

Temat

VII

UKŁADY NIEINERCJALNE

1. Symetrie równań ruchu ♦

Powracam do pytania o znaczenie pierwszego prawa Newtona, które postuluje istnienie specjalnej klasy układów odniesienia nazywanych inercjalnymi układami odniesienia (IUO). O układach inercjalnych było już w temacie (§TIV 2.3) poświęconemu zasadzie zachowania pędu. Okazało się, że zasadę zachowania energii i pędu jak również momentu pędu, możemy sensownie stosować w układach inercjalnych. Zasady dynamiki klasycznej stanowią pierwotny grunt i dla zasad zachowania i dla pojęcia inercjalnego układu odniesienia, przynajmniej w tym sensie, że z tegoż gruntu pojęcie układu inercjalnego i zasad zachowania wyrosło¹. Dziś układy inercjalne i zasady zachowania znajdziemy w teorii elektromagnetyzmu, termodynamice czy mechanice kwantowej. W tym sensie okazały się one ogólniejsze od samej mechaniki klasycznej. Trzeba jednak pamiętać, że to mechanika klasyczna tchnęła w nie życie.

Popatrzymy ponownie na I prawo Newtona w postaci spotykanej w niektórych opracowaniach.

Określenie 1.1: Pierwsze prawo – sformułowanie takie sobie:

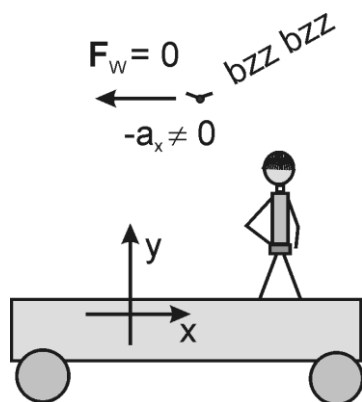
Jeżeli na ciało nie działa siła lub działające siły równoważą się, to ciało to porusza się ruchem jednostajnie prostoliniowym.

Czy tak sformułowane pierwsze prawo Newtona nie wynika z drugiego, które mówi, że siła jest proporcjonalna do przyspieszenia: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$? Zatem jeżeli $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, to przyspieszenie $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ i wtedy ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Racja, przy takiej interpretacji pierwsze prawo, jako prosty wniosek z drugiego prawa, staje się niepotrzebne. Możemy jednak sprawę zinterpretować w inny, bardziej pożyteczny sposób. Niech wózek, na którym stoi obserwator (rys. 1.1) porusza się względem podłoża z przyspieszeniem $\mathbf{a}_w(a_x, 0, 0)$. Obok wózka w powietrzu unosi się, nieruchomo względem podłoża, mucha o masie m . Niech siły działające na muchę równoważą się, to znaczy, że siła wypadkowa działająca na muchę $\mathbf{F}_w = \mathbf{0}$. Mimo to, obserwator na wózku odnotuje, że mucha porusza się, względem jego układu odniesienia, z niezerowym przyspieszeniem $\mathbf{a}(-a_x, 0, 0)$. W jego układzie współrzędnych równanie ruchu muchy ma postać.

$$\underbrace{\mathbf{F}_w}_{=0} = m\mathbf{a} \tag{1.1}$$

¹ W przypadku zasady zachowania energii równie ważną rolę odegrała termodynamika

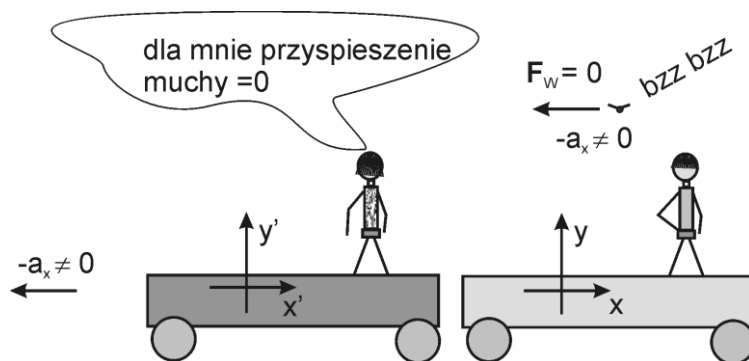
Coś w tym równaniu jest nie tak. Lewa strona nie jest równa prawej. Ale napisane przez nas równanie ruchu wynika z drugiego prawa Newtona! Czy jest zatem możliwe, że po ponad trzystu latach udało nam się je obalić?



Rysunek 1.1. Obserwator związany jest z wózkiem i z wózkiem wiąże swój układ współrzędnych. Mucha tak pracuje skrzydłami, że równoważy siły, które na nią działają i w efekcie jest nieruchoma względem podłoża. Mimo zerowej siły wypadkowej działającej na muchę, dla obserwatora mucha porusza się z niezerowym przyspieszeniem.

Wprowadźmy drugi układ odniesienia związany z wózkiem, który porusza się względem pierwszego wózka z takim samym przyspieszeniem jak mucha (rys. 1.2). Mucha, w tym drugim układzie współrzędnych, porusza się z przyspieszeniem $\mathbf{a}'=0$. W nowym układzie współrzędnych równanie ruchu napisane w oparciu o drugi prawo Newtona przybiera poprawną postać.

$$\underbrace{\mathbf{F}_w}_{=0} = m \underbrace{\mathbf{a}'}_{=0} \quad 1.2$$



Rysunek 1.2. Dla drugiego obserwatora mucha jest nieruchoma

Zdefiniuję teraz oficjalnie, bardzo szczególną rodzinę układów odniesienia, Inercjalne Układy Odniesienia (IUO).

Definicja 1.1: Inercjalny Układ Odniesienia (IUO)

Inercjalny układ odniesienia to taki układ, w którym ciało, na które nie działa żadna siła lub działające siły równoważą się, porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym

Choć brzmi to podobnie do pierwszego praw w postaci (okr. 1.1), to nie jest to prawo, a definicja inercjalnego układu odniesienia. Układy inercjalne są

układami, w których możemy stosować drugie prawo Newtona. Myślę, że motywacja wprowadzenia pojęcia układu inercjalnego jest już jasna. Układy współrzędnych mogą się względem siebie poruszać z różnymi przyspieszeniami. Z drugiej strony siły działające na cząstkę nie powinny zależeć od układu, z którego obserwujemy tą cząstkę. W efekcie, w różnych układach współrzędnych przypisujemy cząstce te same siły i różne przyspieszenia, co prowadzi do sprzeczności z drugim prawem. Aby tego uniknąć definiujemy klasę układów współrzędnych, które przez swoje własne przyspieszenie nie dodają niczego do obserwowanego przyspieszenia cząstki. Pierwsze prawo określa scenę dla drugiego prawa. Z powyższego wynika, że drugie prawo Newtona powinniśmy wypowiadać w następujący sposób.

Określenie 1.2: Drugie prawo Newtona:

W inercjalnych układach odniesienia wypadkowa siła działająca na ciało punktowe jest proporcjonalna do jego masy i przyspieszenia

Czy inercjalne układy odniesienia istnieją ? Pierwsze prawo postuluje ich istnienie nakreślając przy tym ramy, w których możemy posługiwać się drugim prawem. Ale postulat to nie magiczne zaklęcie. To czy postulat istnienia układów inercjalnych jest prawdziwy czy nie, to temat na osobną dyskusję. Wiemy na pewno, że istnieją układy, które bardzo dobrze pełnią rolę układów inercjalnych. Wobec tego z punktu widzenia zastosowań dynamiki newtonowskiej możemy uznać, że istnieją układy, które z praktycznego punktu widzenia są wystarczająco inercjalne. W jaki sposób pierwsze prawo postuluje istnienie układów inercjalnych. Sformułujmy je tak

Określenie 1.3: Pierwsze prawo – sformułowanie precyzyjne

Jeżeli na ciało nie działa siła lub działające siły równoważą się, to istnieje taki układ współrzędnych, w którym ciało to porusza się ruchem jednostajnie prostoliniowym.

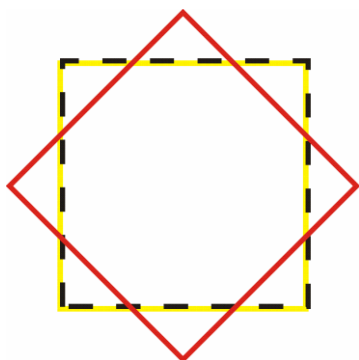
Na mocy definicji (1.1) wiemy, że taki układ nazywamy inercjalnym układem odniesienia.

Nie wiemy czy istnieją prawdziwe układy inercjalne czy nie. Ale wiemy, że dla wielu celów praktycznych możemy znaleźć układy wystarczająco inercjalne. Oznacza to, że możemy posługiwać się modelem sytuacji fizycznej, w którym te wystarczająco inercjalne układy stają się prawdziwymi układami inercjalnymi i w ramach tego modelu analizujemy nasz układ fizyczny. Teoria względności postawi zagadnienie układu inercjalnego w nowym świetle. Ale na razie jesteśmy na gruncie mechaniki klasycznej i zagadnienie układu inercjalnego rozpatrujemy w jej ramach.

Ile jest inercjalnych układów odniesienia? Problem nie leży w ich policzeniu, gdyż jest to łatwe; jeżeli stwierdzimy, że istnieje jeden inercjalny układ odniesienia (IUO) to proste rozumowanie dowiedzie, że jest ich nieskończenie wiele. Problem leży w opracowaniu techniki znajdowania tego jednego IUO. Musimy sprawdzić, który układ współrzędnych spełnia zasadę: brak nierównoważonych sił $\Leftrightarrow$ brak przyspieszenia. Oczywiście możemy to zrobić z dokładnością, na jaką pozwalają nasze przyrządy pomiarowe, ale z punktu widzenia praktycznych zastosowań więcej nam nie potrzeba. Mając taki układ możemy szukać następnych. Możemy na przykład wybrać jakiś inny układ i ponownie sprawdzić czy spełnia on zasadę: brak nierównoważonych sił $\Leftrightarrow$ brak przyspieszenia. I tak dalej i tak dalej. Istnieje jednak procedura, która pozwala w łatwy sposób znaleźć wszystkie układy inercjalne, gdy znajdziemy tylko jednej z nich. Procedura ta opiera się o pojęcie symetrii

1.1. Symetria

Symetria to stare pojęcie wywodzące się jeszcze ze starożytności. Wielkimi miłośnikami symetrii byli Grecy. Na ogół wiemy, że istnieją bryły i figury geometryczne o dużej symetrii. Wśród brył króluje kula, a wśród figur koło. Rysunek (1.1.1) przedstawia kwadrat. Kiedy obracamy kwadrat wokół osi prostopadłej do jego powierzchni i przechodzącej przez jego środek, to dla kątów obrotu będących wielokrotnością kąta prostego kwadrat przekształca się sam w siebie. Obróty o inny kąt nie są przekształceniami w siebie. Gdy kąt jest różny od wielokrotności kąta prostego łatwo możemy odróżnić kwadrat w pozycji wyjściowej od kwadratu po obrocie.



Rysunek 1.1.1. Kwadrat w pozycji wyjściowej (żółta kreska), zostaje obrócony wokół środka o 45° – i narysowany czerwoną kreską. Żółty i czerwony kwadrat są łatwo rozróżnialne. Obrót o 90° (czarna przerywana kreska), powoduje, że kwadrat przed obrotem i po obrocie stają się nierozróżnialne; chyba, że użyjemy innego koloru lub kreski do ich wyrysowania. Wynika stąd, że para kwadrat oraz obrót o 90° są symetrią

Zauważ, że ani obrót sam w sobie, ani kwadrat sam w sobie nie stanowi jeszcze symetrii. Symetrię stanowi para: przekształcenie i figura. Jeżeli przekształcenie przekształca figurę w siebie to mamy do czynienia z symetrią. Możemy teraz pojęcie symetrii uogólnić poza przypadek figur geometrycznych.

Definicja 1.1.1: Symetria

Symetria jest parą składającą się z przekształcenia i wybranego zestawu cech obiektu, na które to przekształcenie działa. Jeżeli po przekształceniu wybrany zbiór cech pozostaje nieodróżnialny od wyjściowego to mówimy, że para ta jest symetrią.

Postawmy sobie następujące zadanie. Mamy drugie prawo Newtona. Napisane w pewnym inercyjnym układzie współrzędnych.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z \quad 1.1.1$$

Zadanie brzmi: znaleźć wszystkie przekształcenia tego układu współrzędnych, które nie zmieniają postaci równań (1.1.1). Oznacza to, że żądamy by w nowych współrzędnych (t' ; x' ; y' ; z') równania miały tą samą postać

$$m \frac{d^2x'}{dt'^2} = F_x; \quad m \frac{d^2y'}{dt'^2} = F_y; \quad m \frac{d^2z'}{dt'^2} = F_z \quad 1.1.2$$

Skoro przejście z jednego inercyjnego układu odniesienia do drugiego układu odniesienia nie zmieni postaci równań ruchu, to nie zmieni również rozwiązań tych równań i z punktu widzenia dynamiki układ opisywany tymi samymi równaniami ruchu będzie zachowywał się tak samo. W szczególności, jeżeli w pierwszym układzie cząstka będzie się poruszała ruchem jednostajnym prostoliniowym to i w drugim także (choć niekoniecznie z tą samą prędkością). Oznacza to, że ten drugi układ też będzie inercyjnym układem odniesienia.

Widać, z tego że szukamy szczególnej symetrii, to jest zbioru takich przekształceń współrzędnych, które przenoszą nas z danego IUO, do jakiegoś innego IUO. Ale uwaga, równania ruchu są równaniami różniczkowymi. Ich rozwiązaniem jest zbiór funkcji. Aby z tego zbioru wybrać właściwą funkcję musimy posłużyć się warunkiem początkowym. Bez trudu możemy stwierdzić, że przejście z jednego do drugiego IUO wiąże się ze zmianą warunków początkowych. Powiedzmy, że obserwator w jednym IUO pisze równanie ruchu dla muchy, na którą działająca siła wypadkowa jest równa zeru (rys. 1.1). Obok niego, na przykład 20 metrów na lewo stoi drugi obserwator; jego układ współrzędnych też jest inercyjny, jednak położenie początkowe muchy dla obu obserwatorów jest inne. W tych dwóch układach współrzędnych mamy dwa różne warunki początkowe i te same równania ruchu. Podkreślę raz jeszcze ponieważ równanie ruchu (równanie różniczkowe) spełnione jest dla całej gammy warunków początkowych, to

warunki początkowe nie są cechą, która gra rolę w badaniu symetrii tych równań.

Dygresja 1.1.1: o niezmienniczości siły i masy

Zanim przejdę dalej muszę zatrzymać się nad jeszcze jedną kwestią. Skąd wiem, że przy zmianie układu współrzędnych nie zmieni się wektor siły $\mathbf{F}$ i wartość masy m ? Pytanie nie jest trywialne, gdyż przy zmieniającym układzie współrzędnych zmieniają się różne istotne wielkości, na przykład wektor pędu $\mathbf{p}$ oraz energia kinetyczna E_k . Generalnie jest tak – oczekujemy, że wektorowe i składowe wielkości fizyczne nie będą zmieniały się przy przejściu z jednego układu współrzędnych do drugiego. Zmieniają się składowe wielkości wektorowych, ale wektory, jako wektory powinny pozostać takie same. Niestety, nie jest to prawdą w przypadku energii kinetycznej, pędu i momentu pędu i w ramach mechaniki klasycznej nic się tu nie da zrobić. Jednak wiele innych wielkości składowych i wektorowych zachowuje się przyzwoicie. Przykładem jest masa i siła. W ramach mechaniki klasycznej nie widać powodu, dla których te wielkości miałyby się zmienić. Zauważ, że siła i masa, w przeciwieństwie do położenia i prędkości nie zależy od współrzędnych. (siła i masa nie jest pochodną po czasie ze zmiany współrzędnych, tak jak prędkość), więc dziwne byłoby gdyby reagowały na zmianę tych współrzędnych. Ponadto doświadczenie, które jest tu największym arbitrem, również żadnych powodów ku temu nie dostarcza. Ścisłej rzecz biorąc nie dostarczało ich w wieku XIX. W teorii względności pojawiło się pojęcie masy relatywistycznej, której wartość zależy od wyboru układu współrzędnych. Pociągnęło to za sobą konieczność subtelniejszego podejścia do wielu podstawowych wielkości – to jednak dopiero przed nami.

Poszukiwania symetrii równań ruchu zacznę od prostego przekształcenia polegającego na przesunięciu zera na osi czasu. Powiedzmy, że przesuwamy punkt początkowy układu K' , do współrzędnej $t=t_n$ w układzie K (rys. 1.1.2). Zdarzenie A w chwili $t=0$ w układzie K ma współrzędną czasową $t=-t_n$ w układzie K' , a zdarzenia B ma współrzędną $t'=0$ w układzie K' , a w układzie K współrzędną $t=t_n$. Wprowadzimy operator translacji w czasie $\mathbf{T}_{tn}$, który będzie przeliczał współrzędne z układu K do układu K' , w następujący sposób

$$\mathbf{T}_{tn}(t) = t - t_n = t' \quad 1.1.4$$

Widać, że spełnione są związki

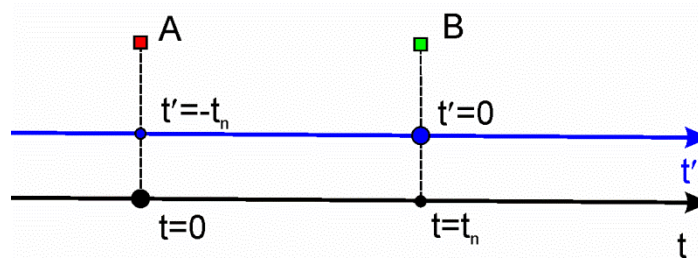
$$t = t' + t_n \Rightarrow dt = dt' \quad 1.1.5$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dt'} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} \quad 1.1.5a$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2} \quad 1.1.5b$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dt'} \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2} \quad 1.1.5c$$

Jak widzisz przechodzę od układ primowanego (nowego) do nieprimowanego (starego). Ten kierunek transformacji jest wygodny, gdyż muszę wyliczyć pochodne współrzędnych t, x, y, z w starym układzie współrzędnych jako funkcje pochodnych współrzędnych w nowym układzie współrzędnych. Znalezienie wzorów na transformację odwrotną jest kwestią prostego rachunku.



Rysunek 1.1.2. Transformacja translacji w czasie, czyli zmieniamy położenie chwili $t=0$ na osi czasu. Układ niebieski to układ primowany. Chwila $t'=0$ w tym układzie odpowiada chwili $t=t_n$ w układzie czarnym. Chwila $t=0$ w układzie nieprimowanym odpowiada chwili $t=-t_n$ w układzie primowanym.

Wstawiając te równania do (1.1.1) widzimy, że w nowym układzie współrzędnych prawo ruchu transformuje się do postaci (1.1.2). Zatem układ współrzędnych o przesuniętej chwili początkowej będzie również inercjalny. Od strony fizycznej wydaje się to dość oczywiste. Oczekujemy, że to, że zaczniemy liczyć czas od innej chwili niż wybrana przez kogoś chwila $t=0$ niczego w ruchu, na przykład cząstki nie zmieni. Bo skąd niby cząstka ma wiedzieć kiedy włączyliśmy stoper? Ale oznacza to jeszcze coś bardziej istotnego. Prawa fizyki nie zależą od chwili czasu. Mogłoby być inaczej. Na przykład prawa fizyki mogłyby oscylować w czasie. Powiedzmy, że masa 1kg powieszona na sprężynie w roku 1900 oscyluje z częstością ω_1 , potem częstość oscylacji (tego samego ciężarka na tej samej sprężynie) maleje aż do roku 1920, kiedy wynosi ω_2 , potem znów rośnie i w roku 1940 wynosi ponownie ω_1 i tak dalej. Wtedy rozwiązanie równania ruchu oscylatora harmonicznego zależałoby od czasu, w którym ten oscylator wykonuje swój ruch. Równania ruchu zmieniłyby się tak, że zaczęłyby zależeć od wyboru chwili czasu i omówiona wyżej symetria zostałaby złamana.

Możesz mieć pewne wątpliwości co do sensowności wzoru (1.1.4) okupionego wprowadzeniem nowego, podejrzanie brzmiącego terminu

operatora. Czy nie można by od razu zapisać związków (1.1.5) bez tej szumnej nazwy? Pewnie, że można, ale wzór (1.1.4) też się przyda, więc potraktowałem sprawę od razu kompleksowo. A z operatorami będziemy się często widywać, więc warto się do ich obecności zacząć przyzwyczajać.

Co się stanie gdy zmienimy punkt początkowy układu współrzędnych, przesuając go w nowe miejsce i definiując nowy układ współrzędnych K' ? Powiedzmy, że przesuwamy punkt początkowy układu K o wektor $\mathbf{p}(x_p, y_p)$ (rys. 1.1.3). Zmianę współrzędnych możemy opisać wprowadzając operator translacji $\mathbf{T}_p$ taki, że

$$\mathbf{T}_p(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - \mathbf{p} = \mathbf{r}'(r_x - x_p, r_y - y_p) \quad 1.1.6$$

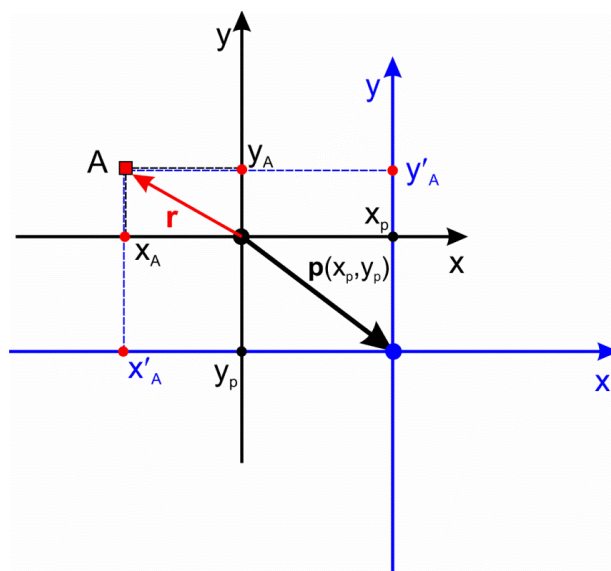
Widać z tego, że spełnione będą związki

$$t = t' \Rightarrow dt = dt' \quad 1.1.7$$

$$x = x' + x_n \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dt'} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} \quad 1.1.7a$$

$$y = y' + y_n \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt'} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2} \quad 1.1.7b$$

$$z = z' + z_n \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = \frac{dz'}{dt'} \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2} \quad 1.1.7c$$



Rysunek 1.1.3. Transformacja translacji układu współrzędnych między układem K (czarny) a układem K' (niebieski).

Na przyrostach współrzędnych nasza transformacja nie zrobiła najmniejszego wrażenia. Po wstawieniu tych wzorów do (1.1.1) ponownie

otrzymamy wzory postaci (1.1.2). Zatem w nowym układzie współrzędnych postać równania Newtona, dla współrzędnej x' -owej, y' -owej i z' -owej jest taka sama jak w starym układzie współrzędnych. Oznacza to, że prawa fizyki nie zależą od miejsca w przestrzeni. Możemy przeprowadzić doświadczenie z wahadłem na Ziemi i na innej planecie, o tej samej sile grawitacji przy jej powierzchni, znajdującej się tysiące lat świetlnych od Ziemi. Oba eksperymenty powinny przebiegać tak samo. Gdyby jednak samo miejsce prowadzenia pomiaru, czyli właściwości przestrzeni były różne w różnych punktach, tak że te różnice miałyby wpływ na przebieg procesów fizycznych, to w równaniach ruchu musielibyśmy zawrzeć zależność od położenia, tak by uwzględnić niejednorodność przestrzeni. Wtedy przesunięcie współrzędnych nie byłoby symetrią dla równań ruchu. Nasza symetria oznacza, że przestrzeń mechaniki klasycznej jest izotropowa.

Niech teraz układ primowany (nowy układ) porusza się względem nieprimowanego (stary układ) ze stałą prędkością $\mathbf{V}(V_x, V_y, V_z)$ (rys. 1.1.4). Taką transformację będę nazywał transformacją pchnięcia. Jej operator działa tak

$$\mathbf{P}_V(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - \mathbf{V}t = \mathbf{r}'(r_x - V_x t, r_y - V_y t) \quad 1.1.8$$

Transformacja współrzędnych przyjmie postać

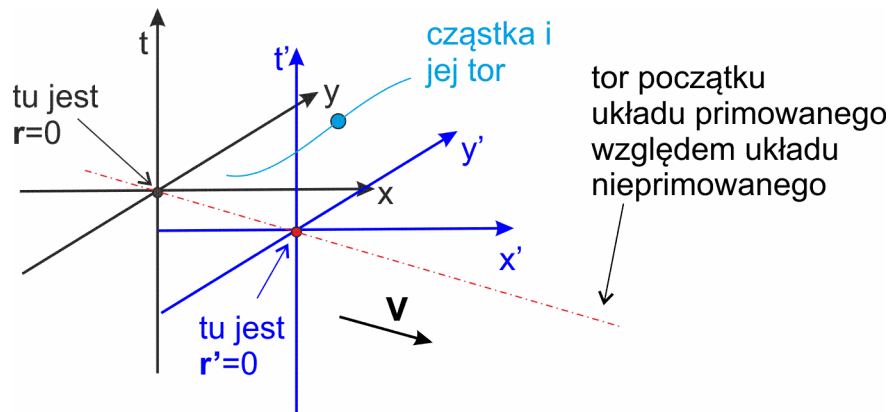
$$t = t' \Rightarrow dt = dt' \quad 1.1.9$$

$$x = x' + V_x t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} - V_x = \frac{dx'}{dt'} - V_x \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} \quad 1.1.9a$$

$$y = y' + V_y t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} - V_y = \frac{dy'}{dt'} - V_y \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2} \quad 1.1.9b$$

$$z = z' + V_z t \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} - V_z = \frac{dz'}{dt'} - V_z \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2} \quad 1.1.9c$$

Zauważ, że z powyższych wzorów wynika, że w chwili $t=t'=0$, początki obu układów współrzędnych pokrywają się. Przyjmujemy zatem, że translacja w chwili zerowej między oboma układami jest wektorem zerowym. Po wstawieniu tych wzorów do (1.1.1) ponownie otrzymamy wzory postaci (1.1.2). Zatem w nowym układzie współrzędnych postać równania Newtona, dla współrzędnej x' -owej, y' -owej i z' -owej jest taka sama jak w starym układzie współrzędnych.



Rysunek 1.1.4. Transformacja pchnięcia między układem K (czarny) a układem K' (niebieski). Nowy układ współrzędnych porusza się względem starego z stałą prędkością V .

Czy ruch cząstki zmieni się? Zmieni się, gdyż układ primowany porusza się względem nieprimowanego. Ale jeżeli w układzie wyjściowym cząstka porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, to również w układzie primowanym będzie poruszała się ruchem jednostajnym prostoliniowym, tyle że z inną prędkością, a równania ruchu cząstki nie ulegną zmianie. Oznacza, to że analizowana tu transformacja, którą nazwiemy transformacją pchnięcia, przenosi nas z jednego IUO do drugiego IUO. Przypomnę tu, że chociaż równania ruchu nie zmieniają się, i nie zmienia się rodzina funkcji będąca zbiorem rozwiązań tych równań, to może zmienić się warunek początkowy. W naszym przypadku dla każdego z dwóch IUO poruszających się względem siebie z prędkością V inna będzie prędkość początkowa cząstki (inne zwykle będzie również położenie początkowe cząstki).

Rozważmy transformację obrotu (rys. 1.1.5) na przykładzie obrotu wokół osi z . Sprawdzenie skutków transformacji obrotu jest od strony technicznej trudniejsze. Skorzystamy z tego, że każdy obrót możemy przestawić jako złożenie trzech obrotów wokół trzech niezależnych osi (§TV 3.2). Wystarczy więc zbadać obrót wokół jednej osi. Jeżeli pojedynczy obrót wokół dowolnej osi przekształci jeden IUO w inny IUO to i złożenie wielu obrotów wokół różnych osi przekształci IUO w inny IUO. Powiedzmy, że obracamy wyjściowy IUO wokół osi z , o kąt α . W nowym i starym układzie współrzędnych, współrzędne wektora położenia związane zależnością (TV 3.2.5)

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_z(-\alpha) \cdot \mathbf{r}' \quad 1.1.10$$

Gdzie $\mathbf{R}_z$ jest macierzą obrotu wokół osi z o kąt α (TV 3.2.3). Przypominam, że zmiana współrzędnych nie zmienia wektora, jest to ciągle ten sam wektor. Podobnie zmieniają się współrzędne wektora siły

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_z(-\alpha) \cdot \mathbf{F}' \quad 1.1.11$$

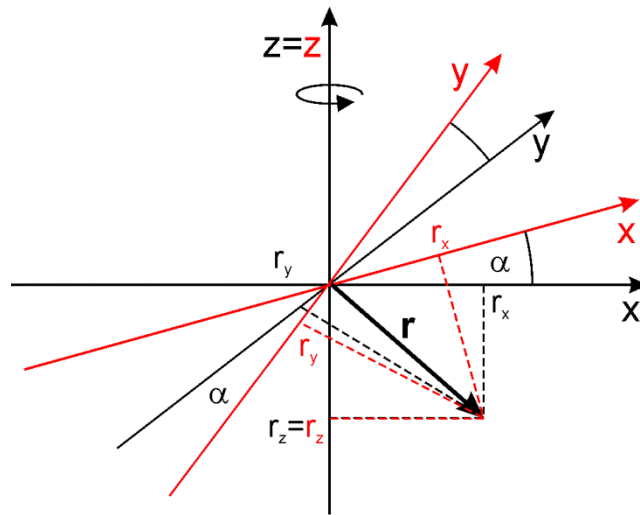
Jeżeli obrót jest przekształceniem symetrii, to w nowym układzie współrzędnych drugie prawo dynamiki zapisujemy tak

$$\mathbf{F}' = m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \quad 1.1.12$$

Zobaczmy czy jesteśmy w stanie, stosując przekształcenie obrotu, wrócić do starych współrzędnych bez naruszania struktury drugiego prawa. Powrót do starych współrzędnych odbywa się przez przekształcenia (1.1.10) i (1.1.11)

$$\mathbf{R}_z(-\alpha) \cdot \mathbf{F}' = m \mathbf{R}_z(-\alpha) \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{R}_z(-\alpha) \cdot \mathbf{r}'}{dt^2} \quad 1.1.13$$

Zobacz co otrzymaliśmy. Z Lewej strony jest macierz obrotu działająca na współrzędne wektora siły w nowym układzie współrzędnych. Ta macierz nie zmienia samego wektora. Zmienia tylko wartości jego współrzędnych, tak by w nowym układzie współrzędnych mieć ciągle ten sam wektor siły.



Rysunek 1.1.5. Obrót starego układu współrzędnych wokół osi z o kąt α .

Z prawej strony masa mnoży wektor przyspieszenia, którego współrzędne są zapisane w nowym układzie współrzędnych; w efekcie mamy ten sam wektor przyspieszenia tyle, że w nowym układzie współrzędnych. Aby przejść do starego układu mnożymy wektor położenia przez macierz obrotu. Działanie macierzy obrotu powoduje, że równanie (1.1.12) jest równaniem zapisanym w starych współrzędnych.

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \quad 1.1.14$$

Oznacza to, że obrót układu nie zmienił postaci równania. Wniosek: obrót układu współrzędnych wokół dowolnej osi nie zmienia postaci równań ruchu. Złożenie kolejnych obrotów również tej postaci nie zmieni. Zatem

przekształcenie obrotu przekształca jednej IUO w drugi IUO i jest symetrią dla drugiego prawa Newtona.

Możesz mieć wątpliwości, czy różniczkowanie i mnożenie przez macierz są przemienne, z czego skorzystałem w równaniu (1.1.13). Spróbujmy zatem policzyć wyrażenie

$$\frac{d(\mathbf{R}_z(\alpha) \cdot \mathbf{r})}{dt}; \text{ gdzie } \mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 1.1.15$$

Po wymnożeniu macierzy obrotu przez wektor położenia mamy

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \cos(\alpha)r_x + \sin(\alpha)r_y \\ -\sin(\alpha)r_x + \cos(\alpha)r_y \\ r_z \end{bmatrix} \quad 1.1.16$$

Z (§DB 1.4) wiemy, że pochodne z wektora możemy liczyć z każdej z jego współrzędnych z osobna

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\cos(\alpha)r_x - \sin(\alpha)r_y) &= \cos(\alpha)\frac{d}{dt}r_x - \sin(\alpha)\frac{d}{dt}r_y \\ &= \cos(\alpha)v_x - \sin(\alpha)v_y \end{aligned} \quad 1.1.17a$$

Podobnie dla drugiej współrzędnej mamy

$$\frac{d}{dt}(\sin(\alpha)r_x + \cos(\alpha)r_y) = \sin(\alpha)v_x + \cos(\alpha)v_y \quad 1.1.17b$$

Trzecia współrzędna pozostaje nie zmieniona

$$\frac{d}{dt}r_z = v_z \quad 1.1.17c$$

Zbierając wyrażenia (1.1.17) współrzędne wektora $\mathbf{v}$ w obróconym układzie współrzędnych mają postać

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha)v_x - \sin(\alpha)v_y \\ \sin(\alpha)v_x + \cos(\alpha)v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad 1.1.18$$

Ale wyrażenie to można otrzymać również mnożąc współrzędne wektora $\mathbf{v}$ w wyjściowym układzie współrzędnych przez macierz obrotu

$$\mathbf{R}_z(\alpha) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{R}_z(\alpha) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)v_x - \sin(\alpha)v_y \\ \sin(\alpha)v_x + \cos(\alpha)v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad 1.1.19$$

Zbierając (1.1.14) i (1.1.18) mamy

$$\frac{d(\mathbf{R}_z(\alpha) \cdot \mathbf{r})}{dt} = \mathbf{R}_z(\alpha) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{r} \quad 1.1.20$$

Co oznacza, że operacja obliczania pochodnej z wektora i mnożenia tego wektora przez macierz obrotu są przemienne.

