

Temat

III

Maszyny proste

1. Maszyny proste ♦

Maszyny proste znane były człowiekowi już w prehistorii. Według współczesnych rekonstrukcji wielkie kamienne budowle epoki neolitu powstawały dzięki wykorzystaniu maszyn prostych (rys. 1.1)

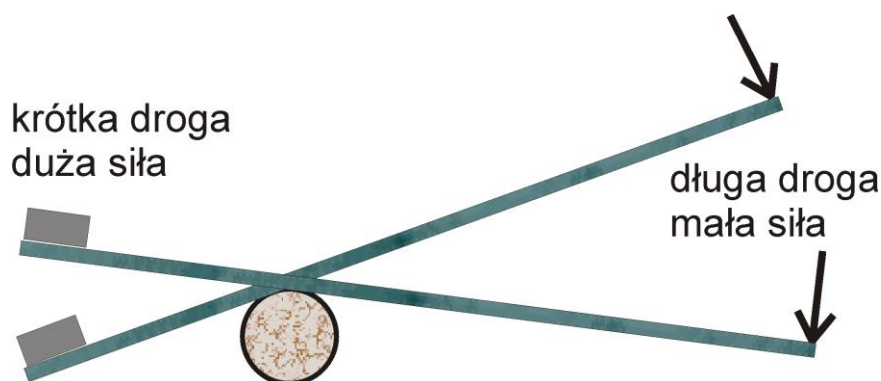


Rysunek 1.1. Dolmen Paulnaborne jest przykładem neolitycznej budowli megalitycznej znajdującej się na terenie Irlandii. Służył jako grobowiec, w którym pochowano około 30 osób. Do układania ciężkich bloków skalnych (górną płytę leży na wysokości 1.8m) konieczne było użycie maszyn prostych. W okresie neolitu na terenie Europy powstało tysiące konstrukcji megalitycznych, których wznoszenie wymagało zastosowania maszyn prostych; źródło zdjęcia - Wikipedia

Nie wiemy w jakiej postaci była gromadzona i przekazywana wiedza inżynierska pozwalająca na wznoszenie wielkich kamiennych konstrukcji. Nasza niewiedza wiąże się z tym, że budowle te powstały przed pojawieniem się pisma.

W okresie prehistorycznym, jak również jeszcze na przełomie XVI i XVII wieku w Europie, wiedza inżynierska stanowiła byt autonomiczny wobec teoretycznych rozważań, które były domeną filozofii i teologii. Inżynierii uczono się poprzez wieloletni okres praktykowania u mistrza. Pierwsze znane dziś konstrukcje myślowe przypominające nasze naukowe teorie zawdzięczamy Grekom. W okresie hellenistycznym pojawiła się teoria maszyn prostych. W teorii tej brakowało współczesnych pojęć, a od strony matematycznej zamiast symboli i liczb królowały metody geometryczne. W okresie dominacji Rzymu przyszedł regres. Wiedza teoretyczna nie była w cenie, pozostała praktyka. W efekcie zagubiono część potencjału wypracowanego przez Hellenów. Zatracono również świeżo wzniesiony pomost między nauką teoretyczną i praktyką.

My sformułujemy opis działania maszyn prostych, zgodnie z kanonem nauki współczesnej. Oprzemy się na zasadzie zachowania energii. Ogromną zaletą tegoż kanonu jest jego prostota i uniwersalność. W jednej krótkiej formule możemy zawrzeć istotę działania wszystkich maszyn prostych¹. Zaczniemy od przykładu - dźwigni dwustronnej, którą przedstawia rysunek (1.2).



Rysunek 1.2. Dźwignia dwustronna. Długa droga działania siły po prawej stronie i krótsza droga unoszenia ciężaru z lewej strony, pozwala na podnoszenie ciężarów większych od przyłożonej siły.

Jeżeli prawe ramię, na które działa siła zewnętrzna jest dłuższe od lewego, na którym leży ciężar, to droga zakreślona przez koniec lewego ramienia będzie krótsza od drogi zakreślonej przez koniec prawego ramienia. Ponieważ praca (czyli energia) to siła razy przesunięcie, z prawej strony możemy działać mniejszą siłą bo poruszamy się po dłuższej drodze. Po drugiej stronie równi działająca siła jest większa, gdyż droga tego ramienia jest krótsza. Całe to rozumowanie wynika z faktu, że iloczyn drogi i siły z obu stron musi być taki sam, gdyż inaczej złamana zostanie zasada zachowania energii. Dźwignia dwustronna w prosty sposób ilustruje regułę leżącą u podstaw działania maszyn prostych

Określenie 1.1: Reguła działania maszyn prostych

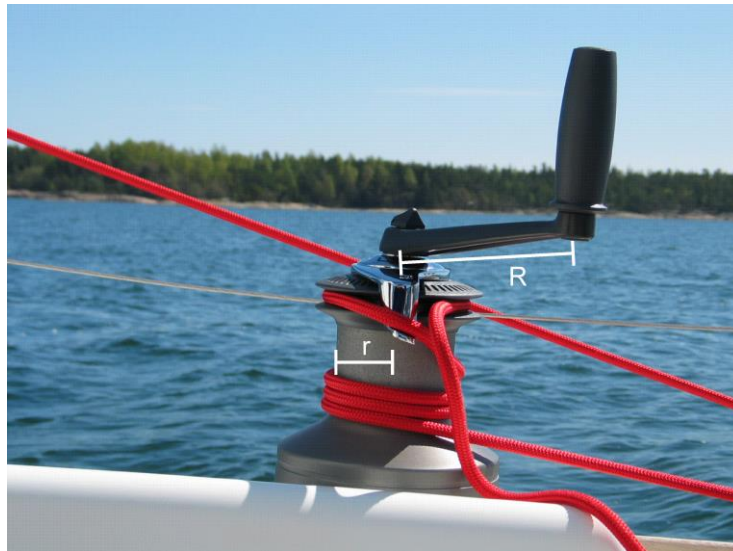
Nie masz wystarczająco dużej siły do wykonania pracy, to wydłuż drogę działania tej siły

Innym przykładem maszyny prostej jest kołowrót (rys. 1.3). Promień korby R kołowrotu jest większy od promienia wału r , na który nawinięta jest lina. Przy kręceniu korbą przyłożona siła o wartości F wykonuje, na jeden pełny obrót, pracę równą

$$W_1 = 2\pi RF$$

1.1

¹ Za wyjątkiem płata nośnego (Txxx), który przez część mechaników jest również zaliczany do maszyn prostych



Rysunek 1.3. Inną powszechnie wykorzystywaną maszyną prostą jest kołowrót; znany choćby ze starych wiejskich studni. Dzięki niemu nawet słabowita babcia mogła ze studni wyciągnąć wiadro wody; gorzej było z przeniesieniem pełnego wiadra od studni do domu. Kołowroty są również wykorzystywane przy wielu innych okazjach – na zdjęciu kołowrót na jachcie.

Ciężar m zawieszony na linie kołowrotu zostanie przesunięty na odległość równą

$$h = 2\pi r \quad 1.2$$

Praca wykonana przy tym ruchu będzie równa

$$W_2 = mg 2\pi r \quad 1.3$$

Z zasady zachowania energii mamy

$$W_1 = W_2 2\pi R F = mg 2\pi r \quad 1.4$$

Stąd mamy

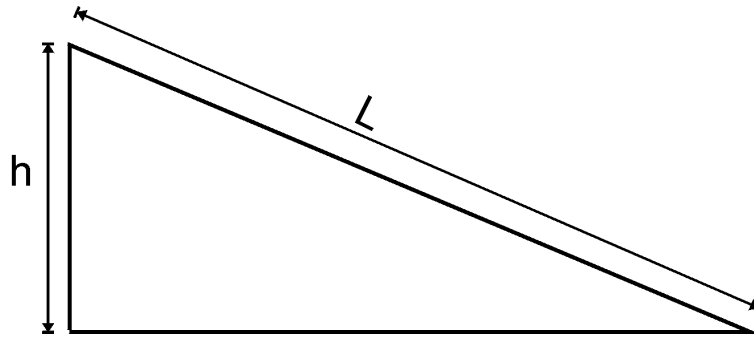
$$F = \frac{r}{R} mg \quad 1.5$$

Zysk na wartości siły jest w tym wypadku równy stosunkowi promienia korby do promienia wału, na który nawinięta jest lina. Oczywiście, jest to zysk w sytuacji wyidealizowanej, który w praktyce zostaje pomniejszony o straty spowodowane oporami ruchu.

Warto zwrócić uwagę, że koło umieszczone na osi jest również odmianą kołowrotu. Najstarsze znane pozostałości kół umieszczonych na osi pochodzą z okolic Ljubljany (Słowenia). Datowanie radiowęglowe wskazuje, na wiek

5100-5300 lat. Z terenów Polski pochodzi rysunek, wykonany na glinianej wazie, który obecnie jest interpretowany jako najstarszy dowód na użycie cztero kołowego wozu. Waza należy do Kultury Pucharów Lejkowatych². Odnaleziono ją w 1976 roku we wsi Bronocice 50km, na północny wschód, od Krakowa.

Następną maszyną prostą jaką omówię jest równia pochyła (rys. 1.4)



Rysunek 1.4. Równia pochyła jest również przykładem maszyny prostej.

Aby podnieść daną masę m na wysokość h trzeba wykonać pracę o wartości mgh ; gdzie mg to wartość siły grawitacji (siły ciężkości), którą trzeba zrównoważyć. Jeżeli to samo robimy wzdłuż równi to droga działania siły jest większa od wysokości h . Praca wykonana wzdłuż równi, przy użyciu siły o wartości F jest równa $F L$. Przyrównując oba wyrażenia mamy:

$$mgh = FL \quad 1.7$$

Stąd potrzebna siła jest równa

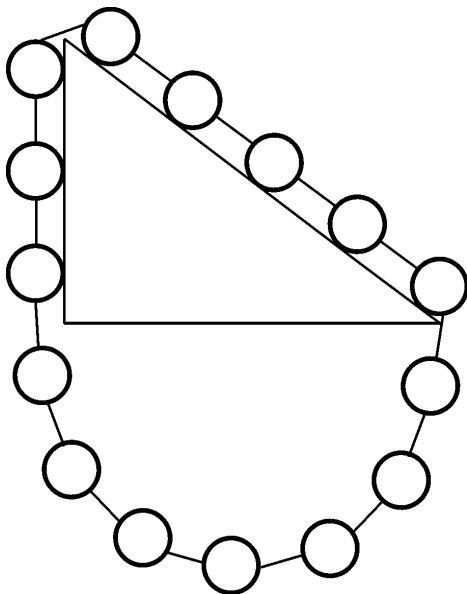
$$F = \frac{mgh}{L} \quad 1.8$$

Ponieważ L jest większe od h potrzebna do podnoszenia siła jest mniejsza od siły ciężkości.

Równia pochyła zajmuje poczesne miejsce w historii fizyki. Była przedmiotem rozważań i eksperymentów Galileusza. Przed Galileuszem pracowali nad nią inni uczeni, w tym również uczoney flamandzki Simon Stevin (rys. 1.7). Podobnie jak Galileusz Simon Stevin nie mógł odwołać się do zasady zachowania energii, gdyż w jego czasach zasada ta jeszcze nie była znana. Zdołał jednak w prosty i pomysłowy sposób podać poprawne wyrażenie na stosunki sił na równi. Simon Stevin rozumował w następujący sposób: Mamy długi paciorek

² Kultura Pucharów Lejkowatych datowana jest na lata 3700-1900 p.n.e. Występowała na terenie dzisiejszej Jutlandii, Szwecji, Niemiec, Holandii, Polski oraz części Wołynia i Podola. Nazwa pochodzi od charakterystycznego kształtu naczyń glinianych.

z kulek, który w położeniu jak na rysunku (1.5) musi być w równowadze. Jeżeli łańcuch by się samoistnie przesunął o odległość pomiędzy kulkami, to nic w jego stanie by się nie zmieniło. Stevin rozumował, że skoro nic się w sytuacji łańcucha nie zmienia, to nie ma powodu, by się przesuwał. Trochę to przypomina sytuację kulki na ścianie miski. Kulka dąży do zajęcia miejsca na dnie miski, bo w ten sposób obniża się jej energia potencjalna. Gdyby ruch kulki po ścianie miski nie zmieniał jej energii to nie miałyby „powodu” by się toczyć. Jeżeli ktoś miałby ochotę przesuwać łańcuch o mniejsze odcinki, to zawsze można narysować więcej, drobniejszych kulek połączonych krótszymi odcinkami nici. Jeżeli jednak kulki będąc w takim położeniu jak na rysunku zaczęłyby się przesuwać, to powinny się przesuwać cały czas, gdyż po przesunięciu znajdą się ponownie w tej samej sytuacji, w której zaczęły się przesuwać. Nie widać więc powodu, dla którego miałyby się zatrzymać. W ten sposób otrzymalibyśmy perpetuum mobile. Nic takiego nie obserwujemy. Stąd ponownie wniosek, że układ kulek jest w równowadze.



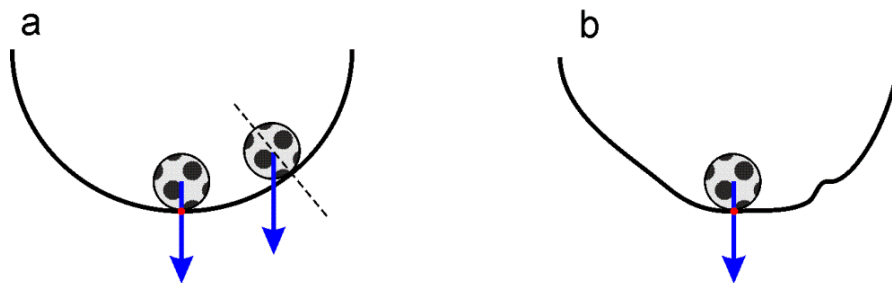
Rysunek 1.5. Tak wygląda szkic rysunku, który znajduje się na nagrobku flamandzkiego uczonego Simona Stevina (1548-1620). W ten prosty graficzny sposób Simon Stevin uzasadnił wyrażenie na stosunek sił na równi

Wynika z tego, że siła z jaką ciągną trzy kulki zwisające po lewej stronie równi musi być taka sama jak siła z jaką ciągnie pięć kulek z prawej strony równi; jest to warunek na równowagę w tym układzie. Skoro kulki z obu stron równi ciągną z taką samą siłą, to siła ta jest w stanie wciągnąć do góry trzy kulki po drodze pionowej lub pięć kulek, ale po dłuższej drodze wyznaczonej przez powierzchnię równi. Takie rozumowanie prowadzi nas do wzoru (1.8).

Dyskusja 1.1: o znaczeniu symetrii

Warto się na moment zatrzymać przy tym rozumowaniu. Wykorzystuje ono pojęcie symetrii, zakładając przy tym, że gdy układ znajdzie się w sytuacji symetrycznej, to zmiana jego stanu nie powinna mieć miejsca. Mówiąc bardziej obrazowo, układ

fizyczny, musi „mieć powód” by ruszyć się w określony sposób. W przypadku symetrii nie ma żadnego powodu, aby doszło do ruchu (lub ogólniej do zmiany jego stanu). Tam gdzie wszystkie możliwe drogi są równoważne układ „głupieje i nie wie co robić”, więc stoi w miejscu. Pomyśl o kulce w dołku (rys. 1.6a). Czy kulka w samym środku symetrycznego dołka powinna się sama z siebie ruszyć? Sytuacja z lewej strony wygląda dokładnie tak samo jak z prawej i nie widać czynnika, który mógłby odpowiadać za „chęć” kulki do ruchu w prawo lub w lewo. Sytuacja się zmienia, gdy kulkę przesuniemy na pochyłość. Teraz sytuacja ze strony lewej i prawej wygląda inaczej. Nie wiemy co prawda czy ten brak symetrii wystarczy do rozpoczęcia ruchu, ale nie możemy tego wykluczyć. Rozumowania oparte o symetrię jest w dzisiejszej fizyce powszechnie stosowane. Można zaryzykować stwierdzenie, że symetria dla współczesnej fizyki jest pojęciem podstawowym i nieraz się jeszcze z nim spotkamy.

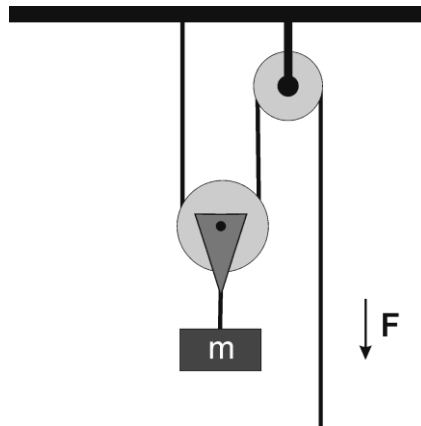


Rysunek 1.6. W fizyce często posługujemy się pojęciem symetrii. Przyjmujemy rozsądne założenie, że jak układ „widzi” środowisko, w każdą stronę dokładnie tak samo, to nie zmienia swojego stanu. Bo, na przykład, dlaczego miałby wybrać ruch w jedną ze stron, skoro wszystkie wyglądają dokładnie tak samo. Na rysunku (a) kulka, która leży w środku symetrycznego dołka (czerwony punkt wskazuje środek dołka), ma dokładnie taką samą sytuację z każdej ze stron. Siła grawitacji działa idealnie prostopadle do podłoża i jest równoważona siłą reakcji podłoża, a kulka nie ma powodu by się przemieścić. Kulka podniesiona do góry jest w sytuacji niesymetrycznej. Układ sił z lewej strony linii prostopadłej do podłoża wygląda inaczej niż z prawej strony. Siły reakcji podłoża nie zrównoważą całkowicie siły grawitacji. Brak symetrii wskazuje, że w układzie może pojawić się zmiana stanu (w tym wypadku ruchu). Potrzebny jest jeszcze klucz do odczytania kierunku tego ruchu – w tym konkretnym przypadku kulka poruszając się w dół zmniejsza swoją energię potencjalną, co determinuje kierunek ruchu. Aby kulka była w stanie równowagi symetria musi być zachowana w jej bezpośrednim sąsiedztwie. W części (b) widać, że możemy zepsuć geometrię dołka, ale w taki sposób, aby obszar w małym otoczeniu punktu środkowego pozostał niezmienny. Złamanie symetrii gdzieś dalej nie ma wpływu na ruch kulki. Ważne jest to co dzieje się w jej bezpośrednim otoczeniu.

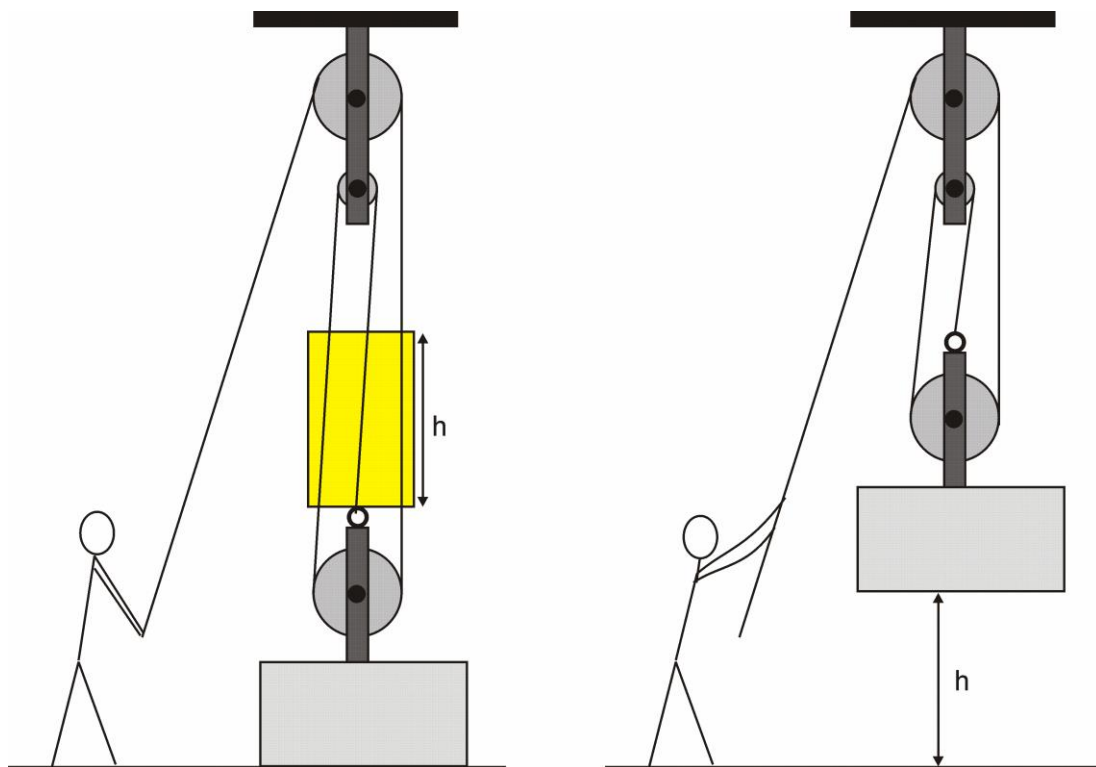


Rysunek 1.7 Simon Stevin (1548/49 – 1620). Uczony flamandzki urodził się w Burgii (obecnie Belgia). Wśród współczesnych znany był jako konstruktor jachtu na kołach (pojazdu lądowego napędzanego siłą wiatru). My cenimy go za osiągnięcia w matematyce i fizyce. Jako pierwszy zaczął posługiwać się rozkładem siły na składowe, co można uznać za krok w kierunku zastosowań wektorów w fizyce. Jego dowód na równowagę na równi pokazałem na rysunku (1.5). Był prekursorem teorii pływów morskich pod wpływem przyciągania Księżyca, miał osiągnięcia w dziedzinie hydrostatyki, dynamiki i matematyki; zdjęcia - Wikipedia.

