychania. Patrząc na powierzchnię wody mamy wrażenie istnienia cienkiej błonki. Powyżej cieczy znajdują się oczywiście cząsteczki powietrza. Ale jest to inne środowisko. Cząsteczki powietrza są swobodne i mają inne własności niż cząsteczki wody. Ponadto ich ilość w jednostce objętości jest znacznie mniejsza niż cząsteczek wody. Stąd oddziaływanie z cząsteczkami powietrza jest dużo słabsze i przez to możemy je w wielu wypadkach zaniedbać.

Z gwoździem sprawa wygląda inaczej. Sprężynki łączące cząsteczki wody nie są zbyt wytrzymałe. Położony na powierzchni wody gwoździec zaczyna się zanurzać. Mogą się tu zdarzyć dwie sytuacje. W pierwszej istnieje co prawda minimum energii dla układu gwoździec-sprężynki, ale związany z tym minimum

dołek jest zbyt płytki i zanim gwóźdź zatrzyma się, siłą inercji wyskakuje z tego płytkiego dołka. Druga możliwość jest taka, że zysk na obniżeniu energii potencjalnej gwoździa jest tak duży, że opłaca się zniekształcić sprężynki aż do ich zerwania. W obu tych sytuacjach efekt jest taki, że cząsteczki wody rozstępują się i gwóźdź tonie (rys. 8.4).



Rysunek 8.4. Rysunek przedstawia schematycznie tonący gwóźdź. Gwóźdź składa się również z cząsteczek, które jednakże są mocniej ze sobą związane niż cząsteczki wody. W rzeczywistości nawet bardzo cienki gwóźdź ma średnicę liczoną w milionach warstw cząsteczek, czego nie da się w sensowny sposób narysować. Widać, że cząsteczki wody znajdujące się po przeciwnej stronie gwoździa są całkowicie od siebie oddzielone i oddziałują tylko z cząsteczkami gwoździa i sąsiednimi cząsteczkami wody. Między gwoździem a wodą tworzy się nowy obszar graniczny, zaznaczony tu grubą czarną linią. Cząsteczki na tej granicy zachowują się w skomplikowany sposób, którego nie jesteśmy tu w stanie zanalizować. Masa gwoździa jest na tyle duża, że opłaca się włożyć energię w zerwanie wiązań między cząsteczkami wody, w efekcie czego cały układ, na skutek opadania gwoździa obniża energię potencjalną.

Efekt działania sprężynek łączących cząsteczki wody jest taki jakby wodę pokrywała cienka błonka. Cząsteczki wody są tak małe, że nie widać ich nawet przez mocno powiększające mikroskopy. Z naszego, codziennego punktu widzenia powierzchnia wody jest strukturą ciągłą a nie ziarnistą. Nie ma więc przeszkód byśmy sobie wyobrażali, że na powierzchni wody tworzy się błonka, pamiętając oczywiście, że jest to tylko sensowny i użyteczny model (a cóż nim nie jest?). Na ile zastąpienie warstwy atomów brzegowych cienką błonką jest

dobrym krokiem (na ile model jest dokładny) to rzecz na osobną dyskusję. Z doświadczenia wiemy, że taki model dobrze się spisuje przy próbie zrozumienia wielu zjawisk zachodzących na brzegu cieczy. Przy tym łatwiej jest nim operować niż zbiorem cząsteczek połączonych sprężynkami. Trzeba tylko nadać błonie odpowiednie własności fizyczne, które moglibyśmy wyznaczyć z doświadczenia lub z bardziej złożonego modelu fizycznego.

Do tej pory skupiałem się na cząsteczkach znajdujących się przy powierzchni cieczy. Można się jednak spodziewać, że dana cząsteczka cieczy odczuwa obecność nie tylko najbliższych ale również dalszych sąsiadów, co oznacza, że rysunek (8.3) jest w tym względzie uproszczony. Im dalej położony jest sąsiad tym słabsze oddziaływanie – słabsza sprężynka reprezentująca to oddziaływanie. W końcu dla zbyt oddalonych cząsteczek oddziaływanie jest zaniedbywalnie małe. Jak daleko muszą być ci zbyt oddaleni sąsiedzi? Jest to około 1nm, to znaczy oddziaływania między daną cząsteczką a cząsteczką odległą o więcej niż 1nm, w wielu wypadkach, można zaniedbać. W efekcie obszar przygraniczny rozciąga się na około 1nm w głąb wody, przynajmniej w tym sensie, że cząsteczki wody leżące głębiej niż 1nm odczuwają ze wszystkich stron takie samo oddziaływanie. Możemy się więc pokusić o uznanie, że błona napięcia powierzchniowego ma około 1nm grubości.