W następnym przykładzie rozważę transformację do układ primowanego, który porusza się względem wyjściowego (nieprimowanego) z stałym przyspieszeniem $\mathbf{a}(a_x, a_y)$ (rys. 1.1.6). Operator tej transformacji działa tak

$$\mathbf{S}_a(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2 = \mathbf{r}' \left(r_x - \frac{1}{2} a_x t^2, r_y - \frac{1}{2} a_y t^2 \right) \quad 1.1.21$$

Transformację zapiszę w postaci

$$t = t' \Rightarrow dt = dt' \quad 1.1.21$$

$$\begin{aligned} x = x' + \frac{1}{2} a_x t^2 &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + a_x t = \frac{dx'}{dt'} + a_x t' \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} \\ &= \frac{d^2 x'}{dt'^2} + a_x \end{aligned} \quad 1.1.21a$$

$$\begin{aligned} y = y' + \frac{1}{2} a_y t^2 &\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} + a_y t = \frac{dy'}{dt'} + a_y t' \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} \\ &= \frac{d^2 y'}{dt'^2} + a_y \end{aligned} \quad 1.1.21b$$

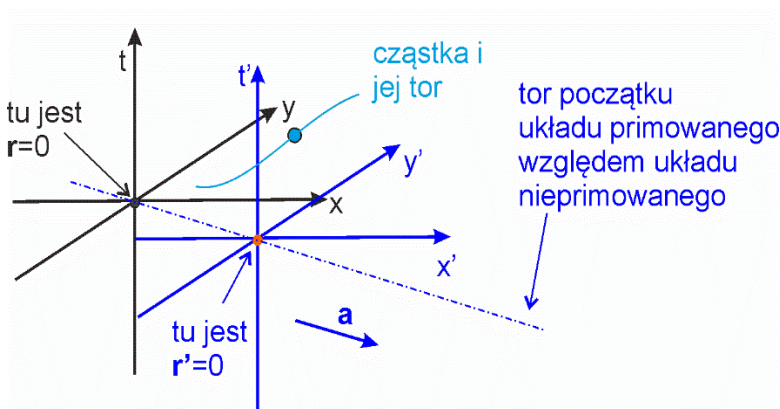
$$\begin{aligned} z = z' + \frac{1}{2} a_z t^2 &\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} + a_z t = \frac{dz'}{dt'} + a_z t' \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} \\ &= \frac{d^2 z'}{dt'^2} + a_z \end{aligned} \quad 1.1.21c$$

Po wstawieniu tych wzorów do (1.1.1) ponownie otrzymamy wzory postaci, zaraz, zaraz, nic na pamięć! Tym razem równania ruchu ulegną zmianie do postaci

$$F_x = m \left(\frac{d^2 x'}{dt'^2} + a_x \right) \quad 1.1.22a$$

$$F_y = m \left(\frac{d^2 y'}{dt'^2} + a_y \right) \quad 1.1.22b$$

$$F_z = m \left(\frac{d^2 z'}{dt'^2} + a_z \right) \quad 1.1.22c$$



Rysunek 1.1.6. Transformacja do układu współrzędnych, który względem początkowego porusza się ze względnym, stałym przyspieszeniem $\mathbf{a}$.

Zapiszę nowe równanie ruchu w postaci wektorowej

$$\mathbf{F} = m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} + \mathbf{a} \right) \quad 1.1.23$$

To nie jest newtonowskie równanie ruchu, gdyż w równaniu pojawił się dodatkowy czynnik. Oznacza to, że układ poruszający się z przyspieszeniem względem jakiegoś IUO sam nie jest IUO, gdyż przejście do niego wiąże się ze zmianą postaci newtonowskiego równania ruchu. Taki układ nazywamy nieinercyjnym układem odniesienia (NUO). Nie ma w tym nic dziwnego, transformacja między układami, które wzajemnie poruszają się z niezerowym przyspieszeniem zmienia przyspieszenie obserwowanej cząstki, a w drugim prawie mamy siłę, masę i przyspieszenie. Zatem taka transformacja zmienia istotny parametr drugiego prawa i nie może przenieść nas od jednego IUO do drugiego IUO.

1.2. Grupa Galileusza

Jak się okazuje, translacje w czasie, trzy niezależne translacje w przestrzeni, obroty wokół trzech osi układu współrzędnych i pchnięcia w trzech niezależnych kierunkach są jedynymi przekształceniami, które są symetriami dla drugiego prawa Newtona. Oznacza to, że jeżeli zastosujemy te przekształcenia, i ich złożenia to mając jeden IUO możemy otrzymać wszystkie inne. Wymienione tu przekształcenia są podstawowymi transformacjami, które jeden IUO przekształcają w inny IUO. Oprócz tych

podstawowych transformacji możemy stosować dowolne ich złożenia. Następujące fakty są prawdziwe:

Fakt 1.2.1

Dowolne złożenie wymienionych dziesięciu transformacji układu współrzędnych jest transformacją, która przekształca jeden IUO w drugi IUO.

Fakt 1.2.2

Wszystkie transformacje, które przekształcają jeden IUO w drugi IUO da się uzyskać ze złożenia tych dziesięciu podstawowych transformacji.

Zbiór wszystkich transformacji przekształcających jeden IUO w drugi IUO nazywamy dziesięcio-parametrową grupą Galileusza. Dziesięć; gdyż jest dziesięć niezależnych transformacji, które traktujemy jako podstawowe. Wszystkie transformacje, które nie należą do grupy Galileusza przeprowadzają IUO w nieinercjalne układy odniesienia (NUO).

Definicja 1.2.1: Transformacje Galileusza

Transformacje układu współrzędnych, które nie zmieniają postaci newtonowskich równań ruchu nazywamy transformacjami Galileusza. Tworzą one dziesięcio-parametrową grupę symetrii dla dynamiki newtonowskiej; tzw. grupę Galileusza

Wymieńmy jeszcze raz wszystkie dziesięć parametrów grupy Galileusza

- jedna translacja w czasie
- trzy translacje w przestrzeni (wzdłuż osi x , y i z)
- trzy obroty (wokół osi x , y i z)
- trzy pchnięcia (wzdłuż osi x , y i z)

Muszę tu jeszcze raz podkreślić, że symetrie równań ruchu nie są czułe na warunki początkowe jakie dodajemy do rozwiązań tych równań. Zmiana warunków początkowych może spowodować, że badany układ (na przykład wahadło) będzie miało inną współrzędną położenia i inną stałą składową prędkości. Równania ruchu nie widzą ani zmiany położenia ani zmiany stałej prędkości z jednej wartości na drugą. Z punktu widzenia dynamiki, zmiana warunków początkowych nie zmienia dynamiki układu.

Fakt: 1.2.3

Zmiana początkowego położenia układu fizycznego oraz jego początkowej prędkości nie zmienia, na gruncie mechaniki klasycznej, dynamiki tego układu

Ma to swoje ważne skutki. Nie da się na gruncie mechaniki zaprojektować przyrządu, który w zamkniętej kabinie może nam pokazać

gdzie jesteśmy i z jaką poruszamy się prędkością. Gdyby to było możliwe równania ruchu powinny być wrażliwe na zmianę położenia i prędkości początkowej. Nasze położenie i prędkość możemy określić tylko względem jakiegoś innego obiektu. Do tego ważnego tematu wrócę w części 3.

Skoncentrujmy się jeszcze przez chwilę na składaniu przekształceń. Składanie oznacza wykonanie jednego przekształcenia po drugim. We wzorach (1.1.8, 1.1.9) przyjąłem, że w chwili początkowej $t=t'=0$ początki układów K i K' pokrywają się. Możemy jednak w pierwszej kolejności dokonać translacji obu układów o potem ich pchnięcia. Sumarycznie złoży się to do transformacji pchnięcia, dla której w chwili $t=t'=0$ początki układów K i K' nie pokrywały się. Możemy takie złożenie traktować jako jedną transformację opisaną wzorami

$$t = t' \Rightarrow dt = dt' \quad 1.2.1$$

$$x = x' + T_x + V_{ox}t \quad 1.2.1a$$

$$y = y' + T_y + V_{oy}t \quad 1.2.1b$$

$$z = z' + T_z + V_{oz}t \quad 1.2.1c$$

Składanie transformacji nie ogranicza się wyłącznie do przekształceń należących do grupy Galileusza. Podobnie moglibyśmy przesunąć w chwili $t=t'=0$ początki układów przy transformacji do układu przyspieszającego (1.1.16). Ale złożenie transformacji należącej do grupy Galileusza z transformacją do niej nienależącą daje transformację, która do grupy Galileusza nie należy.

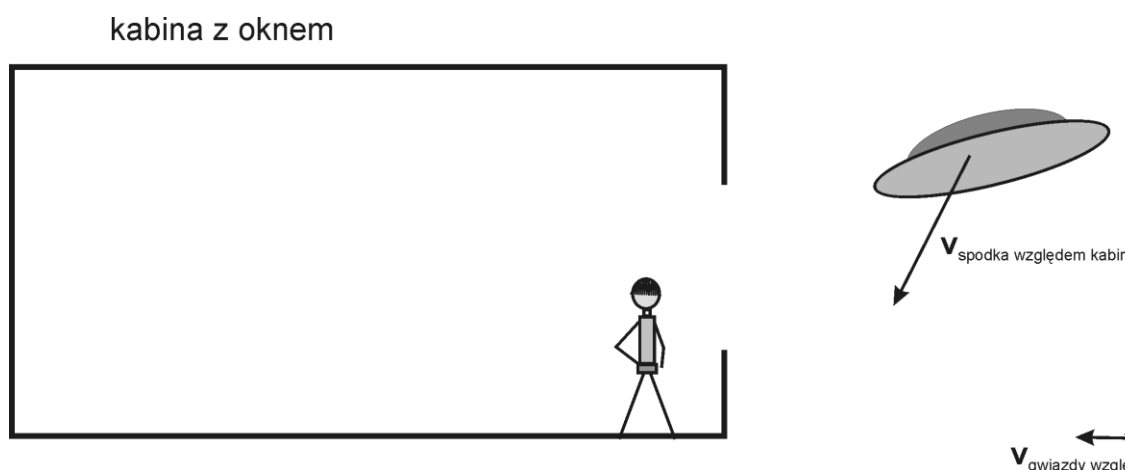
2. Siły bezwładności ♦

Przeprowadzona w rozdziale pierwszym analiza symetrii drugiego prawa dynamiki ma istotne fizyczne konsekwencje. Jedną z nich jest fakt, że w ramach dynamiki newtonowskiej nie jesteśmy w stanie przypisać ciału jego własnej prędkości. Możemy posługiwać się tylko pojęciem prędkości względnej.

Definicja 2.1: Prędkość względna

Prędkość względna to prędkość jaką jeden obiekt ma względem drugiego

Oto kosmiczna kabina z oknem na Wszechświat (rys. 2.1), które pozwala na to aby podróżnik mierzył prędkość zewnętrznych obiektów względem swojej kabiny.



Rysunek 2.1. Prędkość względna określa jak przesuwają się względem siebie dwa obiekty (dwa układy współrzędnych)

Zamiast mówić o prędkości obiektów względem kabiny możemy równie dobrze mówić o prędkości kabiny względem zewnętrznych obiektów. Te dwie prędkości mają taką samą wartość i kierunek ale są przeciwnie skierowane. Ten sam obiekt może mieć różne prędkości względne, mierzone względem różnych obiektów zewnętrznych.

Określimy teraz proste kryterium jakie powinna spełniać prędkość własna obiektu jeżeli takowa by istniała.

Kryterium 2.1: Prędkość własna

Jeżeli prędkość własna ma fizyczny sens, to w danym, zamkniętym układzie fizycznym musi być mierzalna, przynajmniej na sposób jakościowy, bez odniesienia do stanu ciał zewnętrznych.

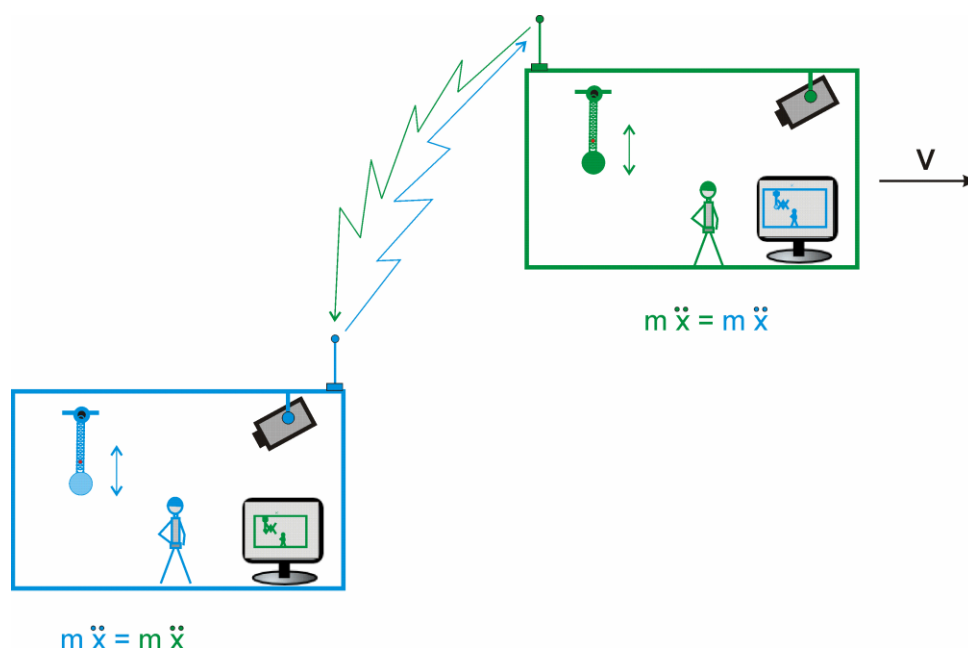
Na mocy tego kryterium powinno być możliwe następujące doświadczenie. Zamykamy podróżnika w samotnej kabine kosmicznej (czyli mamy zamknięty układ fizyczny), bez żadnych okien i każemy mu zmierzyć prędkość własną. W tym celu podróżnik musi zbudować mechaniczny miernik prędkości własnej. Co to jest mechaniczny miernik prędkości własnej?

Definicja 2.2: Mechaniczny miernik prędkości własnej

Jest to urządzenie, którego działanie opisują prawa mechaniki i którego stan różni się w dwóch IUO, które poruszają się względem siebie z niezerową, stałą prędkością v .

Definicję (2.2) należy rozumieć jako odnoszącą się do koncepcji miernika a nie konkretnego miernika prędkości własnej. To znaczy, że powinien istnieć projekt takiego miernika. Bazując na tym projekcie możemy zbudować wiele kopii miernika prędkości własnej, a następnie umieścić różne kopie w różnych IUO. Jeżeli dwa IUO poruszają się z różną prędkością to wskazania mierników w tych układach powinny być różne.

Dlaczego prawa Newtona nie pozwalają na budowę mechanicznego miernika prędkości własnej? Przyjrzyjmy się rysunkowi (2.2). Układ zielony porusza się względem układu niebieskiego ze stałą prędkością V . W obu układach jest taki sam (co do konstrukcji) miernik sprężynowy. Sprężyna została naciągnięta a następnie puszczona; w efekcie kulka wykonuje drgania wokół punktu równowagi – czerwona kropka. Niebieski i zielony obserwator dokonują, na podstawie praw Newtona, analizy działania obu mierników. Każdy z nich otrzymuje dokładnie ten sam zbiór rozwiązań. Aby wybrać właściwe rozwiązanie każdy z nich musi określić warunki początkowe. Wśród tych warunków początkowych jest prędkość początkowa. Obaj obserwatorzy określają tę samą prędkość początkową. W ich układach współrzędnych ich miernik spoczywają. Słowem sytuacja jest w pełni symetryczna. Gdy niebieski obserwator określa warunki początkowe zielonego miernika we własnym układzie współrzędnych stwierdza, że miernik ma prędkość początkową V , tyle że jest to prędkość względna, a nie własna. Kryterium (2.1) zabrania wyglądania przez okno. Jak już stwierdziłem, warunki początkowe nie są widziane przez równania ruchu (fakt 1.3.3).



Rysunek 2.2. Dwa IUO stowarzyszone są z kabinami, w których zamontowany jest miernik sprężynowy (§TIV 2). Układy zielony porusza się względem niebieskiego ze stałą prędkością V . Niezależnie od tego, w którym układzie napiszemy równanie ruchu, będzie ono miało tą samą postać i oba mierniki pokażą to samo. Zamieniając miernik sprężynowy na jakikolwiek inny miernik opisany prawami mechaniki klasycznej dojdziemy do tych samych wniosków.

To samo wyniknie, gdy sprężynowy miernik prędkości własnej zamienimy na dowolnie inny miernik (rys. 2.3), pod warunkiem, że ten nowy miernik opisywany jest prawami Newtona. Tak więc, żadne urządzenie, którego działanie opisywane jest przez prawa Newtona nie może posłużyć do pomiaru wartości prędkości własnej. A skoro nie, to przy przyjętym kryterium prędkości własnej (2.1), musimy uznać, że takiej prędkości własnej, na gruncie mechaniki klasycznej, po prostu nie ma.

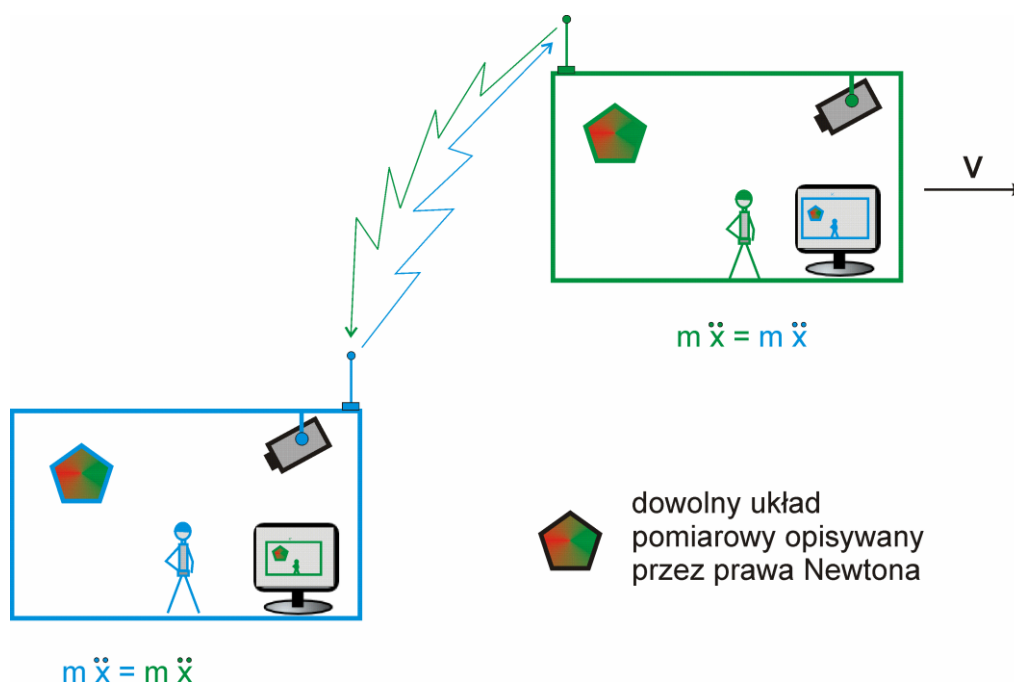
Mechanika klasyczna wyklucza możliwość pomiaru prędkości własnej, ale nie przyspieszenia własnego.

Definicja 2.3: Przyspieszenie własne

Przyspieszenie własne danego układu, to takie przyspieszenie, które jest mierzalne bez odniesienia do obiektów zewnętrznych, przynajmniej na sposób jakościowy; to znaczy musi być, przynajmniej, możliwe stwierdzenie czy ciało ma niezerowe przyspieszenie własne czy nie

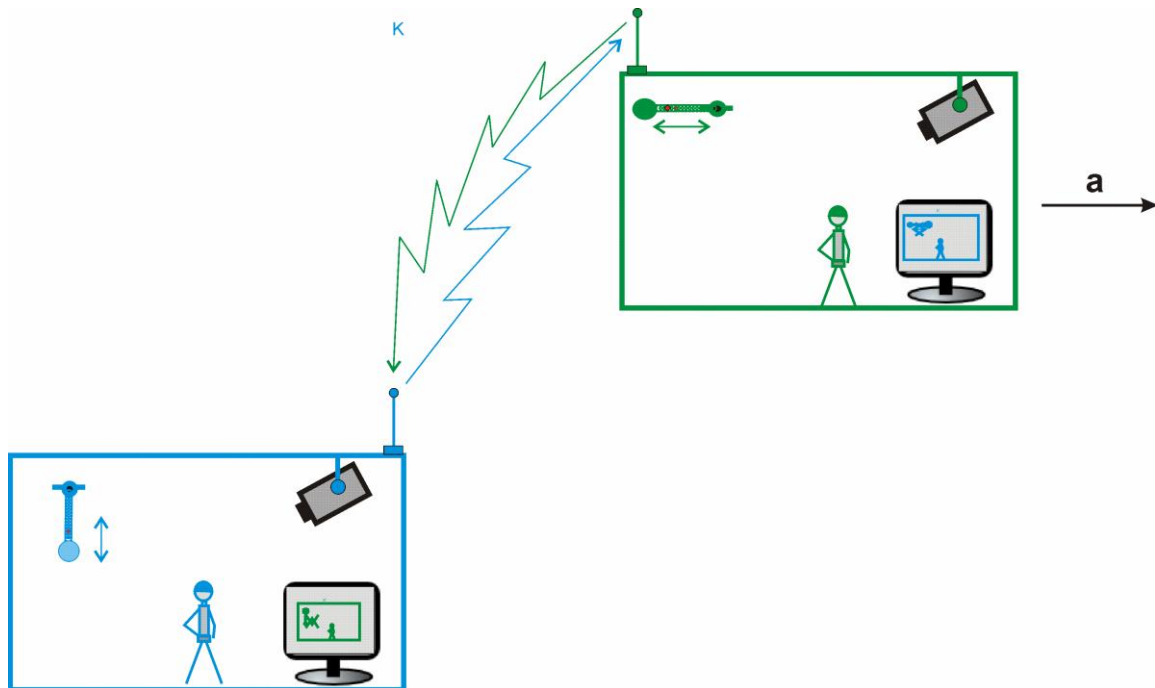
Definicja 2.4: Mechaniczny miernik przyspieszenia własnego

Jest to urządzenie, którego działanie opisują prawa mechaniki i którego stan różni się w dwóch układach odniesienia, które poruszają się względem siebie z niezerowym, przyspieszeniem a .



Rysunek 2.3. Każdy miernik, którego działanie opiera się na prawach mechaniki klasycznej, zachowuje się przy transformacjach Galileusza tak samo jak miernik sprężynowy, to znaczy nie zmienia się jego dynamika. Zatem żaden miernik opisany przez prawa mechaniki klasycznej nie nadaje się do pomiaru prędkości własnej.

Rysunek (2.4) ponownie przedstawia dwie kabiny niebieską i zieloną. Teraz jednak kabina zielona zaczęła przyspieszać z przyspieszeniem a . W kabinie niebieskiej rzeczy mają się tak jak poprzednio. Coś dziwnego dzieje się w kabinie zielonej. Naciągnięta, tak jak poprzednio, sprężyna waha się ale kierunek wahnięć obrócony jest o 90° , przeciwnie do przyspieszenia tej kabiny. Zielony obserwator również odczuwa dziwne efekty. Coś jakby go spychało na tylną ścianę kabiny. Sytuacja przestała być symetryczna. Ten sam miernik w obu kabinach zachowuje się inaczej. Jest zatem podstawa do pomiaru przyspieszenia własnego. Obserwator z układu zielonego patrząc na sprężynę stwierdza że dzieją się cuda. Ciężarek uparcie naciąga sprężynę we wskazanym na rysunku kierunku. Wydaje się, że działa tu jakaś siła naciągająca. Ale gdzie jest jej źródło? Jak wiemy każda rzeczywista siła przyłożona musi mieć swoje fizyczne źródło. Taką siłę będę nazywał od tego momentu siłą przyłożoną



Rysunek 2.4. Układ związany z kabiną niebieską jest inercjalny. Kabina zielona porusza się z przyspieszeniem a względem kabiny niebieskiej. Miernik sprężynowy w kabinie zielonej naciąga się w kierunku przeciwnym do przyspieszenia a .

Definicja 2.5: Siła przyłożona

Siła, dla której jesteśmy w stanie wskazać jej fizyczne źródło nazywamy siłą przyłożoną.

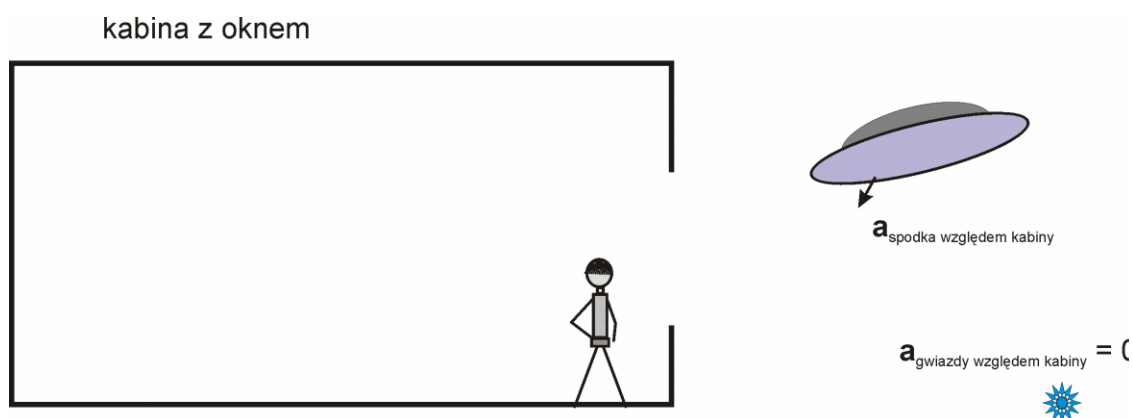
Dla obserwatora niebieskiego sytuacja w kabinie zielonej jest jasna. Kabina jest napędzana na przykład przez silnik rakietowy, w wyniku czego ma przyspieszenie we wskazanym kierunku (źródłem siły jest silnik). Przyspieszająca w kierunku działania siły kabina ciągnie, poprzez sprężynę, kulkę. Kulka jak każda masa stawia opór działającej sile. W efekcie sprężyna musi się odpowiednio naciągnąć, by mieć, wystarczającą siłę do nadania kulce przyspieszenia a , zgodnego z przyspieszeniem kabiny. Jednak w układzie zielonym przyspieszenie kabiny i kulki jest równe zeru. Zatem musimy uznać, że sam układ współrzędnych, wraz z kabiną, porusza się z przyspieszeniem a . W ten sposób patrząc na kierunek naciągu sprężyny i wielkość jej rozciągnięcia możemy wskazać i wartość i kierunek i zwrot przyspieszenia kabiny bez patrzenia na jakikolwiek obiekt na zewnątrz. Mierzmy w ten sposób przyspieszenie własne kabiny. Oznacza to również, że w kabinie zielonej nie możemy napisać równań ruchu Newtona. Przypominam, że specjalna klasa układów, w których możemy to robić, nazywa się Inercjalnymi Układami Odniesienia (IUO). Widać również, że IUO,

to takie układy, których przyspieszenie własne jest równe zeru. Z przeprowadzonej dyskusji wynika

Fakt 2.4: Przyspieszenie własne a IUO

Jeżeli przyspieszenie własne kabiny jest równe zeru, to układ współrzędnych związanych z kabiną jest układem inercyjnym

Możemy również mierzyć przyspieszenie względne; to jest takie, które mierzymy względem innych obiektów. Do tego potrzebujemy kabiny z oknem (rys. 2.5). Patrząc na różne obiekty, podróżnik może wyznaczyć przyspieszenie jakie jego kabina ma względem tych obiektów. Przyspieszenie to jest równe ale przeciwnie skierowane do przyspieszenia względnego jakie te obiekty mają względem kabiny.



Rysunek 2.5. Przyspieszenie względne określa z jakim przyspieszeniem przesuwają się względem siebie dwa obiekty (dwa układy współrzędnych)

Przeanalizujmy raz jeszcze przykład z rysunku (1.2). Przyspieszenie absolutne wózka z lewej strony jest równe zeru. Zatem układ współrzędnych związany z tym wózkiem jest układem inercyjnym i możemy w nim rozwiązywać równania ruchu Newtona. Wózek z lewej strony ma względem wózka z prawej strony niezerowe przyspieszenie względne. Wózek z prawej strony porusza się względem „inercyjnego” wózka z lewej strony z przyspieszeniem $\mathbf{a}(a_x, 0, 0)$. Ponieważ jest to przyspieszenie zmierzone względem IUO, jest to zarazem przyspieszenie własne wózka z prawej strony. Układ związany z wózkiem z prawej strony jest nieinercyjny (NUO), i nie możemy w nim rozwiązywać równań ruchu Newtona. Chyba, że

Przy przejściu do układu primowanego, który poruszał się z przyspieszeniem $\mathbf{a}(a_x, 0, 0)$ względem układu inercyjnego równanie ruchu przyjęło postać (1.2.23). Prawa strona tego równania nie jest taka jak należy. Przenieśmy teraz dodatkowy człon na drugą stronę równania

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a} = m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt'^2} \quad 2.1$$

Po lewej stronie pojawiła się dodatkowa wielkość o wymiarze siły. Tyle, że taka siła nie istnieje. Ale możemy się umówić, że istnieje i nazwać ją siłą bezwładności (inna nazwa to siła pozorna). Jeżeli wprowadzimy nieistniejącą siłę bezwładności $\mathbf{F}_b = -m\mathbf{a}$, gdzie $\mathbf{a}$ jest własnym przyspieszeniem NUO, to wtedy będziemy mogli, w NUO, korzystać z równań ruchu Newtona. Podsumowując: jeżeli chcemy pisać newtonowskie równania ruchu w NUO, to musimy

- określić rozkład masy badanego układu
- określić działające siły przyłożone
- określić siły bezwładności

Dodając do sił przyłożonych siły bezwładności możemy poprawnie rozwiązać zagadnienie ruchu muchy w układzie nieinercyjnym (rys. 1.1). Wózek z prawej strony porusza się z przyspieszeniem własnym $\mathbf{a}(a_x, 0, 0)$. Kiedy wiążemy układ współrzędnych z tym wózkiem, to jest to NUO i mucha, na którą nie działają żadne siły porusza się względem tego wózka z przyspieszeniem $-\mathbf{a}_x$. Zakładamy zatem, że na muchę działa siła pozorna

$$\mathbf{F}_b = -m\mathbf{a} \quad 2.2$$

Piszemy równanie ruchu

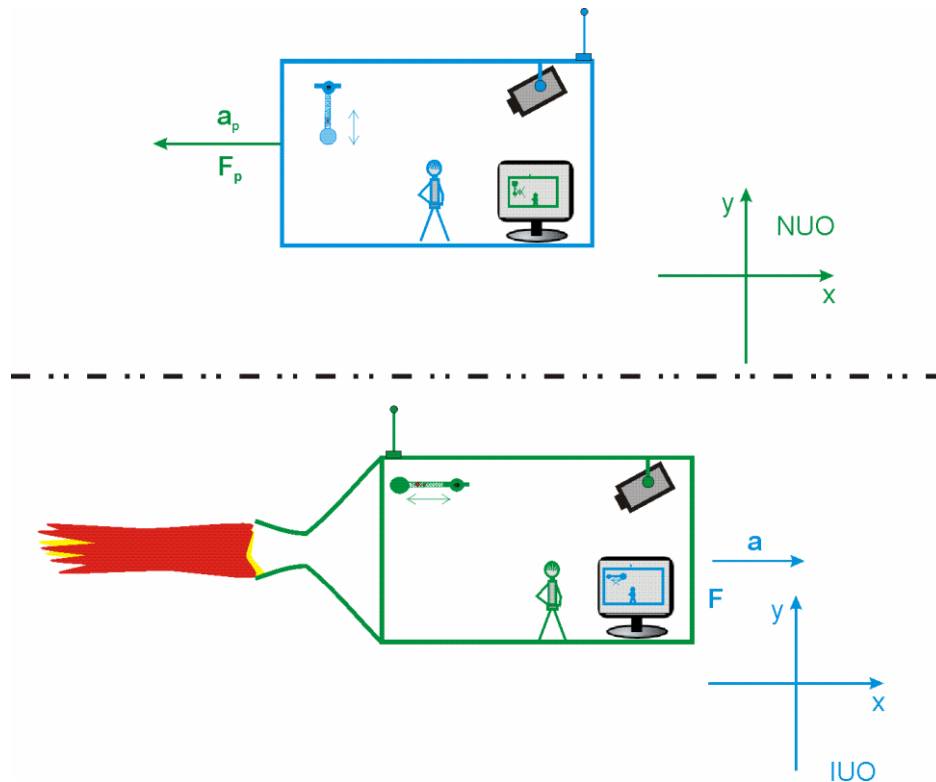
$$-m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_m \quad 2.3$$

Stąd mamy poprawne wyrażenie na przyspieszenie muchy mierzone w NUO

$$\mathbf{a}_m = -\mathbf{a} \quad 2.4$$

2.1. Psotna intuicja

Należy pamiętać, że siły bezwładności nie powodują widocznych skutków fizycznych w obserwowanym układzie. Ma to swoją bardzo prostą przyczynę – sił tych nie ma! Powiedzmy, że obserwujemy kabinę niebieską (związaną z IUO) z miernikiem sprężynowym, z naszego zielonego NUO (rys. 2.1.1). Aby napisać równanie ruchu musimy uwzględnić siłę pozorną $\mathbf{F}_p$. Myślimy tak: na kabinę niebieską działa siła pozorna $\mathbf{F}_p$, pod wpływem której kabina ma przyspieszenia $\mathbf{a}_p$, mierzone w naszym NUO.