Kolejnym przykładem maszyny prostej jest blok ruchomy pokazany na rysunku (1.8). Długość wyciągniętej liny w bloku ruchomym jest dwa razy większa od wysokości, na którą podniesione zostaje ciało. Z tego wynika, że w przypadku idealnym, przy braku tarcia i zaniedbywalnie małej masy bloku, potrzebna do podniesienia masy m siła \mathbf{F} jest dwa razy mniejsza od siły ciężkości działającej na tą masę. Bloki mogą być składane w różnych konfiguracjach. Przykład bardziej złożonego układu bloków pokazuje rysunek (1.9). Tyle ile razy zwiększamy długość wyciągniętej liny w stosunku do wysokości, na którą podnoszony jest ciężar, tyle razy (przy założeniu braku tarcia) możemy zmniejszyć siłę unoszącą ten ciężar.

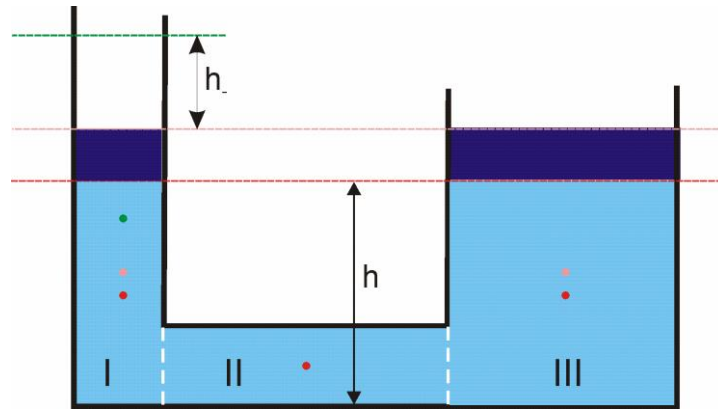


Rysunek 1.8. Blok ruchomy powoduje, że wysokość, na którą podnosimy masę m jest dwa razy mniejsza od długości wyciągniętej, przy tym podnoszeniu, liny.



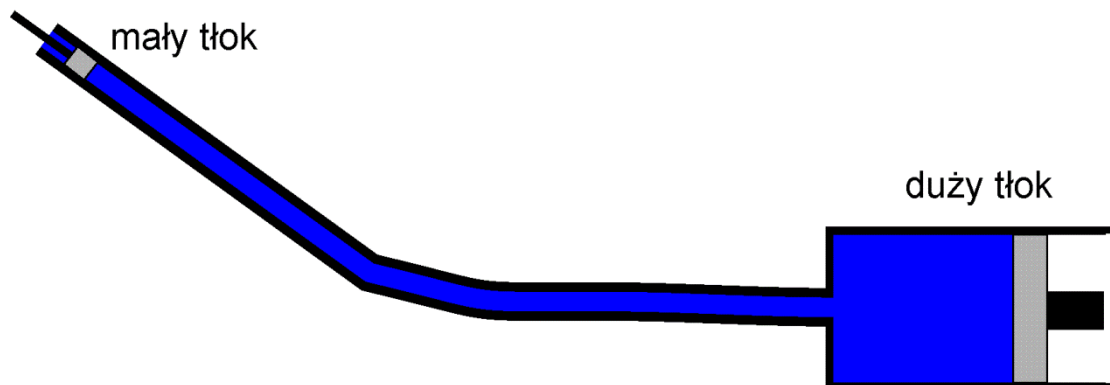
Rysunek 1.9. W tym przykładzie podniesienie ciężaru na wysokość h jest równoznaczne z wyciągnięciem liny o długości $3h$. Widać to dobrze na zaznaczonym na żółto obszarze. W idealnym przypadku, gdy nie ma tarcia, blok ten daje możliwość podnoszenia ciężaru siłą trzykrotnie mniejszą niż waga tego ciężaru.

Kolejny przykład maszyny prostej omówię wracając do U-zbiornika (§TII 6.3). Powiedzmy, że z obu stron U-zbiornika, będącego w stanie równowagi, dolaliśmy dodatkowe porcje cieczy tak, że poziom cieczy z obu stron wzrósł dokładnie tak samo (rys. 1.10.)



Rysunek 1.10. U-zbiornik. Dolanie porcji cieczy z prawej strony jest równoważone mniejszą porcją cieczy z lewej strony.

Ciecz w U-zbiorniku dalej będzie w równowadze, mimo, że masa dodanej cieczy z prawej strony jest większa niż z lewej strony. Możemy powiedzieć, że mała masa cieczy z lewej strony podtrzymuje dużą masę cieczy z prawej strony. Wiedzie to nas prosto do projektu hydraulicznej maszyny prostej (rys. 1.11). Gdy naciskamy na tłok po cienkiej stronie rurki powiedzmy siłą 1N, to po drugiej stronie rurki, gdzie pole powierzchni cieczy jest n razy większe, przesunięcie będzie n razy mniejsze. Zatem tłok z drugiej strony będzie pchał z siłą $n \cdot 1N$ (pomniejszoną o straty na tarcie).



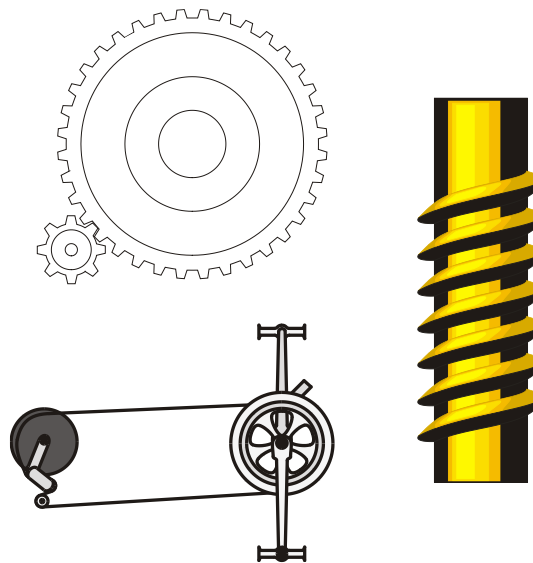
Rysunek 1.11. Zasada działania maszyny hydraulicznej. Przesunięcie tłoka o małej średnicy o odcinek d powoduje przesunięcie tłoka o dużej średnicy o odcinek d/n ; gdzie n jest ilorazem pola powierzchni dużego i małego tłoka. Jednak siła z jaką działa duży tłok jest n razy większa od siły jaka popycha mały tłok.

Opisana tu koncepcja maszyny hydraulicznej jest często stosowana. Mamy zatem hydrauliczne prasy, siłowniki hydrauliczne, wspomaganie hamulców, etc (rys. 1.12).



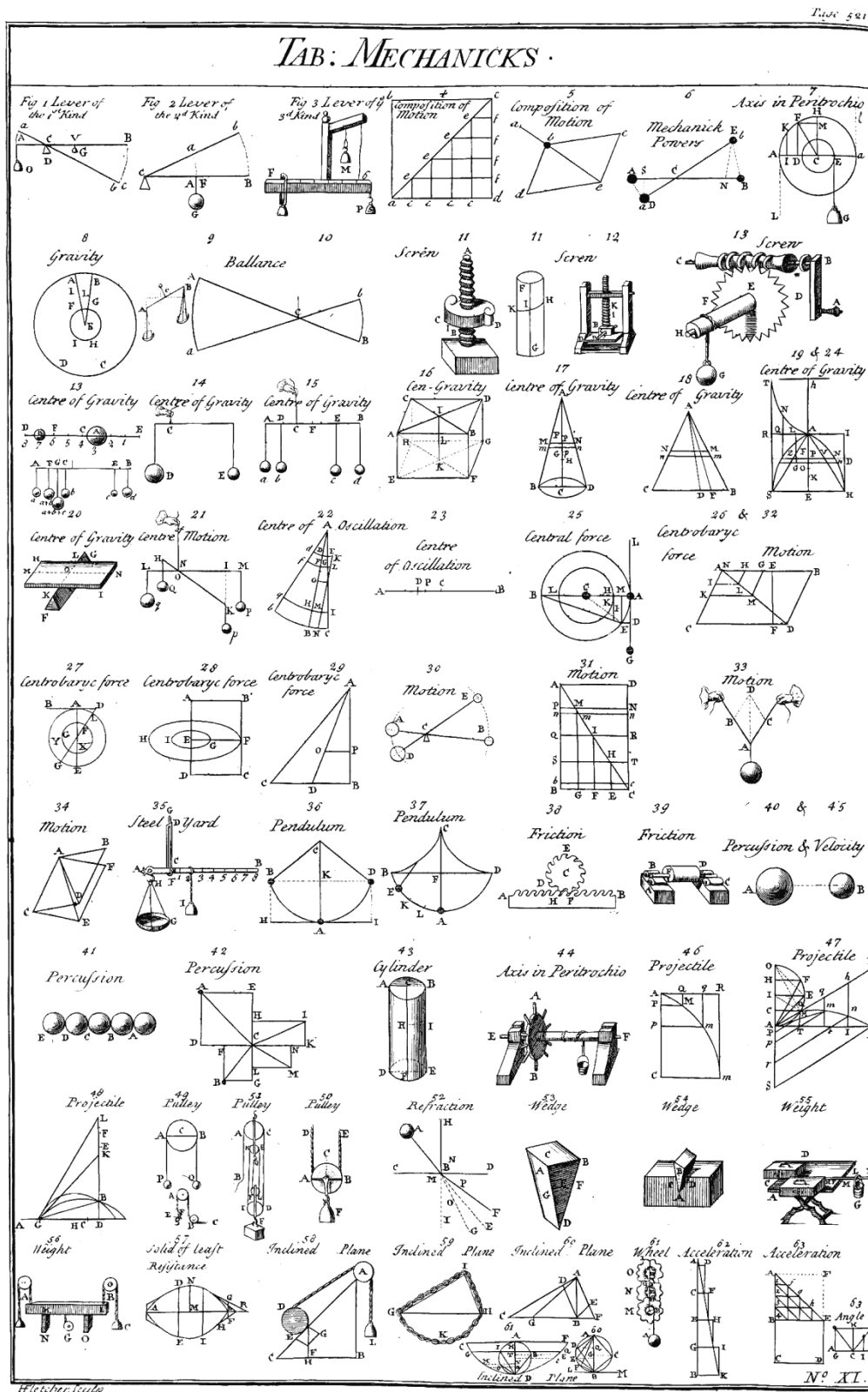
Rysunek 1.12. Przykład ciężkiej maszyny wykorzystującej siłowniki hydrauliczne.

Maszyn prostych jest wiele. Jednak wszystkie one działają w oparciu o sformułowaną wcześniej regułę (1.1). Nie powinieneś mieć problemu z odgadnięciem zasady działania maszyn prostych przedstawionych na rysunku (1.13), to jest: przekładni zębatej, śruby, rowerowej przekładni łańcuchowej.



Rysunek 1.13. Przykłady innych maszyn prostych.

Wszystkie, nawet najbardziej skomplikowane maszyny mechaniczne są kombinacją, czasem bardzo wielu maszyn prostych (rys. 1.14). Dotyczy to również samolotów, w tym wielkich i skomplikowanych samolotów pasażerskich. Dodam, że płat nośny samolotu (czyli skrzydło) jest również zaliczany do maszyn prostych, ale jego działanie omówione zostanie przy innej okazji.



Rys. 1.14. Tablica ze szkicami maszyn prostych z encyklopedii Chambersa z 1728 roku; źródło - Wikipedia

2. Prawo Pascala ♦

Skoro poruszyłem temat maszyn hydraulicznych, to należałoby wspomnieć coś na temat prawa Pascala

Określenie 2.1: Prawo Pascala

Jeżeli na płyn (ciecz lub gaz) w zbiorniku zamkniętym wywierane jest ciśnienie zewnętrzne, to ciśnienie wewnątrz zbiornika, jest wszędzie jednakowe i równe ciśnieniu zewnętrznemu

Prawo Pascala stosuje się, gdy można pominąć siły grawitacji i siły związane z przepływem cieczy. Gdy nie ma przepływu cieczy mówimy o hydrostatyce.

Definicja 2.1: Hydrostatyka

Dział mechaniki płynów zajmujący się badaniem cieczy w stanie spoczynku.

Prawo Pascala należy zatem do dziedziny hydrostatyki.

W przypadku gdy musimy uwzględnić działanie sił grawitacji prawo Pascala możemy sformułować w następujący sposób

Określenie 2.2: Prawo Pascala w obecności sił grawitacji

Na każdym poziomie (głębokości) wewnątrz zbiornika cieczy będącego w polu grawitacyjnym ciśnienie cieczy ma jednakową wartość we wszystkich kierunkach

Kiedy na ciecz nie działa żadne zewnętrzne źródło ciśnienia, to pod wpływem pola grawitacyjnego ciśnienie cieczy na głębokości h wynosi

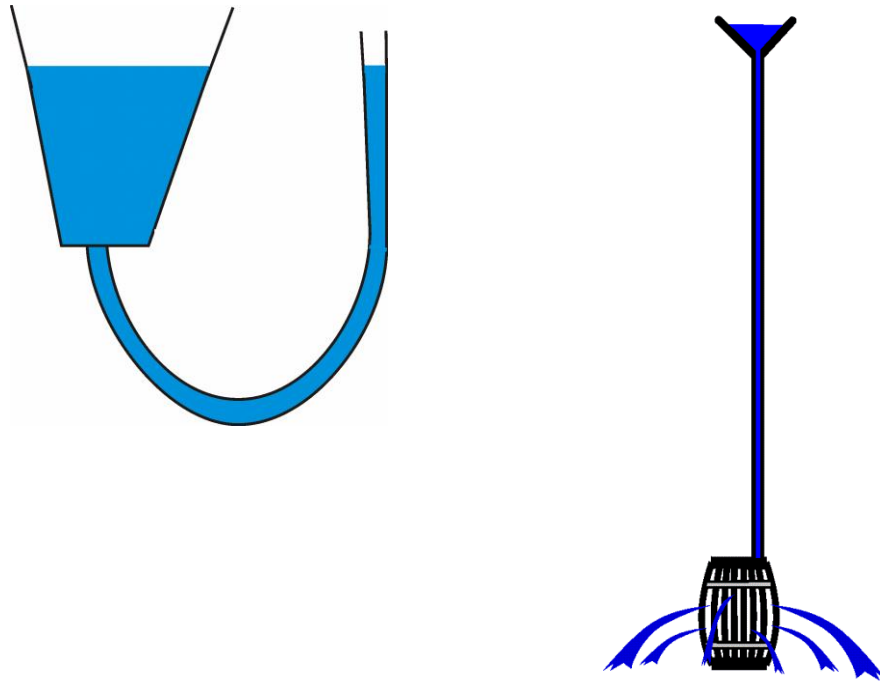
$$p = \rho gh \qquad 2.1$$

Tutaj ρ jest gęstością cieczy. W przypadku zbiorników wodnych dodatkowe ciśnienie wywiera powietrze. Do ciśnienia wyrażonego wzorem (2.1) trzeba wówczas dodać ciśnienie atmosferyczne.

Odwołując się do prawa Pascala można wytłumaczyć działanie niektórych systemów hydraulicznych. Oznacza to ścisły związek prawa Pascala z zasadą zachowania energii, która leży u podstaw działania maszyn prostych. Ponieważ zasada zachowania energii jest zasadą ogólną mówimy, że to prawo Pascala jest konsekwencją zasady zachowania energii, a nie na odwrót.

Z zależnością (2.1) wiąże się tzw. paradoks hydrostatyczny, przez który rozumiemy fakt, przedstawiony na rysunku (2.1). Wąski słup cieczy w rurce równoważy szeroki słup cieczy w lejku tak, że poziomy cieczy w obu częściach są takie same. Zdawać by się mogło, że napór większej ilości cieczy z lewej strony jest większy niż z prawej, ale tak nie jest; stąd użycie słowa paradoks. Własność tą opisał znany nam już Simon Stevin, który przeprowadził eksperyment

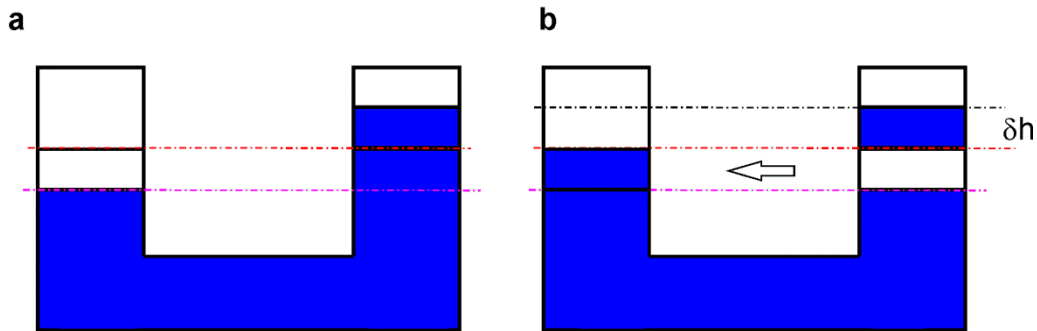
pokazany na rysunku (2.1 – z prawej). Rzecz całą rozpowszechnił Pascal. Nawiasem mówiąc znamy już ten fakt z analizy U-zbiornika (§T II 6.3). Wykazaliśmy tam, że z zasady energii minimalnej wynika równość słupa cieczy z obu stron U-zbiornika niezależnie od przekroju obu części U-zbiornika. Z tego punktu widzenia paradoks hydrostatyczny przestaje dziwić.



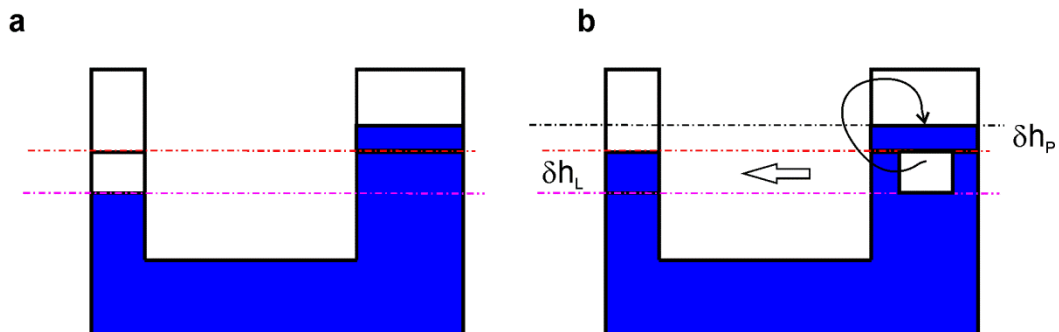
Rysunek 2.1. Z lewej prosty eksperyment ilustrujący prawo Pascala. Chociaż przekroje słupa wody są po obu stronach różne, to wysokości słupa cieczy są takie same, gdyż ciśnienie zależy tylko od wysokości słupa cieczy, a nie zależy od kształtu i rozmiarów naczynia; b) Doświadczenie Simona Stevina pokazujące na czym polega paradoks hydrostatyczny - wąski ale wysoki słup wody jest źródłem dużego ciśnienia panującego wewnątrz beczki, mimo że zawiera relatywnie niewielką masę wody. Pod wpływem tego ciśnienia beczka zaczyna przeciekać; źródło rysunku (2.1b) -Wikipedia; nazwa autora Werneuchen.

Rysunek (2.2) w prosty sposób ilustruje fakt, że gdy w U-rurce, o równych ramionach, poziom cieczy w ramionach nie jest równy to energia potencjalna układu jest większa niż gdy poziom cieczy jest taki sam. Rysunki (2.3) pokazują, że podobnie rzecz się ma przy nierównych ramionach U-rurki. Co więcej z przykładu U-rurki widać, że gdyby nie prawo Pascala moglibyśmy złamać zasadę zachowania energii, co ilustruje rysunek (2.4). Zakładamy, że aby doprowadzić do równowagi, poziom wody w węższej rurce musi być wyższy niż w szerszej.