Napięta sprężysta błonka ma, jak każda naciągnięta sprężyna, pewną energię potencjalną. Teraz kiedy przywołamy zasadę energii minimalnej możemy od razu stwierdzić, że błonka ta będzie dążyła do zmniejszenia swojej energii potencjalnej czyli swojej powierzchni. Możliwe są tu dwie drogi: Pierwsza to ściśnięcie wody (lub innej cieczy), tak aby jej objętość zmniejszyła się. Biorąc pod uwagę fakt, że przy zbliżaniu cząsteczek cieczy szybko rośnie siła ich wzajemnego odpychania droga ta jest energetycznie niekorzystna. Dociskane do siebie cząsteczki cieczy zaczynają się silnie odpychać, przez co rośnie energia potencjalna związana z tym odpychaniem i to rośnie bardzo gwałtownie. Tak więc jeżeli nawet napięcie powierzchniowe ściska nieco ciecz, to efekt ten jest bardzo mały. Druga droga to optymalizacja kształtu danej objętości cieczy. Napięcie powierzchniowe optymalizuje kształt cieczy w taki sposób, aby stosunek powierzchni do objętości był jak najmniejszy. Inaczej mówiąc preferowane są kształty, przy których powierzchnia cieczy, a zatem i powierzchnia błonki jest jak najmniejsza. W efekcie, w stanie nieważkości ciecz przyjmuje kształt kuli. Dzieje się tak, gdyż ze wszystkich możliwych brył o danej objętości, kula ma najmniejsze pole powierzchni. A gdyby jedna kulka wody podzieliła się na dwie mniejsze, to czy nie zmniejszyłoby to energii całej porcji wody? Gdyby tak było to moglibyśmy się spodziewać, że napięcie powierzchniowe dążyłoby do podziału dużej kropli na mniejsze. Jednak prosty rachunek pokazuje, że działanie to jest energetycznie niekorzystne. Czyli dwie mniejsze kule utworzone z danej objętości wody mają większą powierzchnię niż jedna większa kula utworzona po połączeniu tych dwóch mniejszych. Z powyższego wynika, że napięcie powierzchniowe jest czynnikiem

działającym w kierunku zachowania stabilności wodnej kropli, co więcej, gdy zatkną się dwie krople napięcie powierzchniowe będzie sprzyjało ich połączeniu w jedną większą kroplę o kulistym kształcie. Chcę podkreślić, że to nasze wnioskowanie dotyczące zachowania kropli pod wpływem błony na jej powierzchni jest oczywiście zgodne z wnioskami jakie wyciągnęlibyśmy z bardziej dokładnego modelu sprężynek działających między cząsteczkami.