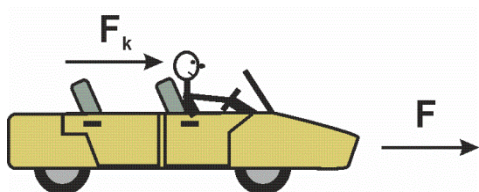


Rysunek 2.1.1. Górna część rysunku pokazuje niebieską kabinę, której przyspieszenie własne jest równe zero (układ związany z tą kabiną jest inercjalny). Kabinę obserwujemy z zielonego NUO. Aby napisać newtonowskie równania ruchu dla tej kabiny musimy dodać nieistniejącą siłę pozorną F_p . Dolny rysunek pokazuje zieloną kabinę, której przyspieszenie własne wynosi $a = -a_p$ i z takim przyspieszeniem porusza się ta kabina względem niebieskiego IUO. W obu przypadkach kabiny względem wybranych układów odniesienia poruszają się z takim samym przyspieszeniem tyle, że przeciwnie skierowanym. Jednak tylko rzeczywista siła powoduje, że zielona sprężyna uległa naciągnięciu. Sprężyna w niebieskiej kabinie nie naciąga się w żadnym kierunku. Dodana siła pozorna, przez obserwatora z zielonego układu, nie może zmienić stanu układu. Siły pozorne są dodawane tylko po to aby móc dla całego danego układu napisać równanie ruchu. Nie zmieniają one wewnętrznych stanów układu fizycznego. Trzeba być ostrożnym przy używaniu sił pozornych!

Dzięki temu równanie ruchu kabiny niebieskiej, które napiszemy w naszym układzie da poprawne rozwiązanie. Ale na samą niebieską kabinę nie działa żadna siła i kabina ta nie ma żadnego własnego przyspieszenia. My jednak możemy rozumować dalej tak. Skoro na kabinę działa siła F_p , która powoduje jej przyspieszenia a_p , to przyrząd sprężynowy powinien wychylić się przeciwnie do kierunku tego przyspieszenia. To jest błąd, siła bezwładności (siła, której nie ma) nie może być źródłem żadnych zmian wewnątrz układu fizycznego. Za tego typu błędy rozumowania odpowiada w części nasza intuicja. Gdy gwałtownie rusza wagon pociągu mamy wrażenia działania siły spychającej nas na tył wagonu. Ta tajemnicza siła spychająca działa tak jak siła bezwładności. Stąd mamy skłonności przypisywania sile bezwładności

realnej mocy sprawczej! W rzeczywistości takiej siły nie ma. To podłoga wagonu ucieka nam spod nóg, a my aby nie zostać w tyle musimy albo odpowiednio mocno zaprzeć się nogami o podłogę, albo chwycić się czegoś przymocowanego do wagonu. Dzięki temu rzeczywista siła przenoszona jest na nasze ciało, w kierunku przeciwnym do odczuwanej siły bezwładności, i możemy uzyskać takie same przyspieszenie jak wagon.

Rysunek (2.1.2) pokazuje inny przykład. Gdy na samochód działa niezerównoważona siła F , pojazd zaczyna zwiększać swoją prędkość w kierunku działania siły (zakładamy, że samochód jedzie po prostej). Kierowca ma wrażenie działania siły wciskającej w fotel. Ale co miałoby być źródłem tej siły? Czyżby złośliwy demon wyskakiwał z silnika, za każdym naciśnięciem pedału gazu i wciskał w fotele osoby znajdujące się w samochodzie? Czy raczej to fotel popycha kierowcę w kierunku działania siły F nadając mu odpowiednie przyspieszenie? Gdy działa gwałtowna siła hamująca, na przykład podczas zderzenia, sprawy przybierają dramatyczny obrót. Samochód uderzający o twardą przeszkodę bardzo gwałtownie wytraca prędkość – duża wartość przyspieszenia hamującego.



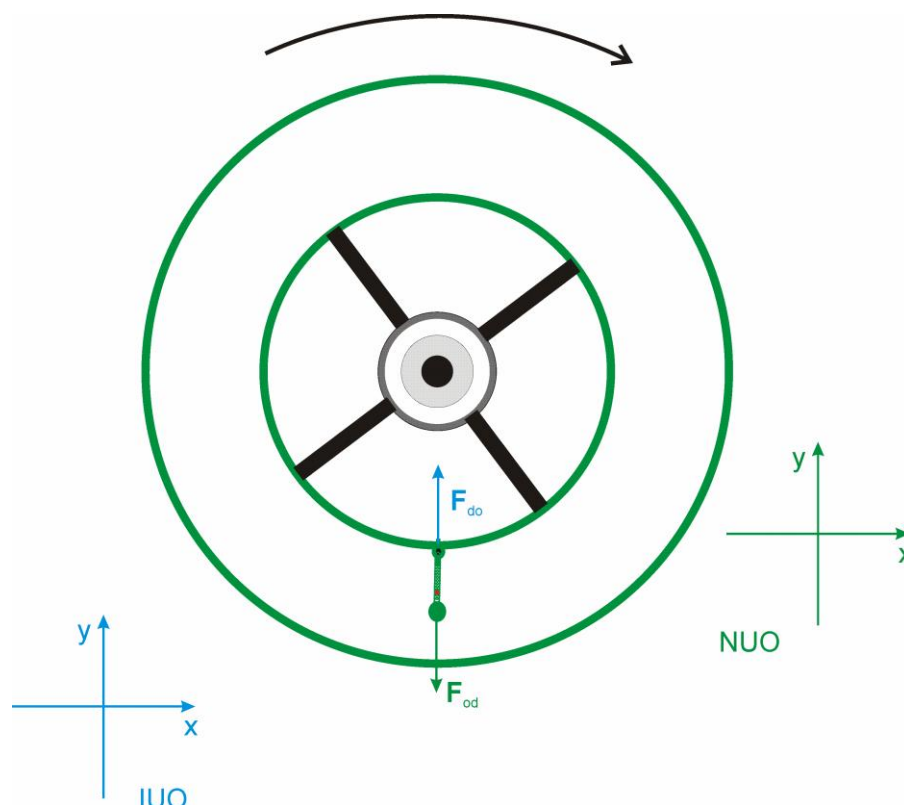
Rysunek 2.1.2. Siła F , której źródłem jest silnik samochodowy, powoduje, że samochód przyspiesza. Fotel popycha kierowcę siłą F_k nadając mu takie przyspieszenie jakie ma samochód. Kierowca ma jednak wrażenie siły, która go w fotel wpycha. Jego odczucia są zgodne z działaniem siły pozornej $F_p = -F_k$ jakiej musielibyśmy użyć by opisać całą sytuację z układu współrzędnych związanym z samochodem.

A pasażer „jedzie” dalej na spotkanie z kierownicą i szybą, chyba że złapią go pasy bezpieczeństwa. Ruch kierowcy w kierunku szyby nie jest skutkiem działania złośliwego, popychającego go demona, ale braku siły hamującej, która nadałaby mu takie przyspieszenie hamujące jakie ma samochód. Siły tej brak do czasu gdy kierowca sam o coś nie uderzy.

2.2. Siła odśrodkowa

Wyobraźmy sobie wielką obracającą się stację kosmiczną. Wewnątrz niej umocowany jest miernik sprężynowy (rys. 2.2.1). Kulka naciąga sprężynę (punkt równowagi to czerwone kółko) w kierunku przeciwnym do promienia. Mamy dwa układy współrzędnych: niebieski IUO i zielony układ związany z obracającą się bazą; oznacza to, że układ zielony również się

obraca i doznaje niezerowego przyspieszenia dośrodkowego, zatem jest to nieinercjalny układ odniesienia (NUO).



Rysunek 2.2.1. Przekrój przez bazę kosmiczną w kształcie walca. Baza obraca się wokół osi. Obserwujemy wskazania miernika sprężynowego z IUO (niebieski) i z NOU, związanego z bazą (zielony).

W układzie niebieskim (inercyjnym) stwierdzamy, że na sprężynę z ciężarkiem działa siła dośrodkowa $\mathbf{F}_{do}$, odpowiedzialna za ruch ciężarka po okręgu. Ściana bazy ciągnie sprężynę za sobą, a sprężyna ciągnie za sobą kulkę, która stawia sprężynie opór bezwładnościowy. Kierunek tego ciągnięcia skierowany jest do środka obrotu. W efekcie sprężyna naciąga się w kierunku przeciwnym do kierunku działania siły. Zgodnie z wyprowadzonym wcześniej wzorem na przyspieszenie dośrodkowe (TVI 5.5), dla ruchu po okręgu, siła dośrodkowa działająca na punkt, o masie m jest równa

$$\mathbf{F}_{do} = -m \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} \quad 2.2.1$$

Tutaj $\hat{\mathbf{r}}$ jest wektorem jednostkowym od środka obrotu do danego punktu, a v jest wartością prędkości liniowej tego punktu. Z punktu widzenia układu zielonego baza nie obraca się. Jeżeli nie ma obrotu, to nie ma siły dośrodkowej. Dlaczego zatem sprężyna naciąga się? Oczywiście układ zielony jest NUO. To, że się obraca oznacza, że przyspiesza; każdy punkt tego

układu ma niezerowe przyspieszenie dośrodkowe i jest to przyspieszenie własne tego punktu. Aby móc stosować newtonowskie równania ruchu musimy wprowadzić siłę pozorną – tzw. siłę odśrodkową, która jest przeciwnie skierowana do rzeczywistej siły dośrodkowej

$$\mathbf{F}_{od} = -\mathbf{F}_{do} = m \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} \quad 2.2.2$$

Tak wprowadzona siła bezwładności (pozorna) tłumaczy naciąg sprężyny w zielonym układzie współrzędnych.

Fakt 2.2.1: Siła odśrodkowa

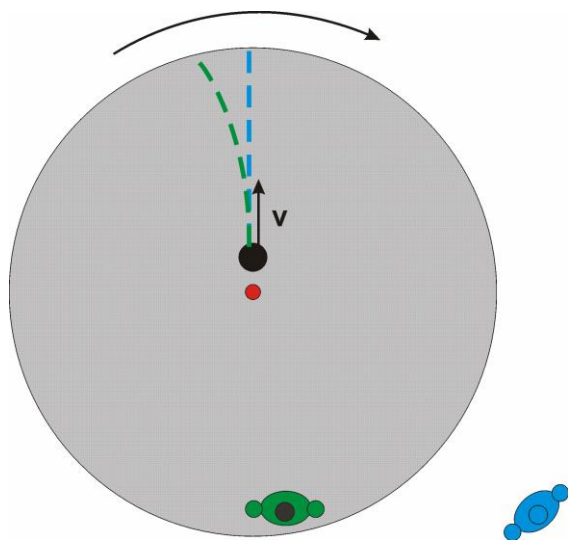
Siła odśrodkowa jest siłą bezwładności

Czy nie ma tu niekonsekwencji w stosunku do tego co mówiłem przy rysunku (2.2.1)? Tam stwierdziłem, że siły bezwładności nie mogą powodować zmian wewnątrz układu; działają na układ jako całość. Tu stwierdzam, że siły bezwładności tłumaczą naciągnięcie sprężyny, czyli zmieniają stan elementu bazy. Dobrze ale w przypadku rysunku (2.2.1) siły bezwładności zostały wprowadzone do układu inercjalnego związanego z badanym układem fizycznym, tak aby poprawnie go opisać z punktu widzenia układu nieinercjalnego. Jeżeli układ fizyczny jest związany z układem inercjalnym, to w tym układzie wszystkie siły muszą być rzeczywiste (przyłożone). W przypadku kosmicznej bazy wprowadzamy siły bezwładności w układzie fizycznym związanym z układem nieinercjalnym, tak by skompensować brak źródła przyłożonych sił wynikającego z ruchu przyspieszonego układu. Nie możemy powiedzieć, że walec obraca się dla kogoś kto w nim stoi. Nie ma więc jak wprowadzić siły dośrodkowej. Gdy popatrzymy z układu inercjalnego to widzimy, że na sprężynę i kulkę działa przyłożona siła dośrodkowa, która jest siłą jak najbardziej realną (przyłożoną). Gdy siły bezwładności wprowadzone w układzie nieinercjalnym działają w zastępstwie sił rzeczywistych, których przyczyny znikają na skutek przyspieszonego ruchu tego układu (na przykład obrotu układu współrzędnych związanego z bazą), to wtedy takie siły mogą odpowiadać za zamiany wewnątrz układu fizycznego.

2.3. Siła Coriolisa

Założmy, że mamy tarczę, która obraca się z prędkością kątową ω . Niech po tarczy ślizga się z prędkością $\mathbf{v}$ krążek od środka tarczy w kierunku jej brzegu (rys. 2.3.1). Tarcie pomiędzy tarczą, a krążkiem jest pomijalnie małe. Niech z tarczą obraca się zielony obserwator – związany z nim układ współrzędnych jest nieinercjalny (NUO). Obok, poza tarczą, stoi niebieski obserwator, z którym związany jest inercjalny układ współrzędnych (IUO).

Obserwator niebieski widzi obracającą się tarczę i krążek, który ślizga się po prostej od środka tarczy do jej brzegu (niebieska linia przerywana). Zielony obserwator nie widzi obrotu tarczy względem siebie, gdyż obraca się wraz z tarczą. Tor krążka z jego punktu widzenia nie jest linią prostą. Powiedzmy, że krążek zostawia zielony ślad na tarczy. Ponieważ tarcza ucieka spod krążka ślad nie będzie linią prostą, tylko krzywą, tak jak jest przedstawione na rysunku (2.3.1). Co powoduje zakrzywienie toru krążka w zielonym układzie współrzędnych? Oczywiście nie jest to kwestia działania rzeczywistej siły tylko nieinercyjności tego układu. Aby posłużyć się w tym układzie newtonowskim równaniem ruchu należy dodać siły pozorne. W naszym przykładzie będzie potrzebna tak zwana siła Coriolisa $\mathbf{F}_C$ (rys. 2.3.2). Ta nowa siła bezwładności odpowiada za zakrzywienie toru krążka w układzie nieinercyjnym



Rysunek 2.3.1. Po obracającej się tarczy ślizga się krążek w kierunku brzegu. Krążek obserwowany jest przez obserwatora w IUO (niebieski) i w NOU (zielony).

Siła Coriolisa $\mathbf{F}_C$ wyraża się wzorem

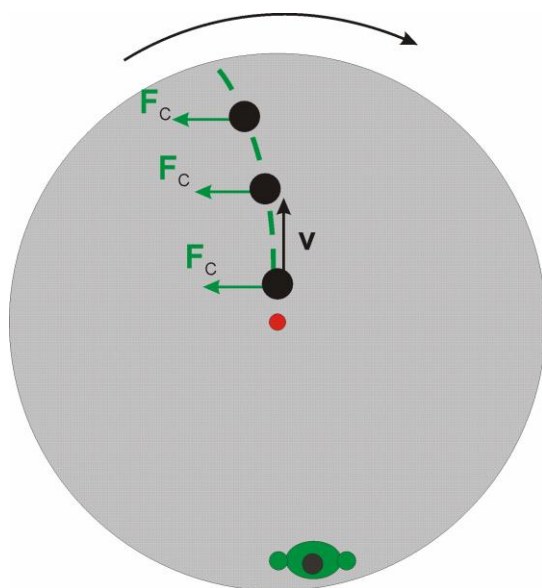
$$\mathbf{F}_C = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) \quad 2.3.1$$

Siła Coriolisa jest siłą bezwładności (pozorną), którą dodajemy do zbioru sił, wtedy gdy w obracającym się układzie współrzędnych analizujemy zachowanie obiektu, który się w tym układzie porusza.

Fakt 2.3.1: Siła Coriolisa

Siła Coriolisa jest siłą bezwładności

Wyprowadzeniem wzoru na siłę Coriolisa zajmę się po przeliczeniu przykładu



Rysunek 2.3.2. Dla obserwatora zielonego tor krążka jest zakrzywiony przeciwnie do kierunku obrotu tarczy, z którą obserwator jest związany. Aby opisać ruch krążka w swoim układzie, zielony obserwator, dodaje siłę pozorną – tzw. siłę Coriolisa.

2.4. Zadania

Zadania związane z siłą Coriolisa często dotyczą ruchu w układzie obracającej się Ziemi. Do ich poprawnego rozwiązania potrzebne jest minimum wiadomości o współrzędnych używanych w geografii do określenia położenia punktów na powierzchni Ziemi. Zacznę więc od małego repetytorium z geografii.

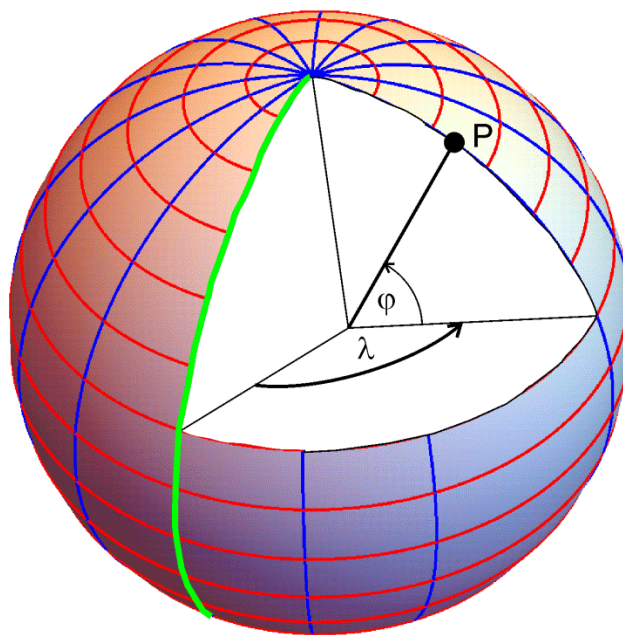
2.4.1. Współrzędne geograficzne

Ponieważ powierzchnia Ziemi jest z dobrym przybliżeniem powierzchnią sfery, położenie punktu na powierzchni Ziemi wygodnie opisywać jest we współrzędnych sferycznych, przy stałym promieniu r . Co to znaczy, że powierzchnia Ziemi jest z dobrym przybliżeniem powierzchnią sfery? Lepszym przybliżeniem byłaby elipsoida, ale odległość od środka Ziemi do jej powierzchni zmienia się nieznacznie, w porównaniu ze średnią wartością promienia Ziemi. Różnica między promieniem biegunowym a promieniem równikowym² to około 21km. Wydaje się, że 21km to sporo, ale promień Ziemi ma ponad 6300km i w tej skali 21 km to ledwie 0.3% promienia równikowego. Stąd się bierze nasze stwierdzenie, że Ziemię można w przybliżeniu traktować jako sferę. Możemy zatem jednoznacznie określić położenie punktu na powierzchni Ziemi podając dwa kąty we współrzędnych sferycznych. Ponadto powierzchnia Ziemi jest topologicznie równoważna ze sferą (§TV 4.1.1), co oznacza, że jeżeli odwzorować powierzchnię rzeczywistej Ziemi na powierzchni idealnej sfery, to przy tym odwzorowaniu

² Wartość promienia równikowego również zmienia się w niewielkim zakresie od punktu do punktu. Ziemia nie jest idealną elipsoidą.

nie musimy odwoływać się ani do cięcia ani do klejenia. W efekcie przybliżone współrzędne sferyczne (zakładamy stałość promienia r) zachowują ciągłość ruchu. Jak narysujemy na powierzchni Ziemi linię ciągłą, to odpowiednie współrzędne, będą się zmieniały od punktu do punktu w sposób ciągły. Podsumowując: niewielkie względne zmiany odległości między powierzchnią Ziemi, a jej środkiem nie mają znaczenia z punktu widzenia zastosowań w geografii, za wyjątkiem wąskiej grupy problemów.

Dwie współrzędne katowe, mają w geografii swoją nazwę: szerokość i długość geograficzna (rys. 2.4.1). Szerokość to kąt φ jaki tworzy prosta przechodząca przez środek Ziemi i dany punkt na jej powierzchni z płaszczyzną równika. Długość geograficzna to kąt λ jaki tworzy wielkie koło przechodzące przez bieguny i ten punkt (tzw. południk) z płaszczyzną wielkiego koła przechodzącego przez Greenwich w Anglii (południk zerowy). Równoleżniki są narysowane na czerwono, a południki na niebiesko, za wyjątkiem południka zerowego narysowanego na zielono.



Rysunek 2.4.1. Szerokość geograficzna (ang. *latitude*) punktu P na powierzchni Ziemi to kąt φ jaki tworzy prosta wychodząca ze środka Ziemi i wskazująca na ten punkt z płaszczyzną równika ziemskiego. Długość geograficzna (ang. *longitude*) punktu na powierzchni Ziemi, to kąt λ jaki tworzy wielkie koło przechodzące przez bieguny i ten punkt (tzw. południk) z płaszczyzną wielkiego koła przechodzącego przez Greenwich w Anglii (południk zerowy). Równoleżniki są narysowane na czerwono, a południki na niebiesko, za wyjątkiem południka zerowego narysowanego na zielono.

Definicja 2.4.1. Szerokość geograficzna

Szerokość geograficzna to kąt pomiędzy półprostą poprowadzoną ze środka kuli ziemskiej i przechodzącą przez dany punkt na jej powierzchni a płaszczyzną równika

Wynika z tego, że punkty na równiku mają szerokość geograficzną równą zero. Punkt na biegunie północnym ma szerokość geograficzną $+90^\circ$, oznaczaną również jako 90N (N = nord; angielskie północ). Punkt na biegunie południowym ma szerokość geograficzną -90° , oznaczaną również jako 90S (S = south; angielskie południe).

Definicja 2.4.2: Równoleżnik

Zbiór punktów o tej samej szerokości geograficznej nazywamy równoleżnikiem

Długość geograficzna danego punktu na powierzchni Ziemi to kąt dwuścienny λ , jaki tworzy wielkie koło przechodzące przez park w angielskim Greenwich i wielkie koło przechodzące przez dany punkt (rys. 2.4.1). Punkty położone na wschód od Greenwich mają długość geograficzną wschodnią (dodatnią), a punkty położone na zachód mają długość geograficzną wschodnią (ujemną).

Definicja 2.4.3: Długość geograficzna

Długość geograficzna danego punktu na powierzchni Ziemi to kąt dwuścienny λ , jakiego tworzy wielkie koło przechodzące przez park w angielskim Greenwich i wielkie koło przechodzące przez dany punkt

Wartość długości geograficznej zmienia się od -180° (180W; od angielskie west-zachód) do $+180^\circ$ (180E; od angielskiego east – wschód).

Definicja 2.4.4: Południk

Zbiór punktów o tej samej długości geograficznej nazywamy południkiem

Przykładowo współrzędne geograficzne Wrocławia to $51^\circ 06' 36''\text{N}$, $17^\circ 01' 20''\text{E}$, czyli w przybliżeniu 51 stopień szerokości północnej i 17 stopień długości wschodniej, Rio de Janeiro ma współrzędne $22^\circ 54' 30''\text{S}$, $43^\circ 11' 47''\text{W}$, czyli w przybliżeniu 23 stopień szerokości południowej i 43 stopień długości zachodniej.

Zwracam waszą uwagę na jeden fakt. W definicji szerokości geograficznej odnieśliśmy się do ziemskiego równika. Jakoś tak się dziwnie składa, że wiadomo gdzie ten równik jest. Jest to dziewięćdziesiąt stopni od obydwu biegunów. Ale skąd wiadomo gdzie są bieguny? Bieguny geograficzne wyznacza oś obrotu kuli ziemskiej. Sama sfera nie wyróżnia żadnego ze swych punktów, wiemy że sfera jest najbardziej symetryczną

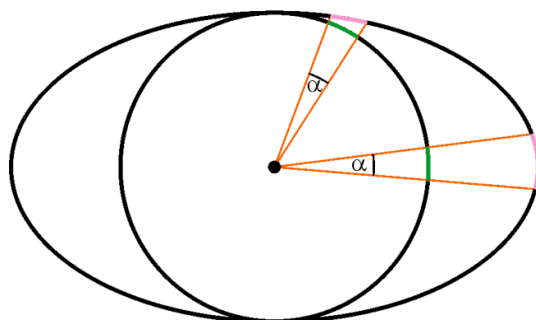
powierzchnią w przestrzeni euklidesowej. Ale obracająca się sfera ma wyróżnione dwa punkty – jedyne dwa punkty, które się nie przemieszczają. Oznacza to, że obrót łamie symetrię sfery. Obracająca się sfera nie jest tak symetryczna jak nieruchoma. W przypadku długości sprawa jest trudniejsza. Idąc wzdłuż równika nie spotkamy żadnego wyróżnionego punktu. Sami musimy zdecydować, który punkt na równiku będzie miał długość zero. Zgodnie z przyjętą definicją jest to taki punkt, że południk przechodzący przez ten punkt, przechodzi również przez wyróżnione miejsce w parku miejskim w angielskim Greenwich (rys. 2.4.2).



Rysunek 2.4.2. Z lewej Królewskie Obserwatorium Astronomiczne w Greenwich stojące na zerowym południku (źródło Wikipedia licencja: Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported); z prawej wiązka lasera wychodząca z budynku obserwatorium wskazuje linię południka zerowego. Wiązka skierowana jest na północ (źródło Wikipedia licencja: Creative Commons Attribution-Share Alike 2.5 Generic). Królewskie Obserwatorium w Greenwich zostało ufundowane przez króla Karola II w 1675 roku. Zajmowało się głównie pomiarami astrometrycznymi na potrzeby żeglugi. Dziś, ze względu na łunę światła z pobliskiego Londynu nie prowadzi się w nim obserwacji. Jednak ze względu na definicję zerowego południka należy do najbardziej znanych obserwatoriów astronomicznych współczesnego świata.

Łatwo policzyć, że na jeden stopień szerokości geograficznej lub długości geograficznej na równiku, przypada około 111km i 197m, z czego wynika że jedna minuta to 1.85km, a jedna sekunda to zaledwie 0.03km czyli jakieś 30m. Trzeba z tym jednak uważać. Ponieważ Ziemia nie jest idealną kulą, to przeliczenie kątów na długości wychodzi różnie dla różnych punktów na powierzchni Ziemi (rys. 2.4.3). Nawet na równiku przy kącie jednej sekundy sprawy nie są proste. Gdy trafimy na stromy stok z odległości 30m na sekundę kątową może się zrobić 35 metrów rzeczywiście zmierzonych w terenie. Gdy więc chcemy korzystać ze współrzędnych

kątowych, na przykład ściągniętych przez GPS, do dokładnego obliczania odległości w terenie musimy zachować ostrożność. Widać, z tego również, że podane przeze mnie współrzędne geograficzne Wrocławia czy Rio de Janerio, są tak dokładne, że muszą dotyczyć jakiegoś wybranego punktu tych miast, zwykle jest to centrum miasta. Możemy teraz przystąpić do rozwiązywania przykładowego zadania.



Rysunek 2.4.3. Dwa punktu na okręgu odległe o kąt α , mierzony względem środka okręgu wyznaczają na tym okręgu łuk (zaznaczony na zielono) o tej same długości niezależnie od orientacji kąta. Jest tak tylko dla okręgu. W przypadku elipsy długości łuku wyznaczone przez kąt α są różne dla różnych orientacji tego kąta.

Zadanie 2.4.1. ♣

Z wysokości h , na szerokości geograficznej φ , spada swobodnie kulka. Niech lokalne współrzędne punktu, leżącego na Ziemi pod spadającym ciałem, w chwili początkowej, wynoszą $(0, 0, 0)$. Chwila początkowa jest chwilą, w której ciało zaczyna spadać. Współrzędne zdefiniowane są tak, że oś y biegnie na linii południe-północ (rys. 2.4.4). Znajdź współrzędne punktu, w którym spadnie ta kulka.

Lokalne współrzędne zdefiniowane są na powierzchni sfery, na niewielkim jej obszarze. Lokalnie ten kawałek terenu traktujemy jak kawałek płaszczyzny – na odległościach rzędu kilku metrów krzywizna Ziemi nie gra istotnej roli. Znacznie bardziej odczuwalne są lokalne nierówności terenu, które też zaniedbujemy, bo nie mamy żadnych danych. Układ związany z Ziemią jest nieinercjalny. Równanie ruchu w nieinercjalnym układzie współrzędnych ma postać

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g}_p + \mathbf{F}_{\text{odśr}} + \mathbf{F}_{\text{cor}} \quad 2.4.1$$

Przez $\mathbf{g}_p$ oznaczyłem „czyste” przyspieszenie grawitacyjne. Siła odśrodkowa zmniejsza grawitacyjne przyspieszenie ziemskie, możemy więc zastąpić pierwsze dwie siły jednym wyrazem

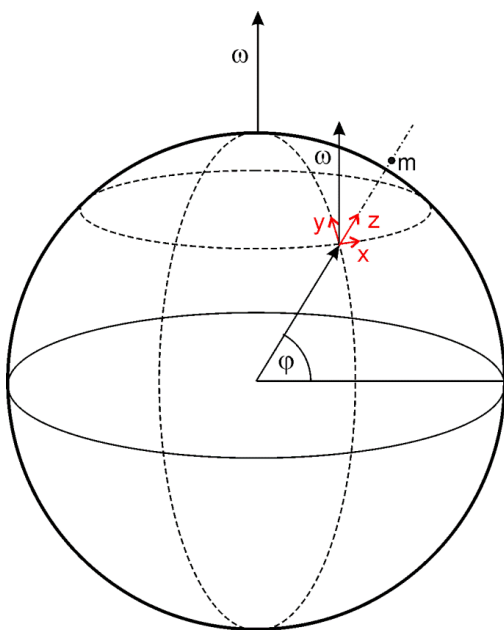
$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{cor}} \quad 2.4.2$$

Tutaj $\mathbf{g}$ jest przyspieszeniem mierzonym na danej szerokości geograficznej, czyli z uwzględnieniem siły odśrodkowej. Korzystając z (2.3.1) mamy

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = m\mathbf{g} + 2m(\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega}) \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} + 2\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} \quad 2.4.3$$

Wektor prędkości kątovej ma współrzędne

$$\boldsymbol{\omega}(0, \omega \cos(\varphi), \omega \sin(\varphi)) \quad 2.4.4$$



Rysunek 2.4.4. Ciało o masie m spada swobodnie, na szerokości geograficznej φ . Jego ruch opisujemy w układzie lokalnym narysowanym na czerwono. Układ ten jest związany z Ziemią i mając na uwadze ruch obrotowy Ziemi jest to NUO. Zauważ, że lokalny układ współrzędnych „nie zważa” na krzywiznę powierzchni Ziemi. Na odległościach rzędu kilku metrów ta krzywizna jest niezauważalna.

Zgodnie z rysunkiem (2.4.4) drugi wyraz prawej strony równania (2.4.3) możemy rozpisać we współrzędnych

$$\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\omega} = (\dot{y}\omega \sin(\varphi) - \dot{z}\omega \cos(\varphi), -\dot{x}\omega \sin(\varphi), \dot{x}\omega \cos(\varphi)) \quad 2.4.5$$

Równanie (3.4.3) przyjmie we współrzędnych postać układu trzech równań

$$\ddot{x} = 2\omega(\dot{y}\sin(\varphi) - \dot{z}\cos(\varphi)) \quad 2.4.6a$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x}\omega \sin(\varphi) \quad 2.4.6b$$

$$\ddot{z} = -g + 2\dot{x}\omega \cos(\varphi) \quad 2.4.6c$$

Niestety ten układ równań jest trudny do rozwiązania. Mamy tu przypadek, gdy układ równań otrzymany z modelu analizowanej sytuacji fizycznej okazał się dla nas technicznie za trudny. W takiej sytuacji, zanim się poddamy, warto jeszcze poszukać możliwości sensownego uproszczenia modelu. Pierwszym krokiem jest poszukanie w układzie równań wielkości, które są tak małe, że ich pominięcie zmieni wynik w akceptowalnie małym stopniu. Gdy mimo tych wysiłków równanie nie da się rozwiązać analitycznie zawsze pozostają metody numeryczne.

Wektor prędkości kątowej dla obrotu Ziemi ω ma małą wartość: $\omega \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$. Zatem efekty wywołane przez obrót Ziemi są małe. Przyjmę w pierwszym kroku, że wartość prędkości kątowej można pominąć, czyli że układ równań (2.4.6) przyjmie postać

$$\ddot{x} = 0 \quad 2.4.7a$$

$$\ddot{y} = 0 \quad 2.4.7b$$

$$\ddot{z} = -g \quad 2.4.7c$$

Przy warunkach początkowych $v_{0x}=v_{0y}=0$ mamy

$$\dot{x} = 0 \quad 2.4.8a$$

$$\dot{y} = 0 \quad 2.4.8b$$

$$\dot{z} = -gt + v_{0z} \quad 2.4.8c$$

Jak należało się spodziewać dało to nam rozwiązania takie samo jak dla swobodnego spadku. Pomijając całkowicie wartość prędkości kątowej ω uwolniliśmy jednocześnie nasz model od wpływów wywołanych przez obrót Ziemi. To trochę za brutalne przybliżenie. Spodziewamy się jednak, że składowe wektora prędkości v_x i v_y jakie wynikają z równań (2.4.6) są małe, gdyż przy małej wartości ω siła Coriolisa jest bardzo mała w porównaniu z siłą grawitacji. Ta bardzo mała siła działa przez krótki czas (czas spadku przy niedużych wysokościach jest krótki) i w bardzo małym stopniu może zmienić składowe prędkości v_x i v_y . Wobec tego w porównaniu ze składową z-tową prędkości $v_z = \dot{z}$ (tutaj kulka istotnie zyskuje na skutek działania siły grawitacji) pozostałe składowe można pominąć (kładziemy: $\dot{x} = \dot{y} = 0$). Nadto siła Coriolisa nie wpływa na składową z-tową prędkości. W efekcie układ (2.4.6) przejdzie w

$$\ddot{x} = -2\omega \dot{z} \cos(\varphi) \quad 2.4.9a$$

$$\ddot{y} = 0 \quad 2.4.9b$$

$$\ddot{z} = -g \quad 2.4.9c$$

Dla równania (2.4.9c) mamy już rozwiązane (2.4.8c). Po wstawieniu (2.4.8c) do (2.4.9a) mamy

$$\ddot{x} = -2\omega v_{0z} \cos(\varphi) + 2\omega g t \cos(\varphi) \quad 2.4.10$$

Równanie to jest łatwo scałkować. Jego pierwsza część jest stała względem czasu i ma wymiar przyspieszenia. Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym wynosi

$$x_I = -\frac{1}{2}2\omega v_{0z}\cos(\varphi)t^2 \quad 2.4.11$$

Pierwsze całkowanie drugiej części daje

$$v_{xII} = 2\omega g\cos(\varphi) \int_0^t t dt = \omega g\cos(\varphi)t^2 \quad 2.4.12$$

Drugie całkowanie daje

$$x_{II} = \omega g\cos(\varphi) \int_0^t t^2 dt = \frac{1}{3}\omega g\cos(\varphi)t^3 \quad 2.4.13$$

Stąd całkowite przesunięcie w kierunku osi x wynosi

$$x = x_I + x_{II} = -\omega v_{0z}\cos(\varphi)t^2 + \frac{1}{3}\omega g\cos(\varphi)t^3 \quad 2.4.14$$

Obliczmy dla przykładu ile wynosi, spowodowane siłą Coriolisa, odchylenie od pionowego toru dla kulki, we Wrocławiu ($\varphi=51^\circ\text{N}$), przy spadku z wieży o wysokości $h=100\text{m}$. Zakładamy, że w momencie rozpoczęcia ruchu prędkości kulki wynosiła zero ($v_{0z}=0$). Czas spadania kulki wynosi

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 4.5\text{s} \quad 2.4.15$$

Odchylenie w kierunku wschodnim wynosi

$$x = \frac{1}{3}\omega g\cos(\varphi)t^3 \approx 0.014\text{m} \quad 2.4.16$$

Obliczone odchylenie jest rzędu 1.4cm. Nie wydaje się to dużą wielkością, ale odchylenie spowodowane przez siłę Coriolisa jest mierzalne, nawet przy spadku metalowych kulek z wysokości kilkudziesięciu metrów. Wykazane tu odchylenie od pionu toru kulki było stwierdzone doświadczalnie przez Roberta Hooke'a jeszcze przed opublikowaniem praw dynamiki Newtona. Eksperymenty Hooke'a związane były z wciąż jeszcze żywą w jego czasach dyskusją na temat ruchu obrotowego Ziemi.