Powiedzmy, że jest wyższy o porcję narysowaną na ciemnoniebiesko. Nasza U-rurka ma zwór Z, taki że po jego



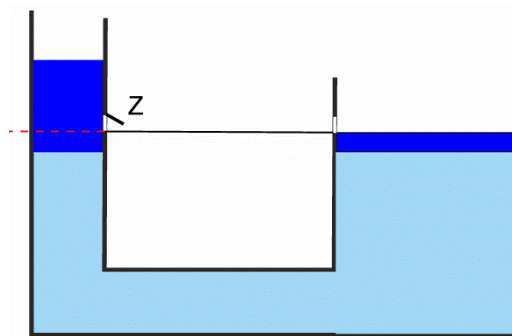
Rysunek 2.2. Rysunek przedstawia U-zbiornik o równych ramionach. a) z lewej stron poziom cieczy obniżył się o δh , a z prawej podniósł o δh czerwona kreska wskazuje poziom równowagi; b) możemy sobie wyobrazić, że wycinamy z prawej strony blok wody między różową a czerwoną kreską i przenosimy go na lewo. Wtedy z lewej strony ciecz sięga poziomu równowagi. Z prawej pozostał taki sam blok cieczy jak ten przeniesiony, tyle że uniesiony do góry o δh . Widać z tego, że z lewej strony mamy wyjściową energię potencjalną, a z prawej energia potencjalna jest powiększona w porównaniu z energią w stanie równowagi. Zatem całkowita energia potencjalna całego układu jest większa niż w stanie równowagi.



Rysunek 2.3. Rysunek przedstawia U-rurkę o nierównych ramionach. a) z lewej stron poziom cieczy obniżył się o δh_L , a z prawej podniósł o δh_P b) możemy sobie wyobrazić, że wycinamy z prawej strony blok wody równy temu, o który obniżył się poziom wody z lewej strony i przenosimy go na prawo. Wtedy z lewej strony ciecz sięga poziomu równowagi. Z prawej pozostał taki sam blok cieczy, tyle że uniesiony do góry o δh_P . Widać z tego, że z lewej strony mamy wyjściową energię potencjalną a z prawej energia potencjalna jest powiększona w porównaniu z energią w stanie równowagi.

otwarciu nadmiar cieczy z węższej rurki spływa do szerszej. Dlaczego tak się dzieje? Bo woda przepływając w ten sposób może obniżyć swoją energię potencjalną, bez łamania innych zasad zachowania, ponadto

zgadza to się z naszym elementarnym doświadczeniem dotyczącym zachowania wody. Poziom otworów po obu stronach jest taki, że odpowiada stanowi wyrównania poziomów wody po obu stronach U-rurki. Ale woda przepływając na prawą stronę zwiększa ciśnienie z prawej strony, co powoduje podniesienie poziomu wody z lewej strony ponad poziom zaworu. W efekcie poziom wody w obu rurkach nigdy się nie wyrówna i będziemy mieli wieczny przepływ wody, czyli perpetuum mobile. A to oznacza łamanie zasady zachowania energii. Unikniemy tego, gdy przyjmiemy, że niezależnie od średnicy U-rurek równy poziom cieczy po obu stronach wyznacza stan równowagi, co prowadzi do prawa Pascala.



Rysunek 2.4. W chwili początkowej zawór Z jest zamknięty, a poziom cieczy jest różny w obu częściach U-rurki, co wyznacza stan równowagi. Otwarcie zaworu spowoduje wieczny przepływ cieczy.

Czy to oznacza, że w doświadczeniu pokazanym na rysunku (2.1) mogę użyć dowolnie cienkiej rurki, takiej na przykład o średnicy 0.1 mm i uzyskam ten sam efekt? Przyznajmy, że coś się w nas sprzeciwia przy uznaniu tego za możliwe. Każda analiza układu fizycznego bazuje na modelu, który upraszcza obraz całości, to już wiemy. Ale warto to przypominać. Często zanedbujemy efekty brzegowe (rys. (TII 8.1)), gdyż są one bogate w różne zjawiska, które wysoce komplikują analizę układu. Gdy wielkość obszaru brzegu w stosunku do wielkości układu jest mała, to zwykle efekty brzegowe grają niewielką rolę. Gdy w naszym przykładzie, zmniejszamy średnicę rurki, to stosunek pola powierzchni wewnętrznej rurki do masy wody zawartej w rurce rośnie. A to oznacza, że coraz większą rolę w układzie zaczynają odgrywać oddziaływania wody z rurką. Przy rurce o średnicy 0.1 mm oddziaływania te będą miały już bardzo istotny wpływ na przebieg eksperymentu. Woda oddziałując ze ściankami będzie się tych ścianek trzymała co zasadniczo zmniejszy ciśnienie słupa cieczy w dolnej części rurki (siły kapilarne, które omówimy jeszcze w tym temacie (rys. 2.3.10)). Dla wąskich rurek musimy zatem wzbogacić nasz model o istotny wkład ze strony sił

kapilarnych. Przy ultra wąskich rurkach, których średnice zbliżają się do rozmiaru pojedynczej cząsteczki wody złożoność oddziaływania z brzegami rurki staje się jeszcze większe niż wynika to z makroskopowego (i fenomenologicznego) modelu sił kapilarnych. Inną kwestią jest możliwość zbudowania tak wąskiej rurki o długości liczonej w metrach. Wydaje się, że to problem czysto techniczny, ale nie zawsze tak jest. Czasem problemy z budową jakiegoś elementu aparatury pomiarowej mają zasadnicze przyczyny. Mówiąc krótko, ich budowa oznaczałaby otwarcie drogi do naruszenia podstawowych zasad fizyki. Zatem nie można ich budowy nie wynika z kwestii technicznych ale z podstawowych zasad fizyki. Natura bardzo konsekwentnie zamyka wszelkie ścieżki do tego typu przestępstw. Stwierdzenie, że to tylko kwestie trudności technicznych czasem bywa formułowane zbyt pośpiesznie. Przyznam, że nie wiem czy budowa rurki o średnicy powiedzmy 20nm i długości 10m napotyka na zasadnicze problemy czy też czysto techniczne. Podejrzewam jednak, że tak niewielkie średnice mogą wygenerować problemy zasadnicze, co nakazuje mi ostrożne podejście do tej kwestii.

Dygresja 2.1: model fenomenologiczny

Posłużyłem się pojęciem modelu fenomenologicznego. Fenomenologia, to kierunek w filozofii postulujący poznanie ściśle empiryczne (doświadczalne). Fenomenologowie starają się podejść do doświadczenia bez uprzednich założeń czy uprzedzeń. Model fenomenologiczny jest zbudowany na danych doświadczalnych bez głębszego podkładu teoretycznego. Przykładowo możemy wykonać serię doświadczeń nad przesuwaniem, po różnych powierzchniach, prostopadłościennego klocka wykonanego z różnych materiałów. Na tej podstawie stwierdzić, że do przesuwania klocka, ze stałą prędkością, po różnych powierzchniach potrzebujemy różnych sił. Możemy również stwierdzić, że siła ta zależy od ciężaru klocka i na tej podstawie określić znane prawo tarcia; siła tarcia jest równa sile nacisku tego ciała na podłoże przemnożonemu przez współczynnik tarcia. Współczynnik tarcia trzeba zmierzyć dla różnych par materiałów użytych do wykonania klocka i podłoża. Tak określone prawo tarcia będzie prawem fenomenologicznym (empirycznym). Możemy też sięgnąć po teorię atomową i obliczać siły oddziaływania między cząsteczkami klocka i podłoża, a następnie określić szczegółowe prawa dla tarcia. Tak określone prawa wynikałyby z bardziej podstawowej teorii i nie miałyby charakteru fenomenologicznego. Tu eksperyment służył by co najwyżej do testu poprawności uzyskanych wyników teoretycznych.

Po tych dygresjach czas wrócić do ciśnienia. Przypomnę, że

Definicja 2.2: Ciśnienie

Ciśnienie jest wielkością siły z jaką ciecz napiera na jednostkę powierzchni

W układzie SI jednostką ciśnienia jest Pascal

Definicja 2.3: Pascal

Ciśnienie jest równe jednemu pascalowi [Pa], jeżeli na jeden metr kwadratowy powierzchni działa siła jednego niutona

$$[\text{Pa}] = \frac{[\text{N}]}{[\text{m}^2]} \quad 2.2$$



Rysunek 2.5. Blaise Pascal (1623-1662) francuski filozof, matematyk i fizyk. Dziś znany jest przede wszystkim ze swoich prac nad ciśnieniem i z zakresu rachunku prawdopodobieństwa. Pascal jest konstruktorem jednej z pierwszych mechanicznych maszyny liczących oraz wynalazcą ruletki. Po roku 1650 oddał się rozważaniom filozoficzno-religijnym; źródło zdjęcia Wikipedia

2.1. Jednostki

W kwestii jednostek ciśnienia panuje spory bałagan. Jeden paskal (def. 2.2) jest jednostką małą. Ciśnienie atmosferyczne to około 100 000 Pa. W prognozach pogody ciśnienie podawane jest w hektopaskalach [hPa]. Hekto, to przedrostek oznaczający 100 razy więcej. Zatem jeden hektopaskal to 100 paskali. Ciśnienie atmosferyczne wynosi około 1000hPa. Stare barometry wyskalowane są w innej jednostce – milimetrach słupa rtęci [mmHg]. Wiąże się to z faktem, że pierwsze barometry (przrządy do pomiaru ciśnienia) zbudowane były jako szklane kolumny rtęciowe (rys. 2.1.1). Zmiany ciśnienia powietrza atmosferycznego zmieniało wysokość słupa rtęci, którą mierzono w milimetrach. Ciśnienie atmosferyczne wynosi około 760 mmHg. Tu też nie ma porządku. Zamiast mmHg zamiennie używana jest jednostka nazwana torr. Nazwa jednostki pochodzi od nazwiska Ewangelisty Torricielliego, który jako pierwszy budował urządzenia przypominające barometry rtęciowe. Jeden torr to dokładnie to samo co jeden milimetr słupa rtęci. W mmHg mierzy się ciśnienie krwi (rys. 2.1.2). Wzorcowe ciśnienie krwi mieści się w granicach 110mm/70mmHg - 120mm/80mmHg. Wyższa wartość to tzw. ciśnienie skurczowe, a niższa to ciśnienie rozkurczowe. Mniejsze wartości ciśnienia krwi zwykle nie są groźne (chyba, że wyraźnie

mniejsze). Ciśnienia nieco ponad 130/85mm Hg należy traktować jako potencjalny sygnał ostrzegawczy zbliżających się problemów zdrowotnych. Ciśnienie wyraźnie przekraczające tę granicę jako objaw poważnej choroby układu krążenia (tzw. nadciśnienie).



Rysunek 2.1.1. Stary termometr i barometr rtęciowy



Rysunek 2.1.2. Klasyczny przyrząd do pomiaru ciśnienia krwi (sfigmomanometr), czyli wyspecjalizowany barometr rtęciowy

W technice mamy możliwość spotkania się z jednostką nazywaną atmosferą techniczną [at].

Definicja 2.1.2: Atmosfera techniczna

Jedna atmosfera techniczna to ciśnienie równe jednemu kilogramowi siła na jeden metr kwadratowy

Fakt 2.1.1:

$$1[\text{at}] = 98066.5 [\text{Pa}] = 750.6 [\text{mmHg}] \quad 2.1.1$$

Żeby było ciekawiej oprócz atmosfery technicznej mamy jeszcze atmosferę fizyczną (czasem nazywana standardową) [atm].

Definicja 2.1.3: Atmosfera fizyczna

Jedna atmosfera fizyczna jest równa średniemu ciśnieniu atmosferycznemu na poziomie morza na szerokości geograficznej Paryża

Fakt 2.2:

$$1[\text{atm}] = 101325 [\text{Pa}] = 760 [\text{mmHg}] = 1.0332 [\text{at}] \quad 2.1.2$$

Następna jednostka ciśnienia to bar [bar], jest jednostką spoza układu SI zdefiniowaną przez Międzynarodową Unię Chemii Czystej i Stosowanej (IUPAC).

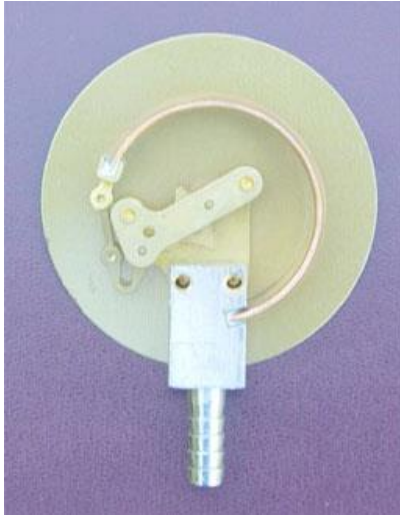
Definicja 2.1.4: Bar

Jedne bar odpowiada ciśnieniu stu tysięcy pascali

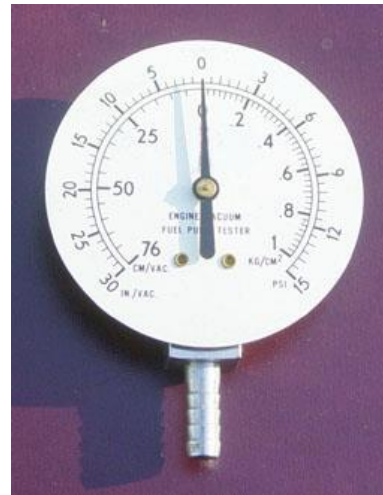
Fakt 2.3:

$$1[\text{Ba}] = 1.0197 [\text{at}] = 0.98692 [\text{atm}] = 750.06 [\text{torr}] \quad 2.1.3$$

Bar został również przyjęty jako standard dla urządzeń technicznych (kompresory i inne urządzenia pneumatyczne) w ramach normy ISO 2787. Tu przypomnienie, że przyrządy do pomiaru ciśnienia w układach technicznych to manometry (rys. 2.1.3)



Rysunek 2.1.3a Mechanizm manometru sprężynowego

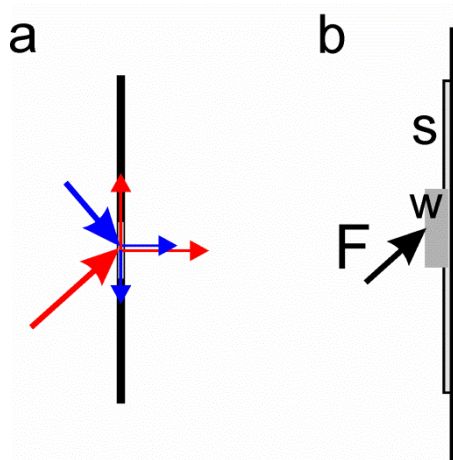


Rysunek 2.1.3b. Tarcza manometru sprężynowego

2.1.1. Parcie

Parcie to siła wywierana przez płyn na daną powierzchnię. Można by mówić po prostu siła, ale przyjęło się tą szczególną siłę nazywać parciem. Parcie jest wielkością wektorową (jak każda siła). Musimy wiedzieć, że ciśnienie wywiera siłę w kierunku prostopadłym do powierzchni. Można to uzasadnić na dwa sposoby. Pierwszy nazwę molekularnym. Ciśnienie jest efektem uderzeń w ściankę naczynia niewyobrażalnej liczby małych cząsteczek (na przykład wody). Cząsteczki te poruszają się w chaotycznych kierunkach, tak, że średnia prędkości dużej liczby cząsteczek jest równa zero. Powiedzmy, że pokazana na rysunku (2.1.4a) cząsteczka uderzyła w ściankę pod pewnym kątem i odbiła się (czerwony wektor prędkości). W takiej sytuacji pchnęła tą ściankę nieco do góry i zarazem prostopadle do jej powierzchni. Ale zaraz znajdzie się cząsteczka (niebieski wektor prędkości), która pchnie ściankę do dołu i prostopadle do jej powierzchni. W ciągu sekundy na drobny ułamek milimetra kwadratowego powierzchni w gazie czy cieczy uderza miliardy miliardów cząsteczek, a ich chaotyczne pchnięcia wzajemnie się kompensują za wyjątkiem składowych prostopadłych do ścianek, które się sumują. Kwestie powiązania chaotycznego ruchu cząstek z ciśnieniem będą dokładnie dyskutowane w temacie (TXIX). Drugi argument opiera się o eksperyment myślowy. Rysunek (2.1.4b) pokazuje prosty eksperyment myślowy. Na ściance pudełka z cieczą jest szyna, na której jest wózek, który może się poruszać praktycznie bez tarcia. Wózek ma gęstość równą gęstości cieczy (unikamy w ten sposób działania siły wyporu i grawitacji), może więc swobodnie się w niej unosić. Gdyby ciśnienie działało pod kątem do powierzchni wózka, to wózek przesunąłby się. Żadnych takich ruchów jednak w cieczy nie obserwujemy. Stąd wniosek, że ciśnienie wywiera siłę prostopadłą do powierzchni. Trzeba tu jednak pamiętać, że wózek musi być ciałem

makroskopowym. Może być mały ale jego masa musi być miliardy razy większa od masy cząsteczek cieczy, co akurat nie jest problemem. Zbyt małe wózki będą się zachowywały jak cząsteczki cieczy.



Rysunek 2.1.4. Ciśnienie wywiera siłę prostopadłą do ścianek. a) na dany niewielki kawałek powierzchni uderzają w ciągu ułamka sekundy miliardy cząsteczek o chaotycznie skierowanych prędkościach. Ich wzajemnie działania wzdłuż kierunku ścianek praktycznie zeruje się. Działanie prostopadłe do kierunku ścianek dodaje się; b) dobrze zrównoważony przez siły wyporu wózek w umocowany jest na szynie s, po której może się poruszać prawie bez tarcia. Gdy ciśnienie wywierało siłę o składowej równoległej do ścianek, to wózek przesunąłby się. Nic takiego jednak w płynach nie obserwujemy.

W krótkim odstępie czasu będą odczuwały uderzenia pojedynczych cząsteczek, a nie dużej ich liczby. W efekcie ich ruch w cieczy stanie się chaotyczny. Takie ruchy drobnych cząstek zawieszonych w płynie nazywamy ruchami Browna, które będziemy dyskutowali w przyszłości. Wszystkie omawiane w tym temacie efekty mają charakter makroskopowy, to znaczy dotyczą obiektów miliardy razy masywniejszych od pojedynczych cząsteczek. Ale obiekt złożony z miliarda cząsteczek jest w naszej ludzkiej skali ciągle bardzo, bardzo mały. To co zostało tu powiedziane dotyczy hydrostatyki, to znaczy płyn nie może płynąć. Gdy płyn płynie wzdłuż ścianki, to siły tarcia mogą wywierać siły równoległe do powierzchni ścianki. Podsumowując

Fakt 2.1.1:

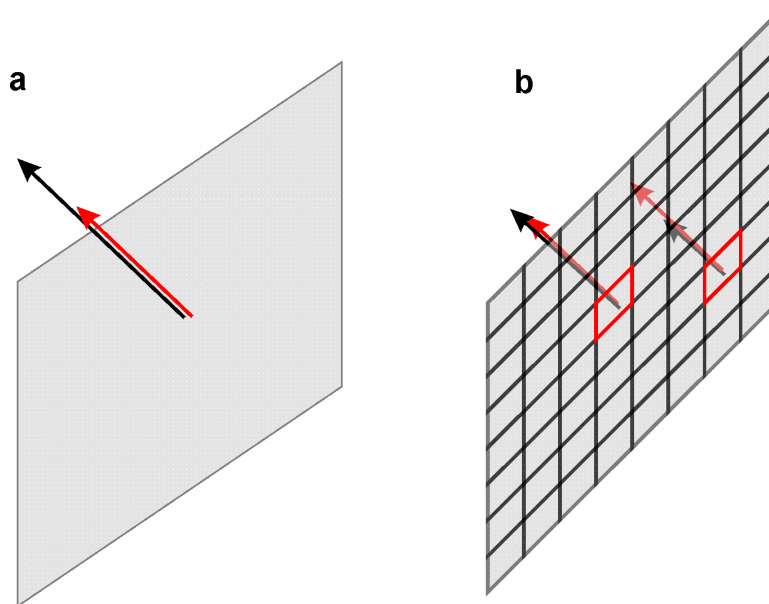
Siły wywierane przez ciśnienie w statycznej cieczy są prostopadłe do powierzchni, na które działają.