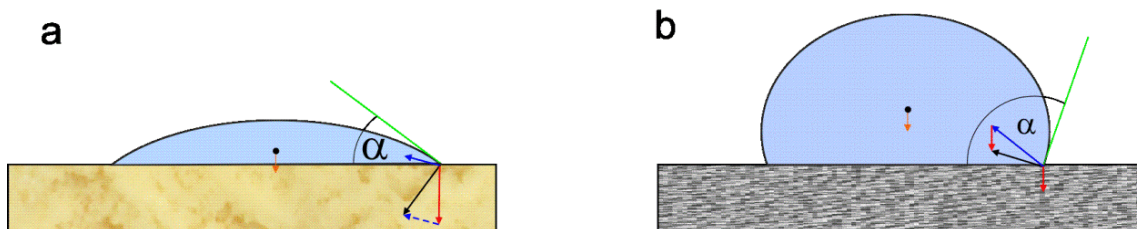
W stanie nieważkości wszystko jest stosunkowo proste. Swobodne porcje wody ale również na przykład stopionych metali, czy innych cieczy przyjmują kształt kuli. Dziś, wykorzystując stacje kosmiczne, możemy prowadzić w tym względzie bezpośrednie eksperymenty. Mikrogravitacja² ułatwia również bardziej złożone eksperymenty z napięciem powierzchniowym³. Gdy nie możemy pominąć siły grawitacji sprawy wyraźnie się komplikują. Musimy uwzględnić wpływ grawitacji lub szukać sprytnych metod pomiarowych. Dla przykładu zajmę się teraz kwestią kształtu kropli, która leży na jakiejś powierzchni. Muszę wziąć pod uwagę trzy rodzaje oddziaływań. Pierwszy rodzaj to wzajemne oddziaływanie między cząsteczkami wody, drugi to oddziaływanie grawitacyjne, trzeci to oddziaływanie między cząsteczkami kropli a cząsteczkami podłoża; ponieważ cząsteczki podłoża są inne niż cząsteczki wody spodziewamy się, że siły oddziaływania między cząsteczkami wody i podłoża są inne niż między cząsteczkami wody. Wiemy już, że na brzegu kropli oddziaływanie między cząsteczkami wody dąży do nadania jej postaci kulistej kropli, natomiast siły grawitacji będą dążyły do spłaszczenia kropli (im bliżej stołu znajdują się cząsteczki wody, tym mniejsza grawitacyjna energia potencjalna całej kropli). Możemy się również spodziewać, że oddziaływanie cząsteczka wody - cząsteczka stołu będzie można modelować za pomocą sprężynek, tyle że sprężynki te będą miały inną sprężystość niż w przypadku oddziaływania woda-woda. Kształt kropli będzie zależał od bilansu tych wszystkich oddziaływań.

Co się stanie, gdy oddziaływanie między cząsteczkami wody a cząsteczkami podłoża będzie większe niż oddziaływanie między cząsteczkami wody? Zacznę od przypadku, gdy kropla jest tak mała, że siły grawitacji można pominąć. W tym przypadku sprawę wyjaśnia rysunek (8.5a). Siły oddziaływania między cząsteczkami wody a podłożem muszą być skierowane prostopadłe do powierzchni cieczy. Gdyby tak nie było to na cząsteczkę cieczy działałaby siła styczna do powierzchni cieczy, która mogłaby przesuwac cząsteczkę zmieniając kształt kropli. Tak się dzieje zaraz po opadnięciu kropli na powierzchnię stołu. Chwilę później cząsteczki znajdują odpowiednia położenia, a kropla kształt

² Stan nieważkości na stacji kosmicznej nie jest idealny. Efekty grawitacyjne są jednak odczuwane w bardzo, bardzo małym stopniu – stąd nazwa mikrogravitacja.

³ O badaniach napięcia powierzchniowego w warunkach nieważkości (lub bardziej fachowo rzecz ujmując mikrogravitacji) można przeczytać w artykule: A. Passerone, *Twenty years of surface tension measurements in space*, Microgravity Sci. Technol. **23** (2011) 101-111.

i całość się stabilizuje. Mamy tzw. stan ustalony i kroplą w takim stanie się zajmujemy.



Rysunek 8.5. a) Siły przyciągania między wodą a podłożem (czerwona strzałka) są większe niż między cząsteczkami wody (niebieska strzałka); b) Siły przyciągania między wodą a podłożem są mniejsze niż między cząsteczkami wody;

Rysunek pokazuje siłę przyciągania pomiędzy wodą a podłożem dla cząsteczki wody przy brzegu kropli. Siła oddziaływania na tą cząsteczkę ze strony sąsiednich cząsteczek wody wyrysowana jest na niebiesko. Względny symetrii pozwalają stwierdzić, że siła ta powinna iść blisko dwusiecznej kąta między podłożem a styczną do kropli (linia zielona). Nie ma powodu aby cząstki z jednej strony symetrycznej miały większy wpływ niż z drugiej strony. Wypadkowa siła narysowana jest na czarno. Przewaga przyciągania ze strony podłoża cząstki będącej przy powierzchni cieczy a jednocześnie przy powierzchni podłoża powoduje, że kropla rozlewa się.

Kąt α między styczną do powierzchni kropli, w punkcie zetknięcia z podłożem a podłożem nazywamy kątem zwilżania.

Definicja 8.1: Kąt zwilżania

Kąt jako tworzy linia styczna do powierzchni kropli, w punkcie styku kropli z płaskim podłożem, a tym podłożem nazywamy kątem zwilżania.