Z otrzymanego wzoru (2.4.14) widać, że odchylenie spowodowane przez siłę Coriolisa będzie największe na równiku, gdzie $\varphi=0$ i zerowe na biegunie północnym gdzie $\varphi=90^\circ\text{N}$ lub południowym, gdzie $\varphi=90^\circ\text{S}$.

Jak sprawa wygląda z IUO. Powiedzmy, że zdarzenie obserwuje astronauta znajdujący się w IUO. Kulka zaczyna spadać na wysokości h . Tuż przed upuszczeniem jej prędkość poprzeczna (równoległa do powierzchni Ziemi) jest równa prędkością punktu na kole o promieniu R_z+h obracającym się z okresem $T_z=24h$. R_z jest oczywiście promieniem Ziemi.

$$v_k = \frac{2\pi(R_z + h)\cos(\varphi)}{T_z} \quad 2.4.17$$

Prędkość poprzeczna punktu P znajdującego się na powierzchni Ziemi pod kulą wynosi.

$$v_z = \frac{2\pi R_z \cos(\varphi)}{T_z} \quad 2.4.18$$

Punkt na powierzchni Ziemi jest wolniejszy od kulki na szczycie wieży. Różnica prędkości poprzecznej wynosi

$$\delta v = v_k - v_z = \frac{2\pi h \cos(\varphi)}{T_z} = 0.0046 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad 2.4.19$$

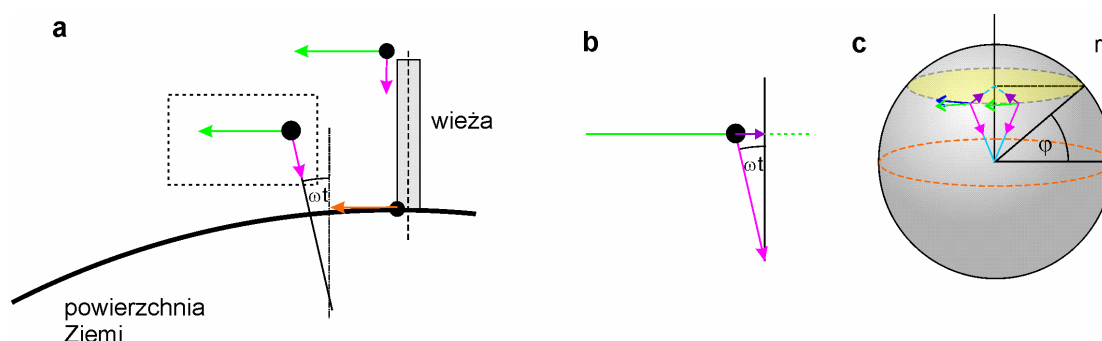
Różnica prędkości to niecałe 5mm/s. Czas spadania kulki dany jest wzorem (3.4.15). Zatem w momencie upadku kulka wyprzedzi punkt P o

$$\begin{aligned} \delta s &= \delta v \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2\pi h \cos(\varphi)}{T_z} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{1}{2} \omega \cos(\varphi) \sqrt{\frac{8h^3}{g}} \\ &= \frac{1}{2} \omega g \cos(\varphi) \sqrt{\frac{8h^3}{g^3}} = \frac{1}{2} \omega g \cos(\varphi) t^3 \\ &\approx 0.021 \text{m} \end{aligned} \quad 2.4.20$$

Jak to mówią Amerykanie (szczególnie ci w kosmosie) – *Houston, we have a problem*³. Wynik (2.4.16) jest znacząco mniejszy od (2.4.20). Jak wiemy mamy dwie możliwości: albo zawodzą reguły, czyli prawa dynamiki Newtona, albo z którymś z modeli jest coś nie tak (zobacz dyskusję o odkryciu Neptuna (§TI 4)). Zwykle zanim atakuje się reguły dobrze przyglądamy się modelowi, który zawsze zawiera w sobie uproszczenia. Rysunek (2.4.5) wskazuje na takie uproszczenie. W swym locie w kierunku Ziemi kulka doznaje lekko wstecznego działania siły grawitacji. Gdyby kulka spadała wzdłuż linii pionu tej wstecznej składowej nie byłoby. Wsteczna składowa jest niewielka, ale i efekt Coriolisa jest niewielki i nawet,

³ Choć załoga Apollo 13 wyraziła się nieco inaczej – *Huston we've had a problem here*.

zdawałoby się, niewielka poprawka może mieć znaczenie. Patrząc na rysunek (2.4.5) i czytając jego podpis możemy zapisać



Rysunek 2.4.5. a) z inercyjnego układu współrzędnych kulka na szczycie wieży ma większą prędkość (zielony wektor) niż punkt u podstawy wieży (pomarańczowy wektor). Kulka zaczyna wyprzedzać punkt na Ziemi. Jednocześnie działa na nią siła grawitacji, która zmienia kierunek wektora prędkości (fioletowe strzałki pokazują kierunek działania siły grawitacji). Po pewnym czasie kulka przesuwa się na lewo od wieży. Nad tym nowym punktem zmienia się kierunek pionu, tak że składowa pozioma prędkości ulega zmniejszeniu. Dla obserwatora w IUO składowa pozioma ma w każdej chwili ten sam kierunek; b) rysunek pokazuje powiększony obszar zawarty na rysunku (a) w prostokącie. W kierunku składowej poziomej działa siła hamująca (ciemno fioletowa strzałka); c) przy obliczaniu siły hamującej liczą się składowe siły grawitacji leżące w płaszczyźnie równoleżnika o szerokości φ (żółte koło). Przesunięcie punktów wzdłuż równoleżnika jest przesadzone na potrzeby ilustracji. Zielony wektor pokazuje wektor prędkości poziomej kulki w momencie zrzutu z wieży. Wektor niebieski w jakiś czas później, kiedy kulka odsunęła się od wieży. Przy wektorze niebieskim narysowany jest ponownie wektor zielony. Rysunek pokazuje, że zmiany kierunku prędkości zachodzą w płaszczyźnie równoleżnika, Aby otrzymać odpowiednie składowe siły (ciemnofioletowe strzałki) wektor siły (przyspieszenia) należy pomnożyć przez $\cos(\varphi)$.

$$g_w = -g \sin(\omega t) \cos(\varphi) \approx -g \omega t \cos(\varphi) \quad 2.4.21$$

Przybliżenie bierze się stąd, że wartość częstości kątowej ω jest mała przez co argument funkcji sinus jest mały i dla kątów wyrażonych w radianach sinus możemy przybliżyć wartością kąta (DB 3.3). Wsteczne przyspieszenie działa przez cały czas spadania i powoduje zmniejszenie prędkości δv o wartość

$$v_k = \int_0^t g_w dt \quad 2.4.22$$

Stąd mamy

$$\begin{aligned} v_k(t) &= \int_0^t -g\omega t \cos(\varphi) dt = -\frac{1}{2} g\omega \cos(\varphi) t^2 \Big|_0^t \\ &= -\frac{1}{2} g\omega \cos(\varphi) t^2 \end{aligned} \quad 2.4.23$$

Wzór (2.4.23) pokazuje jak obliczone opóźnienie zmniejsza różnice prędkości δv . To zmniejszenie prędkości zmniejszy, w czasie (2.4.15), przesunięcie spadającej kulki o

$$s_k = \int_0^t v_k(t) dt = \int_0^t -\frac{1}{2} g\omega \cos(\varphi) t^2 dt = -\frac{1}{6} g\omega \cos(\varphi) t^3 \quad 2.4.24$$

Dodając poprawkę s_k do przesunięcia (3.4.20) mamy

$$\delta s_N = \frac{1}{2} \omega g \cos(\varphi) t^3 - \frac{1}{6} g\omega \cos(\varphi) t^3 = \frac{1}{3} g\omega \cos(\varphi) t^3 \quad 2.4.25$$

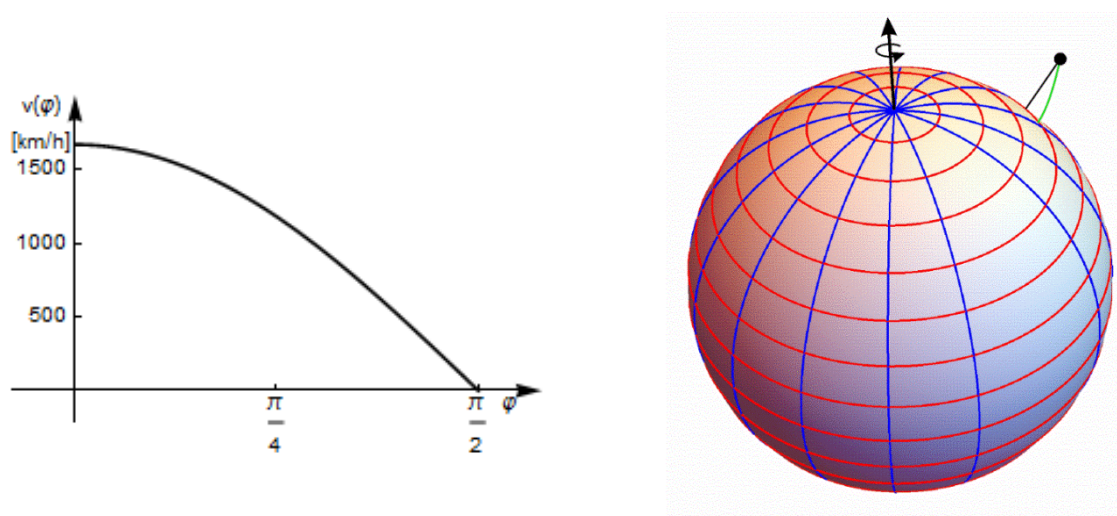
Czyli taki sam wzór jak obliczony poprzednio z użyciem siły Coriolisa (2.4.16). Widać, że w układzie nieinercyjnym, z zastosowaniem siły Coriolisa, rozwiązanie było zadania szło prostszym torem. Dlatego często rozwiążemy różne problemy w układach nieinercyjnych.

No dobrze, skoro efekty są małe, to może należałoby uwzględnić również siły oporu powietrza? Pewnie tak, siły oporu powietrza zmieniają prędkości i czas lotu kulki. W 4.5 sekundy kamień, przy braku oporów powietrza osiągnąłby prędkości rzędu 44m/s (prawie 160 km/h). Przy takiej prędkości nawet metalowa kulka istotnie poczuje siły oporów aerodynamicznych. Zwiększy to czas spadania i zmniejszy prędkość z jaką kulka uderzy o Ziemię. Ale nie wpłynie istotnie na δv (2.4.19), które jest małe, zatem opory powietrza działająca na składową δv są nieduże. Większy czas spadania powinien zwiększyć odchylenie Coriolisa. Jednak dla rozważanego tu przypadku różnice nie przekraczają 10%. Dokładniejszą dyskusję efektu Coriolisa na spadające ciała, również z uwzględnieniem oporu powietrza można znaleźć w artykule⁴.

Omawiany tu problem odchylenia toru spadającego kulki był przedmiotem poważnej analizy naukowej. Zgodnie z koncepcją Arystotelesa swobodnie rzucona kulka powinna przestać poruszać się w kierunku poziomym do Ziemi, gdyż nie działa na niego żadna pozioma siła. Biorąc pod

⁴ M. S. Tiersten and H. Sodak, *Dropped objects and other motions relative to the noninertial earth*, Am. J. Phys. **68** 129-142 (2000)

uwagę dużą prędkość punktów na Ziemi (poza biegunami) należało się spodziewać dużego odchylenia miejsca upadku spowodowanego ucieczką powierzchnia Ziemi spod kulki (rys. 2.4.6). Przyjęcie zasady względności ruchu oznaczało⁵, że puszczonego kamień zachowywał swoją prędkość poprzeczną. Nie mniej powyżej powierzchni Ziemi miał tę prędkość odrobinę większą niż punkty leżące na powierzchni Ziemi. Spodziewano się zatem odchylenia toru kamienia ale dużo, dużo mniejszego niż w przypadku teorii Arystotelesa.



Rysunek 2.4.6. Z lewej - zależność prędkości poprzecznej od długość geograficznej; z prawej - według antycznej dynamiki swobodnie puszczone, na pewnej wysokości, kulka nie obraca się wraz z Ziemią (nie ma zasady bezwładności), tylko spada w dół. Jednak prędkości punktów na powierzchni obracającej się Ziemi są bardzo duże. W czasie sekundowego spadku Ziemia na średnich szerokościach geograficznych może się przesunąć o 300-700m, a takiego przesunięcia nie obserwujemy. Przed wprowadzeniem zasady bezwładności był to koronny argument przeciwko koncepcji obracającej się Ziemi. Na rysunku czarna kreska pokazuje jak powinna spadać masywna kulka przy braku obrotu Ziemi, zielona linia pokazuje jak, według antycznych wyobrażeń, powinien wyglądać tor kamienia (dla obserwatora na Ziemi) przy obracającej się Ziemi.

Zmierzenie tego niewielkiego odchylenia traktowano jako potencjalny dowód na ruch obrotowy Ziemi, co jeszcze w początku XVIII wieku było istotnym zagadnieniem. O pomiarach prowadzonych przez Hooke'a już wspominałem. Rozwój techniki pomiarowej pozwalał na coraz precyzyjniejsze testy. Na początku XVIII wieku w 1803 roku przeprowadzono w Schlebusch w Niemczech staranny eksperyment. Do szybu kopalni o głębokości 90m zrzucono 29 żelaznych kul. Zmierzone

⁵ Co jest równoznaczne przyjęciem, że nie istnieje fizyczny miernik prędkości własnej

średnie odchylenie położenia od linii pionu wynosiło 8.5mm. Odchylenia obliczone przez dwie znakomitości ze świata nauki Carla Gaussa i Simona Laplace'a wynosiło 8.8mm. W 1831 eksperyment powtórzono we Freiburgu w Saksonii. Tym razem szyb miał 158.5m. Dokonano 106 zrzutów kul. Zmierzone średnie odchylenie wynosiło 28.3mm, przy wyliczonej wartości 27.5mm.

2.5. Siła Coriolisa – wyprowadzenie ♣

Spróbujemy dojść do wzoru (2.3.1) na siłę Coriolisa. Rozważę dwa układy odniesienia – niebieski, który jak zwykle jest IUO i zielony, który jest NUO. Niech zielony układ ma swój początek w tym samym punkcie co niebieski ale dodatkowo obraca się wokół osi A z prędkością kątową ω . Zajmę się wektorem wodzącym $\mathbf{R}$ punktu materialnego P. W obu układach współrzędnych prędkość zmian tego wektora liczymy jako jego pochodną po czasie. W układzie nieinercyjnym (zielonym) wybiorę trzy jednostkowe wektory bazy (wersory) osi ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$). W układzie zielonym wektor $\mathbf{R}$ ma postać

$$\mathbf{R} = a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y + a_z \hat{\mathbf{e}}_z \quad 2.5.1$$

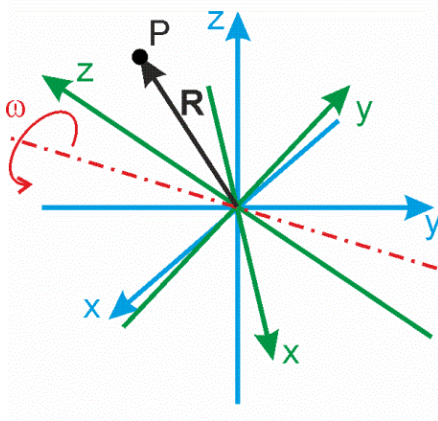
Tutaj liczby (a_x , a_y , a_z) to współrzędne wektora $\mathbf{R}$ w układzie obracającym się (zielonym). Prędkość punktu materialnego P ma wartość

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \frac{d}{dt} (a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y + a_z \hat{\mathbf{e}}_z) \\ &= \frac{da_x}{dt} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{da_y}{dt} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{da_z}{dt} \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \quad 2.5.2$$

Mogłem tak zapisać, gdyż wersory osi ($\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$) są stałe w swoim własnym układzie współrzędnych.

Uwaga 2.5.1: znaczenie kolorów we wzorach

Kolorem niebieskim oznaczam przyrosty (pochodne) liczone względem układu inercyjnego, a zielonym nieinercyjnego.



Rysunek 2.5.1. Zielony układ obraca się wokół osi A (czerwona przerywana linia) z prędkością kątową ω . Układ niebieski jest układem inercyjnym.

W układzie inercyjnym (niebieskim) wersory z układu zielonego kręcą się wraz z całym układem zielonym (nieinercyjnym). Musimy zatem uwzględnić zmienność w czasie wersorów ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$).

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{d\hat{\mathbf{e}}_x}{dt} a_x + \frac{da_y}{dt} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{d\hat{\mathbf{e}}_y}{dt} a_y + \frac{da_z}{dt} \hat{\mathbf{e}}_z + \frac{d\hat{\mathbf{e}}_z}{dt} a_z \quad 2.5.3$$

Układ niebieski ma swoje własne nieruchome wersory, ale teraz patrzymy, z układu niebieskiego na wektor $\mathbf{R}$ przedstawiony jako suma (2.5.1) wersorów ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$) i współrzędnych (a_x, a_y, a_z) z układu zielonego. W układzie niebieski zmieniają się i liczby (a_x, a_y, a_z) i wersory ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$). Stąd do starego wyrażenia z równania w układzie zielonym dochodzi dodatkowe wyrażenia opisujące zmienność wersorów układu zielonego z punktu widzenia układu niebieskiego. Połowa wyrazów z prawej części wzoru (2.5.3) składa się na prawą stronę wyrażenia (2.5.2), czyli na pochodną wektora $\mathbf{R}$ po czasie liczoną w układzie zielonym.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \frac{da_x}{dt} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{da_y}{dt} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{da_z}{dt} \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= \frac{da_x}{dt} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{da_y}{dt} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{da_z}{dt} \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \quad 2.5.4$$

Musimy poradzić sobie z wyrażeniami typu $\frac{d\mathbf{e}_x}{dt}$. To znaczy nie musimy sobie radzić, bo wyrażenie tego typu zostało już wcześniej obliczone (TXxx)

$$\frac{d\hat{\mathbf{e}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} \quad 2.5.5$$

Gdzie $\mathbf{e}$ jest wektorem związanym z układem obracającym się. Korzystając z tego wzoru możemy zapisać

$$\frac{d\hat{e}_x}{dt}a_x + \frac{d\hat{e}_y}{dt}a_y + \frac{d\hat{e}_z}{dt}a_z = a_x\omega \times \hat{e}_x + a_y\omega \times \hat{e}_y + a_z\omega \times \hat{e}_z \quad 2.5.6$$

Prędkość kątową możemy wyłączyć przed nawias.

$$a_x\omega \times \hat{e}_x + a_y\omega \times \hat{e}_y + a_z\omega \times \hat{e}_z = \omega \times (a_x\hat{e}_x + a_y\hat{e}_y + a_z\hat{e}_z) = \omega \times \mathbf{R} \quad 2.5.7$$

Wstawiając do wzoru (2.5.3) wyrażenia (2.5.4) i (2.5.7) mam

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \omega \times \mathbf{R} \quad 2.5.8$$

Wzór (2.5.8) wiąże pochodną wektora $\mathbf{R}$ obliczoną w układzie inercjalnym (niebieski) z pochodną tego wektora obliczoną w układzie obracającym się (zielony).

Wzór (2.5.8) możemy potraktować jako ogólne wyrażenie opisujące transformację pochodnej dowolnego wektora $\mathbf{v}$ między układem inercjalnym, a układem nieinercjalnym obracającym się względem inercjalnego z prędkością kątową ω . Jest tak dlatego, że chociaż w wyprowadzeniu tego wzoru oparłem się na przykładzie wektora wodzącego $\mathbf{R}$, to nigdzie z faktu, że $\mathbf{R}$ jest wektorem wodzącym nie korzystałem. $\mathbf{R}$ mógłby równie dobrze być wektorem czegoś innego i wyprowadzenie dalej wyglądałoby tak samo. Zatem dla dowolnego wektora $\mathbf{v}$ mamy

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \omega \times \mathbf{v} \quad 2.5.9$$

Aby przejść do dynamiki musimy obliczyć drugą pochodną wektora $\mathbf{R}$ po czasie w obu układach odniesienia i powiązać ze sobą tak otrzymane wzory. Zacznę od wzoru (2.5.8). Obliczam drugą pochodną z lewej i prawej strony tego wzoru w układzie inercjalnym (niebieskim).

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{d\mathbf{R}}{dt}}_{\mathbf{W}} + \omega \times \mathbf{R} \right] \quad 2.5.10$$

Wyrażenie pod pochodną z prawej strony jest pewnym wektorem $\mathbf{W}$

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \omega \times \mathbf{R} \quad 2.5.11$$

Obliczam, korzystając ze wzoru (2.5.9), postać pochodnej wektora $\mathbf{W}$ w układzie niebieskim poprzez pochodną w układzie zielonym,

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt} = \frac{d\mathbf{W}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} \quad 2.5.12$$

Po wstawieniu tego wyrażenia do (2.5.10) wyrażenia na pochodną $\mathbf{W}$ mam

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} &= \frac{d\mathbf{W}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{W} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \right] + \boldsymbol{\omega} \times \left[\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \right] \end{aligned} \quad 2.5.13$$

Obliczam wyrażenie z prawej strony

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \right] = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} \quad 2.5.14a$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \left[\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \right] = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad 2.5.14b$$

Zbierając mam

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad 2.5.15$$

W układzie inercyjnym równanie ruchu dla cząstki o masie m , ma postać

$$m \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F} \quad 2.5.16$$

Gdy przechodzę do układu nieinercyjnego mam (na podstawie (2.5.15))

$$m \left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + 2 \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \right) = \mathbf{F} \quad 2.5.17$$

Przenoszę „nadmiarowe” człony o wymiarze siły na prawą stronę

$$m \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F} - m \left(2 \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \right) \quad 2.5.18$$

Co mogę zapisać w postaci

$$m \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad 2.5.19$$

Ponieważ w ostatnim wzorze wszystkie pochodne liczone są teraz w układzie nieinercyjnym zrezygnowałem ze stosowania kolorów. Mamy dwie siły bezwładności, pierwsza z nich to siła Coriolisa

$$\mathbf{F}_c = -2m\dot{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\omega} \quad 2.5.20$$

Druga to zapisana poprzez iloczyn wektorowy siła odśrodkowa

$$\mathbf{F}_{od} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \quad 2.5.21$$

Dla przekształcenia tego wyrażenia skorzystamy ze tożsamości wektorowej (DB 2.5.6). Podstawiając w tej tożsamości

$$\mathbf{A} \rightarrow \boldsymbol{\omega}; \quad \mathbf{B} \rightarrow \boldsymbol{\omega}; \quad \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}; \quad 2.5.23$$

Otrzymamy

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{od} &= -m [\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})] = -m[\mathbf{0} - \mathbf{R}\omega^2] \\ &= m\mathbf{R}\omega^2 \end{aligned} \quad 2.5.24$$

Tutaj założyliśmy, że ruch odbywa się po okręgu tak, że wektory $\boldsymbol{\omega}$ i $\mathbf{R}$ są wzajemnie prostopadłe, zatem ich iloczyn skalarny jest równy zeru. Ostatnie wyrażenie jest już nam znane. Ze znakiem minus pojawiło się jako wyrażenie na siłę dośrodkową w ruchu po okręgu (wzór TVI 5.6).

Powróćmy do wzoru na siłę Coriolisa (2.5.21). Aby siła ta była różna od zera prędkość ciała mierzona w układzie nieinercyjnym musi być różna od zera. Widać przy tym, że im większa prędkość ciała tym większa siła Coriolisa. Większa wartość prędkości obrotowej $\boldsymbol{\omega}$ tarczy również zwiększa wartość siły Coriolisa. Dodatkowo, gdy prędkość liniowa jest równoległa do prędkości kątowej, to siła Coriolisa jest równa zeru. Ogólnie, gdy obliczamy siłę Coriolisa, to z wektora prędkości kątowej układu współrzędnych możemy wydzielić składową równoległą do wektora prędkości ciała, gdyż składowa ta nie wnosi niczego do siły Coriolisa.

Do tej pory zakładaliśmy, że układ niebieski obraca się ze stałą prędkością kątową względem układu zielonego. Co się stanie jeżeli ta prędkość kątowa nie będzie stała? Nic nadzwyczajnego do bilansu sił bezwładności będzie trzeba dodać jeszcze jedną siłę wyrażającą się wzorem

$$\mathbf{F}_E = -m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} \quad 2.5.25$$

Siła ta jest prostopadła zarówno do wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ jak i do promienia $\mathbf{R}$. Jej wyprowadzenie przebiega podobnie jak wyprowadzenie innych sił bezwładności, tyle że powtarzając nasze dotychczasowe rachunki nie można zakładać, że $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$, co w operacji różniczkowania wyrzuci dodatkowy niezerowy człon. Siła $\mathbf{F}_E$ nie ma powszechnie ustalonej nazwy. Idąc za znanym podręcznikiem Corneliusa Lanczosa⁶ będą ją nazywał siłą bezwładności Eulera.

⁶ Cornelius Lanczos, *The variational principles of mechanics*, Oxford University Press, 1949.

Definicja 2.4.1. Siła bezwładności Eulera

W nieinercyjnym obracającym się z zmienną prędkością kątową ω układzie odniesienia siła bezwładności dana wzorem (2.5.25) nazywana jest siłą bezwładności Eulera

Mając na uwadze tą dodatkową siłę bezwładności (wyrażenie (2.5.19)) przyjmijmy postać:

$$m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} \quad 2.5.26$$

2.6. Praca w układach nieinercyjnych

Zastanówmy się nad kwestią pracy w układach nieinercyjnych. Rozważmy w tym celu inercjalny układ współrzędnych K oraz dowolny inny układ K'. Niech $\mathbf{r}(t)$ będzie wektorem położenia cząstki w układzie K, $\mathbf{R}(t)$ położeniem początku układu K' mierzonym względem układu K, a $\mathbf{r}'(t)$ położeniem cząstki mierzonym względem układu K'. Wtedy, zgodnie z (1.1.6) mamy

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}(t) \quad 2.6.1a$$

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{V}(t) \quad 2.6.1b$$

Wzór (2.6.1a) możemy przepisać w postaci

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{R}_0 - \int_0^t \mathbf{V}(t'') dt'' \quad 2.6.2a$$

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0 + \int_0^t \mathbf{A}(t'') dt'' \quad 2.6.2b$$

Tutaj $\mathbf{R}_0$ i $\mathbf{V}_0$ oznaczają prędkość i położenie początkowe, $\mathbf{A}$ to przyspieszenie układu K' względem układu K. Jak widzisz dużymi literami oznaczam relacje między układem K i K'. Pod całkami czas występuje z podwójnym primem (bisem). W ten sposób odróżniam współrzędną czasową, po której całkujemy od granicy całkowania t . Pod całką mamy zmienną czasową, a granica jest konkretną chwilą, do której całkujemy. Po obliczeniu całki nieoznaczonej wstawiamy granice całkowania i symbole t'' znikają na rzecz t . Oczywiście symbol t w granicy sugeruje, że za t możemy podstawić dowolną liczbę, niemniej dla całki jest to konkretna wartość t .

W układzie N cząstek, dla i -tej cząstki, drugie prawo Newtona, w układzie K' przyjmuje postać (2.1)

$$m_i \frac{d\mathbf{v}'_i}{dt} = \mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}(t) \quad 2.6.3$$

Ostatni człon reprezentuje siły bezwładności. Mnożąc obie strony (2.6.3) przez $d\mathbf{r}'_i$ otrzymujemy

$$m_i \mathbf{v}' d\mathbf{v}' = [\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}(t)] d\mathbf{r}'_i \quad 2.6.4$$

gdzie skorzystałem z zależności

$$d\mathbf{r}'_i = \mathbf{v}'_i dt \quad 2.6.4a$$

Lewa strona (2.6.4) jest elementarnym przyrostem energii kinetycznej, a prawa strona elementarną pracą wykonaną przez siły przyłożone (rzeczywiste) i bezwładności (pozorne). Mamy zatem równość

$$dE'_k = dW' \quad 2.6.5$$

Co jest związkiem takim jak w układzie inercjalnym, z tym, że musimy pamiętać o obecności sił bezwładności.

Energię kinetyczną i pracę w układzie K' możemy wyrazić przez wielkości mierzone w układzie K . W tym celu do wzoru (2.6.4) wstawiamy relacje (2.6.1a (po zróżniczkowaniu), 2.6.1b (po zróżniczkowaniu), 2.6.3, (prawą stronę)).

$$dE'_k = m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) \cdot (d\mathbf{v}_i - \mathbf{A} dt) \quad 2.6.6a$$

$$dW'_i = (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{A}) \cdot (d\mathbf{r}_i - \mathbf{V} dt) \quad 2.6.6b$$

Ostatni wzór możemy rozbić na dwa składniki

$$dW'_i = \mathbf{F}_i (d\mathbf{r}_i - \mathbf{V} dt) - (m_i \mathbf{A}) (d\mathbf{r}_i - \mathbf{V} dt) = dW'_{p;i} + dW'_{b;i} \quad 2.6.8$$

Tutaj $dW'_{p;i}$ jest elementarną pracą sił przyłożonych do i -tej cząstki, $dW'_{b;i}$ jest elementarną pracą sił bezwładności nad i -tą cząstką.

Całkowita elementarna praca sił bezwładności nad układem cząstek wynosi

$$dW'_b = -\mathbf{A} \sum_{i=1}^N m_i (d\mathbf{r}_i - \mathbf{V} dt) \quad 2.6.9$$

Wracając do współrzędnych primowanych (2.6.4) pracę tę możemy zapisać w postaci

$$dW'_b = -\mathbf{A} \sum_{i=1}^N m_i d\mathbf{r}'_i \quad 2.6.10$$

Co w układzie środka masy daje wartość zerową, gdyż

$$-\mathbf{A} \sum_{i=1}^N m_i d\mathbf{r}'_i = -M \mathbf{A} d \left(\frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M} \right) = 0 \quad 2.6.11$$

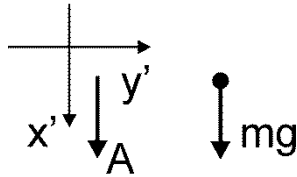
Mamy kolejną ciekawą właściwość środka masy.

Fakt 2.6.1

W układzie środka masy, praca sił bezwładności, generowanych przez liniowe przyspieszenia własne tego układu, jest równa zero

Zaznaczyłem, że siły bezwładności generowane są przez liniowe przyspieszania własne układu, gdyż jak się okaże, gdy układ się obraca nie jest to prawdą (§TXV 2.1.1).

Przeanalizujmy następujący przykład. Kulka spada swobodnie w polu grawitacyjnym Ziemi. Wiążemy układ odniesienia K z Ziemią zakładając, że jest on wystarczająco inercjalny do naszych celów (rys. 2.6.1). Niech układ K' spada pionowo z przyspieszeniem $\mathbf{A}$ w kierunku Ziemi. Obliczmy pracę sił bezwładności w układzie K'.



Rysunek 2.6.1. Kulka spada swobodnie w ziemskim polu grawitacyjnym. Układ inercjalny związany jest z Ziemią. Układ nieinercjalny K' zbliża się do powierzchni Ziemi z przyspieszeniem $\mathbf{A}$.

Problem da się sprowadzić do zagadnienia jednowymiarowego. Zgodnie ze wzorem (2.6.8) praca sił przyłożonych wynosi

$$W'_p = mg \int_{x_p}^{x_k} dx - mg \int_0^{t_k} (V_o + At) dt \quad 2.6.12$$

$$V(t) = V_o + At \quad 2.6.12a$$

Praca sił bezwładności wynosi

$$W'_b = -ma \int_{x_p}^{x_k} dx + ma \int_0^{t_k} (V_o + At) dt \quad 2.6.13$$

Obliczając całki (2.6.12 i 2.6.13) oraz dodając wyniki mamy

$$W' = m(g - A) \left(\Delta x - V_o \Delta t - \frac{1}{2} A \Delta t^2 \right) \quad 2.6.14$$

$$\Delta x = x_k - x_p; \Delta t = t \quad 2.6.14a$$

Warto zauważyć, że gdy $\mathbf{g}=\mathbf{A}$, to praca obliczona w układzie K' jest równa zeru. Przy tym warunku mamy stan nieważkości i spadające ciało nie czuje we własnym układzie działania sił. Pomyśl o astronautce spadającym z kosmosu na Ziemię. W jego kabinie jest stan nieważkości. Kulka wisi obok niego nie poruszając się, lub poruszając się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Taki ruch oznacza, że z jego punktu widzenia siły działające na kulkę zerują się, a pod wpływem zerowej siły praca jest równa zeru. W układzie inercjalnym K praca sił grawitacyjnych jest różna od zera, gdyż siły grawitacji nie równoważy siła bezwładności. Gdy $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ i prędkość

początkowa między układami wynosi zero, to praca obliczona w układzie K' wyraża się takim samym wzorem jak praca obliczona w układzie K , to jest $mg\Delta x$.