Wracamy do parcia. Wszystko jest proste gdy na powierzchnię działa wszędzie ciśnienie o tej samej wartości i gdy powierzchnia jest płaska. W tym prostym przypadku, parcie wyraża się wzorem (rys. 2.1.5a).

$$P = pS$$

2.1.4

Gdzie \mathbf{P} jest parciem, p ciśnieniem a \mathbf{S} wektorem powierzchni. Wektor powierzchni ma kierunek prostopadły do powierzchni, a jego wartość jest równa polu tej powierzchni. A zwrot? Cóż, sama powierzchnia nie określa zwrotu swojego wektora. Musimy tutaj odwołać się do swobodnego wyboru lub konwencji. W przypadku parcia przyjmujemy, że zwrot wektora powierzchni jest zgodny ze zwrotem siły wywieranej przez płyn.



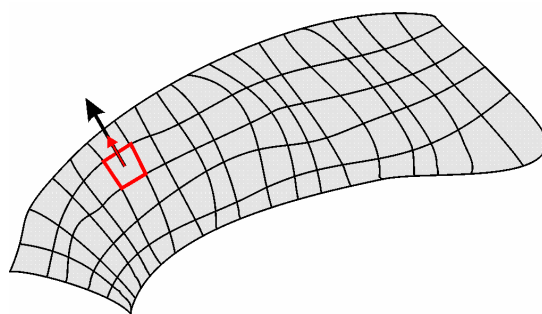
Rysunek 2.1.5. a) czarna strzałka pokazuje wektor parcia, a czerwona, to wektor powierzchni; b) gdy wartość ciśnienia zmienia się od punktu do punktu powierzchnię dzielimy na nieskończenie małe kwadraty (elementarne płyty) i na każdym z nich obliczamy parcie elementarne. Dwa przykładowe płyty wyróżnione są czerwonym kolorem. Przy każdym z nich są wektory powierzchni (czerwone) i parcia (czarne). Niestety nie mogę rysować ani nieskończenie małych elementów powierzchni ani nieskończenie małych wektorów powierzchni. Dlatego na rysunku wielkości te są symbolizowane przez wielkości o rozmiarach dalekich od nieskończenie małych.

Gdy ciśnienie zmienia się od punktu do punktu (rys. 2.1.5b) wtedy musimy odwołać się do wielkości nieskończenie małych. Siła jest równa

$$\int_S p(x, y) d\mathbf{S} \quad 2.1.5$$

$d\mathbf{S}$ jest wektorem elementarnej powierzchni. Jego kierunek i zwrot określamy tak jak wektora powierzchni \mathbf{S} , a jego wartość jest nieskończenie mała, czyli taka jak powierzchnia elementarnego elementu powierzchni. Całka z granicą oznaczoną jako S mówi, że całkować należy po całej powierzchni. Z tego typu całkami powierzchniowymi będziemy się spotykać dość często, dlatego więcej o ich obliczaniu opowiem w przyszłości.

Najgorszą sytuację przedstawia rysunek (2.1.6).



Rysunek 2.1.6. Zmienia się i nachylenie powierzchni i wartości ciśnienia. Czerwoną kreską wyróżniony jest wybrany element powierzchni i jego wektor. Czarną kreską wektor parcia wywieranego na ten element powierzchni.

Teraz od punktu do punktu zmienia się i wartość ciśnienia i kierunek elementarnych wektorów powierzchni. Posługiwanie się wzorem (2.1.5) staje się kłopotliwe, gdyż sumujemy różnie zorientowane wektory. Nie oznacza to, że rachunki są niewykonalne. W wielu prostych przypadkach całki typu (2.1.5) dadzą się obliczyć w sensowny sposób, ale to jeszcze przed nami.

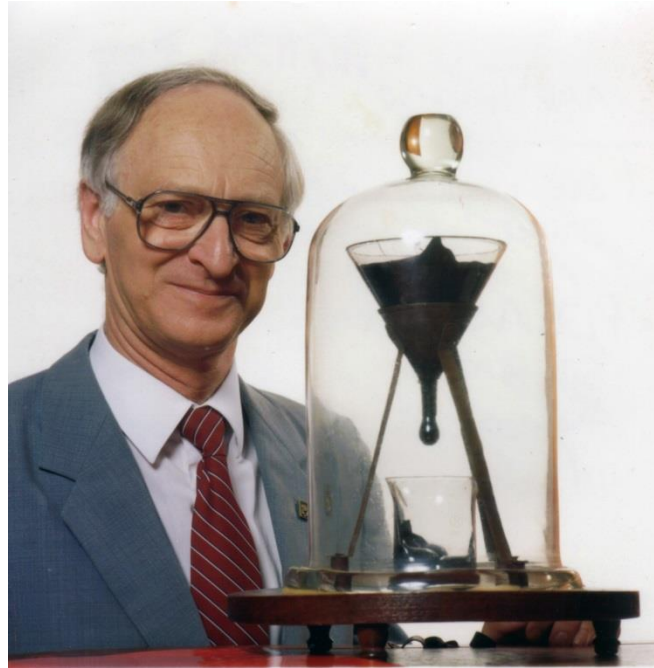
Należy uważać z liczeniem sił z użyciem wzorów (2.1.4 i 2.1.5). Ma to sens wtedy, gdy powierzchnia pod wpływem ciśnienia nie ugina się (ugięcie jest zanedbywalnie małe) oraz gdy podczas ruchu związane z nią ciało nie obraca się. W przeciwnym razie zagadnienie dodatkowo się komplikuje, a te dodatkowe efekty nie zawsze pozwalają na to by je zaniebnać.

Użyłem tu pojęcia „płyn”. Prawo Pascala jak również Archimedesesa dotyczy płynów. A płyny to i ciecze i gazy. Nie ma jednej dobrej definicji płynu. Możemy na nasze cele przyjąć, że

Definicja 2.1.5: płyn

Płynem jest każda substancja, która może płynąć, to jest po wpływie siły zewnętrznej ulegać ciągłemu odkształceniu.

Oprócz wspomnianych cieczy i gazów do płynów zaliczamy również plazmę, piany, emulsje, zawiesiny, pasty. Przykładem płynów są smoła i asfalt, choć lepkość tych substancji jest tak duża, że trudno w krótkim czasie zauważyć jak płyną. Thomas Parnell z Uniwersytetu Queenslad w Australii ustawił eksperyment pokazujący płynną naturę smoły w temperaturze pokojowej (rys. 2.1.7)



Rysunek 2.1.7. Pitch drop experiment. Eksperyment zaczął się w 1927 od wiania roztopionej smoły do zatkanego lejka. Po trzech latach smoła wypełniła szczelnie nóżkę lejka i lejek został odetkany. Uformowanie kropli trwa około dziesięciu lat. Zdjęcie zostało zrobione w 1990 roku, w dwa lata po spadnięciu siódmej kropli i dziesięć lat przed ósmą kroplą. Na zdjęciu obecny jest opiekun układu prof. John Mainstone. Eksperyment transmitowany jest w Internecie. Można się spotkać z określeniem, że to najnudniejsza transmisja w sieci; źródło Wikipedia pod licencją GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation.

2.2. Nurkowanie

Eksploracja świata rozciągającego się pod wodą od tysiącleci rozbudzała ludzką wyobraźnię. Ograniczone możliwości wstrzymania oddechu³ nie pozwalały zanurzyć się na głębiej niż 20-30 metrów, i to na krótki czas. Pierwsze wspomnienia o zawodowych nurkach pochodzą ze starożytności. Nurkowie byli wykorzystywani do wydobywania cennego ładunku z zatopionych statków, jeżeli te spoczywały wystarczająco płytko, jak również do działań wojskowych. Od wieków ludzie zajmowali się wylawianiem naturalnych gąbek, pereł, muszli. Obecnie nurkowanie swobodne (to jest bez aparatu tlenowego) spełnia głównie rolę rekreacyjną. Jest również jedną z dyscyplin sportowych, w której bije się rekordy w różnych kategoriach. Przykładowo, w kategorii wolnego nurkowania z płetwami i zmiennym balastem rekord świata w głębokości zanurzenia wynosił 127m wśród kobiet i 145 m wśród mężczyzn (stan na 2014 rok). Zmienny balast oznacza, że nurek może porzucić na dnie balast, który pomaga mu się zanurzyć.

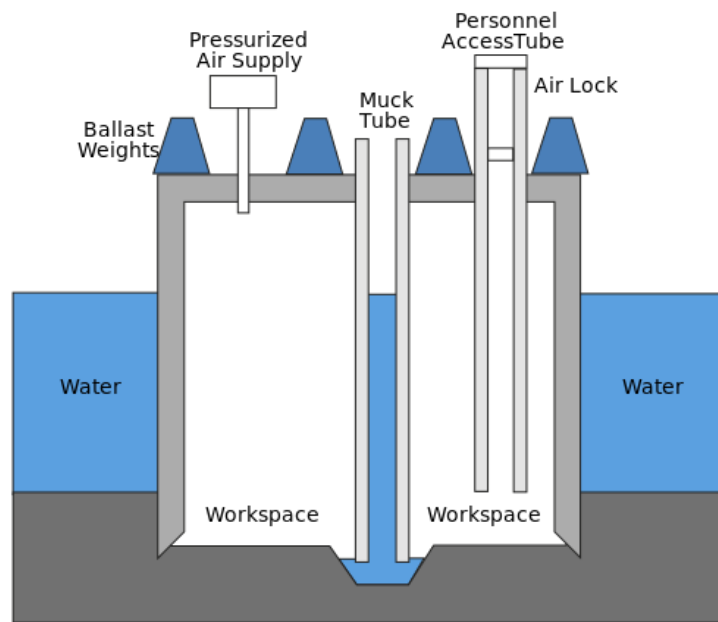
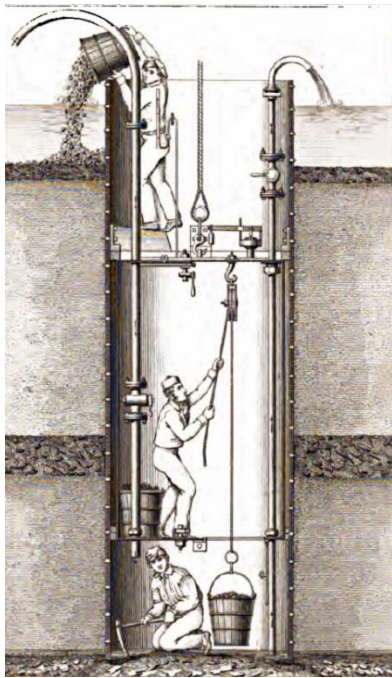
³ Obecnie rekord (2015r), w spoczynku, przekracza nieco dziesięć minut

Przełom w nurkowaniu nastąpił w momencie konstrukcji przez Francuzów Jacques Cousteau i Émile Gagnana aparatu o nazwie akwalung (aqua-lung; z łacińskiego wodne płuco). Od tego momentu nurek mógł czuć się praktycznie równie swobodny jak podczas nurkowania swobodnego, a korzystając z zapasu powietrza, mógł pozostawać pod wodą znacznie dłużej niż na bezdechu. Po II wojnie światowej udoskonalony akwalung znalazł liczne zastosowania gospodarcze, społeczne (na przykład poszukiwania topielców) i wojskowe. Stał się również impulsem do rozwoju amatorskiego nurkowania.

Oprócz braku powietrza największym wrogiem nurka jest ciśnienie słupa wody. Co dziesięć metrów ciśnienie to rośnie o jedną atmosferę (ok. 1000hPa). Na głębokości stu metrów ciśnienie jest dziesięciokrotnie wyższe, a na głębokości tysiąca metrów stukrotnie wyższe od atmosferycznego. Zbyt wysokie ciśnienie stanowi zagrożenie dla zdrowia i życia nurka. Dlatego za granicę nurkowania amatorskiego uważa się głębokość czterdziestu metrów (w przypadku doświadczonych amatorów). Specjalnie przeszkoleni nurkowie, ze specjalnym akwalungiem mogą przekraczać granicę do stu metrów.

Z ciśnieniem wiąże się inne zagrożenie - choroba kesonowa. Opisano ją w drugiej połowie XIX wieku u robotników pracujących w kesonach zamkniętych, których używa się przy budowie mostów (rys. 2.2.1). Choroba kesonowa (choroba dekompresyjna) wynika z obniżenia się rozpuszczalności gazów w cieczach przy obniżaniu ciśnienia zewnętrznego. Gdy nurek poddany jest wysokiemu ciśnieniu w jego krwi rozpuszcza się więcej gazu (zwykle jest to azot) niż pod normalnym ciśnieniem. Wynurzający się nurek naraża się na gwałtowne wydzielanie się pęcherzyków gazu we krwi. Efekt jest analogiczny do uwalniania się pęcherzyków dwutlenku węgla przy otwarciu butelki wody gazowanej. To gwałtowne uwalnianie bąbelków gazu grozi poważnymi konsekwencjami zdrowotnymi, w tym również śmiercią. Dlatego nurkowie muszą przestrzegać norm określających tempo wynurzania się, lub korzystać z komór dekompresyjnych.

W największych głębinach (Rów Mariański; rys. 2.2.2) ciśnienie jest ponad tysiąc sto razy większe od atmosferycznego, co oznacza nacisk na centymetr kwadratowy na poziomie 1100kg. Do tej pory największe głębie odwiedziły dwa załogowe okręty podwodne. 23 stycznia 1960 roku Jacques Piccard i Donald Walsh na pokładzie batyskafu Trieste (rys. 2.2.3) zeszli na dno rowu Mariańskiego na głębokość 10915.



Rysunek 2.2.1. Z lewej – keson otwarty nie stwarzający problemów z chorobą kesonową. Ciśnienie wewnątrz kesonu jest równe ciśnieniu atmosferycznemu. Konstrukcja taka wymaga jednak efektywnego odpompowywania wody. Rycina pochodzi z książki: Amédée Burat - Géologie appliquée ou Traité de la recherche et de l'exploitation des Mines; z prawej – keson ciśnieniowy. Znajdujący się w środku konstrukcji słup cieczy powoduje, że ciśnienie wewnątrz kabiny kesonu jest takie same jak przy dnie zbiornika. W efekcie woda nie wdiera się do wnętrza kesonu, ale pracownikom grozi choroba kesonowa.



Rysunek 2.1.2. Położenie Rowu Mariańskiego; źródło Wikipedia

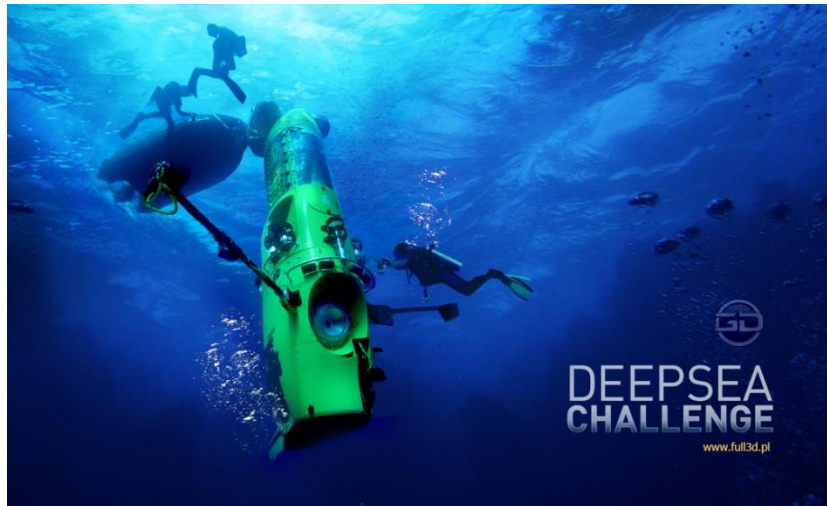


Rysunek 2.2.3. Z lewej batyskaf Trieste; z prawej część załogowa batyskafu Trieste. Podczas wyprawy Piccard i Walsh w czasie 4h i 48 min zanurzyli się na dno Rowu Mariańskiego. Pył, który podnieśli osiadając na dnie uniemożliwił zrobienie zdjęć dna. Odkryli jednak istnienie organizmów żywych; źródło Wikipedia

Następne zejście miało miejsce pięćdziesiąt dwa lata później. 26 marca 2012 James Cameron dotarł do dna Rowu Mariańskiego na pokładzie batyskafu Deepsea Challenger (2.2.4).

Konstruktorzy głębiowych batyskafów muszą zmierzyć się z wieloma problemami technicznymi. Najważniejszym jest zapewnienie pojazdowi odpowiedniej wytrzymałości mechanicznej. Poważnym problemem jest zmiana objętości materiałów pod wpływem ciśnienia. Na przykład na głębokości 10 km stal kurczy się o około 0.5% a pleksiglas o 0.3%. Dla muszących zachować bezwzględną szczelność kadłubów statków jest to poważne wyzwanie. Pamiętać również trzeba, że zasolona morska woda jest środowiskiem silnie korozyjnym.

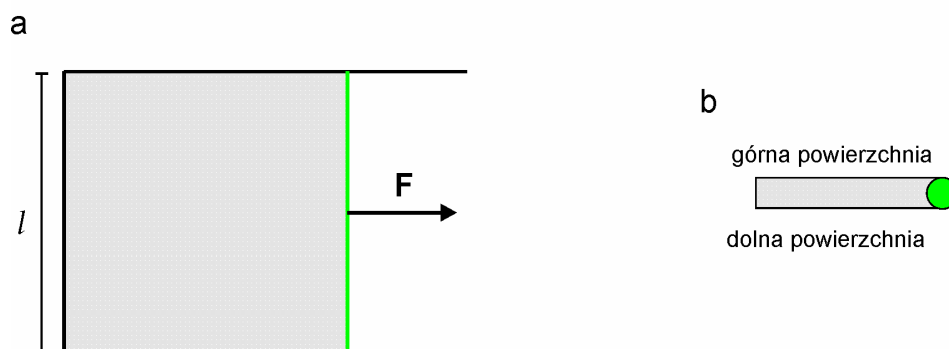
Badanie głębin, w tym również tych największych coraz częściej odbywa się za pomocą zdalnie kierowanych robotów. Są to konstrukcje dużo tańsze od statków załogowych i nie stwarzają zagrożenia dla załóg, które przesiadują w nawodnych statkach pełniących funkcję bazy.



Rysunek 2.2.4. Batyskaf Deepsea challenger Jamesa Camerona. Podczas pobytu na dnie Rowu Mariańskiego Cameron sfilmował żywe organizmy poruszające się w pobliżu batyskafu. Mechaniczne ramię pobrało próbki z dna. Batyskaf pochwylił również małe zwierzęta morskie. Obok przygotowującego się do zanurzenia batyskafu widać obsługujących go nurków w akwalungach; źródło <http://www.full3d.pl/tag/deepsea-challenger/>

2.3. Napięcie powierzchniowe

O napięciu powierzchniowy cieczy mówiłem w poprzednim temacie (§TII 8). Teraz chciałbym podejść do sprawy w bardziej ilościowy sposób. Rysunek (2.3.1) pokazuje cieką błonkę rozpiętą na ramce z jednym ruchomym bokiem.



Rysunek 2.3.1. a) cienka błona rozpięta na ramce z ruchomym bokiem o długości l ; b) błona ma dwie powierzchnie górną i dolną, stąd całkowita długość rozpiętej na ruchomym boku powierzchni jest równa $L=2l$

Aby błonka nie zaczęła się kurczyć do ruchomego boku trzeba przyłożyć siłę F . Siła ta jest tym większa im większa jest długość ruchomego boku ramki. Jest to

sensowne założenie, gdyż przy dwa razy dłuższym ruchomym boku ramki ciągnie ją dwa razy większa liczba cząsteczek i trzeba dwa razy większej siły oporu.

$$F = \gamma L = \gamma 2l \Rightarrow \gamma = \frac{F}{L} = \frac{F}{2l} \quad 2.3.1$$

We wzorze mamy podwójną długość ramki $L=2l$, co wynika z faktu, że błona ma dwie powierzchnie górną i dolną (rys. 2.3.1b). Współczynnik γ nazywamy napięciem powierzchniowym. Jego wartość zależy od rodzaju cieczy (tab. 2.3.1), wymiarem jest siła na długość, a w układzie SI jednostką jest niuton na metr. Jak widać z tabeli wartość napięcia powierzchniowego zależy od rodzaju i temperatury cieczy.

Fakt 2.3.1:

W układzie SI wymiarem napięcia powierzchniowego jest niuton na metr.