Kiedy kropla rozlewa się po powierzchni mówimy, że powierzchnia ulega zwilżaniu. Gdy dominują siły przyciągania między kroplami cieczy, kropla zachowuje bardziej kulisty kształt, a kąt zwilżania staje się większy od kąta prostego (rys. 8.5b). O materiałach dla których ma to miejsce mówimy, że nie są zwilżane przez wodę.

Przypominam, że zakładałem, że krople są na tyle małe, że siły grawitacji grają drugorzędną rolę. Gdyby kropla na rysunku (8.5b) uległa spłaszczeniu, to jej środek masy uległby obniżeniu i grawitacyjna energia potencjalna kropli zmniejszyłaby się. Ale dla małych kropli efekt obniżenia grawitacyjnej energii potencjalnej jest niewielki. Spłaszczenie kropli oznaczałoby przyjęcie przez kroplę kształtu przy którym błona na jej powierzchni rozciągnęłaby się co oznacza wzrost energii potencjalnej tej błony. Wzrost energii potencjalnej błony byłby większy od zmniejszenia się grawitacyjnej energii potencjalnej. Grawitacja modyfikuje kształt nawet bardzo małych kropli, ale dzieje się to

w nieznacznym stopniu i efekt ten możemy pominąć. W przypadku dużych kropli sprawy mają się inaczej. Energia potencjalna dużej kulistej lub prawie kulistej kropli jest na tyle duża, że z punktu widzenia bilansu energii „opłaca” się rozpląszczyć kroplę, zwiększając w ten sposób energię oddziaływania ze stołem (to też energia potencjalna) i powierzchnię kropli. Dlatego duże krople rozlewają się po powierzchni, nawet gdy oddziaływanie ma takich charakter jak przedstawiono na rysunku (8.5b).

Bańki mydlane są obiektem, gdzie działanie zasady energii minimalnej widać szczególnie wyraźnie. Bańkę możemy uznać za cienką błonę ograniczoną z dwóch stron poprzez siły napięcia powierzchniowego. Ponieważ błona jest bardzo cienka, masa bańki mydlanej jest na tyle mała, że jej grawitacyjna energia potencjalna zmienia się w niewielkim zakresie wraz ze zmianą kształtu. W polu grawitacyjnym bańki są więc prawie kuliste, nawet gdy mają duże rozmiary (rys. 8.6). Mała masa powoduje, że za kształt bańki odpowiadają głównie siły napięcia powierzchniowego.



Rysunek 8.6. Nawet duże bańki mydlane przyjmują w powietrzu kształt prawie kulisty. Odstępstwa od kulistego kształtu są spowodowane głównie ruchem powietrza (wiatrem); oddziaływanie grawitacyjne spłaszcza bańkę tylko w niewielkim stopniu.

Gdy rozpinamy błonę mydlin na rusztowaniu, otrzymujemy kształty daleko odbiegające od kulistego. Gdy siły oddziaływania między cząsteczkami rusztowania a cząsteczkami bańki są duże, tak że napięcie powierzchniowe nie jest w stanie ich zerwać, pomiędzy elementami rusztowania rozciąga się układ błon mydlanych. Błony te przyjmują taki kształt, by przy uwzględnieniu linii zaczepienia mieć jak najmniejszą powierzchnię (rys. 8.7). Jak to jednak w życiu bywa sprawy są nie są tak jednoznacznie określone. Bańki znają sztuczkę, która pozwala im, na danym rusztowaniu, rozpinać większe powierzchnie (rys.8.8).



Rysunek 8.7. Błona na skleconym z wykałaczek prawie sześciennym rusztowaniu przyjmuje charakterystyczny kształt. Tak rozpięta powierzchnia jest powierzchnią minimalną, to znaczy bazując na tych samych krawędziach rusztowania nie da się rozpiąć powierzchni o mniejszym polu.



Rysunek 8.8. Są jednak sytuacje, kiedy sprawy nie wyglądają tak prosto. Może się zdarzyć, że bańka powstanie na bańce. Takie pętlowe bańki mają oczywiście większą powierzchnię od baniek pozbawionych rozwidleń. Zauważ, że dodatkowe bańki tworzą powierzchnię zamkniętą.