3. Jeszcze o symetrii ♣

Dla współczesnej fizyki symetria jest jednym z głównych pojęć, o tym już pisałem. Warto więc dla podkreślenia tego faktu poświęcić jeszcze nieco czasu symetriom reprezentowanym przez grupę Galileusza. Wiemy już, że grupa Galileusza jest grupą symetrii dla równania ruchu w mechanice klasycznej. To oznacza, że równania ruchu nie zmieniają się pod wpływem przekształceń należących do grupy Galileusza lub ich złożień.

Rozważmy układ współrzędnych K związany z pewnym klasycznym układem mechanicznym U , to jest takim, który opisany jest przez prawa Newtona. Układ ten realizuje pewien eksperyment. Powiedzmy, że zaczynamy eksperyment w chwili t_p , i kończymy w t_k . Następnie ten sam eksperyment powtarzamy zaczynając w chwili $t_p + \Delta t$, a kończąc w chwili $t_k + \Delta t$. W obu przypadkach analiza teoretyczna (rozwiązanie równań ruchu) jak i przebieg eksperymentu musi być taki sam. Mówimy, że prawa mechaniki klasycznej są niezmiennicze względem przesunięć (translacji) w czasie. W każdej chwili czasu korzystamy z tych samych praw ruchu. Można by sobie pomyśleć, że prawa ruchu mogłyby wyglądać tak

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{f}(t) \quad 3.1$$

W tym wzorze siła $\mathbf{f}(t)$ jest funkcją czasu. Definiuje ona dodatkową siłę, która działa na każde ciało i której wartość zmienia się w czasie. Czas t jest czasem liczonym od jakiejś chwili szczególnej – na przykład od Wielkiego Wybuchu. Równania ruchu w takiej postaci nie wykazują niezmienniczości względem przesunięć w czasie. Wystarczy przeprowadzić eksperyment z równią. W czasie Δt późniejszym, w stosunku do t , do siły grawitacyjnej doda się wartość siły $\mathbf{f}(t + \Delta t)$ zamiast $\mathbf{f}(t)$ i otrzymamy inne przyspieszenie staczającego się ciała. Jednocześnie będziemy mieli inną energię końcową ciała. Jak już wspominałem brak symetrii ze względu na przesunięcia w czasie oznacza koniec zasady zachowania energii.

Słusznie możesz zauważyć, że kiedy $\mathbf{f}(t)$ jest bardzo małe powtórzenie eksperymentu z układem mechanicznym, powiedzmy następnego dnia, nie pozwoli wykryć istnienia tego dodatkowego członu. W znacznie istotniejszym stopniu niż $\mathbf{f}(t)$ mogą się zmienić warunki środowiskowe takie jak temperatura, ciśnienie i wilgotność powietrza. Co ważne, nigdy nie uda nam się ustawić stanu początkowego układu eksperymentalnego idealnie tak samo jak za pierwszym razem. Zmiany warunków powtarzanego eksperymentu są niewielkie ale nieuniknione i przy konieczności bardzo, bardzo dokładnej analizy ich wpływ mogą „zakryć” istnienie zależności $\mathbf{f}(t)$. Z drugiej strony, kiedy dodatkowego członu $\mathbf{f}(t)$ nie potrafimy w żadnym

eksperymentcie wykryć to dla nas on nie istnieje. Możemy prowadzić w tym kierunku dywagacje teoretyczne, ale dla prowadzonych przez nas eksperymentów nie mają one znaczenia, przynajmniej dopóty dopóki nie będziemy w stanie związanych z nimi efektów wykryć. Mimo to, takie teoretyczne gry nie są do końca pozbawione sensu. Mogą nas naprowadzić na przykład na eksperyment, w którym można będzie wykryć subtelą obecność składowej $f(t)$. Podejmujemy je wtedy, kiedy istnieją dodatkowe przesłanki przemawiające za istnieniem czegoś w rodzaju dodatkowej siły, cząstki elementarnej, symetrii, itd. Mówimy wtedy tak: Sprawa stała by się jaśniejsze gdyby istniało to albo tamto. Następnie zastanawiamy się jakie skutki pociągałoby za sobą istnienie tego albo tamtego. Jeżeli te skutki nie kłóćą się ze znaną fizyką a dodatkowo pozwalają rozwiązać ciężkie do rozwiązania problemy, to waro postawić hipotezę, że to albo tamto realnie istnieje, a następnie spróbować wykazać, że tak jest w rzeczywistości. Na początku lat 30-tych XX wieku, Wolfgang Pauli zaproponował istnienie nowej cząstki neutrina, która pozwalałoby zbilansować zasadę zachowania energii w przemianach promieniotwórczych β . Od razu było jasne, że przewidywana cząstka będzie bardzo słabo oddziaływała ze znaną materią. To oznaczało, że jej wykrycie będzie bardzo trudne, jeżeli nie niemożliwe. Jednak cząstka była na tyle użyteczna, że postulat Pauliego nie dał się lekceważyć. Eksperymentalne potwierdzenie istnienia neutrin nastąpiło w 1956 roku. Dziś znamy kilka rodzajów neutrin a fizyka neutrin jest jedną z dynamicznie rozwijających się gałęzi fizyki cząstek elementarnych, zarówno w zakresie teorii jak i eksperymentu. Hipotetyczna i zdawałoby się nieuchwytna cząstka dorobiła się własnych zespołów badawczych pracujących nad nią eksperymentalnie. Trzeba tu również pamiętać, że nie każda taka hipoteza zostaje potwierdzona. Twierdę nawet, że jest tu więcej porażek niż sukcesów, tyle że o porażkach nie wspominamy. Trzeba jednak godzić się na czasem duże ryzyko porażki, jeżeli chcemy dać sobie szanse na sukces.

Podobnie mają się sprawy przy przesunięciu w przestrzeni. Możemy przenieść nasz układ eksperymentalny do innego pokoju na uczelni, ba możemy nawet zawieźć go na konferencję odbywającą się na innym kontynencie i być pewni, że eksperyment wyjdzie tak samo. Zakładamy oczywiście, że zmiany warunków zewnętrznych są zbyt małe by można było dostrzec ich wpływ. Jeżeli nie, to eksperyment będzie miał nieco inny przebieg, ale spowodowane będzie to zmianą w otoczeniu układu. Drugie prawo Newtona, które zależałoby od położenia w przestrzeni mogłoby mieć na przykład taką postać

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} - \mathbf{f}(\mathbf{r}) \quad 3.2$$

Siła $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ zależy od położenia. Definiuje ona dodatkową siłę, która działa na każde ciało i której wartości zmienia się wraz z położeniem w przestrzeni. Położenie $\mathbf{r}$ mierzone jest od jakiegoś szczególnego miejsca w Kosmosie. Na przykład w kosmologii Arystotelesa byłby to środek Kosmosu, czyli środek Ziemi.

Czas na niezmienniczość względem obrotu. Nasz eksperyment z układem mechanicznym powtarzamy teraz w dwóch różnych orientacjach; to znaczy po pierwszym razie obracamy układ na stole, powiedzmy o 108 stopni przeciwnie do biegu wskazówek zegara i spodziewamy, że przebieg eksperymentu będzie taki sam. Lepiej byłoby jednak zaprezentować nasz eksperyment w kosmosie, w swobodnie poruszającej się kabinie. Tam możemy obracać układ eksperymentalny względem każdej z osi x - y - z . Na Ziemi nie jest to możliwe, ze względu na obecność pola grawitacyjnego, które narusza symetrię środowiska, w którym przebiega eksperyment. W odległej przestrzeni kosmicznej, pola grawitacyjne są tak małe, że przebieg eksperymentu praktycznie nie zależy od orientacji układu.

Zauważ, że stwierdziłem iż pole grawitacyjne narusza symetrię eksperymentu, a nie przestrzeni. W fizyce klasycznej traktujemy pola grawitacyjne jako zewnętrzne w stosunku do przestrzeni. Możemy opowiedzieć sobie taką opowieść o stworzeniu świata: Na początku Stwórca stworzył przestrzeń. Przestrzeń ta zdała mu się bezmiernie rozległa i równie bezmiernie nudna. Zatem by się coś działo Stwórca stworzył czas i włożył go do przestrzeni. Ale pusta przestrzeń z bezproduktywnie tykającym zegarkiem bynajmniej nie była bardziej interesująca. Stworzył więc materię i wrzucił ją do tej przestrzeni. Materia porozkładała się i zamarła w bezruchu. Zrobiło się ciekawiej, ale ciągle za mało ciekawie. Potem rzekł Stwórca niech się stanie siła grawitacji, niech każdy kawałek materii przyciąga każdy inny kawałek materii zgodnie z prawem powszechnego ciążenia i wtedy zaczęło być ciekawie. Tak więc, w tej opowieści, przestrzeń istnieje jako scena niezależnie od tego czy jest pole grawitacyjne czy nie; z tego wynika, że przestrzeń ma swoje własne symetrie niezależnie od tego czy jest pole grawitacyjne czy nie. Taka jest przestrzeń mechaniki klasycznej. Podobnie zewnętrzny w stosunku do materii, energii, pola grawitacyjnego i przestrzeni jest czas. Obraz ten zmieni ogólna teoria względności w ramach, której pole grawitacyjne będzie wynikać z geometrii czasoprzestrzeni, co będzie miało ścisły związek z lokalną zawartością energii i materii. Wróćmy jednak na grunt fizyki klasycznej.

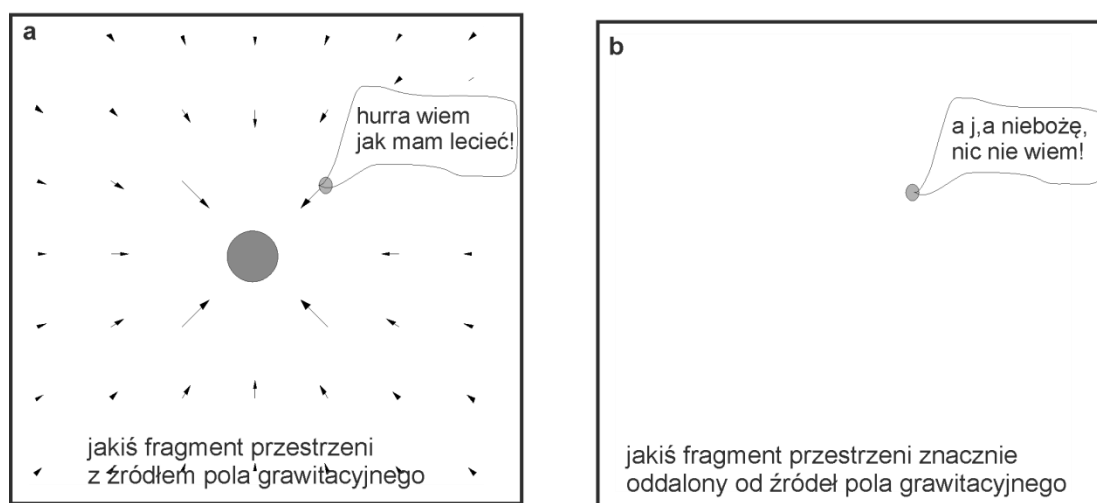
W warunkach ziemskich pole grawitacyjne jest źródłem zewnętrznej w stosunku do przestrzeni siły. Wygląda to tak jakby ktoś nalepił w każdym punkcie przestrzeni strzałki, które każdy kawałek materii, znajdujący się w danym punkcie „informują” w którą stronę i z jakim przyspieszeniem ma się poruszać. Rysunek (3.1a) pokazuje małą masę, która czuje złamanie

symetrii przestrzeni poprzez obecność pola grawitacyjnego. Możemy sobie teraz wyobrazić, że źródło pola na przykład Ziemia oddaliło się od tej masy. Pole grawitacyjne stało się praktycznie równe zero, ale przestrzeń wokół masy pozostała ta sama, tyle że teraz uwolniona od strzałek. Zatem w klasycznej teorii grawitacji przestrzeń jest czymś niezależnym od pola grawitacyjnego, tak jak tablica korkowa jest niezależna od pinezek i tego co za ich pomocą do tej tablicy mocujemy.

Kolejna symetria związana jest z pchnięciami. Skutkiem istnienia takiej dziwnej symetrii jest brak możliwości zbudowania miernika prędkości własnej. W efekcie, jak już pisałem, na gruncie mechaniki klasycznej wspólna dla wszystkich przestrzeni rozplywa się (tekst od 3 do 3.1). Możemy to podsumować jeszcze innym stwierdzeniem, które stanowi jedną z możliwych sposobów wypowiedzenia zasady względności, na którą powoływał się Albert Einstein tworząc teorię względności.

Określenie 3.1: Zasada względności

W ramach mechaniki klasycznej nie istnieją zjawiska, których opis wymagałby pojęcia bezwzględnego spoczynku.



Rysunek 3.1. a) pole grawitacyjne łamie symetrię przestrzeni w tym sensie, że w polu grawitacyjnym, w każdym punkcie jest wyróżniony kierunek – kierunek działania pola; b) pole grawitacyjne jest jednak czynnikiem zewnętrznym w stosunku do przestrzeni. Gdy wszystkie źródła pola grawitacyjnego zostaną odsunięte na dużą odległość ciała będą się poruszały we wszystkich kierunkach jednakowo swobodnie.

Chciałem zwrócić wam uwagę na ważną sprawę. Stwierdzenie, że wszystkie układy odniesienia, poruszające się względem siebie ruchem jednostajnym prostoliniowym, (z punkt widzenia mechaniki klasycznej) nie oznaczają, że ruch (ruch względny) nie ma znaczenia. Wystarczy odwołać się

do prostego przykładu. Powiedzmy, że w pewnej odległości od płata blachy stoi działo. Zaznaczmy to miejsce czerwoną linią. Działo strzela niewybuchającym pociskiem w kierunku płata. Pocisk ma za małą energię aby blachę przebić. Widać jednak, że niewiele brakowało. Teraz działo stawiamy na szybko poruszającej się, w kierunku blachy, platformie. Gdy platforma dociera do czerwonej linii działo strzela. Pocisk ma teraz większą prędkość względem płata blachy; prędkość równą sumie prędkości jaką nadaje mu działo i prędkości platformy. Tym razem pocisk przebija blachę. Efekt tego eksperymentu zależy od prędkości wylotowej pocisku względem układu związanego z płatem blachy. Dalej jednak nie wiemy czy to blacha porusza się względem działła czy na odwrót - jest to kwestia umowy związanej z przyjętym układem odniesienia.

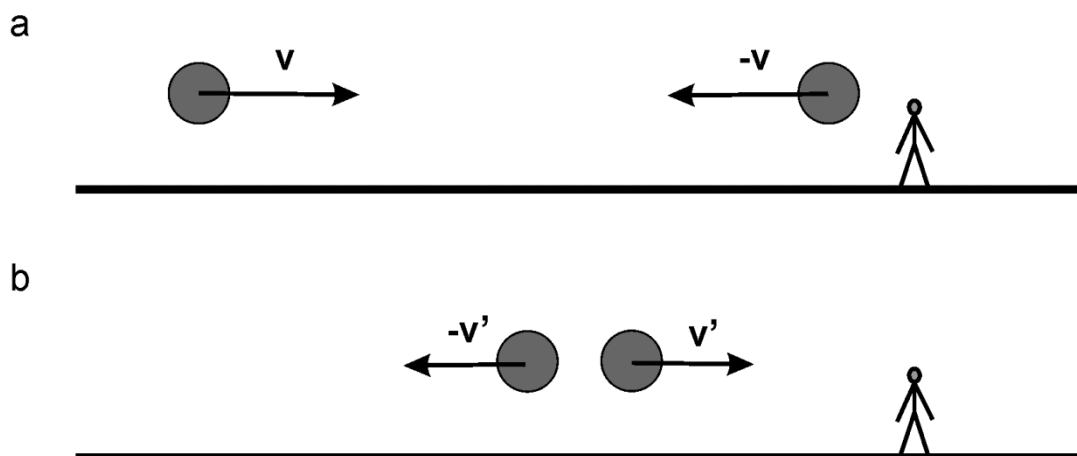
Niezmienniczość względem pchnięć oznacza co następuje. Powiedzmy, że w odległym, pustym zakątku Kosmosu, przeprowadzamy eksperyment w dwóch układach współrzędnych, które poruszają się względem siebie jednostajnie prostoliniowo. Powiedzmy, że eksperyment prowadzimy na dwóch kopiach tego samego układu mechanicznego. Eksperymentatorzy z obu układów stwierdzają taki sam przebieg eksperymentu; w obu układach równania ruchu są takie same i dają takie same wyniki. Zatem układ mechaniczny nie czuje faktu, że względne prędkości obu układów są różne od zera. Nie ma więc możliwości określenia prędkości własnej żadnego z układów.

3.1. Siła symetrii I

Będę się teraz posługiwał zasadą względności (okr. 4.1) i pojęciem symetrii. Oprócz zasady względności, która sama związana jest z symetrią ze względu na pchnięcia, uwzględnij pozostałe symetrie z grupy Galileusza. Zobaczmy czy same symetrie pozwolą nam coś powiedzieć o zachowaniu prostych układów fizycznych.

Rozważmy dwie takie same kule, które zbliżają się do siebie z dwóch przeciwnych stron. Powiedzmy, że dla Karoliny, z którą związany jest IUO, obie kule zbliżają się z tą samą (co do wartości) prędkością, tyle że przeciwnie skierowaną. Sytuacja dla Karoliny wygląda z obu stron wysoce symetrycznie. Obie kule mają względem Karoliny taką samą prędkość (co do wartości), obie mają taką samą masę i wielkość. Jaka będzie prędkość kul po zderzeniu? Symetria zastanej sytuacji pozwoli nam stwierdzić, że po zderzeniu obie kule muszą oddalać się od siebie z taką samą prędkością, lub ewentualnie mogą zatrzymać się w miejscu zderzenia. Dlaczego tak? W pierwszym kroku dokładnie zdefiniujmy na czym polega symetria tego układu. Zdefiniujmy następujące działanie. Jak pani Czary Mary machnie różdżką, to kule wraz z wektorami prędkości ulegną odbiciu względem

płaszczyzny znajdującej się dokładnie między nimi (zamienia się miejscami, odwróć się im prędkości). Jeżeli Karolina nie będzie w stanie stwierdzić czy doszło do zmiany czy nie (czy pani Czary Mary machnęła, czy nie), to powiemy, że układ jest, ze względu na taką zamianę symetryczny. Ta symetria powinna być zachowana również po zderzeniu.



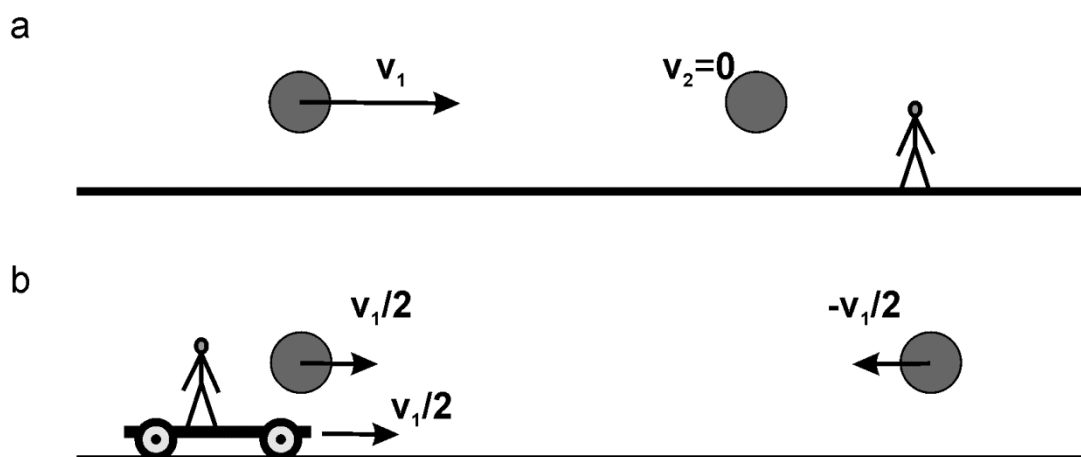
Rysunek 3.1.1. a) Karolina stwierdza, że w jej układzie współrzędnych obie kule zbliżają się do siebie z prędkościami o tej samej wartości i przeciwnie skierowanymi. Karolina nie jest w stanie stwierdzić, w swoim układzie współrzędnych żadnej różnicy pomiędzy oboma kulami. Nadto analiza Karoliny nie powinna zależeć od tego, w którym miejscu stoi. Zależność taka złamałaby symetrię związaną z translacją układu współrzędnych; b) po zderzeniu oczekujemy, że w układzie Karoliny kule będą się oddalały z prędkością o tej samej wartości, ale przeciwnym kierunkiem (symetria układu zostanie zachowana).

Powiedzmy, teraz że pan Wiem Bo Wiem powiedział Karolinie, że jedna z kul, na pewno będzie się oddalała po zderzeniu szybciej niż druga. Karolina ma stwierdzić, która to kula. Jeżeli dla Karoliny, układ przed zderzeniem jest symetryczny ze względu na machnięcie różdżką przez panią Czary Mary, to nie ma podstaw, aby po zderzeniu ta symetria została złamana. Zarówno przed jak i po zderzeniu zamiana kul dalej nie powinna niczego zmieniać. W tej sytuacji Karolina nie ma kryterium, które pozwoli jej wskazać, która kula będzie biegła szybciej. Dla niej obie kule są w tej samej sytuacji.

A co, gdyby w jakimś w pełni symetrycznym eksperymencie Karolina stwierdziłaby, że po zderzeniu kule rzeczywiście poruszają się z różnymi prędkościami? Z jednej strony nie widzi ona żadnych powodów, dla których kule miałyby mieć różne prędkości, a z drugiej strony mierzy różne prędkości. Cóż mamy tu przynajmniej trzy możliwości: a) Karolina słabo zna jeszcze fizykę badanego układu. Nie wie, że działają dodatkowe czynniki, które łamią

symetrię układu, b) istnieje mechanizm losowy (prawo losowe), który losowo zaburza symetrię kul, c) mamy tu do czynienia z działaniem czynnika ponadnaturalnego, leżącego poza naszymi możliwościami poznawczymi. Pamiętaj proszę, że to czy układ jest symetryczny czy nie oceniamy z punktu widzenia aktualnej wiedzy. Czyli jeżeli opieramy się o mechanikę klasyczną możemy z czystym sumieniem stwierdzić, że na jej gruncie układ dwóch kul z rysunku (3.1.1) jest w pełni symetryczny i spodziewamy się, że zderzenie tej symetrii nie złamie. A jeżeli wynik eksperymentu jest inny to musimy stwierdzić, że albo coś istotnego, w ramach znanej teorii nam umknęło (zły jest model) albo grunt, na którym staliśmy analizując eksperyment nie jest adekwatny do sytuacji i zachodzi jedna z trzech wymienionych wyżej możliwości.

Możemy również dojść do poprawnych wniosków w sytuacji pokazanej na rysunku (3.1.2). Teraz, w IUO Karoliny jedna z kul zbliża się do drugiej z prędkością v_1 , a ta druga jest nieruchoma. Ewidentnie kule różnią się prędkościami – układ nie jest symetryczny. Gdy pani Czary Mary machnie pałeczką, to kula nieruchoma zamieni się miejscem z kulą ruchomą. Karolina bez trudu zauważy, że coś się zmieniło – kula nieruchoma znalazła się po lewej stronie. Co stanie się po zderzeniu? Wykorzystamy zasadę względności, która pozwala nam patrzeć na zdarzenie z dowolnego IUO. Powiedzmy, że przejdziemy do nowego IUO, który oznaczę literą K' , który porusza się względem wyjściowego IUO, który oznaczę jako K , z prędkością $v_1/2$. W tym nowym układzie obie kule zbliżają się do siebie z równymi prędkościami. Możemy zatem wnioskować, że w układzie K' , kule po zderzeniu będą się od siebie oddalać z tą samą, co do wartości prędkością v_1' . Jeżeli zatem wrócimy do wyjściowego IUO, to stwierdzamy, że kula z prawej strony będzie się poruszała o $v_1/2$ szybciej od kuli z lewej strony. Zatem, po ponownym przejściu do układu K widać, że po zderzeniu, ruchoma kula będzie nieruchoma a nieruchoma będzie się poruszała z prędkością kuli, która była ruchoma przed zderzeniem. Ten wynik już otrzymaliśmy z zasady zachowania pędu i energii (§TIV 4). Teraz uzyskaliśmy go odwołując się do symetrii układu. Nie ma w tym żadnego zaskoczenia. Wszak między symetriami praw dynamiki a prawami zachowania istnieje ścisły związek.



Rysunek 3.1.2. a) w układzie (inercyjnym) Karoliny jedna z kul spoczywa (kule mają te same masy). Sytuacja nie jest symetryczna. Karolina wie jednak, na mocy zasady względności, że może zmienić swój inercjalny układ odniesienia na dowolny inny inercjalny układ odniesienia. Wskazuje więc na wózek jadący w kierunku ruchu ruchomej kuli z prędkością równą połowie prędkości tej kuli. W nowym układzie współrzędnych stwierdza, że układ dwóch kul stał się symetryczny. W nowym układzie współrzędnych kule po zderzeniu powinny poruszać się w przeciwne strony z tą samą prędkością.

3.2. Czy istnieją układy inercjalne?

Pierwsze prawo Newtona definiuje układy inercjalne; są to takie układy, w których cząstka, na którą nie działają żadne siły, lub działające siły równoważą się porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Dla wielu zagadnień praktycznych możemy znaleźć układy wystarczająco inercjalne by móc sensownie stosować prawa dynamiki. Zastanówmy się przez chwilę nad problemem badania inercjalności układów współrzędnych.

Z pozoru najlepszym sposobem pomiaru sił działających na dane ciało jest pomiar jego przyspieszenia własnego. Jeżeli przyspieszenie ciała jest równe zeru, to działające na nie siły równoważą się. Ale sposób ten wymaga identyfikacji inercjalnego układu współrzędnych. Aby znaleźć układ inercjalny musimy mieć ciało, na które działają znane siły. I cała sprawa się zapęła, bo do oddzielenia realnie działających sił od sił pozornych potrzebujemy układu inercjalnego. Widać, że musimy radzić sobie innymi metodami. Pomóc nam może fakt, że wszystkie znane nam siły polowe (znamy dwie takie siły: pole elektryczne i pole grawitacyjne⁷) maleją wraz z odległością. Zatem gdy oddalamy się od potencjalnych źródeł siły (masy,

⁷ Są jeszcze dwa oddziaływania fundamentalne: silne i słabe, ale maleją one tak szybko z odległością, że mają znaczenie tylko na odległościach atomowych.

ładunki elektryczne) to ich działanie na nasz układ maleje. Możemy zatem przyjąć, że odległe od siebie o lata świetlne gwiazdy działają na siebie siłami nadającymi bardzo małe przyspieszenia i poruszają się ruchem praktycznie jednostajnym i prostoliniowym. Obliczmy na przykład siły grawitacyjne działające między dwiema gwiazdami o masie równej masie Słońca a oddalonymi od siebie o pięć lat świetlnych⁸. Zgodnie z przyjętą definicją rok świetlny to odległość jaką pokonuje światło w próżni w ciągu jednego roku juliańskiego (365.25dnia) i wynosi około $9.5 \cdot 10^{15} \text{m}$. Masa Słońca wynosi $1.99 \cdot 10^{30} \text{kg} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{kg}$

$$F_S = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{4 \cdot 10^{60}}{25 (9.5)^2 \cdot 10^{30}} \approx 1.2 \cdot 10^{17} \text{N} \quad 3.2.1$$

Trudno to nazwać niewielką siłą. A jednak, jej bardzo duża wartość wynika z tego, że jest to suma oddziaływania na całą ogromną masę Słońca. Masę jednego kilograma Słońca, gwiazda o wielkości Słońca, z odległości pięciu lat świetlnych, przyciąga z siłą

$$F_{1kg} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{2 \cdot 10^{30}}{25 (9.5)^2 \cdot 10^{30}} \approx 6 \cdot 10^{-14} \text{N} \quad 3.2.2$$

Co jest wielkością bardzo małą. To czy siła jest duża czy nie winniśmy oceniać po jej skutkach. Przyspieszenie Słońca pod wpływem przyciągania bliźniaczej gwiazdy oddalonej o pięć lat świetlnych wynosi

$$a_s = \frac{F_S}{M_s} = \frac{1.2 \cdot 10^{17}}{2 \cdot 10^{30}} \approx 6 \cdot 10^{-14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad 3.2.3$$

I jest oczywiście takie same jak przyspieszenie doznawane przez jeden kilogram masy Słońca. Jest to bardzo małe przyspieszenie. Potrzeba pół miliona lat by przy takim przyspieszeniu prędkość wzrosła o jeden metr na sekundę.

Na Słońce większą siłą działa Jowisz⁹ czy Saturn, więc powinniśmy w pierwszym rzędzie uwzględnić wpływ sił grawitacyjnych od planet Układu Słonecznego. Aby uniknąć tego problemu możemy wyznaczyć położenie środka masy Układu Słonecznego. Następnie w środku masy układu Słonecznego umieścić masę Słońca, planet i księżycy i ponownie obliczyć siłę przyciągania z układem najbliższej gwiazdy. Wyniki będzie praktycznie taki sam (Słońce to ponad 99% masy Układu Słonecznego). Jak widać

⁸ Gwiazda alfa Centauri ma masę 1.09 masy Słońca i znajduje się 4.35 roku świetlnego od Ziemi. Bliżej jest tylko mniej masywna Proxima Centauri (4.22 roku świetlnego), której masa wynosi 0.12 masy Słońca.

⁹ Jowisz przyciąga Słońce z siłą około $4 \cdot 10^{23} \text{N}$, co nadaje Słońcu przyspieszenie $2 \cdot 10^{-7} \text{m/s}^2$.

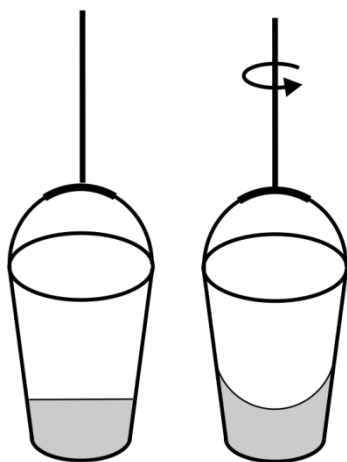
przyspieszenie środka masy Układu Słonecznego spowodowane przez sąsiednią gwiazdę jest bardzo, bardzo małe. Podobnie rzecz ma się z przyspieszeniem sąsiednich gwiazd pod wpływem przyciągania przez sąsiadki.

Możemy więc spojrzeć na najbliższe gwiazdy, które widzimy jako pojedyncze punkty i względem nich zdefiniować bardzo dobry układ inercjalny. Nie jest to idealny układ inercjalny, bo gwiazdy mają niewielkie przyspieszenia związane z oddziaływaniem z sąsiadkami. Mają nadto przyspieszenie związane z ruchem orbitalnym wokół środka masy Galaktyki. Słońce (a zatem i środek masy Układu Słonecznego) obiega Galaktykę raz na ok. 250 mln lat z prędkością po orbicie¹⁰ ok. 220km/s, której średni promień wynosi około 30000 lat świetlnych. Podobne parametry orbity mają sąsiednie gwiazdy. Promień krzywizny tych orbit jest tak mały, że mimo bardzo dużej prędkości orbitalnej przyspieszenie dośrodkowe jest bardzo, bardzo małe (spróbuj je oszacować). Jak widać znalezienie inercjalnego układu odniesienia, odpowiedniego do rozwiązywania problemów praktycznych nie jest trudne. W wielu wypadkach Ziemia jest takim układem. Tam gdzie to nie wystarcza możemy odwołać się do układu opartego na sąsiednich gwiazdach a jeszcze lepiej na odległych gwiazdach. Jednak znalezienie idealnego inercjalnego układu odniesienia, jest zadaniem beznadziejnym. Kwestia istnienia idealnego inercjalnego układu odniesienia, choć ma charakter akademicki, jest istotna. Jeżeli takiego układu nie ma, to nie ma sceny, na której mogłaby się rozgrywać mechanika klasyczna. Dla praktyki to żadna przeszkoda ale dla naszego głębszego rozumienia świata fizycznego to jest forma ostrzeżenia, że być może nie wszystko jest tak jasne jakby się mogło zdawać. Dodam tu tylko, że rozszerzenie dynamiki newtonowskiej przez teorię względności postawiło zagadnienie układów inercjalnych w nowym świetle, do czego oczywiście jeszcze dojdziemy.

Chociaż dynamika newtonowska nie potrzebuje absolutnej przestrzeni, to Newton uparcie starał się absolutną przestrzeń, w ramach swojej teorii, utrzymać. Spowodowało to gorącą debatę i podzieliło świat fizyków na tych, którzy akceptowali absolutną przestrzeń, na jej przeciwników no i na takich, którym to wisiało (tych jest zwykle najwięcej). Starożytność poprzez milczące założenia lub przez jawne wypowiedzi części filozofów sprzyjała koncepcji absolutnej przestrzeni. Przykładowo greccy atomiści postulowali istnienie przestrzeni jako obiektywnego bytu – sceny dla atomów. Kosmos Arystotelesa był skończony i sferyczny. Miał więc wyróżniony punkt – własny środek, co pozwalało nie tylko wyróżniać własną prędkość, a przez to absolutną przestrzeń, ale również własne oddalenie

¹⁰ Wartości te wyznaczone są z dokładnością 10%.

ciała od szczególnego punktu Kosmosu, to jest jego środka (położenie własne). Newton bronił absolutnej przestrzeni odwołując się do doświadczenia z wirującym wiadrem (rys. 3.2.1).