Rodzaj cieczy	γ [N/m]
Woda (20°C)	0.073
Woda (100°C)	0.053
Gliceryna (20°C)	0.063
Rtęć (20°C)	0.47

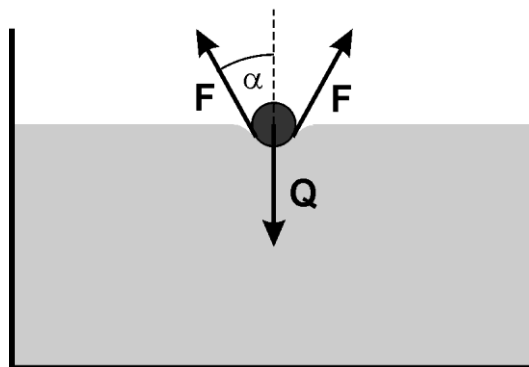
Tabela 2.3.1. Przykładowe wartości napięcia powierzchniowego

Jedną z metod demonstracji efektu napięcia powierzchniowego jest delikatne położenie lekkiej metalowej igły na powierzchni wody, tak że napięcie powierzchniowe nie pozwala jej utonąć. Możemy w tym miejscu pokusić się o oszacowanie maksymalnej masy m igły o długości $l=3\text{cm}$, którą jest w stanie utrzymać woda o temperaturze 20°C. Rysunek (2.3.2) ilustruje tę sytuację. Z równowagi sił wynika, że

$$-Q + 2F \cos(\alpha) = -Q + 2\gamma l \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow Q = 2\gamma l \cos(\alpha) \quad 2.3.2$$

Nie znamy kąta zwilżania α , ale mamy oszacować masę igły a nie wyznaczyć ją dokładnie. Przyjmijmy zatem, że $\alpha=0$, wtedy

$$Q = 2\gamma l = 2 \cdot 0.073 \cdot 0.03 = 0.0044\text{N} \Rightarrow m \approx 0.45\text{g} \quad 2.3.3$$



Rysunek 2.3.2. Ilustracja do szacowania maksymalnej masy igły, jaka może być utrzymana przez napięcie powierzchniowe wody w temperaturze 20°C.

Wartość napięcia powierzchniowego dla wody wziąłem z tabeli (2.3.1). Ponieważ przyjęte wartości kąta zwilżania są zaniżone igła powinna ważyć mniej. Jednak wzór (2.3.3) dobrze określa zakres w jakim musi się mieścić masa igły. Możemy zatem stwierdzić, że igła o długości $l=3\text{cm}$ i masie $m=0.3\text{g}$ powinna pływać unoszona siłą napięcia powierzchniowego.

Obliczymy pracę potrzebną na rozciągnięcie prostokątnej błonki tak, że jej pole powierzchni wzrośnie o ΔS (rys 2.3.1a). Niech błonka zostanie rozciągnięta o Δx , wtedy praca wyniesie

$$W = F\Delta x = \gamma L\Delta x = \gamma\Delta S \quad 2.3.4$$

Gdzie skorzystałem z (2.3.1). Praca ta zostaje zużyta na wzrost energii potencjalnej błonki

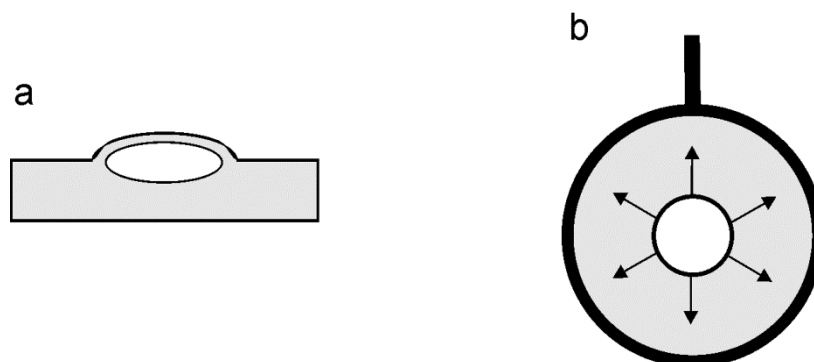
$$\Delta E = \gamma\Delta S \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta E}{\Delta S} \quad 2.3.5$$

Oczywiście S jest tu całkowitym polem górnej i dolnej części błonki. Jeżeli rozciągamy błonkę od położenia równowagi, to po jej puszczeniu błonka wróci do stanu początkowego – wykona pracę. Błonka zawiera w sobie energię nazywaną energią wewnętrzną. Więcej o energii wewnętrznej będzie w tematach poświęconych termodynamice. Energia potencjalna naciągniętej błonki jest składową jej energii wewnętrznej. Nazywana jest też energią swobodną. Energia swobodna jest tą częścią energii wewnętrznej, która może zostać uwolniona do otoczenia.

Definicja 2.3.1: Energia swobodna

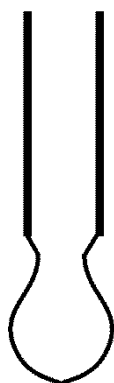
Energia swobodna to ta część energii wewnętrznej układu, która może zostać uwolniona do otoczenia w postaci pracy.

Rysunek (2.3.3) pokazuje dwa efekty, które możemy wytłumaczyć przez działanie napięcia powierzchniowego



Rysunek 2.3.3. a) Pęcherzyk powietrza dochodzący do powierzchni wody musi pokonać siły napięcia powierzchniowego. Gdy siły wyporu są za małe pęcherzyk pozostanie pod powierzchnią wody nieco ją uwypuklając. Duża liczba takich pęcherzyków tworzy jeden z rodzajów piany; b) nitka ułożona na błonie mydlanej rozpiętej na ramie, po przebiciu środkowej części błony utworzy okrąg co jest efektem działania sił napięcia powierzchniowego.

Przykładem jeszcze jednego zjawiska jest tworzenie się kropli, gdy woda wolno wypływa z kranu (rys. 2.3.4).

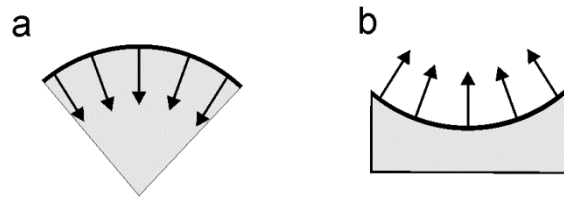


Rysunek 2.3.4. W miarę wypływu cieczy z rurki, dzięki działaniu sił napięcia powierzchniowego tworzy się kropla. Gdy kropla staje się za ciężka górna jej część ulega przewężeniu a następnie oderwaniu.

No dobrze, ale co to ma wszystko wspólnego z ciśnieniem? Napięcie powierzchniowe wywołuje w cieczy dodatkowe ciśnienie. Rysunek (2.3.5) pokazuje dwie możliwe sytuacje.

Oszacuję wielkość tego ciśnienia na przykładzie bańki mydlanej. Przez działanie napięcia powierzchniowego ciśnienie wewnątrz bańki jest większe niż na zewnątrz. Aby je oszacować, w pierwszym kroku rozważmy bańkę zawierającą powietrze, ale znajdującą się w próżni. Połowa tej bańki tworzy półsferę pokazaną na rysunku (2.3.6). Siły międzycząsteczkowe powodują, że dwie takie półsfery przyciągają się wzdłuż krawędzi. Nasza bańka wcale nie musi być podzielona na półsfery. Dzielimy ją w myśli i wnioskujemy, że jeżeli bańka

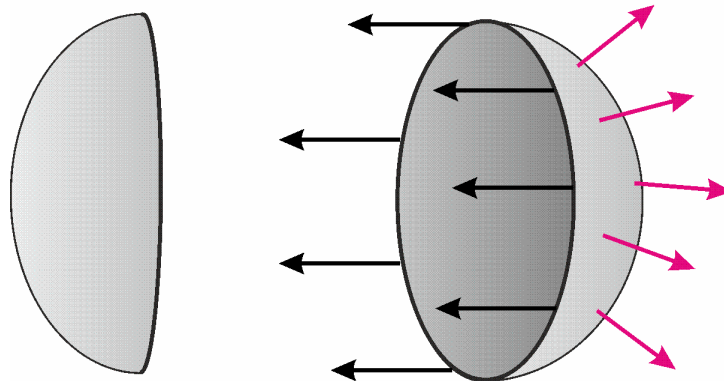
nie rozpada się wzdłuż linii podziału to cząsteczki po obu stronach tej linii muszą się przyciągać.



Rysunek 2.3.5. a) błonka wypukła wywiera ciśnienie na ciecz znajdującą się pod nią – w kropli lub bańce pojawia się podwyższone ciśnienie; b) błonka wklęsła wywiera ciśnienie na zewnątrz cieczy – pod jej powierzchnią pojawia się obniżone ciśnienie.

W stanie równowagi (przy zewnętrznym ciśnieniu równym zero), siła wywierana przez lewą półsferę na prawą musi być równa sile jakie wewnętrzne ciśnienie wywiera na prawą półsferę. Inaczej nie będzie stanu równowagi i bańka rozleci się. Wartość siły F_γ z jaką półsfery działają na siebie obliczamy ze wzoru

$$F_\gamma = 2\gamma(2\pi r) = 4\gamma\pi r \quad 2.3.6$$

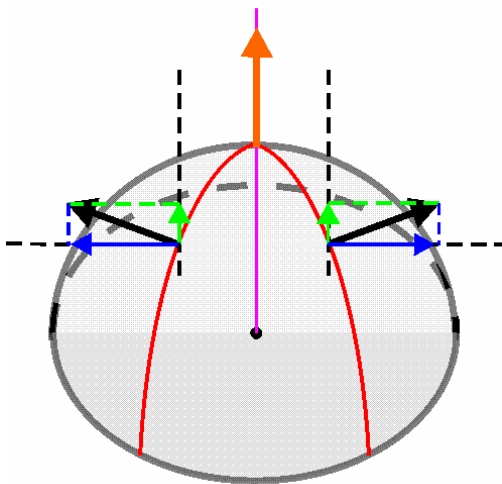


Rysunek 2.3.6. Bańka rozdzielona na dwie półsfery. Czarne strzałki na obwodzie ilustrują siły spójności kropli, które przeciwdziałają siłom ciśnienia atmosferycznego (purpurowe strzałki). Ze względu na działające siły spójności ciśnienie wewnątrz bańki jest większe od ciśnienia atmosferycznego.

Dwójka na początku wynika z faktu, że błona bańki mydlanej składa się z dwóch powierzchni między którymi mamy cienką warstwę wody z mydłem (rys. 2.3.1b). Z warunku równowagi wynika siła F_γ musi być równa parciu P wywieranego na prawą część przez powietrze o ciśnieniu p zgromadzone w bańce.

$$F_\gamma - P = 0 \Rightarrow 2\gamma(2\pi r) - p\pi r^2 = 0 \Rightarrow p = \frac{4\gamma}{r} \quad 2.3.7$$

Wzór (2.3.7) wymaga komentarza. Zauważ, że parcie liczę tak jakby działało na koło o promieniu r (wyraz $p\pi r^2$), a nie na powierzchnię półsfery o promieniu r . Weźmy jednak przekrój sfery wzdłuż koła wielkiego (takie koło powstaje z przecięcia sfery płaszczyzną przechodzącą przez jej środek. Rysunek (2.3.7) pokazuje taki przekrój. Widać, że składowe siły wywieranej przez ciśnienie, które są prostopadłe do osi symetrii półsfery zerują się. Korzystamy tu z faktu, że ciśnienie wywiera siłę prostopadłą do powierzchni bańki. Natomiast składowe równoległe dodają się, na dodatek tak, że parcie jest równe iloczynowi pola przekroju i ciśnienia. Niech to na razie wystarczy za uzasadnienie. Dokładniej zajmę się tą sprawą przy okazji dywagacji na temat prawa Archimedesesa (rys. 3.1.2).



Rysunek 2.3.7. Na sferze wyznaczono dwa koła wielkie (czerwone linie). Czarne wektory pokazują kierunek działania siły wywołanej przez ciśnienie wewnątrz półsfery. Są one dobrane tak, że: a) rzuty tych wektorów (zielone wektory) na kierunek równoległy do osi symetrii (różowa linia) sumują się, b) rzuty na dowolny kierunek prostopadły do osi symetrii (niebieskie wektory) znoszą się. Każdemu wektorowi na półsferze można dobrać do pary taki wektor, że spełnione są punkty (a) i (b). Wyjątkiem jest wektor na biegunie (pomarańczowy) ale on ma tylko składową równoległą do osi symetrii półsfery.

Gdy bańka jest w powietrzu o ciśnieniu p_o , wzór powyższy opisuje różnicę ciśnień w bańce i w pomieszczeniu

$$p - p_o = \frac{4\gamma}{r} \quad 2.3.8$$

Na tej samej zasadzie sferyczna kropla wody odczuwa ciśnienie warstwy zewnętrznej. Ponieważ jednak ograniczona jest jedną powierzchnią wzór (2.3.8) przyjmie postać

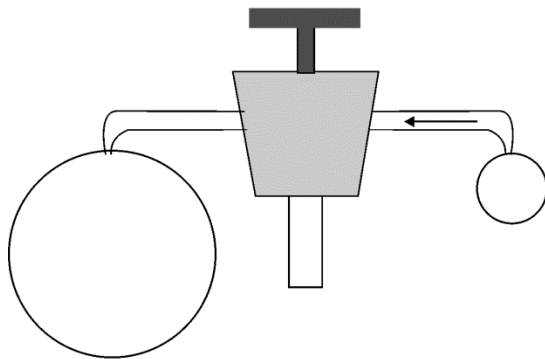
$$p - p_o = \frac{2\gamma}{r} \quad 2.3.9$$

Wykorzystując powyższe wzory oszacuję dodatkowe ciśnienie wywierane na kroplę wody o promieniu $r=1\text{mm}$, w temperaturze 20°C . Z wzoru (2.3.9) i tabeli (2.3.1) mamy

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{r} = \frac{2 \cdot 0.073}{0.001} = 146 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad 2.3.10$$

Jest to około siedmiuset razy mniej niż ciśnienie atmosferyczne.

Ze wzoru (2.3.9 i 2.3.8) widać, że ciśnienie zwiększa się jak maleje promień kropli czy bańki. Obrazuje to proste doświadczenie pokazane na rysunku (2.3.8)



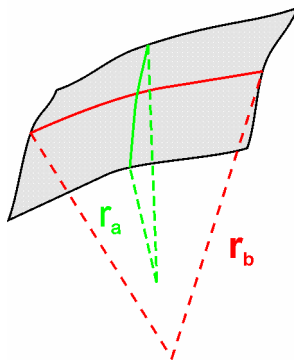
Rysunek 2.3.8. Po dwóch stronach kranu są dwie bańki o różnych średnicach. Dodatkowe ciśnienie wywierane przez napięcie powierzchniowe jest większe w przypadku małej bańki. W efekcie powietrze przepływa od bańki mniejszej do bańki większej.

Wzór na ciśnienie wewnątrz kulistej kropli lub bańki można uogólnić na bardziej złożone kształty. Zbudujmy dwa prostopadłe cięcia po małym płacie powierzchni kropli (bańki) o promieniach krzywizn r_a i r_b (rys. 2.3.9). Wtedy dla tegoż płata można wyprowadzić wzór (tzw. wzór Laplace'a)

$$\Delta p = 2\gamma \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right) \quad 2.3.11$$

a dla kropli mamy

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} \right) \quad 2.3.12$$



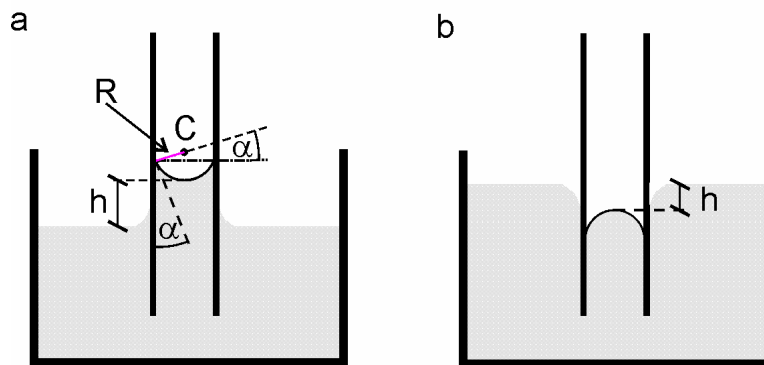
Rysunek 2.3.9. Dla płata niesferycznej powierzchni bańki (kropli ciśnienie obliczamy wykorzystując krzywizny dwóch prostopadłych do siebie cięć przez powierzchnię bańki.

Przypominam, że ze względu na twierdzenie (DXx) wartość wyrażenia w nawiasie nie zależy od sposobu prowadzenia prostopadłych cięć na powierzchni kropli (bańki). Przykładowo dla powierzchni walcowej wygodnie jest wybrać cięcie, wzdłuż którego jedna z powierzchni ma nieskończony promień krzywizny, stąd dla kropli walcowej mamy

$$\Delta p = \frac{\gamma}{r} \quad 2.3.13$$

Gdzie r jest promieniem krzywizny walca.

W poprzednim temacie (§TII 8) opisałem działanie sił na granicy cieczy podłoże (rys. TII 8.5). Wyróżniłem dwa przypadki: a) siły między cząsteczkami cieczy są większe niż między cząsteczkami cieczy i podłożem (podłoże nie ulega zwilżeniu); b) na odwrót (podłoże ulega zwilżeniu). Rysunek (2.3.10) ilustruje to na przykładzie rurki. Zgodnie z rysunkiem (2.3.5) pod wklęsłą powierzchnią cieczy mamy podciśnienie. Jeżeli cienka rurka tkwi w naczyniu z wodą to ciśnienie wewnątrz rurki musi być takie same jak na zewnątrz. Oznacza to, że ciecz w rurce musi się podnieść na wysokość h , tak by zrównoważyć niedobór ciśnienia.



Rysunek 2.3.10. Uwypuklenie się na skutek oddziaływania z naczyniem powierzchni cieczy nazywamy meniskiem. W przypadku rurki o przekroju kołowym menisk jest wycinkiem sfery. a) ciecz zwilżająca tworzy menisk wklęsły. Kąt α jest kątem zwilżania, punkt C wskazuje środek sfery, której wycinkiem jest menisk, promień R to promień tej sfery; b) ciecz niezwilżająca tworzy menisk wypukły.

Stąd z (2.3.12) i biorąc pod uwagę, że oba promienie dla sfery są takie same, mamy zatem związek

$$2 \frac{\gamma}{R} = \rho gh \quad 2.3.14$$

Gdzie R to promień czaszy utworzonej przez ciecz, a ρ to gęstość cieczy. Niech r oznacza promień rurki, wtedy na podstawie rysunku (2.3.9a) mamy

$$R = \frac{r}{\cos(\alpha)} \quad 2.3.15$$

Po podstawieniu do (2.3.14) mamy

$$h = \frac{2\gamma \cos(\alpha)}{r\rho g} \quad 2.3.16$$

Z otrzymanego wzoru wynika, że im mniejszy promień r rurki tym wyżej podniesie się w niej słup wody. Cienkie rurki nazywane są kapilarami (od włos. capillus - włos). Zjawisko zmiany poziomu cieczy w kapilarach nazywamy zjawiskiem włoskowatości.

Jeżeli ciecz nie zwilża materiału rurki, to wtedy powierzchnia cieczy jest wypukła co jest związane z nadciśnieniem. W efekcie poziom cieczy w rurce opada (rys. 2.3.9b). Taki uwypuklony (wklęsły) kształt cieczy nazywamy meniskiem odpowiednio wypukłym lub wklęsłym.

Zjawisko włoskowatości ma istotne znaczenie w przyrodzie. Wsiąkanie wody w ziemię i w materiały porowate napędzane jest zjawiskiem włoskowatości. Przykładem z techniki jest działanie knota oraz tzw. flotacja, czyli proces pozwalający na oddzielenie rudy metali od skały macierzystej. Na zakończenie jeszcze jeden przykład

Przykład 2.2.1:

Na jaką wysokość podniesie się ciecz umieszczona między dwoma równoległymi płytami odległymi od siebie o d ? Ciecz zwilża materiał płyt.

Napięcie powierzchniowe cieczy wynosi γ .