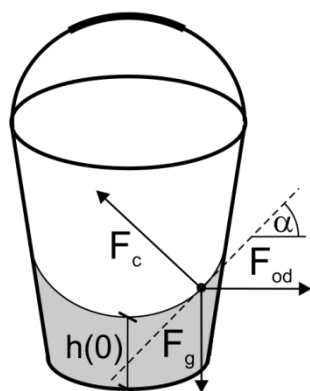
Rysunek 3.2.1. Obrona istnienia absolutnej przestrzeni opierała się u Newtona o analizę eksperymentu z wiadrem z wodą. Wiadro z lewej strony nie obraca się, a powierzchnia wody jest płaska. Gdy mocno skręcimy linę i ją puścimy wiadro zacznie się kręcić ciągnąc za sobą cząsteczki wody. Po pewnym czasie powierzchnia wody utworzy parabolę. Efekt ten nie jest względny, gdyż kręcenie się obserwatora lub całej Ziemi nie spowoduje równoważnych skutków, to znaczy powierzchnia wody nie ulegnie zakrzywieniu. Stąd Newton wywodził konkluzję, że efekty wywołane ze zmianą geometrii powierzchni wody odnoszą się do absolutnej przestrzeni.

Doświadczenie dzielił na następujące kroki; i) w chwili rozpoczęcia doświadczenia wiadro nie obraca się, a powierzchnia wody jest płaska; ii) gdy wiadro zostaje wprowadzone w szybki ruch obrotowy woda, w pierwszym momencie nie reaguje, iii) z czasem powierzchnia wody ugina się osiągając nowy stabilny kształt, iv) wiadro nagle zostaje zatrzymane, lecz woda przez jakiś czas dalej obraca się, a jej ciągle ugięta powierzchnia wypłaszcza się wraz z słabnącym ruchem wirowym wody, v) po pewnym czasie woda zatrzymuje się i wszystko wraca do stanu wyjściowego. Z tego doświadczenia Newton wnioskuje, że za ugięcie powierzchni wody nie odpowiada względny ruch wiadra i wody. Gdyż w sytuacji i) i iv) stan wiadra jest taki sam (wiadro nie obraca się) a stan wody jest inny. Zatem według Newtona za kształt wody odpowiada jej ruch względem absolutnej przestrzeni.

Można również stwierdzić, że gdy zamiast wiadra obracać będziemy obserwatora, to nie spowoduje to wygięcia się powierzchni wody. Nie ma tu więc typowej, dla względności, symetrii. Newton jednak dostrzega niewygodny fakt, że żadna obserwacja nie pozwala na wskazanie własnego ruchu prostoliniowego względem przestrzeni. Innymi słowy widząc ciało poruszające się z prędkością v nie jesteśmy w stanie powiedzieć jaka część tej prędkości to ruch własny tego ciała, czyli jaką to ciało ma prędkość względem absolutnej przestrzeni. Opierając się na analizie eksperymentu z wiadrem, postuluje jednak istnienie absolutnej przestrzeni pomimo tych trudności.

Stwierdza tylko, że obecność tej przestrzeni nie może być przedmiotem obserwacji naszych zmysłów. W końcu nie wszystko musi podlegać zmysłowej detekcji. Może być natomiast wywnioskowana z takich eksperymentów jak ten z wirującym wiadrzem.

Aby odetchnąć nieco od tych ciężkich wywodów przeprowadzę krótką analizę zachowania się cząstek cieczy w obracającym się wiadrze. Rysunek (3.2.2) przedstawia sytuację cząsteczki cieczy w wiadrze wody w nieinercyjnym układzie współrzędnych związanym z wiadrzem. Na cząstkę cieczy działa siła grawitacji $\mathbf{F}_g$ i siły oddziaływania między cząstkami $\mathbf{F}_c$. Analizujemy stan stacjonarny układu, to znaczy czekamy aż na skutek ruchu wirowego wiadra powierzchnia wody przyjmie stabilny kształt. W takiej sytuacji wypadkowa siła oddziaływania między cząstkami cieczy $\mathbf{F}_c$ powinna być skierowana normalnie do powierzchni. Gdyby istniała składowa styczna cząstki przesunąłaby się i powierzchnia cieczy ulegałaby zmianie.



Rysunek 3.2.2. W stanie ustalonym na cząsteczkę cieczy działają trzy siły: ciężenia, oddziaływania między cząsteczkami i odśrodkowa (analiza prowadzona jest NUO), które muszą dodawać się do zera.

Ponieważ jesteśmy w układzie nieinercyjnym musimy dodać siły pozorne. W naszym przypadku będzie to siła odśrodkowa $\mathbf{F}_{od}$, której wartość jest równa

$$F_{od} = m\omega^2 r \quad 3.2.1$$

W stanie równowagi wszystkie te siły muszą sumować się do zera $\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{od} = \mathbf{0}$. Oznacza to, że wektor siły $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{od}$ musi być prostopadły do stycznej do powierzchni wody, w danym punkcie. Niech wektor $\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{od}$ tworzy kąt α , z kierunkiem prostopadłym do pionu (rys. 3.2.2), wtedy mamy

$$\tan(\alpha) = \frac{F_{od}}{F_g} = \frac{\omega^2 r}{g} \quad 3.2.2$$

Ale jak widać z rysunku (3.2.2) kąta α jest kątem nachylenia stycznej do powierzchni wody. Niech krzywa opisująca powierzchnię wody będzie funkcją $h(r)$, gdzie r jest odległością punktu na powierzchni wody od osi wiadra; wtedy (rys. DB 1.5)

$$\tan(\alpha) = \frac{dh}{dr} \quad 3.2.3$$

Zbierając (3.2.1) i (3.2.2) mamy

$$\frac{dh}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g} \Rightarrow dh = \frac{\omega^2 r}{g} dr \quad 3.2.4$$

Po scałkowaniu mamy

$$h(r) = h(0) + \frac{1}{2g} \omega^2 r^2 \quad 3.2.5$$

Gdzie $h(0)$ jest wysokością cieczy dla $r=0$. Równanie (3.2.5) opisuje parabolę o wierzchołku w punkcie o współrzędnych $(h(0),0)$. Z naszego prostego modelu wynika, że woda w wiadrze powinna przyjąć kształt paraboli (paraboloidy w trzech wymiarach), co bardzo dobrze zgadza się z eksperymentem.

Wróćmy do rozważań bardziej filozoficznych. Przed powstaniem teorii względności Newton miał, w kwestii absolutnej przestrzeni, wielu znamienitych krytyków (np. Leibnitz, Berkeley). Jednak najbardziej wpływowym krytykiem koncepcji absolutnej przestrzeni był Ernst Mach, którego stanowisko było ważką inspiracją dla Alberta Einsteina do prac nad teorią względności. Mach wskazywał, że o stanie ciała w danym punkcie decydują jego relacje z resztą Wszechświata. Gdybyśmy mieli świat, w którym istniałaby tylko jedna cząstka nie moglibyśmy określić nie tylko jej prędkości ale również przyspieszenia. Wynika z tego między innymi i to, że nasze wyrażenia na energię kinetyczną i pęd obarczone są fundamentalną trudnością, gdyż liczymy te wielkości względem arbitralnie wybranego układu współrzędnych, który staje się czymś w rodzaju reprezentanta nieistniejącej absolutnej przestrzeni. Zamiast tego powinniśmy określać energię cząstki w relacji do materialnego otoczenia, a nie do sztucznego tworu jakim jest układ współrzędnych. Wynika z tego również, że pojęcie przestrzeni jest konstytuowane przez rozkład mas. Bez masy nie ma przestrzeni. Wbrew pozorom taka koncepcja nie jest czymś niespotykanym. Powszechnie używamy pojęcia siły. Ale siła nie istnieje bez cząstek. Kiedy mówimy o sile nie mówimy o czystej sile, która istnieje niezależnie od masy. Siła oznacza zawsze oddziaływanie między ciałami obdarzonymi masą¹¹. Nawet gdy siła jest tak niematerialna jak siła grawitacji między odległymi ciałami, to te dwa odległe ciała muszą gdzieś tam być; bez nich nie ma siły

¹¹ Na razie pomijamy istnienie pola elektromagnetycznego i innych pól współczesnej fizyki. Jesteśmy na gruncie mechaniki klasycznej.

grawitacji. Tak jak dwa odległe ciała mogą konstituować siłę grawitacji mogą też konstituować nasze wrażenie przestrzenności.

Mach stwierdza, że analiza Newtona pomija fakt istnienia pola grawitacyjnego Ziemi, bez którego nie byłoby obserwowanego efektu. Zwraca więc uwagę, że za kształt powierzchni wody odpowiada nie tylko obrót wiadra ale i obecność masy Ziemi. Oczywiście gdzieś w odległym Kosmosie, z dala od dużych mas, przy bardzo, bardzo małym polu grawitacyjnym, kręcące się wiadro również spowodowałoby zmianę kształtu powierzchni wody. Ale Mach postuluje, że jest to efekt ogólnego rozłożenia masy w Kosmosie, który definiuje również samo wrażenie przestrzeni. Tak więc eksperyment z wiadrem niekoniecznie wskazuje na obecność absolutnej przestrzeni.

3.2.1. Więcej geometrii ♠

Dziś fizyka chętnie posługuje się aparatem współczesnej geometrii. Twórcami i mistrzami klasycznej geometrii byli starożytni Grecy. Wielkie dzieło Euklidesa *Elementy* spinające osiągnięcia geometrii greckiej nic nie straciło ze swej aktualności. Dzisiejsze podręczniki klasycznej geometrii przedstawiają jej twierdzenia we współczesnej notacji i języku ale treść pozostaje ta sama. Zasoby klasycznej geometrii nie wystarczały jednak na jej zastosowanie w nowożytnej fizyce. Jeszcze zanim rodząca się nowożytna fizyka okrzepła Kartezjusz tchnął w geometrię nowego ducha, tworząc podstawy geometrii analitycznej¹². Geometria analityczna stworzyła pomost między światem klasycznych geometrycznych obiektów (punkty, odcinki, figury, etc.) a światem liczb i funkcji. To połączenie geometrii z algebrą i analizą matematyczną (to w późniejszych czasach) okazało się wyjątkowo płodne.

Geometryzacja fizyki wymagała nie tylko reformy geometrii ale również fizyki. Grunt pod tą reformę przygotowali między innymi Kartezjusz i Galileusz. Przyjęta przez Średniowiecze fizyka Arystotelesa pełna była różnych kategorii (zapachy, barwy, etc.), których geometryzacja była niezwykle trudna jeżeli nie niemożliwa. Kartezjusz (i Galileusz) postulowali, że te niegeometryczne kategorie są wtórne. Zapach, barwa, smak, to sposoby w jaki zmysły reprezentują rzeczywisty świat, a nie kształt tego świata. Kartezjusz stwierdza:

„natura materii, czyli ciała rozpatrywanego w ogólności, nie na tym polega, że jest ono jakąś rzeczą twardą, czy ciężką, czy barwną, czy w jakiś inny sposób

¹² Jak to bywa w historii nic nie zaczyna się nagle. Elementy geometrii analitycznej pojawiają się wcześniej na przykład w dziełach średniowiecznych matematyków arabskich

działającą na zmysły, ale na tym, że jest ono rzeczą rozciągłą wzdłuż, w szerz i w głąb¹³”.

Czyż nie jest to otwarcie drzwi do geometryzacji fizyki? Jednocześnie jest to równoważne z całkowitym odrzuceniem fizyki Arystotelesa, a co za tym idzie, manifest nawołujący do powołania do życia nowej fizyki. Kartezjusz próbuje realizować projekt nowej fizyki. Jednak tworzy go z pozycji filozofa, czyli w czysto spekulatywny sposób, co nie może przynieść dobrych efektów. Jego fizyka na krótko zyskuje szerokie uznanie, szybko jednak okazuje się pomyłką. Nie mniej geometria Kartezjusza, jego krytyczna filozofia oraz program geometryzacji fizyki wywierają silny wpływ na następne pokolenia fizyków. Pod wpływem Kartezjusza działa między innymi Izaak Newton. My również będziemy używać namiętnie geometrii. Nie traćmy więc czasu.

Dla klasycznego obserwatora istnieją trzy wymiary przestrzenne i jeden wymiar czasu, przy czym czas istnieje niezależnie od przestrzeni. Mogę więc przedstawić moje „środowisko geometryczne” jako iloczyn kartezjański przestrzeni $R^3 = E$ i czasu R : $R^4 = R^3 \times R$. Taki twór nazwę czasoprzestrzenią. Tak, tak, doczekaliście się rozważań o czasoprzestrzeni! Na rysunkach będę się ograniczał do mniejszej liczby wymiarów, bo nie opanowałem jeszcze sztuki rysowanie czterowymiarowych struktur. Ale gdy będzie mowa o czasoprzestrzeni, będzie to zawsze oś R reprezentująca czas oraz: oś R reprezentująca współrzędną przestrzenną dla rysunków dwuwymiarowych lub płaszczyzna R^2 dla rysunków trójwymiarowych.

Założmy, że istnieje absolutna przestrzeń. Prawa dynamiki musiałyby wtedy przyjąć inną postać. Mogłyby na przykład wyglądać tak

$$\mathbf{F} = m\mathbf{v}$$

3.2.6

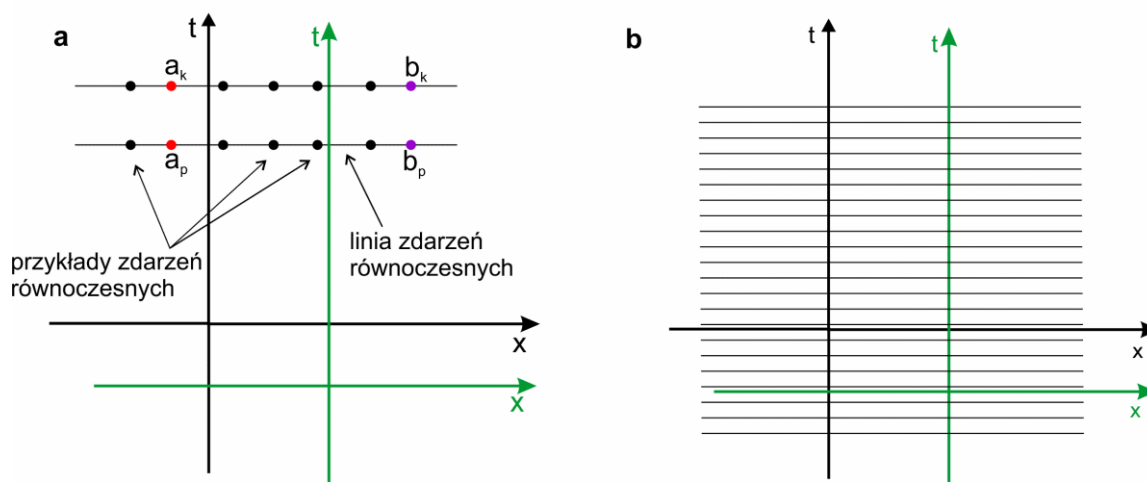
Transformacje pchnięcia (1.1.8) nie są symetrią takiej postaci prawa dynamiki, zatem możemy zbudować miernik prędkości własnej. Teraz układy inercjalne to takie układy, których prędkość własna (czyli prędkość względem absolutnej przestrzeni) jest równa zeru. I tylko w takich układach moglibyśmy stosować równanie (3.2.6), bez dodatkowych sił pozornych. A co z czasem? Cóż żadne, doświadczenie nie skłania nas do przyjęcia, że czas powinien się jakoś nietrywialnie transformować. Możemy więc przyjąć, że obok absolutnej przestrzeni mamy absolutny czas. Absolutny czas oznacza, że jeżeli dany proces w jednym układzie trwa jedną sekundę, to w każdym innym układzie widziany jest jako proces trwający jedną sekundę. Oznacza to również, że jeżeli w wybranym układzie współrzędnych dwa zdarzenia są równoczesne, to w każdym innym układzie te zdarzenia też będą równoczesne (rys. 3.2.3a). Taka czasoprzestrzeń pocięta jest

¹³ R. Descartes, *Zasady filozofii*, przekład I Dębska, (Biblioteka Klasyków Filozofii) PWN, Warszawa 1960.

podprzestrzeniami zdarzeń równoczesnych (rys. 3.2.3b). Matematycy mówią, że w przestrzeni istnieje rzutowanie Π_t , które każdemu zdarzeniu $p \in R^4$ przypisuje współrzędną czasową t .

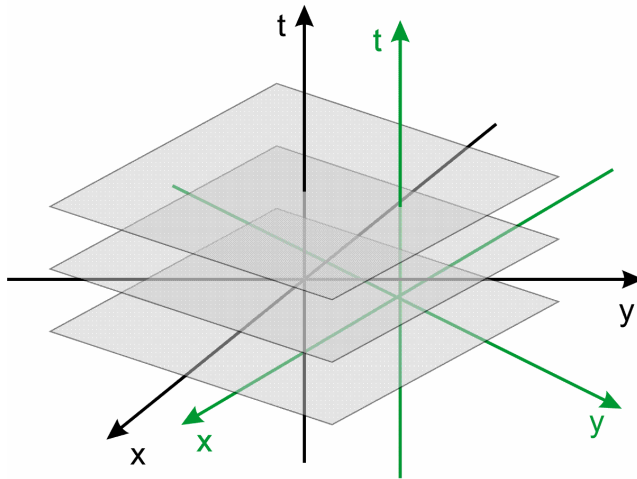
$$\Pi_t : R^4 \rightarrow R(=T) \quad 3.2.7$$

W dwóch wymiarach (x,t) , tak jak to jest pokazane na rysunku (3.2.3b) widać, że czasoprzestrzeń pocięta jest liniami zdarzeń równoczesnych; linie te nazywamy włóknami. Ważne jest to, że przebieg tych linii nie zależy od wyboru układu współrzędnych.



Rysunek 3.2.3. a) zdarzenia, które są równoczesne w jednym układzie współrzędnych (czarnym) są również równoczesne w innym układzie współrzędnych (zielonym). Weźmy dla przykładu dwie pary zdarzeń a_p i b_p w chwili początkowej oraz a_k i b_k w chwili końcowej. Powiedzmy, że upływ czasu między tymi zdarzeniami jest równy jednej godzinie $\Delta t=1h$. Niech w układzie czarnym różnica czasu między zdarzeniem a_p i b_p wynosi zero; zdarzenia są równoczesne. Z założenia, że upływ czasu jest taki sam we wszystkich układach odniesienia wynika, że i w układzie zielonym różnica czasu musi pozostać taka sama. W zielonym układzie zdarzenia a i b są też równoczesne. Co więcej jeżeli $\Delta t=1h$ w czarnym układzie, to tak samo musi być w zielonym; b) przedstawioną tu przestrzeń możemy złożyć z włókien linii zdarzeń równoczesnych. Ta włóknista struktura nie zależy od wyboru układu odniesienia, czyli jest właściwością przestrzeni.

To znaczy, że niezależnie od tego jaki wybierzemy układ współrzędnych linie te będą przebiegały tak samo. Lepiej ten fakt ilustruje rysunek trójwymiarowy (3.2.4). Możemy powiedzieć, że włókna te są wszyte w samą strukturę przestrzeni. Przestrzeń z takim włóknami nazywamy przestrzenią włóknistą.



Rysunek 3.2.4. Dla każdego t mamy płaszczyznę zdarzeń równoczesnych. Wszystkie punkty na takiej płaszczyźnie mają tę samą współrzędną czasową. Jeżeli wyrysujemy płaszczyzny zdarzeń równoczesnych w jednym układzie współrzędnych, to w każdym innym układzie będą one wyglądały tak samo. Włókna (czyli płaszczyzny zdarzeń równoczesnych) nie zależą od wyboru układu współrzędnych i są własnością samej przestrzeni.

Pojedyncze włókno w dane jest odwzorowaniem odwrotnym do (3.2.7)

$$w = \Pi_t^{-1}(t) \quad 3.2.8$$

Odwzorowanie (3.2.8) bierze wybraną chwilę t w danym układzie współrzędnych i przypisuje jej wszystkie zdarzenia, które w tej wybranej chwili miały miejsce; inaczej mówiąc jego wartością dla danego t jest wyznacza jedną z płaszczyzn zdarzeń równoczesnych. Jak to będzie wyglądało w innym układzie współrzędnych. Powiedzmy, że chwili t w układzie czarnym (rys. 3.2.4) odpowiada chwila $t' = t - T$ w układzie zielonym. Wtedy mamy

$$w = \Pi_t^{-1}(t) = \Pi_{t'}^{-1}(t - T) \quad 3.2.9$$

Odpowiadające sobie przez (3.2.9) chwile czasu mają to samo włókno. Czyli jeżeli dwa zdarzenia leżą na tej samej płaszczyźnie zdarzeń równoczesnych w jednym układzie współrzędnych, to leżą również na tej samej płaszczyźnie zdarzeń w każdym innym układzie współrzędnych.

W rozważanej przez nas przestrzeni z absolutnym spoczynkiem istnieje również analogiczne rzutowania na przestrzeń $R^3 = E$ (rys. 3.2.5). Operację rzutowania możemy zapisać tak

$$\Pi_E : R^4 \rightarrow R^3 \quad 3.2.10$$

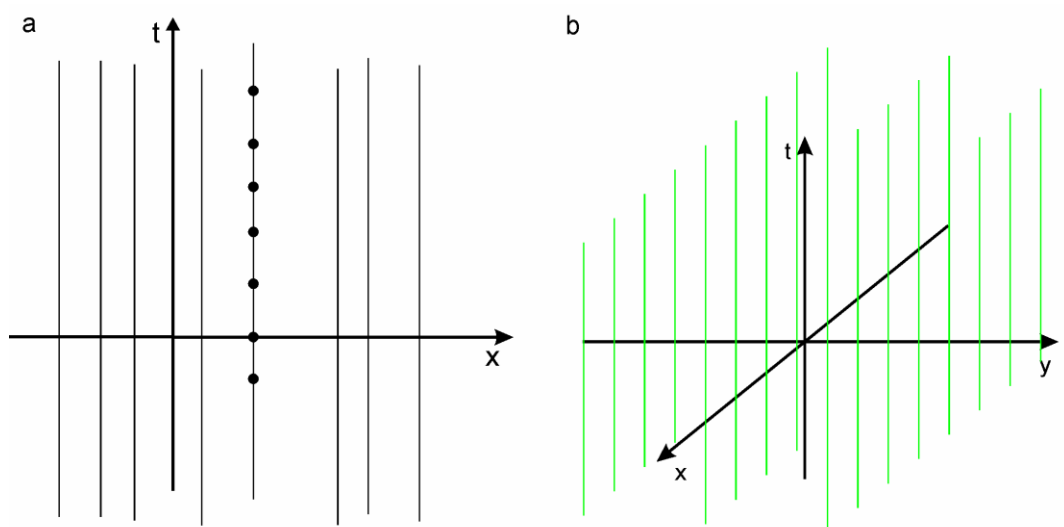
Odwzorowanie to przyporządkowuje zdarzeniu $P(t, x, y, z)$ miejsce, w którym to zdarzenie zaszło

$$\Pi_E(t, x, y, z) = (x, y, z) \quad 3.2.11$$

Analogicznie do (3.2.8) włókno dane jest przez odwzorowanie odwrotne

$$w = \Pi_E^{-1}(r) \quad 3.2.12$$

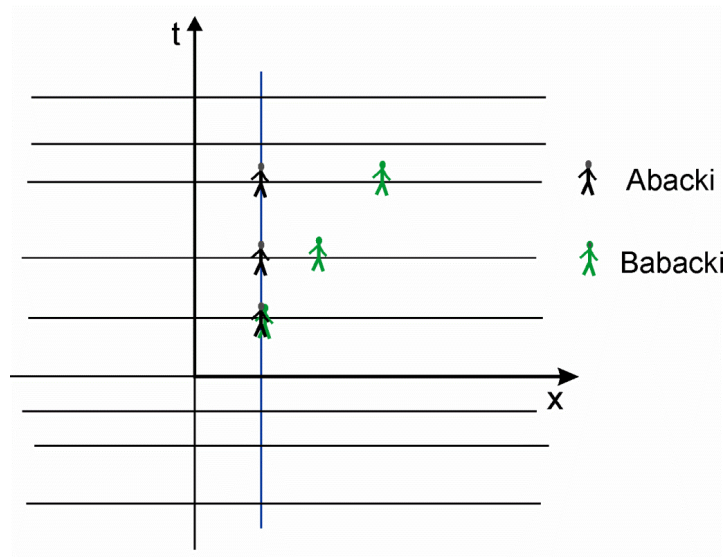
i jest zbiorem wszystkich wartości czasu t , które odpowiada miejscu (x,y,z) . Rysunek (3.2.5b) przedstawia przykładowe włókna w trójwymiarowej czasoprzestrzeni.



Rysunek 3.2.5. a) W czasoprzestrzeni z absolutną przestrzenią E istnieją włókna zdarzeń zachodzących w tym samym punkcie. Włókna te można zidentyfikować z każdego układu współrzędnych – są one właściwością przestrzeni. Włókna definiują stan absolutnego spoczynku; b) Ten sam rysunek w trójwymiarowej czasoprzestrzeni. Zielone linie to przykład włókien odpowiadających zdarzeniom zachodzącym w tym samym punkcie.

Powiedzmy, że Abacki miga latarką. Zapalenie i zgaszenie latarki zachodzi dla niego w tym samym miejscu. Babacki porusza się z prędkością v względem Abackiego. Dla niego zapalenie zgaszenie latarki zachodzi w dwóch różnych miejscach. Powiedzmy, że Abacki spoczywa względem absolutnej przestrzeni E . Jednocześnie Abacki porusza się wzdłuż osi czasu (rys. 3.2.6). Babacki przeskakuje między kolejnymi włóknami przestrzennymi. Ale gdy Babacki uwzględni swój ruch własny i mając to na uwadze obliczy przebieg włókien w przestrzeni, ze swojego układu współrzędnych, to otrzyma tą samą strukturę włóknistą co Abacki.

W czasoprzestrzeni z przestrzenią absolutną istnieją absolutne punkty, wyróżnione przez odwzorowanie (3.2.12). Możemy mierzyć prędkość obiektów względem tych punktów i będzie to ich prędkość własna. Babacki będzie odczuwał w swoim układzie odniesienia działanie sił bezwładności, będzie to efekt „chrobotania” jego układu współrzędnych przy przesuwaniu się względem absolutnej przestrzeni. Przypomnij sobie dyskusję (rys. 2.3) jeżeli absolutna przestrzeń jest fizyczna to takie „chrobotanie” musi mieć miejsce.

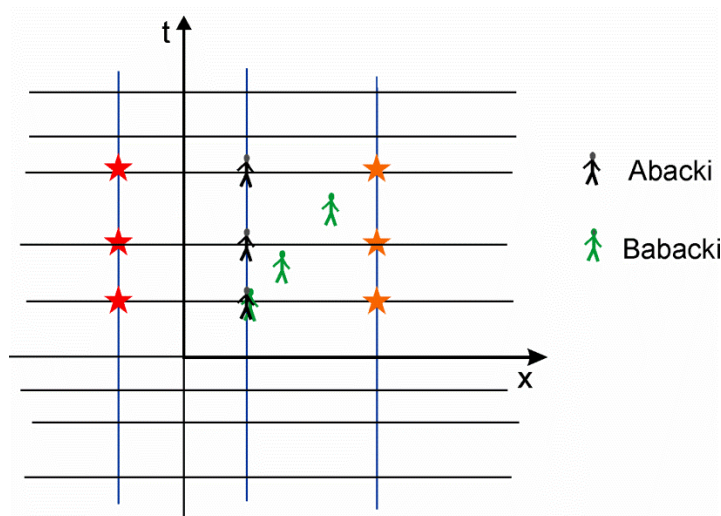


Rysunek 3.2.6. Abacki stoi w miejscu względem absolutnej przestrzeni E. Porusza się wzdłuż jednego włókna przestrzennego, czyli wzdłuż osi czasu (niebieska linia). Babacki porusza się z prędkością v względem Abackiego w kierunku osi x . Mija kolejne włókna przestrzenne. Przemieszczanie się między włóknami wymaga siły, zgodnie z równaniem (3.2.6). Zauważ, że względem osi czasu Babacki porusza się tak jak Abacki. Obaj w każdej chwili znajdują się na tym samym włóknie czasu.

Pomysł, że Abacki i Babacki poruszają się wzdłuż osi czasu może się wydać dziwaczny. Ale z drugiej strony mówimy „czas płynie”, ale nie mówimy „droga płynie” tylko jadę wzdłuż drogi. Zatem równie dobrze możemy mówić „poruszam się wzdłuż osi czasu”. Co ciekawe wszyscy poruszamy się wzdłuż osi czasu z tą samą prędkością. Dlatego nie sprawia nam problemu mówienie, że to oś czasu płynie względem nas. Gdybyśmy się mogli poruszać wzdłuż osi czasu z różnymi prędkościami, to stworzyłoby to sytuację dziwną z punktu widzenia naszego codziennego doświadczenia (rys. 3.2.7).

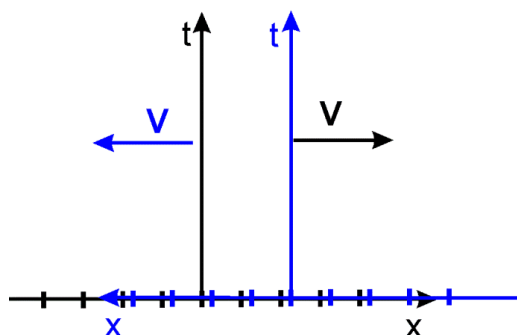
Rozwazałem do tej pory przykład absolutnej czasoprzestrzeni. Wiemy, że w taką czasoprzestrzeń wierzył Newton i to wbrew logice swojej mechaniki. Cóż przyzwyczajenie, że wspólna nam wszystkim przestrzeń gdzieś tam jest było zdecydowanie silniejsze od logiki, czemu, w tym przypadku, trudno się dziwić. Faktem jest jednak, że prawa mechaniki klasycznej nie pozwalają na wyróżnienie absolutnego spoczynku (nie pozwalają na pomiar prędkości własnej). Oznacza, to że efekt odwzorowania (3.2.12) będzie zależał od wyboru układu współrzędnych, co ilustruje rysunek (3.2.8). Zaskakującą cechą uwidocznioną na rysunku (3.2.8) jest brak uniwersalnej miarki do mierzenia odległości w czasoprzestrzeni. Miarka taka powinna podać odległość między dwoma zdarzeniami. Ale jeżeli w jednym układzie odległość między dwoma zdarzeniami zachodzącymi w dwóch różnych chwilach zmierzmy jako zero, to w układzie poruszającym

się względem tego wyjściowego odległość między tymi zdarzeniami będzie różna od zera.



Rysunek 3.2.7. Babacki porusza się w czasie wolniej od pana Abackiego. Obaj panowie obserwują dwie lampki w kształcie gwiazdy, które co jakiś czas błyskają. Na rysunku narysowane są trzy zdarzenia polegające na błysnięciu gwiazdek. Dla Abackiego lampki błyskają równocześnie. Tak samo jest dla Babackiego, tyle, że z punktu widzenia Abackiego, Babacki notuje mignięcia w jego przeszłości.

Jeżeli lampka w ręce Toli miga dla niej w tym samym punkcie, tak że kolejnej mignięcia oddalone są o $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{0}$, to dla Oli, która porusza względem Toli, kolejne mignięcia zachodzą w różnych punktach $\Delta \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Nie możemy więc tu mówić o wspólnej mierze odległości, a przez to nie ma takiej miary w czasoprzestrzeni. Dalej jednak, jeżeli w jednym układzie współrzędnych różnica czasu między dwoma zdarzeniami wynosi Δt , to w każdym innym będzie wynosiła tyle samo. Czy możemy coś więcej powiedzieć o strukturze czasoprzestrzeni mechaniki klasycznej. Oczywiście, że tak, choć nie wszystko w tym temacie. W tym temacie chciałem jeszcze pokazać, że korzystając z grupy symetrii Galileusza, możemy wyprowadzić podstawowy wzór szczególnej teorii względności i to bez zastanawiania się nad prędkością światła.



Rysunek 3.3.1. Dwa układy współrzędnych poruszają się względem siebie wzdłuż osi x . Układy mają przeciwnie zorientowane dodatnie osie x , aby zachować pełną symetrię analizowanej sytuacji. Obserwator w układzie czarnym powie, że układ niebieski oddala się od niego z prędkością o wartości $V > 0$, obserwator w układzie niebieskim powie, że układ czarny oddala się od niego z taką samą prędkością $V > 0$.