Powierzchnia cieczy przyjmie kształt wklęsłego cylindra o promieniu krzywizny R . Ujemne ciśnienie związane z jego obecnością obliczymy ze wzoru (2.3.13).

$$p = \frac{\gamma}{R} \quad 2.3.17$$

Dla kąta zwilżania α , na podstawie rysunku (2.3.9a) mamy

$$R = \frac{d}{2\cos(\alpha)} \quad 2.3.18$$

Stąd wzór na ciśnienie przyjmuje postać

$$p = \frac{2\gamma \cos(\alpha)}{d} \quad 2.3.19$$

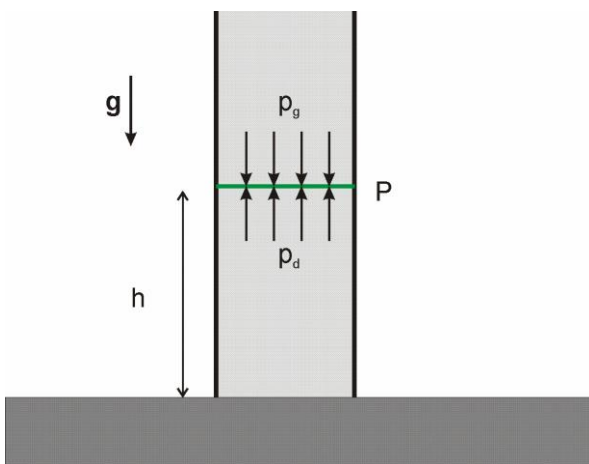
Ciśnienie to jest równe ciśnieniu słupa cieczy o wysokości h .

$$\frac{2\gamma \cos(\alpha)}{d} = \rho gh \Rightarrow h = \frac{2\gamma \cos(\alpha)}{d\rho g}$$

2.3.20

2.4. Wzór barometryczny

Zajmiemy się jeszcze zagadnieniem ciśnienia gazu w atmosferze. W naszej analizie będziemy musieli pominąć wpływ wiatru i prądów konwekcyjnych związanych z nagrzewaniem się ziemi pod wpływem słonecznego promieniowania. Wyobraźmy sobie, że mamy wyizolowany wysoki słup powietrza, a powietrze możemy traktować jako gaz idealny (rys. 2.4.1)



Rysunek 2.4.1. Rozważamy kolumnę zawierającą słup powietrza. Powietrze jest nieruchome i jedyną siłą zewnętrzną, która na nie oddziałuje jest siła grawitacji. Nadto wszędzie mamy taką samą temperaturę. Ciśnienie działające z dołu na płaszczyznę P jest takie same jak ciśnienie działające z góry. Inaczej układ nie byłby w równowadze

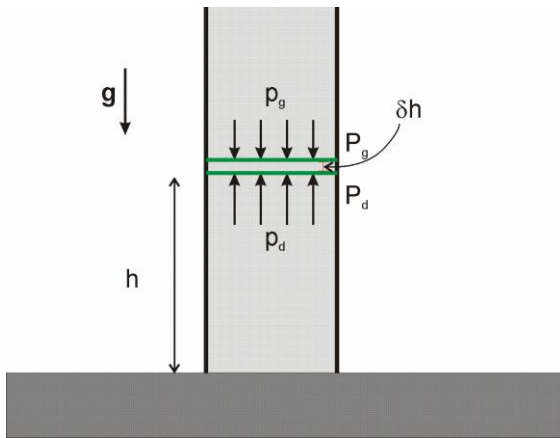
Będziemy się starali wyprowadzić wzór opisujący zmianę ciśnienia gazu wraz z wysokością. Musimy przyjąć jakiś model opisujący powietrze w kolumnie. Skorzystamy z najprostszego modelu – z modelu gazu doskonałego, który omówię w tematach (TXVIII i TXIX). Aby być w zgodzie z tym modelem musimy dokonać jeszcze jednego istotnego założenia – założymy, że temperatura gazu w naszej kolumnie jest wszędzie taka sama. Ponieważ gaz jest doskonały możemy korzystać z równania opisującego stan gazu doskonałego w postaci (TIX 3.15).

$$pV = nkT$$

2.4.1.

Gdzie p to ciśnienie, V objętość, n liczba moli gazu, k stała Boltzmana, T temperatura w skali bezwzględnej (liczona od zera bezwzględnego (§TXIX 3)). Wiemy, że opis gazu doskonałego jest jeszcze przed nami. Ale prostym modelem możemy się posłużyć nawet nie do końca rozumiejąc o co w nim chodzi. Fizycy często zresztą są w sytuacji, że nie do końca rozumieją o co chodzi, co nie przeszkadza im odnosić sukcesy. Przedzielimy kolumnę gazu powierzchnią P znajdującą się na wysokości h (rys. 2.4.1). Od dołu gaz działa na tę powierzchnię ciśnieniem o wartości p . Takie samo ciśnienie działa z góry i płaszczyzna jest w równowadze. Jednak jeżeli weźmiemy drugą powierzchnią położoną o δh nad

pierwszą to nacisk na nią z góry (a na mocy prawa Pascala również z dołu) będzie mniejszy o wartość ciężaru gazu między tymi powierzchniami (rys. 2.4.2).



Rysunek 2.4.2. Ciśnienie działające z dołu na płaszczyznę dolną P_d jest większe niż ciśnienie działające z góry na płaszczyznę górną P_g o wartość ciężaru cząstek powietrza na jednostkę powierzchni, znajdujących się między tymi płaszczyznami.

Założmy, dla ułatwienia sobie życia, że pole powierzchni płaszczyzny jest jednostkowe, wtedy różnica ciężaru przeliczy się bezpośrednio na różnicę ciśnień $\delta p(h)$. Możemy teraz zapisać

$$p_{h+\delta h} - p_h = \delta p(h) = -mgn(h) \delta h \quad 2.4.2$$

W tym wzorze m jest masą pojedynczej cząsteczki gazu, $n(h)$ jest gęstością cząstek na wysokości h . Jest to wzór przybliżony, gdyż przyjęliśmy że w całej objętości pomiędzy powierzchniami gęstość cząstek $n(h)$ nie zależy od wysokości h . Widać również, że obliczając siłę ciężenia ze wzoru mg , przyjęliśmy dodatkowe założenie, że g jest stałe. Na wykładzie poświęconym polu grawitacyjnemu pokażę (tab. TXVI 2), że nawet dla stosunkowo dużych różnic wysokości rzędu stu kilometrów przybliżenie to jest sensowne.

Domyślasz się co teraz nastąpi. Przechodząc do granicy $\delta h \rightarrow 0$ mamy

$$dp = -mgndh \quad 2.4.3$$

To przejście uwalnia nas od założenia stałości ciśnienia pomiędzy szczelinami, w tym sensie, że gdy odległości między nimi jest nieskończenie mała, to błąd założenia jest też nieskończenie mały, czyli dla fizyka żaden. Równanie stanu (2.4.1) pozwala nam wyrazić zmianę ciśnienia przez zmianę liczby moli cząsteczek

$$pV = nkT \Rightarrow dp = \frac{kT}{V} dn \quad 2.4.4$$

Co po podstawieniu (2.4.3) daje nam równania postaci

$$\frac{dn}{dh} = -\frac{mg}{kT} n \quad 2.4.5$$

Separując zmienne otrzymamy

$$\frac{dn}{n} = -\frac{mg}{kT} dh \quad 2.4.6$$

Całkując obie strony w granicach od n_0 do n oraz od 0 do h mamy

$$\ln\left(\frac{n}{n_0}\right) = -\frac{mgh}{kT} \quad 2.4.7a$$

Wykorzystując własności logarytmów możemy ten wzór przekształcić do postaci

$$n = n_0 \exp\left\{-\frac{mgh}{kT}\right\} \quad 2.4.7$$

Gęstość n_0 jest gęstością cząstek na wysokości początkowej $h=0$. Przy stałym g w równaniu tym występuje człon mgh , który możemy interpretować jako energię potencjalną E_p cząstki w polu grawitacyjnym. Wzór na gęstość cząstek przyjmie teraz postać

$$n = n_0 \exp\left\{-\frac{E_p}{kT}\right\} \quad 2.4.8$$

Wzór (2.4.4) na ciśnienie przyjmie postać

$$p(h) = \underbrace{\frac{n_0 kT}{V}}_{p_0} \exp\left\{-\frac{E_p(h)}{kT}\right\} = p_0 \exp\left\{-\frac{E_p(h)}{kT}\right\} \quad 2.4.9$$

W tym wzorze p_0 jest ciśnieniem na wysokości $h=0$. Przy dość wyidealizowanych warunkach udało się nam znaleźć wzór wiążący ciśnienie w słupie powietrza z wysokością nad poziomem odniesienia $h=0$.

Otrzymany przez nas wzór opisuje znacznie ogólniejszą sytuację, związaną z rozkładem Boltzmann'a. Nawiążę do niego w temacie poświęconym fizyce statystycznej (§TXIX 4).

3. Prawo Archimedesesa ♦

Prawo Archimedesesa należy do grupy najbardziej znanych praw fizyki. Wiąże się z nim romantyczna opowieść o Archimedesie, który po jego odkryciu, dokonany w czasie kąpieli, miał nagi wyskoczyć z wanny i biegać po ulicach rodzinnych Syrakuz krzycząc „eureka”! Wiele wskazuje na to, że Archimedes rzeczywiście odkrył to prawo, lecz jego bieganie na goło po ulicach jest raczej kwestią mitu narosłego wokół tego uczonego (nie jedyny to zresztą mit z nim związany). Przypomnę co mówi nam prawo Archimedesesa

Określenie 3.1: Prawo Archimedesesa

Ciało zanurzone w cieczy traci pozornie na wadze tyle ile waży wyparta przez niego ciecz.

Fakt 3.1.

Choć prawo Archimedesesa było sformułowane dla cieczy, to obowiązuje również dla ciał w gazach. Siły wyporu działają również przy zanurzeniu w ciałach sypkich (ogólnie pojętych płynach), ale ich obliczanie nie jest tak proste jak to wynika z prawa Archimedesesa.

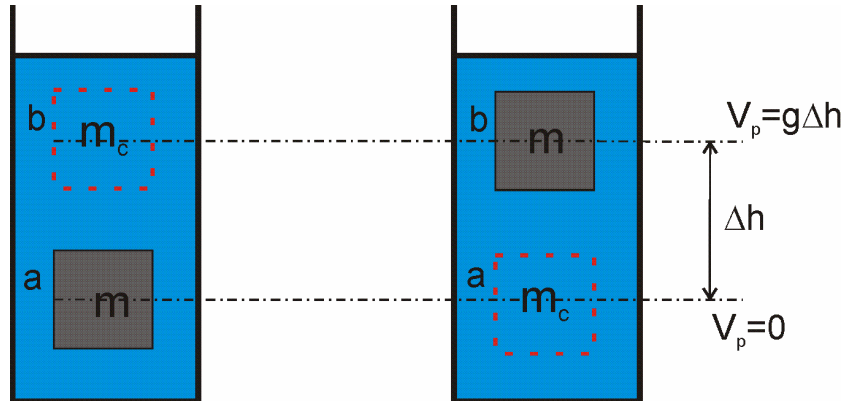
Wyjaśnię co oznacza słowo pozornie. Na ciało zanurzone w cieczy działa taka sama siła grawitacyjna co na ciało nie zanurzone. Skąd zatem bierze się pozorna utrata ciężaru? Jej źródłem musi być nowa siła działająca przeciw sile ciężenia, którą nazywamy siłą wyporu. Prawo Archimedesesa określa prostą regułę pozwalającą w łatwy sposób obliczyć wartość siły wyporu. Wszystkie te informacje można znaleźć praktycznie w każdym kursie fizyki. Mniej znany jest fakt, że prawo Archimedesesa można wyprowadzić z zasady zachowania energii.

Rozważmy naczynie z cieczą o gęstości ρ_c . W cieczy zanurzone jest ciało o objętości V i gęstości ρ . Niech w pewnej chwili ciało znajduje się w położeniu a , a następnie powoli wędruje do góry do położenia b (rys. 3.1). Różnica poziomów pomiędzy oboma położeniami wynosi Δh . Przyjmuję, że wysokości liczymy od środka masy obu objętości. Po przesunięciu ciało zajmie miejsce uprzednio zajmowane przez ciecz. Ciecz natomiast zajmie miejsce zwolnione przez ciało. Możemy sobie zatem wyobrazić, że przesuwają się dwa bloki o tej samej objętości: blok ciała i blok cieczy. W ten sposób cały proces sprowadzamy do zamiany położenia tej samej objętości cieczy i zanurzonego ciała. Dwie poziome linie przerywane, na rysunku (3.1), pokazują położenie poziomu a i b . Przyjmę, że potencjał grawitacyjny na poziomie a jest równy zeru. Wtedy potencjał grawitacyjny (§TII 7) na poziomie b jest równy $g\Delta h$. Zmiana energii potencjalnej ciała ΔE_c przy jego przeniesieniu z poziomu a do poziomu b wynosi

$$\Delta E_c = \rho_c V g \Delta h \qquad 3.1$$

Zmiana energii potencjalnej objętości V cieczy ΔE_w przy jej przeniesieniu z poziomu b do poziomu a wynosi

$$\Delta E_w = -\rho_w V g \Delta h \quad 3.2$$



Rysunek 3.1. Ilustracja do wyprowadzenia prawa Archimedesasa z zasady zachowania energii.

Znak minus oznacza, że przy opuszczaniu energia potencjalna maleje. Obie energie nie są sobie równe (ich suma nie jest równa zero)

$$\Delta E = \Delta E_w + \Delta E_c = \Delta h g V (\rho_c - \rho_w) \quad 3.3$$

Założmy, że gęstość ciała jest większa od gęstości cieczy $\rho > \rho_c$. Wtedy obliczone wyżej wyrażenie jest dodatnie, i w procesie wynurzenia ciała całkowita zmiana energii potencjalnej jest dodatnia. Z wyrażenia (3.3) mamy

$$\Delta E = \Delta h g V \rho_c - \Delta h g V \rho_w \Rightarrow (F_c - F_w) \Delta h \quad 3.4$$

Widzimy, że różnica energii potencjalnej jest równa ciężarowi ciała pomniejszonemu o ciężar wody pomnożonej przez różnicę wysokości. Źródłem tej dodatniej energii jest praca wykonana przez na przykład mięśnie ręki. Nie możemy tej pracy liczyć przez pomnożenie ciężaru ciała przez różnicę wysokości, gdyż wyszła by nam za duża wartość, co byłoby sprzeczne z zasadą zachowania energii. Musimy przyjąć, że ciężar ciała został pomniejszony o ciężar wypartej wody, co stanowi prawo Archimedesasa.

Pozostaje jeszcze przypadek gdy $\rho_c < \rho_w$. Wtedy wyrażenie (3.3)

$$\Delta E = \Delta E_w + \Delta E_c = \Delta h g V (\rho_c - \rho_w) \quad 3.5$$

jest ujemne. Oznacza to, że przy braku siły wypory z układu uciekłoby nieco energii. Ciało mniej gęste wymaga siły skierowanej przeciwie do kierunku siły wyporu, gdy chcemy je w cieczy unieść do góry lub ruchem jednostajnym opuścić w dół. Naciskamy na ciało siłą F_N która równoważy siłę wyporu i przesuwamy je z położenia b do położenia a . Powoduje to, że energia z układu nie znika tylko

jest zmagazynowana w układzie (jak w sprężynie). Gdy puścimy ciało, to pod wpływem sił wyporu samo wypłynie odpowiednio zwiększając swoją energię potencjalną.

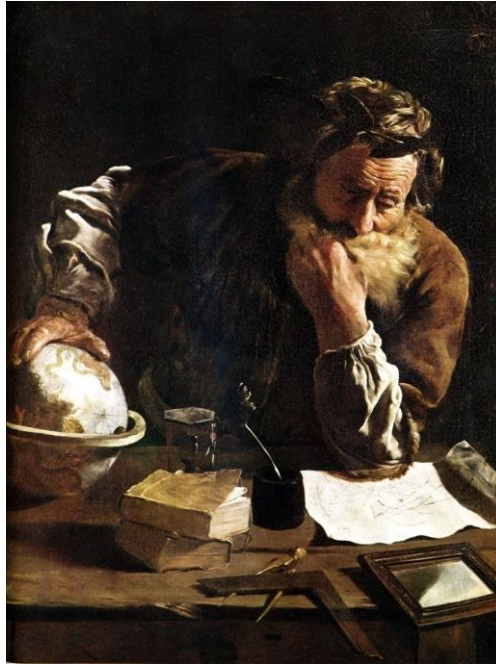
Może się wydawać, że wprowadziłem tutaj siłę wyporu nieco sztucznie i tylko po to, by zbilansować zasadę zachowania energii. Zwracam wam uwagę na fakt, że prawo Archimiedesa zostało sformułowane na długo przed zasadą zachowania energii. To co teraz pokazałem to fakt, że prawo Archimiedesa jest z zasadą zachowania energii spójne. Spójność ta oznacza to, że prawo Archimiedesa można wywnioskować z zasady zachowania energii (jako zasady ogólniejszej). Obecność siły wyporu można pokazać bez odwoływania się do zasady zachowania energii, zanurzając ciało zawieszone na dynamometrze (przyrządzie do pomiaru siły) w cieczy. Gdy ciało ma gęstość większą od cieczy wskazania dynamometru zmniejszają się o wartość siły wyporu. Wartość siły wyporu zgadza się z wyliczeniami przeprowadzonymi na podstawie prawa Archimiedesa. W przypadku ciał o gęstości mniejszej od gęstości cieczy każdy z nas może bezpośrednio odczuć działanie siły wyporu, próbując „na siłę” zanurzyć takie ciało całkowicie pod powierzchnię cieczy.

Prawo Archimiedesa pozwala, w prosty sposób, określić jakie ciała będą pływały, a jakie zatoną. Istotnym parametrem jest tutaj stosunek gęstości masy ciała do gęstości masy cieczy. Jakby ktoś jeszcze nie wiedziała co to jest ta gęstość masy ciała to przypominam, że

Definicja 3.1: Gęstość masy

Gęstość masy ciała jest równa stosunkowi jego masy do objętości

W układzie SI gęstość wyrażona jest w kilogramach na metr sześcienny. W wielu wypadkach wygodniejszą jednostką jest gram na centymetr sześcienny. Generalnie ciała o gęstości mniejszej od gęstości cieczy pływają, podczas gdy ciała gęstsze toną. Ciała o takiej samej gęstości jak gęstość cieczy są na granicy między pływaniem a tonięciem. Oczywiście ciało nie musi być jednorodne. Kadłub statku może być wykonany z materiału gęstszego od wody, takiego jak stal. Jednak kadłub jest zwykle pusty w środku, a gęstość wypełniającego go powietrza, w porównaniu z gęstością wody, jest zanedbywalnie mała. Możemy wprowadzić średnią gęstość kadłuba, która jest równa masie całego kadłuba podzielonej przez jego objętość. Średnia gęstość kadłuba statku jest mniejsza od gęstości wody – oczywiście do momentu, gdy do środka kadłuba nie dostanie się woda (na przykład przez dziurę); wtedy średnia gęstość kadłuba gwałtownie rośnie i statek tonie.



Rysunek 3.2. Tak Archimedes wyobrażał sobie Domenico-Fetti – obraz z 1660 roku. Archimedes to grecki matematyk i fizyk z Syrakuz (ok. 287-212 p.n.e). Oprócz powszechnie znanego prawa Archimedes, jego prace obejmowały zagadnienia z zakresu hydrostatyki, statyki, mechaniki, astronomii i matematyki (był prekursorem rachunku różniczkowego i całkowego; wyznaczył przybliżoną wartość liczby π); źródło - Wikipedia

Morze Martwe należy do najbardziej niezwykłych akwenów na Ziemi. Znajduje się na pograniczu między Izraelem a Jordanią (rys. 3.3). Duże zasolenie powoduje, że żyją w nim tylko nieliczne organizmy żywe. Jeszcze do niedawna uważano, że takowych nie ma w ogóle, stąd nazwa – Morze Martwe. Silnie zasolona woda ma większą gęstość od czystej wody. Oznacza to, że pływanie w morzu martwym jest banalnie proste. Wystarczy się tylko położyć na wodzie (rys. 3.4). Niestety Izrael i Jordan nadmiernie eksploatują zasoby rzeki Jordan, głównego dopływu Morza Martwego, co powoduje, że od lat powierzchnia tego unikalnego zbiornika kurczy się (rys. 3.5).



Rysunek 3.3. Jeszcze niedawno powierzchnia Morza Martwego wynosiła 1020km² (maleje na skutek nadmiernej eksploatacji rzeki Jordan), a największa głębokość 399m. Lustro wody znajduje się na poziomie -499m – najgłębsza depresja na Ziemi. Średnie zasolenie to 27.6%. Zasolenie zmienia się z głębokością. Na powierzchni zasolenie wynosi 22% a na głębokości 50m 36%. Dla porównania Bałtyk jest nisko zasolonym morzem (0.2-1.2%), zasolenie oceanu Atlantyckiego wynosi 3.4%-3.7%. Wysoko zasolonym akwenem jest morze Kaspjskie. Wartość zasolenia waha się tam od słodkowodnej części północnej (blisko 0%), do ok. 1.2% w części środkowej oraz 30% w zatoce Kara-Bogaz-Goł.



Rysunek 3.4. Morze Martwe. U góry: Przy brzegu odparowująca woda zostawia pokryty solą pas. U dołu: Ze względu na dużą gęstość wody (skutek znacznego zasolenia) pływanie w Morzu Martwym jest szczególnie relaksujące; nurkowanie natomiast bardzo uciążliwe; źródło zdjęć Wikipedia.



Rysunek 3.5. Zdjęcie Morza Martwego z pokładu promu kosmicznego z marca 2001 roku (misja STS 102). Południowa część wyschła. Jaśniejsze obszary w części południowej to instalacje służące do uzyskiwania cennych minerałów z soli Morza Martwego, głównie potasu, bromu i magnezu; źródło NASA

Najgęstszą cieczą, w warunkach normalnych (tj. w temperaturze pokojowej i pod normalnym ciśnieniem atmosferycznym), jest rtęć, która jest jednocześnie, w tych warunkach, jedynym płynnym, metalem. Gęstość rtęci wynosi 13.58g/cm^3 . Gdyby nie trujące własności par rtęci pływanie po jej powierzchni mogłoby dostarczać niezwykłych wrażeń i na pewno stałoby się powszechną rozrywką.

Areometry są prostymi przyrządami do pomiaru gęstości cieczy (rys. 3.6). Gęstość cieczy zależy od jej składu – na przykład zawartości alkoholu, czy ilości rozpuszczonej soli jak to wyżej było już wspomniane. Stąd powszechne wykorzystanie tego prostego, bazującego na prawie Archimedesesa, przyrządu do pomiaru między innymi stężenia roztworów cukru, alkoholu (w piwie, winie), czy stopnia naładowania akumulatorów ołowianych



Rysunek 3.6. Areometr do szybkiego pomiaru stężenia alkoholu etylowego w wodzie. Urządzenie wycechowane jest w procentach zawartości alkoholu. Zwracam uwagę, że podobnie jak klasyczny termometr rtęciowy, areometr wyposażony jest w linijkę. Tyle, że w przypadku tego areometru, linijka jest wycechowana w procentach zawartości alkoholu. Przeliczanie jednostek długości na procenty jest możliwe dzięki prawu Archimedesusa (prawo Archimedesusa to teoria z pomocą, której skalujemy areometr – §TI_2); źródło zdjęcia - Wikipedia.

Innym przykładem wykorzystania prawa Archimedesusa są balony i sterowce. Powietrze w przeciwieństwie do wody jest ściśliwe. Dlatego przy powierzchni Ziemi jego gęstość jest większa niż na dużej wysokości. Z tego powodu, w przeciwieństwie do oceanu wody, nie możemy mówić o czymś takim jak dobrze określona powierzchnia światowego oceanu powietrza. Zatem balon nie wypłynie na powierzchnię powietrznego oceanu, ale zatrzyma się na wysokości, gdzie gęstość powietrza zrówna się ze średnią gęstością balonu (masa balonu wraz z gazem oraz gondoli i załogi podzielona przez objętość balonu gondoli i załogi; żartowałem objętość gondoli i załogi można pominąć). Aby zmniejszyć średnią gęstość balonu, jego czaszę wypełnia się gazem o mniejszej gęstości niż gęstość powietrza. Może to być wodór (obecnie rzadko używany, gdyż w połączeniu z tlenem tworzy wysoce wybuchową mieszaninę), hel (ale jest bardzo drogi) lub najpopularniejsze w sporcie balonowym ciepłe powietrze (rys. 3.7).



Rysunek 3.7. Balon na ciepłe powietrze; źródło - Wikipedia

Sterowiec jest rodzajem balonu z napędem mechanicznym. Klasyczny balon jest unoszony przez wiatry. Sterowce są wyposażone w śmigła i napędzające je silniki. Aby zmniejszyć opory powietrza sterowce mają zwykle kształt cygara. Pierwotny sterowca skonstruował francuski inżynier Henri Jules Giffard (rys. 3.8). Giffard wyposażył balon w kształcie cygara w śmigło napędzane maszyną parową o mocy 2.2 kW. W wrześniu 1852 roku przebył swym aerostatem trasę o długości 27km z Paryża do Elancourt. Prędkość lotu wynosiła 8km/h.



Rysunek 3.8. Balon sterowy Julesa Giffarda. Rycina z Meyers Blitz-Lexikon, Leipzig, 1932; źródło Wikipedia

Pod koniec XIX wieku Węgier David Schwarz opracował sztywną konstrukcję balonu w kształcie cygara opartą o aluminiowy szkielet. Po jego śmierci, plany i patenty wykupił od żony Schwarza Niemiec Ferdynand von Zeppelin. Zeppelin rozpoczął produkcję sterowców. Sztywna konstrukcja umożliwiła budowę sterowców o ogromnych rozmiarach osiągających prędkość powyżej 100km/h.

Pierwszy aerostat, Zeppelina, wprowadzony do użytku w 1900 roku, miał 126.8m długości i 11.6m średnicy. Wyposażony był w dwa spalinowe silniki o mocy 5kW i osiągał prędkości do 30km/h. Największy sterowiec Hindenburg przedstawiony jest na rysunku (3.9). Te powietrzne kolosy stanowiły wówczas konkurencję dla transatlantycznej żeglugi pasażerskiej.



Rysunek 3.9. Sterowiec Hindenburg miał 243 metry długości 43 metry średnicy i mógł być wypełniony gazem o objętości 200 000m³. Napędzany był czterema silnikami o mocy 1200KM każdy i osiągał prędkość maksymalną 135km/h. Na trasie Niemcy – USA przewoził 50 pasażerów i 61 osób załogi zapewniając pasażerom wysoki komfort podróży. Podróż trwała około trzech dni. W roku 1936 sterowiec przewiózł 2798 pasażerów oraz 160 ton ładunku i poczty. Spłonął w katastrofie 6 maja 1937 roku, po stronie amerykańskiej. Zginęło wówczas 13 pasażerów i 22 członków załogi. Okoliczności katastrofy nie zostały do końca wyjaśnione. Katastrofa Hindenburga wstrzymała loty sterowców; źródło Wikipedia

Wielkie sterowce budowali również Amerykanie. W zakładach Goodyear powstały dwa bliźniacze sterowce wypełnione helem Akron i Macon. Sterowce były tylko sześć metrów krótsze od Hindenburga. Zostały ukończone Akron w 1931 (rys. 3.10) roku a Macon w 1933. Przy budowanie korzystano z doświadczenia niemieckich konstruktorów sterowców. Oba sterowce służyły w US Navy. Próbowano je między innymi wykorzystać w roli powietrznej bazy dla samolotów (jako lotniskowce). W kwietniu 1933 roku Akron, podczas sztormu, wpadł do Atlantyku, w wyniku czego śmierć poniosło 73 członków załogi.

Wprowadzony w 1933 roku do służby Macon, uległ katastrofie w lutym 1935 roku, również podczas sztormu. Zginęło dwóch z 76 członków załogi.



Rysunek 3.10. Na zdjęciu USS Acron nad Dolnym Manhattanem; źródło zdjęcia Wikipedia.

Obecnie sterowce powracają powoli do łask, jako narzędzie rozrywki, reklamy ale również transportu (rys. 3.11). Liderami w produkcji sterowców są dziś Niemcy, Japonia i USA. Choć obecnie eksploatowane konstrukcje nie porażają swoimi rozmiarami to testowane są modele o udźwigu przekraczającym 50ton, a w projektach są maszyny o udźwigu do 500ton. Nie wiadomo jednak czy plany te mają szansę realizacji.



Rysunek 3.11. Współczesny Zeppelin w locie. Jest to produkt niemieckiej firmy Zeppelin Luftschifftechnik GmbH, będącej częścią koncernu Zeppelin. Przy objętości nieco ponad 8000m^3 jest znacznie mniejszy od przedwojennego wzorca. Sterowiec ten wypełniony jest heliem i może dźwignąć 1900kg ładunku. Zwykle lata na wysokości 300m , a prędkość przelotowa wynosi 70km/h . Firma planuje budowę większych jednostek. Źródło Wikipedia

Oczywistą wadą wszelkiego rodzaju sterowców i balonów jest ich ogromna objętość. Obliczmy nośność 1m^3 helu i wodoru w powietrzu przy powierzchni Ziemi przy temperaturze 20°C . W tych warunkach:

- ❖ Ciężar właściwy helu wynosi 0.178kg/m^3
- ❖ Ciężar właściwy wodoru wynosi 0.089kg/m^3
- ❖ Ciężar właściwy powietrza wynosi 1.293kg/m^3

Ponieważ ciężary właściwe podałem w kg/m^3 wystarczy odjąć ciężar właściwy wodoru lub helu od ciężaru właściwego powietrza aby uzyskać masę, wyrażoną w kilogramach, którą może udźwignąć 1m^3 helu lub wodoru. Możemy obliczoną wielkość nazwać udźwigniem właściwym dla danego gazu.

- ❖ Dla helu otrzymujemy 1.115kg/m^3
- ❖ Dla wodoru otrzymujemy 1.204kg/m^3

Jeżeli chcemy znać minimalną objętość gazu, potrzebną na udźwignięcie danej masy wyrażonej w kilogramach, to masę tę należy przemnożyć przez obliczony udźwign właściwy. Na przykład dla dźwignięcia 200kg potrzebne jest co najmniej

- ❖ helu 179.4m^3
- ❖ wodoru 166.1m^3

Pamiętać również należy, że dźwigana przez balon czy sterowiec masa to również masa samej powłoki balonu i całego osprzętu, a nie tylko pasażerów i ładunku użytecznego. Jak widać różnica objętości pomiędzy balonem helowym a

wodorowym nie jest duża. Balon helowy nie straszy nas przy tym eksplozją. Z drugiej strony hel jest dużo, dużo droższy od wodoru. Pod względem rozpowszechnienia we Wszechświecie zajmuje zdecydowanie drugie miejsce po wodorze. Jednak na Ziemi jest go mało, co przy dużym zapotrzebowaniu, skutkuje w wysokich cenach.

Problem 3.1.

Postaraj się odpowiedzieć na pytanie: Dlaczego balony nie są „wypełnione” próżnią? Wszak gęstość próżni to 0g/cm^3 .

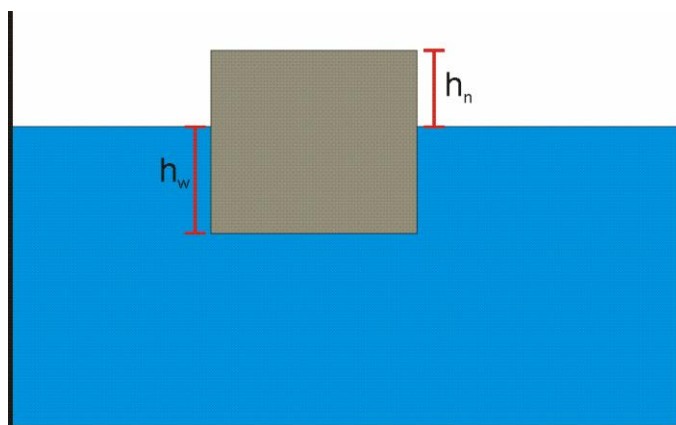
Prawo Archimedesesa jest wdzięcznym tematem do zadań. Oto przykłady

Zadanie 3.1.

W wodzie o gęstości $\rho_1=1000\text{kg/m}^3$ pływa drewniany sześcian o gęstości $\rho_2=600\text{kg/m}^3$ (rys. 3.12). Krawędź sześcianu ma długość $a=0.1\text{m}$. Obliczyć a) wysokość części niezanurzonej sześcianu, b) pracę, jaką trzeba wykonać aby sześcian wyciągnąć z wody. Siły tarcia i napięcia powierzchniowego pomijamy.

Obliczymy, w pierwszym kroku, wysokość niezanurzonej części sześcianu. Jego masa M_1 jest równa iloczynowi objętości i gęstości

$$M_1 = a^3 \rho_2 = 0.001\text{m}^3 600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0.6\text{kg} \quad 3.6$$



Rysunek 3.12. Rysunek do zadania (3.1).

Ponieważ sześcian pływa, wyparta woda musi mieć, masę 0.6kg , wysokość słupa wody h_w o takiej masie i podstawie kwadratowej o powierzchni a^2 wynosi

$$h_w = \frac{M_1}{a^2 \rho_1} = \frac{0.6\text{kg}}{0.01\text{m}^2 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0.06\text{m} \quad 3.7$$

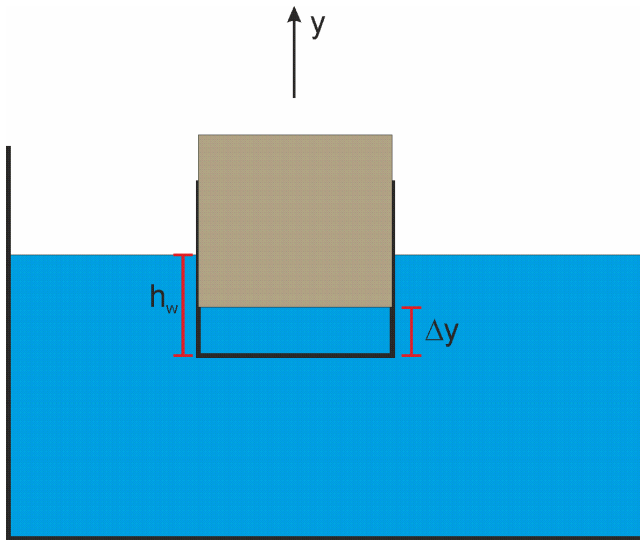
Zatem niezanurzona część drewnianego sześcianu ma wysokości h_n

$$h_n = a - h_w = 0.04m \quad 3.8$$

Podstawiając wzory (3.7) i (3.8) do wzoru (3.9) otrzymamy ogólne wyrażenie na wysokość niezanurzonego sześcianu h_n

$$h_n = a - \frac{a^3 \rho_2}{a^2 \rho_1} = a \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \quad 3.9$$

Pracę wykonaną przy wynurzeniu sześcianu obliczymy na dwa sposoby. Sposób pierwszy jest bardziej geometryczny, przez co prostszy, ale mniej ogólny. Przy wynurzeniu sześcianu zmniejsza się ta jego część, która jest zanurzona (rys. 3.13)



Rysunek 3.13. Przy wyciąganiu sześcianu z wody, maleje również siła wyporu, gdyż coraz mniejsza objętość sześcianu pozostaje w zanurzeniu.

Zatem maleje również siła wyporu i siła, która wyciąga sześcian musi wzrosnąć. Powiedzmy, że sześcian został podniesiony o wielkość Δy , wtedy jego zanurzenie zmaleje i będzie wynosić

$$h_w \rightarrow h_w - \Delta y \quad 3.10$$

Korzystając z wyrażenia (3.7) aktualna wartość głębokości zanurzenia wyniesie

$$h_w = \frac{M_1}{a^2 \rho_1} - \Delta y \quad 3.11$$

A wartość siły wyporu wyrazi się wzorem

$$F_w = a^2 h_w \rho_1 g = a^2 \rho_1 g \left(\frac{M_1}{a^2 \rho_1} - \Delta y \right) = M_1 g - \rho_1 g a^2 \Delta y \quad 3.12$$

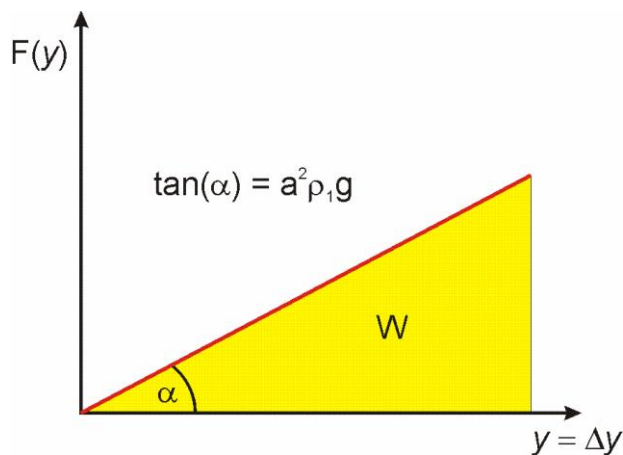
Masę M_1 mogą wyrazić przez gęstość ciała

$$F_w = a^3 \rho_2 g - \rho_1 g a^2 \Delta y = a^2 g (a \rho_2 - \rho_1 \Delta y) \quad 3.12a$$

Wartość siły działającej przy wyciąganiu sześcianu będzie równa sile ciężkości pomniejszonej o siłę wyporu

$$F(\Delta y) = a^3 g \rho_2 - a^2 g (a \rho_2 - \rho_1 \Delta y) = a^2 g \rho_1 \Delta y \quad 3.13$$

Zatem siła działająca na drewniany sześcian jest proporcjonalna do Δy . Jest to siła o tym samym charakterze co siła działająca na naciąganą sprężynę, która jest liniowo zależna od przesunięcia (TII 5.1.1). W przypadku sprężyny im bardziej ją naciągniemy tym większą musimy działać siłą. Tutaj im bardziej wyciągniemy sześcian tym większą siłą musimy działać, bo mniej nam pomaga siła wyporu. Zauważ przy tym, że dla $\Delta y=0$ siła wyrażona wzorem (3.13) jest równa zeru. Zgodnie z warunkami zadania ciało wtedy pływa po powierzchni wody i siła ciężkości ma taką samą wartość jak siła wyporu. Praca jest równa sile razy przesunięcie. Na wykresie jest to pole powierzchni pod wykresem siła versus przesunięcie. W naszym przypadku jest to pole pod trójkątem (rys. 3.14).



Rysunek 3.14. Wykres zależności siły działającej przy wyciąganiu sześcianu od stopnia jego wyciągnięcia

Wysokość tego trójkąta jest równa wartości siły $F(h_w)$ działającej na sześcian w momencie kiedy sześcian zostaje wynurzony (wtedy $\Delta y = h_w$)

$$F(h_w) = a^2 \rho_1 g h_w \quad 3.14$$

$\tan(\alpha)$

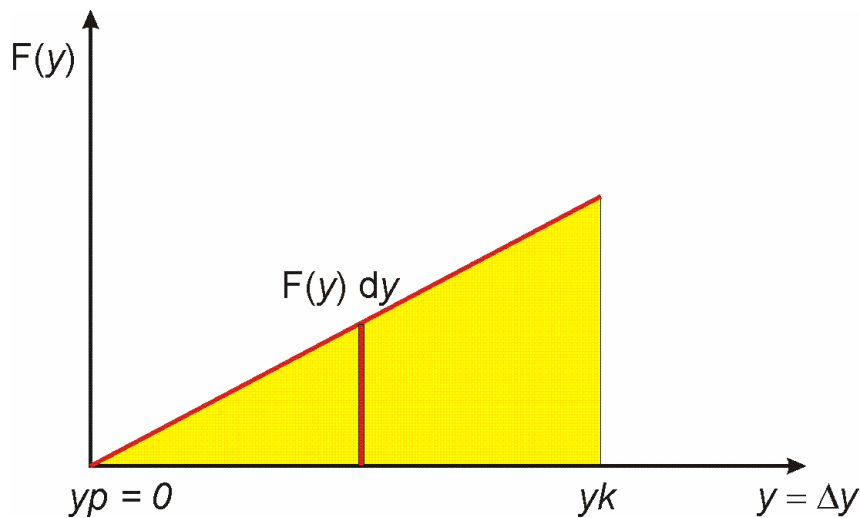
Bez problemu policzymy pole trójkąta – czyli szukaną pracę

$$W = \frac{1}{2} F(h_w) h_w = \frac{1}{2} a^2 \rho_1 g h_w^2 \quad 3.15$$

Metoda druga, bardziej zaawansowana, oznacza odwołanie się do ogólnego wzoru na pracę (rys. 3.13)

$$W = \int_{y_p}^{y_k} F(y) dy \quad 3.16$$

Jeżeli przyjmiemy, że układ współrzędnych zdefiniowany jest tak, że $y_p=0$, to wtedy $\Delta y=y$



Rysunek 3.15. Ilustracja do całki (3.3.17). Obliczając tę całkę sumujemy nieskończenie małe przyczynki postaci $F(y)dy$

Wzór na $F(y)$ już mamy, przy przyjętym wyborze układu współrzędnych jest to (patrz (3.13)).

$$F(y) = a^2 \rho_1 g \Delta y = a^2 \rho_1 g y \quad 3.17$$

Przyjąłem, że $\Delta y = y - 0 = y$, gdyż y zaczyna się od zera. Teraz sumujemy (całkujemy) po nieskończenie małych przyczynkach postaci

$$\int_{y_p=0}^{y_k=h_w} F(y) dy = \int_{y_p=0}^{y_k=h_w} a^2 \rho_1 g \Delta y dy = \frac{1}{2} a^2 \rho_1 g h_w^2 \quad 3.18$$

Jest to ten sam wynik (3.15) co obliczony z pola trójkąta. Ogólność tej metody polega na tym, że do wzoru na pracę

$$\int_{y_p=0}^{y_k=h_w} F(y) dy \quad 3.19$$

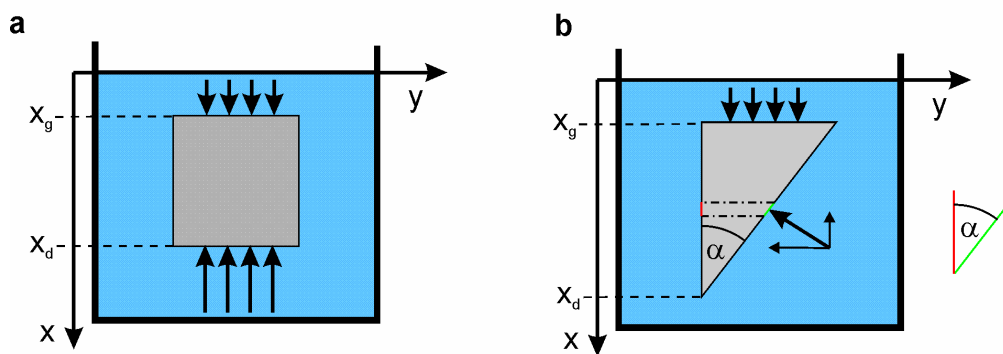
możemy podstawić różne postacie funkcji $F(y)$.