Przejście od układu niebieskiego (indeksowanego literą N) do czarnego ma ogólną postać

$$t_C = f(t_N, x_N) \quad 3.3.2a$$

$$x_C = g(t_N, x_N) \quad 3.3.2b$$

Zasada względności mówi nam, że w układzie niebieskim ruch też musi być jednostajny, co oznacza, że funkcje transformujące f i g muszą być liniowe. Zatem najogólniejsza postać funkcji f i g to:

$$f(t_N, x_N) = ax_N + bt_N + p \quad 3.3.3a$$

$$g(t_N, x_N) = cx_N + dt_N + r \quad 3.3.3b$$

Dla uproszczenia rozważań przyjmijmy, że w chwili $t_C=0$ ciało znajduje się w początku niebieskiego układu współrzędnych, a początki obu układów współrzędnych pokrywają się, to oznacza, że

$$t_C = 0 \Rightarrow (x_C = 0, t_N = 0, x_N = 0) \quad 3.3.4$$

Zakładając powyższe korzystam z faktu, że przesunięcie początku osi czasu i osi przestrzennych (translacje) należy do grupy Galileusza. Z równania (3.3.1) wynika, że przy warunkach (3.3.4) $C=0$. Gdy wstawimy wyrażenia (3.3.3) do równania (3.3.1), przy warunku $C=0$, to otrzymamy

$$\begin{aligned} A(cx_N + dt_N + r) + B(ax_N + bt_N + p) &= 0 \\ \Rightarrow A(cx_N + dt_N) + B(ax_N + bt_N) + Ar + Bp &= 0 \end{aligned} \quad 3.3.5$$

Spełnienie warunków (3.3.4) wymaga by

$$p = 0, r = 0 \quad 3.3.6$$

Biorąc pod uwagę (3.3.3) i (3.3.6) zależności (3.3.2) przyjmą postać

$$t_C = ax_N + bt_N \quad 3.3.7a$$

$$x_C = cx_N + dt_N \quad 3.3.7b$$

Współczynniki a, b, c, d mogą zależeć tylko od wartości prędkości względnej V między oboma IUO. Jest to jedyny parametr, który stanowi o różnicy w stanie obu układów. Gdyby $V=0$, to przy nakładaniu się obu układów w chwili początkowej mielibyśmy ten sam układ z przeciwnie strzałkowaną osią x . Rozwiążę układ równań (3.3.7) ze względu na t_N i x_N

$$t_N = \frac{a}{ad - cb} x_C - \frac{c}{ad - cb} t_C \quad 3.3.8a$$

$$x_N = -\frac{b}{ad - cb} x_C + \frac{d}{ad - cb} t_C \quad 3.3.8b$$

Wzory (3.3.7) i (3.3.8) muszą mieć taką samą postać. Gdyby postać tych wzorów była różna, to mielibyśmy złamaną symetrię między oboma układami współrzędnych. Widać teraz dlaczego, wbrew powszechnie przyjętym obyczajom, przyjąłem, że oba układy współrzędnych mają przeciwne zwroty (rys. 3.3.1). W obu układach współrzędnych prędkość układu drugiego jest taka sama co do wartości i znaku; mamy tu pełną symetrię. Uwzględniając dodatkowo symetrię wynikającą z zasady względności musimy przyjąć, że wzory (3.3.7) i (3.3.8) nie mogą się różnić, inaczej obserwacje w jednym układzie współrzędnych byłyby wyróżnione na tle obserwacji w innym układzie, co łamałoby zasadę względności. Aby do takiego łamania nie doszło muszą być spełnione warunki

$$a = \frac{a}{ad - cb} \quad 3.3.9a$$

$$b = -\frac{c}{ad - cb} \quad 3.3.9b$$

$$c = -\frac{b}{ad - cb} \quad 3.3.9c$$

$$d = \frac{d}{ad - cb} \quad 3.3.9d$$

Równania (3.3.9a) i (3.3.9d) są spełnione gdy

$$ad - cb = 1 \quad 3.3.10$$

Wtedy równanie (3.3.9b) i (3.3.9c) przechodzi w

$$b = -c \quad 3.3.11a$$

$$c = -b \quad 3.3.11b$$

Zatem nałożenie zasady względności pozwala nam wyrazić współczynnik b przez współczynnik c lub na odwrót. Wstawmy do równań (3.3.7) $x_N=0$ (jeden z warunków (3.3.4))

$$t_C = bt_N \quad 3.3.12a$$

$$x_C = dt_N \quad 3.3.12b$$

Dzieląc te równania stronami mamy

$$\frac{x_C}{t_C} = \frac{d}{b} = V \quad 3.3.13$$

Stąd mamy

$$d = bV \quad 3.3.14a$$

$$c = -b \quad 3.3.14b$$

$$a = \frac{1 + cb}{d} = \frac{1 - b^2}{bV} \quad 3.3.14c$$

Trzy współczynniki a , c i d wyraziliśmy przez czwarty, to jest b i wartość względnej prędkości układów V . Pamiętać przy tym należy, że wartość współczynnika b zależy również od prędkości V . Transformację (3.3.7a) możemy teraz zapisać tak

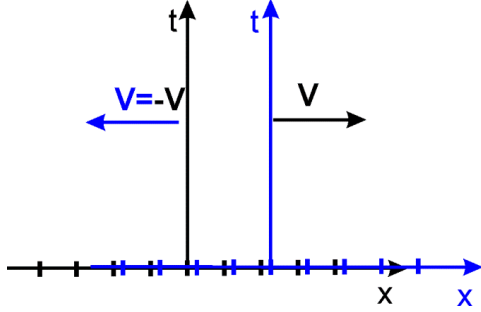
$$t_C = \frac{1 - b^2}{bV} x_N + bt_N \quad 3.3.15a$$

$$x_C = b(Vt_N - x_N) \quad 3.3.15b$$

Teraz transformacja między dwoma układami jest bardziej złożona (porównaj z 3.3.3), ale wyrażona jest nie przez cztery zależne od wartości prędkości V parametry a, b, c, d tylko przez parametr b i wartość prędkości V . Na tym etapie możemy również zrezygnować z pełnej symetrii między oboma układami (rys. 3.3.1) i skierować oś układu niebieskiego zgodnie z osią układu czarnego (rys. 3.3.2) co jest powszechnie przyjętą praktyką. Skutkuje to tylko zmianą znaku osi $x_N \rightarrow -x_N$ we wzorach (3.3.15).

$$t_C = -\frac{1 - b^2}{bV} x_N + bt_N \quad 3.3.16a$$

$$x_C = b(Vt_N + x_N) \quad 3.3.16b$$



Rysunek 3.3.2. Zmieniamy zwrot osi x -ów układu niebieskiego. W sytuacji fizycznej niczego to nie zmienia. Jednak zwykle używamy osi układów zorientowanych w tą samą stronę. Na rysunku (3.3.1) zacząłem od sytuacji w pełni symetrycznej. Teraz przestawiam się na sytuację fizycznie równoważną tej w pełni symetrycznej i zwykle stosowanej przy rysowaniu dwóch układów współrzędnych

Przy zmianie znaku przy x_N zmieniają się również znaki w zależnościach (3.3.11).

$$b = c \quad 3.3.17$$

Zmiana kierunku osi układu niebieskiego pociąga za sobą zmianę znaku przy wektorze prędkości V układu czarnego względem niebieskiego (rys. 3.3.2).

Czy to już wszystko co możemy powiedzieć o transformacji z jednego IUO do drugiego IUO na podstawie symetrii? Otóż nie. Niestety, aby coś jeszcze uzyskać muszę na scenę wprowadzić trzeci IUO (pomarańczowy). Niech układ pomarańczowy porusza się względem niebieskiego z prędkością o wartości V_{PN} . Na podstawie (3.3.16) możemy, przez analogię, napisać wzory transformacyjne między układem niebieskim i pomarańczowym

$$t_N = -\frac{1 - b'^2}{b'V_{PN}}x_P + b't_P \quad 3.3.18a$$

$$x_N = b'(V_{PN}t_P + x_P) \quad 3.3.18b$$

Wartość parametru b' zależy od prędkości V_{PN} . Możemy teraz napisać wzory na przejście między układem czarnym a pomarańczowym. Wystarczy wzory (3.3.18) podstawić do wzorów (3.3.16)

$$t_C = \frac{b^2 - 1}{bV}b'(V_{PN}t_P + x_P) + b\left(\frac{b'^2 - 1}{b'V_{PN}}x_P + b't_P\right) \quad 3.3.19a$$

$$x_C = b\left(V\frac{b'^2 - 1}{b'V_{PN}}x_P + b'Vt_P - b'(V_{PN}t_P + x_P)\right) \quad 3.3.19b$$

Po uporządkowaniu

$$t_c = x_P \left[\frac{b'}{Vb} (b^2 - 1) + \frac{b}{V_{PN}b'} (b'^2 - 1) \right] + t_P \underbrace{\left[\frac{V_{PN}b'}{Vb} (b^2 - 1) + bb' \right]}_b \quad 3.3.20a$$

$$x_c = x_P \underbrace{\left[\frac{Vb}{V_{PN}b'} (b'^2 - 1) + bb' \right]}_c + t_P [bb'(V + V_{PN})] \quad 3.3.20b$$

Równania (3.3.20) opisują transformacje między IUO, muszą więc być ogólnej postaci (3.3.15). Kłopot polega na tym, że nie znamy prędkości między układem niebieskim i pomarańczowym. Nie musimy jej jednak znać. Odwołam się do warunku (3.3.17). Współczynniki b i c są we wzorach (3.3.20) zaznaczone, podkreślającymi nawiasami klamrowymi. Mamy zatem, na mocy (3.3.17) nowy warunek

$$\frac{V_{PN}b'}{Vb} (b^2 - 1) + bb' = \frac{Vb}{V_{PN}b'} (b'^2 - 1) + bb' \quad 3.3.21$$

Po podzieleniu obu stron przez bb' mamy

$$\frac{V_{PN}}{Vb^2} (b^2 - 1) = \frac{V}{V_{PN}b'^2} (b'^2 - 1) \quad 3.3.22$$

Wyrażenie to możemy zapisać w postaci

$$\frac{b^2 - 1}{V^2 b^2} = \frac{b'^2 - 1}{V_{PN}^2 b'^2} \quad 3.3.23$$

Ponieważ wartości prędkości w (3.3.23) V i V_{PN} mogą być dowolne, wyrażenie

$$\frac{(b^2 - 1)}{V^2 b^2} = B \quad 3.3.24$$

nie może zależeć od wartości tych prędkości. Jest to stała przyrody, która wynika z przyjętych warunków symetrii. Wartość współczynnika b możemy wyrazić przez stałą B

$$b = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - BV^2}} \quad 3.3.25$$

Dla $V=0$ powinno być $x_c=x_N$ oraz $t_c=t_N$. Tak będzie wtedy, gdy w powyższym wzorze wybierzemy znak plus.

$$b = \frac{1}{\sqrt{1 - BV^2}} \quad 3.3.26$$

Wzory (3.3.15) przyjmą postać

$$t_C = \frac{1}{\sqrt{1 - BV^2}} (BVx_N + t_N) \quad 3.3.27a$$

$$x_C = \frac{1}{\sqrt{1 - BV^2}} (Vt_N + x_N) \quad 3.3.27b$$

Gdy przyjmiemy $B=0$ otrzymamy transformacje należące do grupy Galileusza

$$t_C = t_N \quad 3.3.28a$$

$$x_C = Vt_N - x_N \quad 3.3.28b$$

Zasada względności (symetrie) pozwoliły zredukować układ czterech parametrów zależnych od względnej prędkości układu $a(V)$, $b(V)$, $c(V)$, $d(V)$, do zaledwie jednego. Jak widać zasada względności choć potężna nie jest wszechmocna. O wartości czwartego parametru muszą zdecydować inne względy niż symetrie układu.

Wymiarem stałej B jest

$$[B] = \left(\frac{\text{czas}}{\text{długość}} \right)^2 \quad 3.3.29$$

Klasyczne doświadczenie z dodawaniem prędkości prowadzą do przyjęcia $B=0$ co daje nam grupę Galileusza. Grupa Galileusza prowadzi nas do dynamiki newtonowskiej. Gdzie zaprowadzą nas inne wartości B ? Mało istotna jest tu konkretna wartość. Zmieniając jednostki możemy dowolnie zmienić wartość B , ale bez zmian pozostanie to czy B jest ujemne, dodatnie czy też równe zero. Niech zatem $B < 0$. Dla wygody, wybieramy układ jednostek wielkości fizycznych tak, że $B = -1$. Wprowadzę nową zmienną kątową α i przyporządkowanie

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + V^2}} \quad 3.3.30a$$

$$\sin(\alpha) = \frac{V}{\sqrt{1 + V^2}} \quad 3.3.30b$$

Ma to sens. Wartość bezwzględna prawej strony równań (3.3.30) nie jest większa od 1, podobnie jak wartość bezwzględna obu funkcji trygonometrycznych. Łatwo również sprawdzić, że suma kwadratów

prawych stron tych równań jest równa jeden, czego oczekujemy od sumy kwadratów funkcji sinus i cosinus. Po wstawieniu (3.3.30a) transformacje (3.3.27) przyjmą postać

$$t_C = \frac{1}{\sqrt{1+V^2}}(-Vx_N + t_N) = \cos(\alpha)t_N - \sin(\alpha)x_N \quad 3.3.31a$$

$$x_C = \frac{1}{\sqrt{1+V^2}}(Vt_N + x_N) = \sin(\alpha)t_N + \cos(\alpha)x_N \quad 3.3.31b$$

Wzory te wyrażają obrót układu współrzędnych (§TV 3.2). Wniosek z tego jest taki, że przy $B=-1$ (co rprezentuje wszystkie przypadki $B<0$) wzory transformacyjne można sprowadzić do postaci równoważnej obrotowi układu współrzędnych, co wydaje się przyjemnym wynikiem. Niestety konsekwencje fizyczne są poważne. Niech w pewnej chwili t_{cA} zadzwoni w kieszeni Abackiego telefon (zdarzenia Z_A). Abacki, stojąc w miejscu (w czarnym układzie współrzędnych), wyciąga telefon i w chwili t_{cB} naciska przycisk z zieloną słuchawką (zdarzeni Z_B), przy czym $t_{cB}>t_{cA}$. Przyjmę, że w czarnym układzie współrzędne zdarzenia te mają współrzędne

$$Z_A(t_{cA}, 0); Z_B(t_{cB}, 0) \quad 3.3.32a$$

Przeprowadźmy teraz transformację układu odniesienia polegającą na obrocie o kąt π . W nowym, niebieskim układzie, współrzędne obu zdarzeń wynoszą

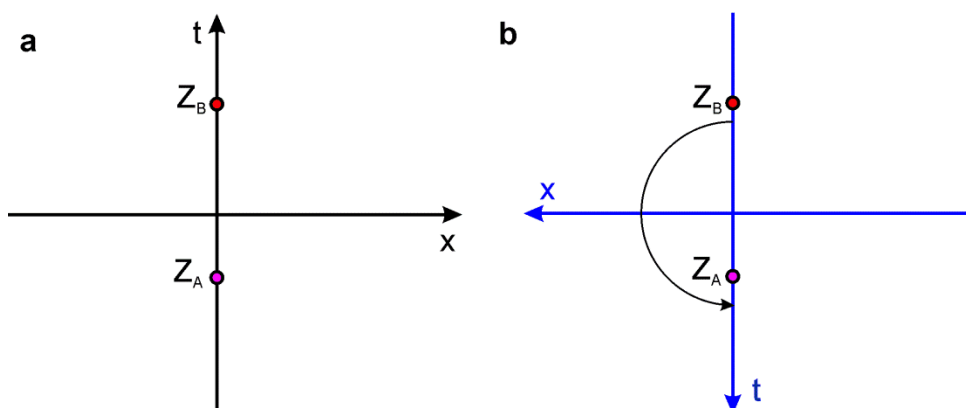
$$Z_A(-t_{nA}, 0); Z_B(-t_{nB}, 0) \quad 3.3.32b$$

Niestety, teraz $t_{nB}<t_{nA}$ (rys. 3.3.3), co oznacza, że w obroconym układzie Abacki najpierw naciśnie przycisk z zieloną słuchawką, a potem usłyszy dzwonek telefonu. Jak widać zasada względności ma za nic nasze przywiązanie do związków przyczynowo-skutkowych. My jednak je sobie cenimy. Jak pisałem wartość jednego parametru musimy dobrać na podstawie wskazań nie wpływających z zasady względności. Teraz możemy stwierdzić, że za wyborem znaku stałej B stoi inna potężna zasada – zasada przyczynowości. Nakłada ona żądania by stała B nie była ujemna, bo wtedy możemy znaleźć dwa układy współrzędnych takie, że związek przyczyna - skutek widziany z jednego z nich ma przeciwną kolejność niż w drugim układzie. A to nam się raczej nie zdarza.

Wartość $B>0$ jest natomiast akceptowalna. Powiedzmy, że w pewnym układzie współrzędnych (układ niebieski z rysunku 3.3.1) obserwujemy poruszającą się ruchem jednostajnym cząstkę. Niech w chwili początkowej cząstka ma współrzędne $(x_N=0, y_N=0)$, a w chwili końcowej (x_{Nk}, y_{Nk}) . Prędkość cząstki, w układzie niebieskim, wynosi

$$v_N = \frac{x_{Nk}}{t_{Nk}}$$

3.3.33



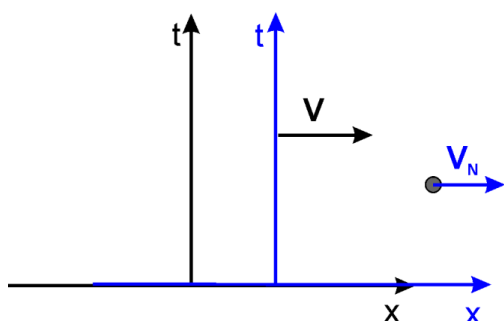
Rysunek 3.3.3. Gdy $B < 0$ możliwa jest transformacja układu współrzędnych równoważna obrotowi o kąt π . Oznacza to, że w nowym układzie współrzędnych, na osi czasu zmieni się kolejność zdarzeń. Stawia to pod znakiem zapytania związek przyczynowo skutkowy, gdyż oznacza, że następstwo czasowe obserwowanych zdarzeń zależy od wyboru układu współrzędnych.

Jaką prędkość cząstki zmierzy obserwator w układzie czarnym K, względem którego układ niebieski K_N porusza się z prędkością V ? Używając transformacji (3.3.27) mamy

$$x_C = 0, \quad t_C = 0 \quad 3.3.34a$$

$$t_{Ck} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(\frac{V}{c^2} x_{Nk} + t_{Nk} \right) \quad 3.3.34b$$

$$x_{Ck} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (V t_{Nk} + x_{Nk}) \quad 3.3.34c$$



Rysunek 3.3.3. W układzie niebieskim porusza się wzdłuż osi x , ze stałą prędkością o wartość V_N , cząstka. Wartość prędkość układu niebieskiego względem czarnego,

mierzona wzdłuż osi x
wynosi V .

Gdzie wprowadziłem nową zmienną o wymiarze prędkości

$$c = \frac{1}{\sqrt{B}} \quad 3.3.35$$

W czarnym układzie współrzędnych prędkość cząstki wynosi

$$v_C = \frac{x_{Ck}}{t_{Ck}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} (V t_{Nk} + x_{Nk})}{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \left(\frac{V}{c^2} x_{Nk} + t_{Nk} \right)} = \frac{V t_{Nk} + x_{Nk}}{\frac{V}{c^2} x_{Nk} + t_{Nk}} \quad 3.3.36$$

Po dalszych przekształceniach mamy

$$v_C = \frac{V + \frac{x_{Nk}}{t_{Nk}}}{\frac{V}{c^2} \frac{x_{Nk}}{t_{Nk}} + 1} = \frac{V + v_N}{\frac{V}{c^2} v_N + 1} \quad 3.3.37$$

Patrząc na rysunek (3.3.3) widać, że wzór (3.3.37) jest wzorem na składanie prędkości. Gdy stała $c = \infty$, mamy

$$v_C = V + v_N \quad 3.3.38$$

Czyli klasyczny wzór na składanie prędkości. Gdy jednak stała c jest skończona prędkości nie składają się w tak prosty sposób! W szczególności gdy prędkość cząstki w układzie niebieskim wynosi c to

$$v_C = \frac{V + c}{\frac{V}{c^2} c + 1} = \frac{c \left(\frac{V}{c} + 1 \right)}{\left(\frac{V}{c} + 1 \right)} = c \quad 3.3.39$$

Widać, że złożenie prędkości c z inną prędkością daje c . Jest to zaskakujący wynik, pokazujący, że przekroczenie prędkości wyznaczonej przez stałą c może być bardzo kłopotliwe.

Gdy $B=0$ wtedy $c=\infty$. To trochę frapujący wynik. Stała fundamentalna c o wymiarze prędkości, a stała wynikająca z zasady względności jest fundamentalna, musi mieć jakieś fizyczne znaczenie. Jeżeli ta stała jest nieskończona to reprezentuje nieskończoną prędkość, która ma znaczenie fizyczne. W realnym świecie nie spotykamy się z nieskończonymi wartościami wielkości fizycznych. Wiemy obecnie, że stała c ze wzoru

(3.3.32) jest równa prędkości światła w próżni, czyli B jest dodatnie. Jednak przez długi czas uczeni uważali (przynajmniej opiniotwórcza większość uczonych), że prędkość światła jest nieskończona. Mechanika klasyczna została sformułowana przy mniej lub bardziej jawnym wyartykułowanym przekonaniu o nieskończonej prędkości rozchodzenia się oddziaływań między dwoma ciałami, co jest zgodne z przyjęciem, na jej gruncie, że $B=0$. A jaka jest stała c , gdy B jest ujemne? Mamy wtedy prędkość wyrażoną liczbą urojoną, co jest jeszcze jednym powodem, dla którego odrzucamy taką możliwość.

Chociaż wspomniałem tu o prędkości światła, wszystkie wyciągnięte wyżej wnioski nie potrzebują faktu, że c to prędkość światła. Z zasady względności wynika po prostu, że istnieje stała B , która może być ujemna, dodatnia lub równa zeru. Jeżeli stała B jest dodatnia, to istnieje stała c o wymiarze prędkości, która ma dziwne własności. Jeżeli wyobrazimy sobie rakietę, która względem nas leci z prędkością V , a nasz kolega obserwuje w tej rakiecie cząstkę o prędkości równej c , to my też zmierzmy prędkość tej cząstki jako równą c . Spodziewalibyśmy się, że zmierzmy $c+V$, ale aby tak było, to musi być: $B=0$, a $c=\infty$. To, że c reprezentuje prędkość światła z naszych rozważań w żaden sposób nie wynika. Ten wniosek przyniesie dopiero elektrodynamika. Nie mniej, przyjmując dodatnie B nakreśliśmy ramy szczególnej teorii względności. Rozważania nad symetrią w układach fizycznych dają zadziwiająco mocne wyniki.

3.3.1. Przyczynowość

Powóływałem się wyżej na zasadę przyczynowości. Co to jest ta przyczynowość? Wydaje się, że nie powinno być z tym problemu. Jeżeli naciśnę guzik dzwonka u drzwi i rozlegnie się głos dzwonka, to moje naciśnięcie guzika jest przyczyną uruchomienia się dzwonka. A dźwięk dzwonka będzie przyczyną tego, że gospodarz domu otworzy mi drzwi. W powyższych rozważaniach skorzystałem z prostego założenia, że nie ma możliwości odwrotnej kolejności zdarzeń związanych więzami przyczyna-skutek. Jak pan Abacki obleje wodą pana Babackiego, to pan Babacki będzie mokry. Przyczyną tego, że pan Babacki jest mokry jest działanie pana Abackiego. Gdybyśmy mogli odwrócić kierunek związku przyczynowo-skutkowego, to wyglądałoby to tak. Jak pan Babacki stał się mokry, to pan (Abacki) obleje go wodą. Oblanie wodą było późniejsze w czasie niż bycie mokrym, co więcej było przyczyną tego, że pan Abacki oblał pana Babackiego wodą. Wracając do rozważań nad prametrem B . Sytuacja gdy parametr B jest mniejszy od zera, oznacza coś więcej (rys. 3.3.3). Kolejność ciągu zdarzeń: oblanie wodą - bycie mokrym, zależy od wyboru układu odniesienia. Ponieważ z czymś takim nie spotykamy się, odrzucamy tę możliwość.

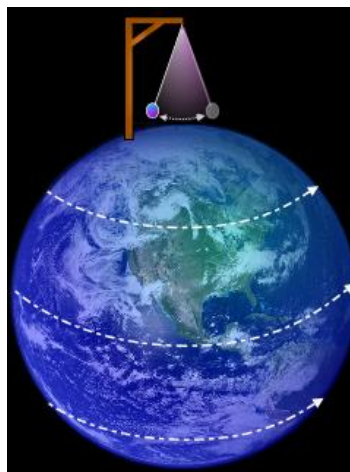
Oczywiście sama zasada przyczynowości ma swoje bardziej złożone oblicze. W swojej filozofii Arystoteles przyjął, że każde działanie ma przyczynę, które je poprzedza. Ponieważ jednak nie chciał się cofać w tym łańcuchu przyczynowo-skutkowym w nieskończoność do tyłu, to przyjął, że istnieje pierwsza, boska przyczyna wszelkich zmian. Był to dominujący pogląd w filozofii Greków, Rzymian, a następnie Średniowiecznego świata islamu i chrześcijaństwa. W XVIII wieku część filozofów (np. D. Hume) zaczęła tą oczywistość powszechnego związku przyczynowo skutkowego podważać. Inni go oczywiście bronili (np. I. Kant), choć z innej perspektywy niż to było czynione we wcześniejszych wiekach. Nie mamy tu miejsca na rozstrząsanie tych kwestii. Również na gruncie fizyki pojawiły się problemy. Pierwsze z nich związane są z rozwiązaniami równań Maxwella. Oznacza to, że powrócimy do problemu przyczynowości przy okazji omawiania równań Maxwella, potem teorii względności i mechaniki kwantowej. Mimo różnych wątpliwości dalej przyjmujemy, że nie da się odwrócić związku przyczynowo skutkowego przez zmianę układu współrzędnych i tak pewnie pozostanie, przynajmniej do czasu kiedy w jakimś przekonującym eksperymencie pokażemy, że to nieprawda. Przyjmijmy zatem zasadę przyczynowości w prostej, nie budzącej na gruncie fizyki, większych sprzeciwów formie

Określenie 3.1.1: Zasada przyczynowość

Jeżeli dla pewnego obserwatora zdarzenie A poprzedza zdarzenie B, jako jego przyczyna, to kolejność ta będzie zachowana we wszystkich innych układach współrzędnych.

4. Wahadło Foucaulta ♦

Najlepiej znanym eksperymentem pokazującym obecność siły Coriolisa jest wahadło Foucaulta (rys. 4.1). Wahadło Foucaulta to długa linka, na końcu której zawieszony jest obciążnik (zwykle masywna kula).



Rysunek 4.1. Z lewej: Najsłynniejsze wahadło Foucaulta zawieszone we francuskim Panteonie wiosną 1851 roku. Na linie o długości 63 metrów zawieszona jest 28kg metalowa kula. Okres obrotu płaszczyzny wahań wahadła to 32 godziny; z prawej: Zachowanie się wahadła Foucaulta na biegunie.

Wahadło zawieszone jest tak, aby mogło wykonywać swój ruch przy możliwie minimalnych oporach ze strony zamocowania. Układ współrzędnych związany z Ziemią nie jest układem inercyjnym – jest układem obracającym się zgodnie z ruchem obrotowym Ziemi. Analizując ruch ciał na Ziemi powinniśmy zatem uwzględniać siłę odśrodkową i Coriolisa. Obie te siły są małe, ale przy subtelnych pomiarach, albo globalnych zjawiskach dają o sobie znać. Siła odśrodkowa zmniejsza siłę przyciągania grawitacyjnego. A siła Coriolisa zmienia płaszczyznę wahań wahadła Foucaulta.

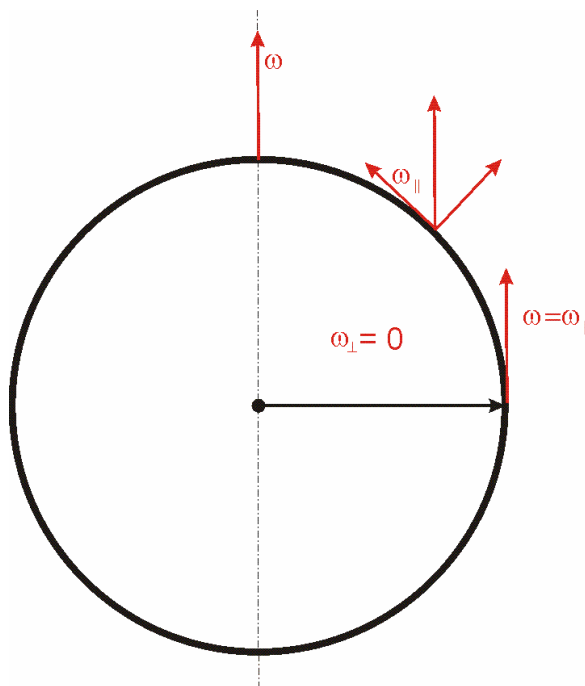
Aby to zobaczyć udajmy się na biegun północny lub południowy, czyli tam gdzie oś obrotu Ziemi przebija Ziemię. Puszczamy w ruch wahadło Foucaulta, powiedzmy na biegunie północnym. Ziemia obraca się pod wahadłem w kierunku z zachodu na wschód (rys. 4.1). Zakładając małe siły tarcia przy zawieszeniu wahadła jedyną siłą jaka na nie działa jest siła grawitacji Ziemi. Siła ta powoduje wahadłowy ruch wahadła ale nie powinna obracać jego płaszczyzny wahań. Patrząc zatem na ruch wahadła, z układu inercyjnego, widzimy jak wahadło waha się, a pod nim obraca się Ziemia. Ważne jest aby dostrzec, że z punktu widzenia układu inercyjnego, wahadło nie obraca się wraz z Ziemią. Taki obrót z Ziemią wymagałby dodatkowej siły

prostopadłej do płaszczyzny wahań, a takiej siły nie ma (na tym polega sztuka wykonania zawieszenia).

Wracamy z kosmosu na Ziemię, lądujemy przy biegunie i co widzimy? Widzimy, że ktoś powiesił wielkie wahadło, i że wahadło to i owszem waha się jak przystało wahadłu, ale dodatkowo obraca się płaszczyzna wahań wahadła. Pełny obrót płaszczyzny wahań wahadła to 24h. Dlaczego – wszak na wahadło nie działa żadna siła, która mogłaby powodować obrót płaszczyzny wahań? Ale obraca się Ziemia, a wraz z nią my. Zatem jesteśmy w układzie nieinercyjnym, a w układzie nieinercyjnym takim jak nasz (to jest jednostajnie obracającym się) dodajemy dwie siły pozorne. Siłę odśrodkową, która na biegunie równa jest zeru (dlaczego?) oraz siłę Coriolisa. Siła Coriolisa pozwala opisać obrót płaszczyzny wahań wahadła, w układzie związanym z Ziemią.

Przypominam, że siła Coriolisa jest siłą pozorną, obrót płaszczyzny wahadła wynika z obrotu Ziemi pod wahadłem. Ale ten sam efekt możemy uzyskać zapominając o ruchu obrotowym Ziemi i dodając do układu siłę Coriolisa.

Co się stanie jeżeli umieścimy wahadło poniżej bieguna? Tu sprawy się komplikują; przynajmniej jeżeli chodzi o wyobrażenie sobie występujących efektów. Od strony formalnej wygląda to tak. Wektor prędkości kątowej rozkładamy na składową styczną do powierzchni Ziemi i prostopadłą do niej (rys. 4.2). Robimy to dlatego, że składowa równoległa nie daje wkładu do siły obracającej płaszczyznę wahań. Gdy wahadło waha się w kierunku południe-północ jego wektor prędkości jest równoległy do składowej stycznej i iloczyn wektorowy ze składową $\omega_{||}$ jest równy zeru. W przypadku innych orientacji kierunku wahań iloczyn ten daje wektor prostopadły do powierzchni Ziemi, który zwiększa lub zmniejsza wartość siły grawitacji, ale w bardzo nieznacznym stopniu. Ta składowa nie powoduje obrotu płaszczyzny wahań. Ograniczamy się zatem do składowej prostopadłej. Iloczyn wektorowy prędkości liniowej wahadła i składowej prostopadłej prędkości kątowej jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny wahań. Jest to zarazem kierunek siły Coriolisa, która obraca płaszczyznę wahań. Na równiku składowa pionowa wektora prędkości kątowej jest równa zeru i siła Coriolisa jest również równa zeru.



Rysunek 4.2. Poza biegunem, aby wyznaczyć siłę Coriolisa, rozkładamy wektor prędkości kątowej Ziemi na składową styczną do powierzchni i składową prostopadłą do powierzchni.

Pisząc równanie ruchu dla wahadła Foucaulta z uwzględnieniem sił pozornych możemy, po ich rozwiązaniu, uzyskać wzór na częstość obrotu płaszczyzny wahań. Wzór opisujący częstość obrotu płaszczyzny wahań wahadła Foucaulta umieszczonego w punkcie o szerokości geograficznej φ ma postać:

$$\omega_F \approx \omega_Z \left(1 - \frac{3}{8} \left(\frac{A}{l} \right)^2 \right) \sin(\varphi) \quad 4.1$$

W tym wzorze A to amplituda wahań wahadła, l to długość linki wahadła, ω_Z częstość ruchu obrotowego Ziemi. Jeżeli długość linki jest znacznie większa od amplitudy drgań $l \gg A$, to wzór powyższy przyjmie postać

$$\omega_F \approx \omega_Z \sin(\varphi) \quad 4.2$$

Zatem z dobrym przybliżeniem można uznać, że płaszczyzna wahań obraca się w tempie wyznaczonym przez składową prostopadłą wektora prędkości kątowej ruchu obrotowego Ziemi.

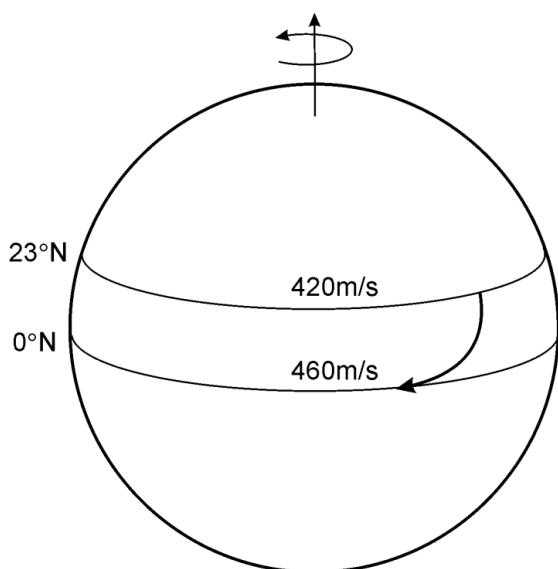
Pewnie zauważyłeś, że wzoru (4.1) nie wyprowadziłem, tylko został tu on przeze mnie napisany. To nie znaczy bynajmniej, że nie zamierzam go wyprowadzić, wręcz przeciwnie wyprowadzę go i to na dwa sposoby geometryczny (§TXV 3) i analityczny (§TXVII). W tym miejscu nie jesteśmy jeszcze do tego przygotowani. Natomiast teraz przejdę do omówienia wielkoskalowych zjawisk na Ziemi, za które odpowiedzialność bierze siła Coriolisa.

4.1. Efekty atmosferyczne i oceaniczne

Jak się przekonasz, wyprowadzenie wzoru na siłę Coriolisa (§2.5) nie wydaje się szczególnie trudne, przynajmniej w przypadku profesjonalnego fizyka teoretyka. Mogłoby się zdawać, że tego typu podstawowe wnioski z dynamiki powinny pojawić się w czasie powiedzmy pierwszych pięćdziesięciu lat po opublikowaniu *Principiów* Newtona. A za nimi powinno szybko przyjść zrozumienie znaczenia sił bezwładności (pozornych) dla dynamiki atmosfery, gdy tą dynamikę opisujemy z układu związanego z Ziemią, tak jak to zwykle ma miejsce. Tak prosto jednak nie było. Trzeba pamiętać, że choć *Principia* szybko zyskały gorących zwolenników, to ich szeroka akceptacja zajęła te pierwsze pół wieku. W pierwszym okresie nawet zagorzali zwolennicy nowej mechaniki mieli podstawowe problemy z posługiwaniem się nią. Nowa mechanika postawiła nowe wymagania co do sposobu myślenia o układzie mechanicznym jak również narzędzi niezbędnych do sprawnego rozwiązywania problemów fizycznych. Analiza matematyczna dopiero się rodziła, podobnie było z rachunkiem wektorowym. Tych podstawowych narzędzi matematycznych trzeba było się uczyć i to nie z podręczników, a z prac matematyków. Często sami fizycy dopiero je tworzyli. Świadomość podziału na układy inercjalne i nieinercjalne dopiero wpisywała się w umysły fizyków. Problem sił bezwładności działających w układzie związanym z Ziemią dojrzał wraz z mechaniką i trwało to dobre sto pięćdziesiąt lat od momentu publikacji *Principiów*.

Początki rozważań dotyczących wpływu ruchu obrotowego Ziemi na dynamikę atmosfery sięgają czasów przed Newtonem. Koronnym argumentem przeciwników modelu obracającej się Ziemi było stwierdzenie, że powinien on powodować huraganowe wiatry, tym silniejsze im bliżej równika. Przyjęcie zasady bezwładności „uspokoiło” Ziemską atmosferę. Powietrze zaczęło się obracać wraz z Ziemią podobnie jak na przykład ziarenka piasku na jej powierzchni czy stojący na niej ludzie. Jednak bezwładność atmosfery nie jest w stanie zniwelować wszystkich skutków faktu, że znajduje się ona na obracającej się Ziemi.

W 1735 roku George Hadley doszedł do wniosku, że obrót Ziemi powinien skutkować w zmianie kierunku wiatrów wiejących równoleżnikowo (rys. 4.1.1). Miało to być spowodowane różnicą prędkości punktów leżących na różnych równoleżnikach (najszybsze są punkty na równiku). Uwaga Hadleya była słuszna, ale nie wystarczała do opisanie problemu, co więcej prowadziła do błędnych konkluzji. Prace Hadley’a podjął niemiecki meteorolog Heinrich W. Dove (1803-1879), przez co, stała się później znana jako model Dova-Hadley’a.



Rysunek 4.1.1. Według Hadleya cząstka powietrza poruszająca się z północy w kierunku równika będzie doznawała odchylenia w kierunku zachodnim (względem powierzchni Ziemi) na skutek różnicy prędkości między punktami leżącymi na tych równoleżnikach. Nie jest to jednak wystarczający efekt dla wytłumaczenia obserwowanych ruchów atmosfery i wody w oceanach.

W latach 1775-1776 Pierre Simone Laplace rozwiązał równania ruchu dla cząstki poruszającej się w polu grawitacyjnym obracającej się planety, ale jego analiza uzyskanych wyników nie zawiera bezpośredniego odniesienia do siły Coriolisa. Interpretując siły skręcające tor cząstki odwołał się do interpretacji podobnej do podanej przez Hadleya, która jak wiemy nie była poprawna. Laplace miał zatem porządnym matematyczny opis, jednak nie zrobił z niego równie porządnego użytku. Nie jest to jedyny przykład z historii fizyki na to, że sam poprawny wynik obliczeń nie wystarczy. Trzeba go jeszcze umieć odczytać (czyli zinterpretować). Najbardziej znanym przykładem są przekształcenia Lorentza. Lorentz wyprowadził poprawne przekształcenia między dwoma układami współrzędnych, zgodnymi z zasadą względności i równaniami Maxwella leżącymi u podstawy klasycznej elektrodynamiki. Oznacza to, że od strony formalnej miał w ręku podstawowe wzory szczególnej teorii względności. Jednak nie potrafił zrobić z nich właściwego użytku. Uczynił to dopiero Albert Einstein. Ale przekształcenia symetrii szczególnej teorii względności nazywamy przekształceniami Lorentz a nie przekształceniami Einsteina.

Gaspard Gustave Coriolis był wziętym nauczycielem w Ecole Polytechnique¹⁴ w Paryżu i autorem solidnego podręcznika mechaniki wydany w 1829 roku. Coriolis sformułował „naukową” mechanikę w formie, która była do przyjęcia dla dobrze wykształconych inżynierów, otwierając w ten sposób drogę do jej szerszego zastosowania w praktyce. Jest to pierwszy podręcznik, w którym znajdziemy dobrze znany nam wzór na energię kinetyczną masy punktowej – $\frac{1}{2}mv^2$. W 1835 roku Coriolis

¹⁴ Wtedy to była jedna z najlepszych (jeżeli nie najlepsza) uczelni technicznych na świecie

opublikował pracę, która uczyniła go znanym po dziś dzień. W pracy tej wyprowadził wzór (2.3.1) na siłę Coriolisa. Praca poświęcona była zagadnieniem ruchu w obracających się układach mechanicznych, gdzie również występuje siła Coriolisa. Dla samego Coriolisa wyprowadzona nowa składowa siły bezwładności nie była czymś szczególnie frapującym. Na znaczeniu zyskała w późniejszym czasie. Praca Coriolisa stała się inspiracją dla Simona P. Poissona, który kilka lat później zastosował siłę Coriolisa do obliczenia poprawek do wzoru na tor pocisku artyleryjskiego. Prace Coriolisa i Poissona były trudne w czytaniu i używały zaawansowanej, jak na owe czasy, matematyki. Przez to nie spotkały się z szerokim odzewem. W 1847 roku francuski matematyk Joseph Bertrand zaproponował wyprowadzenie wzoru na siłę Coriolisa, które zostało oparte na dwóch uproszczeniach, których negatywne efekty szczęśliwie wzajemnie się znosiły. Wyprowadzenie Bertranda stało się popularne w meteorologii poczynając od lat 80-tych XIX wieku. Pierwsze wyprowadzenie wzoru na siłę Coriolisa, które jest bliskie naszemu wyprowadzeniu jest autorstwa angielskiego matematyka O'Briena. Był on zwolennikiem szerokiego zastosowania rachunku wektorowego, a w swoim wyprowadzeniu użył wektorowej zależności (2.5.9), zapisanej w notacji analogicznej do dzisiejszej. Pomyśl, lata 80-te XIX wieku, a rachunek wektorowy nie był jeszcze powszechnie stosowany przez fizyków! XIX wieczna fizyka była w głównej mierze fizyką doświadczenia w przeciwieństwie do naszych czasów, gdzie dominują rozważania teoretyczne i analizy komputerowe.

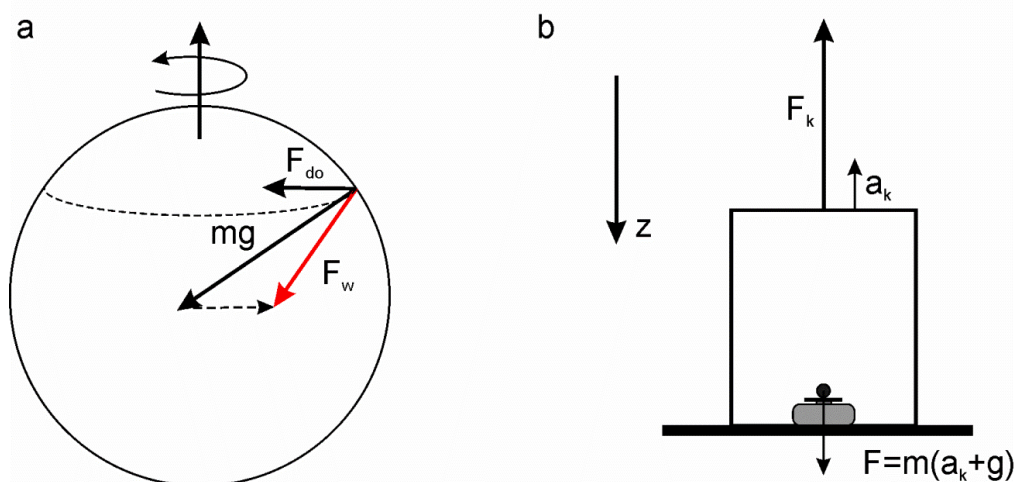


Rysunek 4.1.2. Gaspard Gustave Coriolis (ur. 21 maja 1792 w Nancy, zm. 19 września 1843 w Paryżu). Po ukończeniu École Polytechnique, zaczął na niej nauczać jako asystent profesora. Równocześnie prowadził prace badawcze z zakresie mechaniki. Swoim podręcznikiem mechaniki przybliżył mechanikę klasyczną praktykom. Prace zawierającą wyprowadzenie siły pozornej nazywanej dziś siłą Coriolisa opublikował w 1835r. W 1829 został profesorem mechaniki na École Centrale des Arts et Manufactures, a w 1836 roku przyjął stanowisko profesora na École des Ponts and Chaussées.

Pomimo, że znane były analityczne rozwiązania równań ruchu w układzie obracającym się w latach 60-tych XIX wieku ciągle toczyła się debata nad wpływem siły Coriolisa na wielkoskalowe procesy na Ziemi.

Złożoność modelu matematycznego, mała intuicyjność wynikających z niego wniosków, oraz słabe przygotowanie uczestników dyskusji w zakresie zaawansowanej matematyki powodowało, że ciągle odwoływano się do zbyt prostego modelu Hadleya lub jego modyfikacji. Z modelu Hadleya wynika między innymi, że efekty związane z działaniem siły Coriolisa nie są obecne dla ruchu wzdłuż równoleżników co nie jest prawdą. Kontrowersje te ciągnęły się do lat 80-tych XIX wieku. Dziś te sprawy przestały być przedmiotem gorącej debaty uczonych, ale zrozumienie efektów wywołanych przez obrót Ziemi na ruchy mas powietrza czy wody stanowi ciągle poważne wyzwanie dla uczniów i studentów. Nas to jednak nie powinno zniechęcać, a raczej przeciwnie, prawda? Poświęcę jeszcze trochę miejsca na analizę wielkoskalowych zjawisk w atmosferze i w światowym ocenie, których przyczyną jest ruch obrotowy Ziemi.

Rysunek (4.1.3a) przenosi nas na obracającą się Ziemię. Na małą masę na powierzchni Ziemi działa siła grawitacji mg . Ze względu na ruch wirowy Ziemi część siły grawitacji stanowi siłę dośrodkową. W takim przypadku odejmiemy składową dośrodkową od siły grawitacji. Pozostała „niezużyta” część siły ciężenia narysowana jest czerwoną strzałką.



Rysunek 4.1.3. a) na obracającej się Ziemi na punkt działa siła grawitacji, której części zostaje „zużyta” na utrzymanie ciała w ruchu po okręgu. Siłę dośrodkową F_{do} odejmujemy od siły grawitacji mg . Taka efektywnie działająca siła grawitacji F_w ma kierunek inny (czerwona strzałka) w stosunku do siły mg ; b) Gdy na kabinę działa, w kierunku przeciwnym do kierunku siły ciężenia, siła F_k to kabina wznosi się do góry (przeciwnie do osi z) z przyspieszeniem a_k danym wzorem (4.1.1). Jednak na kulkę leżącą w kabinie działa dodatkowa siła „ciężkości” o wartości $-ma_k$. Zauważ, że aby poprawnie obliczyć dodatkową siłę, musimy zmienić zwrot wektora przyspieszenia (czyli od siły ciężkości odjąć, a nie dodać, wyraz ma_k)

Dlaczego odejmujemy siłę dośrodkową? Pomyśl, o kabinie (o masie całkowitej m_k), w której jest waga, na której leży kulka o masie m (rys. 4.1.3b). Na kulkę działa siła grawitacji $m\mathbf{g}$. Do kabiny przykładasz siłę $\mathbf{F}_k$ przeciwnie skierowaną do siły grawitacji. Siła ta rośnie, ale dopóty będzie mniejsza od ciężaru kabiny, dopóty kulka w kabinie jej nie odczuje. Gdy jednak siła $\mathbf{F}_k$ przekroczy wartość ciężaru kabiny, kabina zacznie unosić się z przyspieszeniem do góry, które jest równej

$$\mathbf{a}_k = \frac{\mathbf{F}_k + m_k \mathbf{g}}{m_k} \Rightarrow |a_k| = \frac{-F_k + m_k g}{m_k} \quad 4.1.1$$

Jednak ciężar Q kulki mierzony przez wagę wzrośnie o wartość

$$\delta Q = a_k m \quad 4.1.2$$

Ciężar kulki wyniesie

$$Q' = Q + \delta Q = Q + a_k m \quad 4.1.3$$

Stało się coś dziwnego. Siła działająca na kulkę ma dwie składowe, siłę ciężkości i siłę $\mathbf{F}_k$, która powoduje ruch przyspieszony kulki. Część siły $\mathbf{F}_k$ równoważy ciężar kulki, pozostała część nadaje jej przyspieszenie $\mathbf{a}_k$, równe przyspieszeniu kabiny. Jednak z punktu widzenia ciężaru kulki (4.1.3) wygląda to tak, jakby składowa związana z przyspieszeniem $\mathbf{a}_k$ kulki dodawała się do składowej grawitacji (a nie odejmowała jakby to wynikało z kierunku przyspieszenia $\mathbf{a}_k$). Siły grawitacji sprawiają nam tu kłopot i dodatkowo utrudniają rozumienie takich efektów jak te związane z siłami Coriolisa. Zapiszmy wnioski z powyższego w postaci

Fakt 4.1.1.

Z punktu widzenia ciężaru ciała, ta część siły działającej na dane ciało, które powoduje przyspieszenie tego ciała w obecności pola grawitacyjnego dodaje się wektorowo do siły grawitacji ze znakiem minus.

Nie zmienia to jednak faktu, że siła dodawana do wagi ciała jest siłą bezwładności. Rzeczywista siła (siła przyłożona) działa w kierunku przeciwnym i poprzez wagę nadaje kulce przyspieszenie równe przyspieszeniu kabiny. To, że do siły grawitacji dodajemy siłę bezwładności może budzić pewien niepokój. W przyspieszanej kabinie siła grawitacji zdaje się działać tak jak siła bezwładności. Dla Alberta Einsteina był to punkt wyjścia do sformułowania ogólnej teorii względności, w ramach której siła grawitacji jest siłą bezwładności!

Efektom istnienia siły dośrodkowej jest to, że wypadkowa siła działa nieco w innym kierunku niż siła grawitacji. Oznacza to, że owa wypadkowa siła grawitacji przestanie być prostopadła do powierzchni Ziemi i w efekcie

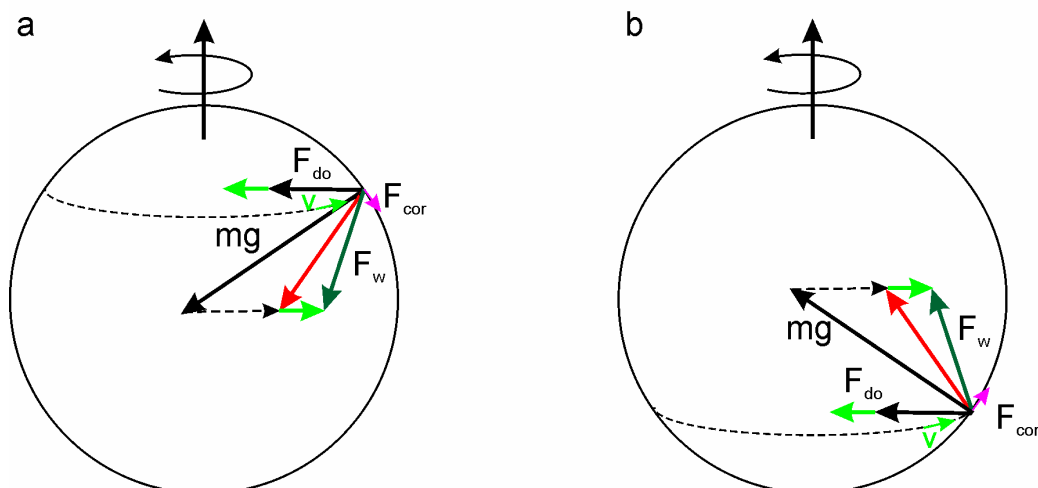
pojawi się niezerowa składowa styczna tej siły. W takim wypadku na każde ciało, nawet spoczywające, działałaby siła spychająca je w kierunku równika. Tak jednak nie jest, gdyż Ziemia jest nieco spłaszczona na biegunach i bardziej przypomina elipsoidę niż kulę. Dzięki temu spłaszczeniu efektywny wektor siły grawitacji jest jednak prostopadły do powierzchni Ziemi i nie ma żadnej składowej spychającej ciało w kierunku równika. Oczywiście stwierdzenie „jest prostopadły do powierzchni Ziemi, oznacza, że tak jest średnio rzecz biorąc¹⁵. Gdy położymy kulkę na stoku góry, to zacznie się z tego stoku staczać do momenty, gdy nie trafi na takie miejsce, gdzie wektor efektywnej siły grawitacji jest prostopadły do podłoża.

Spłaszczenie Ziemi wynika z jej ruchu obrotowego. Gdyby nawet Ziemia powstała jako idealna kula w stanie płynnym lub półpłynnym, to działająca na skutek jej obrotu składowa siły odśrodkowej, w kierunku równika (na samym równiku siła ta jest równa zeru), spychałaby roztopiony materiał skalny w kierunku równika, stąd pojawiłoby się spłaszczenie Ziemi. Gdy ciało zaczyna się poruszać po równoleżniku w kierunku wschodnim (rys. 4.1.4a) pojawi się dodatkowa siła dośrodkowa. Musimy zatem do siły grawitacji dodać przeciwnie działającą siłę odśrodkową, która zmieni dodatkowo kierunek efektywnej siły grawitacji F_w . W efekcie pojawi się składowa styczna do powierzchni Ziemi spychająca ciało w kierunku równika. Jest to siła pozorna, znana nam już jako siła Coriolisa. Przy ruchu ciała w kierunku zachodnim siła dośrodkowa ulegnie zmniejszeniu i pojawi się składowa siły działająca w kierunku bieguna. Kiedy przeniesiemy się na drugą półkulę to przy ruchu w kierunku wschodnim dodatkowa składowa siły styczna do Ziemi dalej będzie wskazywać w kierunku równika (rys. 4.1.4b), a przy ruchu ciała w kierunku zachodnim siła Coriolisa pokaże w kierunku bieguna południowego.

Dla ciała poruszającego się wzdłuż południka, na przykład przy ruchu na półkuli północnej z północy na południe, występują podobne efekty, niestety rysunki są bardziej skomplikowane. Siła Coriolisa działa w kierunku wschodnim¹⁶.

¹⁵ Powinniśmy brać uwagę powierzchnię Ziemi rozumianą jako powierzchnię stałego potencjału grawitacyjnego, ale o tym będę mówił w temacie (§TXVI 3.3).

¹⁶ Więcej informacji znajdziesz w literaturze – na przykład: A. Persson, *How do we understand the Coriolis Force?*, *Bulletin of the American Meteorological Society*, str. 1373, 1998 lub A. Persson, *The Coriolis effect: four centuries of conflict between common sense and mathematics, part I: a history to 1885*, *History of Meteorology* 2 str. 1-24 (2005)



Rysunek 4.1.4. a) gdy ciało porusza się z prędkością v (mały zielony wektor) wzdłuż równoleżnika w kierunku wschodnim, wypadkowa siła grawitacji F_w jeszcze bardziej się odchyli. Pojawi się składowa styczna do powierzchni Ziemi w kierunku równika – czyli siła Coriolisa; b) na półkuli południowej, dla ciała poruszającego się na wschód dodatkowa składowa będzie działała również w kierunku równika.

Siła Coriolisa jest siłą bezwładności i z punktu widzenia obserwatora, w układzie inercyjnym, działa tak jakby dążyła do powstrzymania zmian w ruchu obserwowanego ciała. Jako siła działająca prostopadle do wektora prędkości (w NUO) powoduje zmianę kierunku tegoż wektora. Ciało poruszające się z prędkością o wartości v pod wpływem siły Coriolisa i przy braku innych sił działających w płaszczyźnie stycznej do powierzchni Ziemi, będzie kreśliło okręgi (*inertial circles*) o promieniu (rys. 4.1.5)

$$\rho = \frac{v}{2\omega \sin(\varphi)} \quad 4.1.5$$

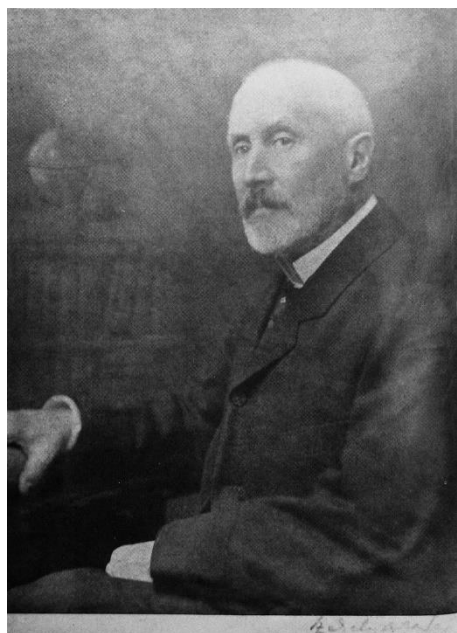


Rysunek 4.1.5. Pod wpływem siły Coriolisa ciało o prędkości o wartości v będzie, na powierzchni Ziemi, kreśliło okręgi. Na rysunku okręgi są nakreślone dla ciała poruszającego się z prędkością około 200km/h. Okręgi są wykreślone przy założeniu braku sił oporu ruchu; źródło Wikipedia, autor Anders Persson, GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation

4.1.1. Efekt Eötvösa

Analiza sił działających na ciało poruszające się na obracającej się Ziemi prowadzi do jeszcze jednego efektu nazywanego efektem Eötvösa. Podczas pomiarów siły pola grawitacyjnego (pomiarów grawimetrycznych) prowadzonego przez niemiecki statek badawczy na początku wieku XX, okazało się, że wyniki zależą od kierunku, w którym statek płynął. Efekty, które są z tym związane zostały opisane przez Eötvösa. Gdy statek płynął na wschód (jego prędkość dodawała się do prędkości obrotowej Ziemi, pomiary pola dawały najmniejszą wartość (wypadkowa siła odśrodkowa związana z obrotem Ziemi i ruchem statku była największa), gdy płynął na zachód wartość była największa (wypadkowa siła odśrodkowa była najmniejsza).

Na równiku na nieruchomy względem Ziemi obiekt działa siła odśrodkowa¹⁷ rzędu 0.034N na każdy kilogram masy. Dla obiektu o masie 1000kg daje to redukcję siły ciężenia o $34\text{N} \approx 3.4\text{kG}$. Dodając do prędkości na równiku prędkość własną (przy ruchu na wschód) o wartości 25m/s (90km/h) zwiększamy siłę odśrodkową do wartości 0.0375N na kilogram. Dla obiektu o masie 1000kg daje to redukcję siły ciężenia o $375\text{N} \approx 3.75\text{kG}$. Odejmując od prędkości na równiku prędkość własną (przy ruchu na zachód) o wartości 25m/s zmniejszamy siłę odśrodkową do wartości 0.0305N na kilogram. Dla obiektu o masie 1000kg daje to redukcję siły ciężenia o $305\text{N} \approx 3.05\text{kG}$. Różnica między ruchem na zachód i na wschód, dla masy 1000kg jest równa 0.7kg

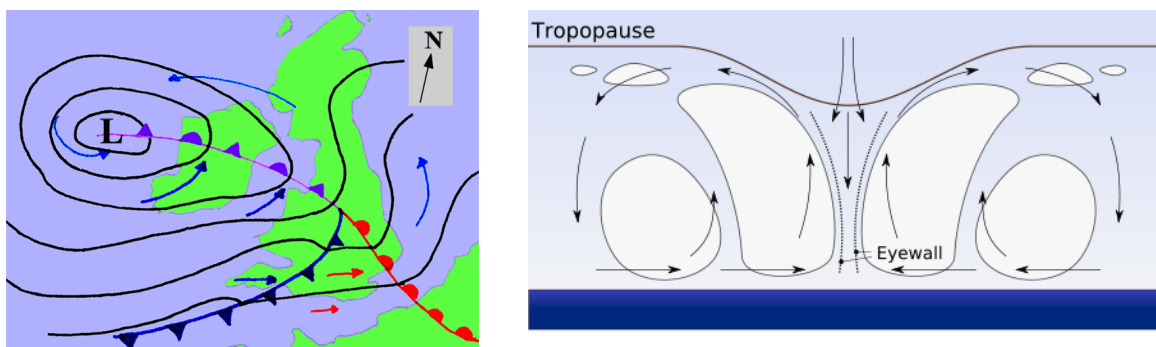


Rysunek 4.1.6. Roland von Eötvös węgierski fizyk (1848-1919). Zajmował się fizyką doświadczalną. Zbudował wagę skręceń służącą do pomiarów niewielkich zmian natężenia pola grawitacyjnego (czyli przyspieszenia grawitacyjnego), używaną w geofizyce i górnictwie. Jego waga z dużą dokładnością wykazała równoważności masy grawitacyjnej i bezwładnościowej (§TXVI 1.1), który to fakt legł u podstaw ogólnej teorii względności. Eötvös był nadto ministrem kultury i oświaty, który doprowadził do podniesienia poziomu kształcenia w zakresie fizyki i matematyki w węgierskich szkołach; źródło Wikipedia

¹⁷ Punkt na równiku porusza się z prędkością ok. 465m/s

4.1.2. Wpływ na oceany i atmosferę

Warunkiem powstania cyklonu jest pojawienie się obszaru niskiego ciśnienia otoczonego pierścieniem wysokiego ciśnienia atmosferycznego. Punkt o najniższym ciśnieniu jest nazywany okiem cyklonu. Taki specyficzny rozkład ciśnień jest warunkiem koniecznym ale nie dostatecznym dla pojawienia się cyklonu. Oznacza to, że nie zawsze prowadzi on do wytworzenia cyklonu. Różnica ciśnień powoduje ruch powietrza tak jak to pokazane jest na rysunkach (4.1.7). Przesuwające się na dużych odległościach masy powietrza efektywnie odczuwają działanie siły Coriolisa. Wypadkowa sił wywieranych przez różnicę ciśnień oraz siły Coriolisa powoduje, że na półkuli północnej cyklony kręcą się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a na półkuli południowej przeciwnie (czyli przeciwnie niż ciała, na które działa tylko siła Coriolisa (rys. 4.1.8)).



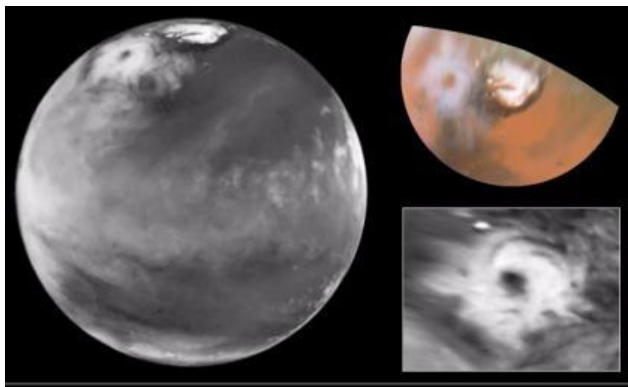
Rysunek 4.1.7. Z lewej hipotetyczna mapa baryczna dla cyklonu tropikalnego. Literka L oznacza obszar najniższego ciśnienia, niebieskie strzałki pokazują kierunek wiatru; źródło Wikipedia, (licencja GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation); Z prawej - ruch powietrza w cyklonie w pionowym przekroju; źródło Wikipedia.



Rysunek 4.1.8. Przykłady dwóch cyklonów (huragany). Z lewej Katrina (półkula północna), która w kwietniu 2005 spustoszyła między innymi Nowy

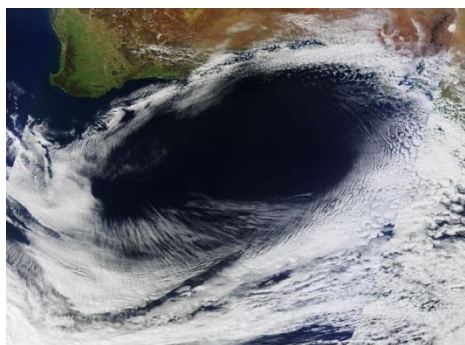
Orlean w stanie Luizjana USA; z prawej huragan Gafilo, który w marcu 2004 uderzył na północny Madagaskar.

Cyklony mają różną siłę. Te najpotężniejsze, o największej prędkości wiatru, to huragany. Dają się ludziom mocno we znaki, a ci czując do nich respekt nadają im imiona (rys. 4.1.8). Cyklony są obecne na wszystkich obracających się ciałach niebieskich z atmosferą (rys. 4.1.9).



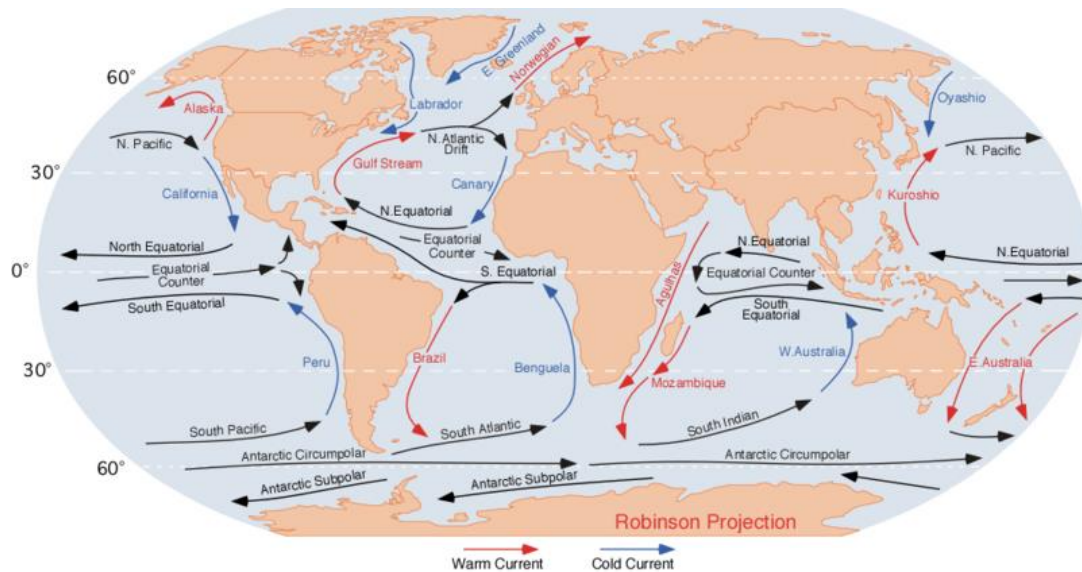
Rysunek 4.1.9. Cyklon w atmosferze Marsa (zdjęcie wykonane przez kosmiczny teleskop Hubble); źródło NASA

Gdy obszar o wysokim ciśnieniu otoczony jest przez pierścień niskiego ciśnienia może dojść do uformowania antycyklonu. Powietrze odpływa wtedy z centrum na zewnątrz w kierunku przeciwnym do tego jaki obserwujemy w cyklonach. W efekcie na półkuli północnej cyklony kręcą się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, a na półkuli południowej przeciwnie (rys. 4.1.10). Antycyklony powstają w strefie tropikalnej i nie stanowią takiego zagrożenia jak cyklony.



Rysunek 4.1.10. Z lewej - satelitarne zdjęcie antycyklonu u wybrzeży południowej Australii (08.09.2012); źródło NASA; z prawej - słynna, obserwowana przynajmniej od 1831 roku, czerwona plama na Jowiszu jest antycyklonem; źródło NASA (zdjęcie z teleskopu Hubble)

Opisane efekty związane z ruchem obrotowym Ziemi mają wpływ na ruchy oceanicznych prądów. Rysunek (4.1.11) przedstawia mapę największych oceanicznych prądów.



Rysunek 4.1.11. Główne prądy oceaniczne; źródło Wikipedia, autor Dr. Michael Pidwirny.

4.1.3. Podsumowanie

Efekt Coriolisa należy do tych trudniejszych części materiału wchodzącego w skład klasycznego wykładu z fizyki ogólnej. Z tego powodu efekt Coriolisa bywa mylnie wyjaśniany a wokół niego zebrało się kilka często powielanych błędnych opinii. Aby sprawy uporządkować zebrałem najważniejsze fakty i sprostowania w tym krótkim podrozdziale. Zacznę od faktów:

- Siła Coriolisa jest siłą bezwładności (pozorną), której nie używamy w układach inercjalnych
- Na Ziemi, działanie siły Coriolisa jest największe na biegunie i najmniejsze na równiku
- Efekt Coriolisa odpowiada za: obrót płaszczyzny wahań wahadła Foucaulta, przebieg wielkoskalowych prądów powietrznych i oceanicznych

Teraz sprostowania:

- Siła Coriolisa nie powoduje efektu obracania się wiru wypuszczanej wody z wanny zgodnie z ruchem wskazówek zegara na półkuli północnej a przeciwnie na półkuli południowej. Ruch wody w wannie z otwartym wypływem przebiega w tak małej skali, że siły Coriolisa są zanedbywalnie małe w porównaniu z innymi siłami występującymi w takim układzie. Na obu półkulach spływająca woda może tworzyć zarówno wiry lewo jak i prawo skrętne.
- Choć siła Coriolisa jest związana z przejściem z układu inercjalnego do układu nieinercjalnego (związanego z obrotem Ziemi), to efekty z nią związane nie są jedynie pochodną takiej transformacji. Ważne jest również to, że Ziemia ma kształt bliski elipsoidy.

- Siła Coriolisa wpływa na szybko poruszające się samoloty. Jednak wpływ ten nie jest przyczyną dziwnie czasem prowadzonych powietrznych tras, jak to się podaje w niektórych źródłach.