Warto jest zdać sobie sprawę z tego co policzyliśmy w poprzednim zadaniu. Nie policzyliśmy siły z jaką rzeczywisty drewniany klocek sześcienny jest wyciągany z wody. Policzyliśmy siłę jaką trzeba użyć do wyciągnięcia takiego ciała z wody, gdy działa tylko siła ciężkości i wyporu. Pomijamy w zadaniu zawsze obecne siły tarcia i napięcia powierzchniowego. Gdy ciało wyciągamy powoli te dodatkowe siły nie są zbyt duże. Ponadto liczymy siłę

graniczną, to znaczy równoważącą siły oporu. Stosując siłę graniczną wyciągalibyśmy ciało nieskończenie długo; nieco za długo. W rzeczywistej sytuacji musimy nadać mu niezerową prędkość, czyli zwiększyć jego energię kinetyczną co wymaga dodatkowej pracy. Nas jednak interesowała tylko ta część pracy, która została wykonana przeciw siłom ciężkości.

3.1. Prawo Archimedesesa ponownie

Pokazałem, że prawo Archimedesesa wynika z zasady zachowania energii. Można je również wyprowadzić korzystając z prawa Pascala. Przy okazji będę mógł zaprezentować rys technik obliczeniowych, często wykorzystywanych w fizyce. Rozważmy sześcienny blok zanurzony w wodzie⁴ (rys. 3.1.1).



Rysunek 3.1.1. a) ciśnienie wywierane na podstawę sześcianu jest mniejsze niż ciśnienie wywierane na jego górną powierzchnię. Ciśnienie działające na boczne ścianki powoduje siły (parcie), która nie ma składowej pionowej, a w linii poziomej siły te muszą się równoważyć, gdyż przy braku równowagi blok przesunąłby się w płaszczyźnie poziomej; b) przy skośnej ściance siły parcia rosną wraz z głębokością i mają niezerową składową poziomą i pionową. Zielona kreska wyróżnia elementarną powierzchnię.

Ciśnienie wywierane na ściany boczne równoważy się – inaczej sześcian by się przesunął w kierunku poziomym. Różnica ciśnień wywieranych na górną i dolną powierzchnię sześcianu wynosi

$$\Delta p = \rho x_d g - \rho x_g g = \rho g (x_d - x_g) = \rho g h \quad 3.1.1$$

Gdzie ρ to gęstość cieczy, która w naszym przykładzie jest mniejsza od gęstości sześcianu. Różnica sił z jaką ciecz napiera na górną i dolną powierzchnię jest równa

$$\Delta F = \Delta p S = \rho g h S = \rho g V = mg \quad 3.1.2$$

S jest powierzchnią ściany sześcianu, a m masą słupa wypartej wody. Otrzymaliśmy ciężar wypartej wody, czyli prawo Archimedesesa. Teraz, jak to

⁴ Zamiast wody może to być dowolny płyn, którego gęstość jest mniejsza od gęstości ciała.

mamy w zwyczaj, przejdziemy do trudniejszego przykładu. Rozważę klin zanurzony w cieczy, tak jak na rysunku (3.1.1b). Niech krawędź klina ma długość L , a powierzchnia jego pochyłej ścianki wynosi S . Zgodnie z prawem Pascala ciśnienie wywierane przez płyn działa prostopadle do powierzchni ciała. Wydzielę składową pionową (rys. 3.1.1b) elementarnej siły jaką ciecz wywiera na ciało na danej głębokości x

$$dF = \rho g x \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) dS = \rho g x \sin(\alpha) dS \quad 3.1.3$$

Wyznaczę powierzchnię płata dS

$$dxL = dS \cos(\alpha) \Rightarrow dS = L \frac{dx}{\cos(\alpha)} \quad 3.1.4$$

Wracając do (3.1.3) mamy

$$dF = \rho g x L \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} dx = \rho g x L \tan(\alpha) dx \quad 3.1.5$$

Wzór (3.1.5) wyraża siłę (parcie) jaka na głębokości x działa, w kierunku pionowym, na nieskończenie cienki pasek klina o długości L i szerokości $dx/\cos(\alpha)$. Całkowita składowa pionowa siły będzie równa sumie sił działających na poszczególne paski plus ciśnienie wywierane przez warstwę cieczy h_0 nad klinem

$$F = \rho g h_0 S + \int_0^h \rho g x L \tan(\alpha) dx = \rho g h_0 S + \rho g L \tan(\alpha) \int_0^h x dx \quad 3.1.6$$

$$\rho g h_0 S + \frac{1}{2} \rho g L \tan(\alpha) h^2$$

S oznacza górną powierzchnią klina. Różnica siły działającej na ściankę skośną i na górną powierzchnię klina wynosi

$$\Delta F = \rho g h_0 S + \frac{1}{2} \rho g L \tan(\alpha) h^2 - \rho g h_0 S = \frac{1}{2} \rho g L \tan(\alpha) h^2 \quad 3.1.7$$

Można ją wyrazić w postaci

$$\Delta F = \rho g \underbrace{\frac{1}{2} L \tan(\alpha) h^2}_V = \rho g V = mg \quad 3.1.8$$

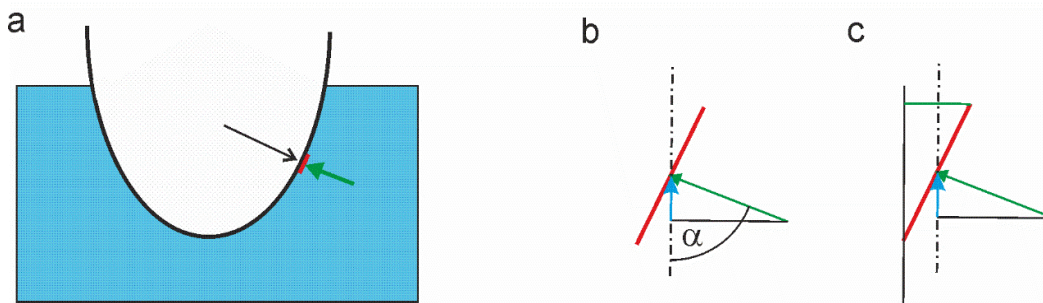
Gdzie V jest objętością klina, a m masą wypartej wody. Ponownie mamy prawo Archimedesesa.

Zauważ, że wyrażenie (3.1.5) można przepisać w postaci

$$dF = \rho g x L \tan(\alpha) dx = \rho g x dS_{\square} \quad 3.1.9$$

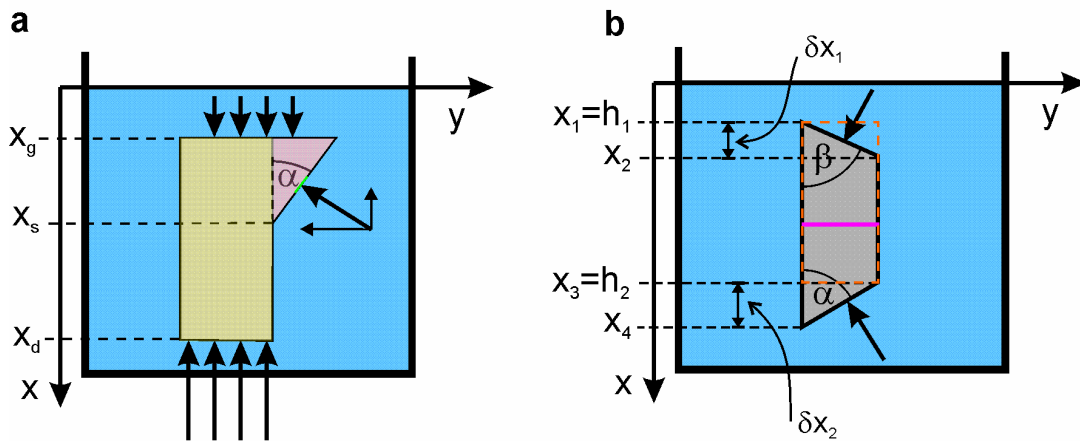
$$dS_{\square} = dx L \tan(\alpha) \quad 3.1.9a$$

dS_{\square} jest rzutem powierzchni nieskończenie cienkiego paska ds powierzchni S na kierunek równoległy do dna. Wzór (3.1.9) oznacza, że składowa pionowa siły działającej na nieskończenie cienki wycinek skośnej ścianki (równoległy do dna), działa w taki sposób, że jest równa sile jaka działa na powierzchnię będącą rzutem skośnej ścianki na kierunek prostopadły do pionu. Można to krótko podsumować stwierdzeniem, że zamiast rzutować siłę na kierunek pionowy możemy rzutować wektor odpowiedniego wycinka powierzchni. Ilustruje to rysunek (3.1.2).



Rysunek 3.1.2. a) Na element powierzchni płaskiej (wskazanej czarną strzałką), stycznej do zanurzonej powierzchni działa siła (zielona) wywołana przez ciśnienie. Zanurzoną powierzchnię możemy przedstawić jako sumę takich nieskończenie małych płaskich płatów; b) Niebieska strzałka pokazuje pionową F_p składową siły wywieranej przez ciśnienie. Jest ona równa $F_p = p S \cos(\alpha)$, gdzie p to ciśnienie na danej głębokości a S to powierzchnia płata (ds dla nieskończenie małego płata); c) wyrażenie $S \cos(\alpha)$ daje rzut S_p powierzchni na kierunek prostopadły do pionu. Oznacza to, że $F_p = p S_p$. Liczymy zatem siłę mnożąc ciśnienie na danej głębokości przez powierzchnię składowej powierzchni prostopadłej do pionu. Suma takich składowych da wartość równą polu powierzchni przekroju zanurzonego ciała na danej głębokości.

Przejdę do jeszcze bardziej złożonego przypadku (rys. 3.1.3a). Ciało składa się z dwóch części: prostopadłościanu i klina. Z rysunku widać, że możemy je potraktować osobno, a obliczone dla każdej części siły wyporu dodać. Powołując się na wyniki przedstawione powyżej otrzymamy ponownie prawo Archimedesesa.



Rysunek 3.1.3. a) w przypadku obiektu złożonego z sześcianu i klina ciśnienie w kierunku pionowym działa niezależnie na obie części. Możemy więc odpowiednie siły wyporu dodać; b) ciało o przekroju trapezu.

Rysunek (3.1.3b) pokazuje ciało o przekroju trapezu składające się z dwóch klinów i części regularnej w postaci prostopadłościanu. Ciśnienie działające na ściankę dolnego klina wyznaczamy tak jak w krokach (3.1.3-3.1.5). Elementarna siła działająca, w kierunku pionu, na nieskończenie cienki pasek dolnego klina wynosi

$$dF = \rho g x' L \tan(\alpha) dx' \quad 3.1.10$$

Całkowita siła (parcie) na dolny klin może zostać rozłożona na siłę związaną z ciśnieniem jakie działa do głębokości h_2 oraz siłę związaną z ciśnieniem jakie działa na ściankę klina, przy czym przyrost głębokości dla klina liczymy od h_2 .

$$F_d = \rho g h_2 P + \rho g L \tan(\alpha) \int_0^{\delta x_2} x' dx' =$$

$$\rho g h_2 P + \frac{1}{2} \rho g L \tan(\alpha) (\delta x_2)^2 = \rho g h_2 P + m_d g \quad 3.1.11$$

P jest powierzchnią przekroju części regularnej ciała (na rysunku przekrój zaznaczony jest linią różową), m_d jest masą wody wypartej przez dolny klin. Na górny klin otrzymujemy wyrażenie

$$F_g = \rho g h_1 P + \rho g L \tan(\beta) \int_0^{\delta x_1} x' dx' =$$

$$\rho g h_1 P + \frac{1}{2} \rho g L \tan(\beta) (\delta x_1)^2 = \rho g h_1 P + m_g g \quad 3.1.12$$

m_g jest masą wody wypartej przez górny klin, a ρgh_1P wyznacza ciśnienie jakie wywiera górna warstwa wody na głębokości h_1 . Różnica między parciem (w kierunku pionu) na dolną i górną część ciała wynosi

$$\Delta F = \rho gh_2P + m_dg - \rho gh_1P - m_gg = \rho gP(h_2 - h_1) + m_dg - m_gg = mg + m_dg - m_gg \quad 3.1.13$$

Gdzie mg jest masą wody wypartej przez prostopadłościan obrysowany pomarańczową przerywaną kreską (rys. 3.1.2b)). Ponieważ

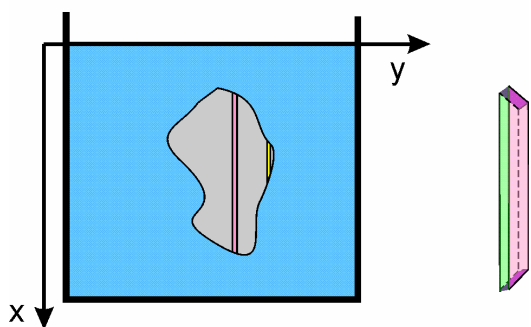
$$mg - 2m_gg = m_sg \quad 3.1.14$$

Gdzie m_s jest masą wypartej wody przez ciało bez górnego i dolnego klina. Wstawiając w (3.1.13) za mg wyrażenie z (3.1.14) mamy

$$\Delta F = m_sg + m_dg + m_gg = m_cg \quad 3.1.15$$

Gdzie m_c jest masą wody wypartej przez ciało.

Zauważ, że ciało o dowolnym kształcie możemy złożyć z podobnych elementów, mających kształt słupka (rys. 3.1.4). Różnica elementarnych sił działających na taki słupek od dołu i góry liczy się podobnie jak dla ciała o przekroju trapezu, podobnie dostajemy prawo Archimedesusa. Ponieważ całe ciało jest złożeniem takich słupków, po zsumowaniu dostaniemy prawo Archimedesusa dla ciała o dowolnym kształcie.



Rysunek 3.1.4. Ciało o nieregularnym kształcie można potraktować jako sumę nieskończenie cienkich słupków wyciągniętych w kierunku pionu. Wewnątrz ciała narysowane są dwa przykładowe słupki. Z prawej słupek w powiększeniu. Jego podstawy zaznaczone są fioletowym kolorem. Obliczając parcie działające na dolną podstawę takiego słupka i odejmując parcie działające na jego górną podstawę otrzymamy wartość równą masie wypartej przez słupek wody. Sumując (całkując) po wszystkich takich słupkach otrzymamy prawo Archimedesusa dla całego ciała.

Powyższe rozumowanie nie jest ścisłym wyprowadzeniem prawa Archimedesusa dla dowolnego ciała, ale mam nadzieję, że masz teraz intuicję jak obliczamy takie problemy, a o to mi chodziło. Zwróć również uwagę na podobieństwo tych obliczeń do obliczania pracy w polu sił zachowawczych

(rys. TII_5.3.6). Z owocami takiego sumowania wpływów (np. sił) działających pod kątem do wybranego kierunku na powierzchnię zorientowaną pod kątem do tegoż kierunku nieraz jeszcze będziemy się spotykać.

Warto tu jeszcze nawiązać do sposobu jaki obliczałem parcie wywierane na sferyczną bańkę (rys. 2.3.6). Zauważ, że we wzorze na parcie (2.3.7) mnożyliśmy ciśnienie przez pole powierzchni przekroju sfery. Zamiast obliczyć parcie wywierane na poszczególne płaty powierzchni i je zrzutować na wybrany kierunek rzutowaliśmy wektory płątów powierzchni z których można zbudować sferę i mnożyliśmy je przez ciśnienie. Rzuty takich płątów dla sfery o promieniu r tworzą przekrój tej sfery czyli dysk o promieniu r . Przy wyprowadzaniu prawa Archimedesesa stosujemy ten sam trick. Rzuty powierzchni na jej podstawę sumują się do pola powierzchni podstawy, pod warunkiem że jest to wystarczająco regularna powierzchnia.

4. Perpetuum mobile ♦

Dążenie do zbudowania maszyny zdolnej do wiecznego ruchu pojawiło się w czasach starożytnej Grecji, jeżeli nie wcześniej. Przed wiekiem XIX nikt tego dążenia nie utożsamiał z koniecznością złamania zasady zachowania energii, gdyż wówczas zasada ta nie była jeszcze sformułowana. Brak dobrze określonych praw fizyki dawał dużo swobody przy wymyślaniu perpetuum mobile. Sformułowanie zasady zachowania energii nie oznaczało zupełnego końca idei perpetuum mobile jako maszyny czerpiącej energię z niczego. Dalej istnieje grono inżynierów amatorów próbujących dokonać tej sztuki. Niestety, nie zdają sobie sprawy jako bardzo beznadziejne jest to zadanie przynajmniej przy odwoływaniu się do układów mechanicznych i prostych układów elektromagnetycznych. Dodam, że rozróżniamy perpetuum mobile I rodzaju i II rodzaju. Obecnie mówimy o perpetuum mobile I rodzaju.

Definicja 4.1: Perpetuum mobile I rodzaju

Perpetuum mobile I rodzaju to urządzenie, którego działanie jest ściśle związane z łamaniem zasady zachowania energii.

Z punktu widzenia zastosowań praktycznych łamanie zasady zachowania energii nie jest konieczne. Wszak maszyny „nie zjadają” energii, gdyż jest to sprzeczne z zasadą jej zachowania. Przez urządzenia energia przepływa. Innym pomysłem na wiecznie poruszającą się maszynę jest konstrukcja, w której zachowana energia przepływa w obiegu zamkniętym. Niestety konstrukcja takiej maszyny złamałaby drugą zasadę termodynamiki, o której będziemy mówić w dziale termodynamika. Gdyby udało się zbudować maszynę, w której energia krążyłaby w kółko, lub na przykład pojemnik o wysokiej temperaturze odbierałby ciepło od pojemnika o niższej temperaturze, bez dodatkowych efektów termodynamicznych, to mielibyśmy perpetuum mobil II rodzaju

Definicja 4.2: Perpetuum mobile II rodzaju

Perpetuum mobile II rodzaju to urządzenie, którego działanie jest ściśle związane z łamaniem drugiej zasady termodynamiki.

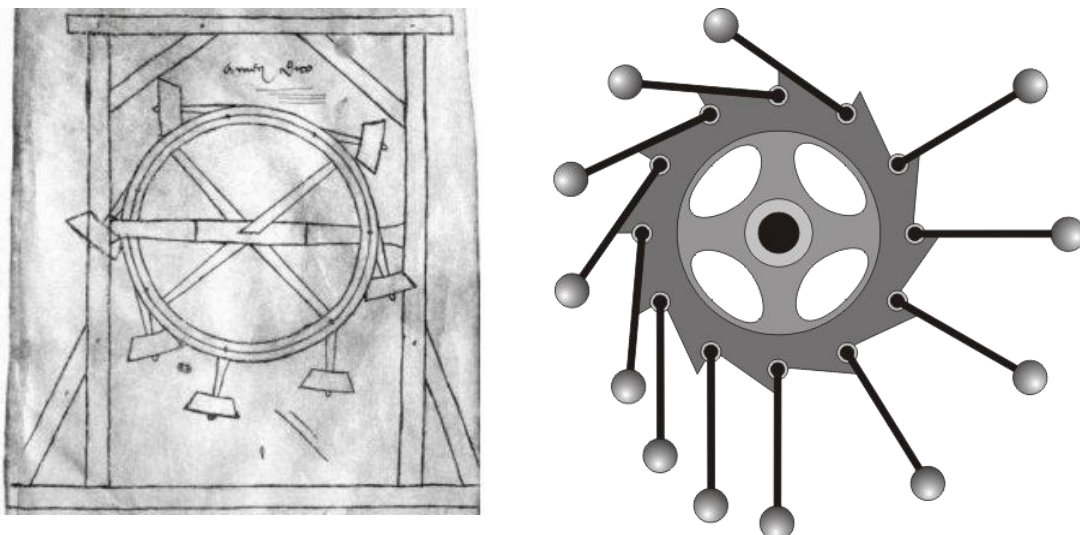
Podam teraz przykłady projektów perpetuum mobile opartych o elementy mechaniczne. Do najbardziej znanych należy projekt Villarda de Honnecourt, człowieka, którego życie znamy tylko z pozostałego po nim szkicownika (rys. 4.1).



Rysunek 4.1. Czasem po człowieku, jak ma szczęście coś zostaje, na przykład szkicownik. Tak też jest w przypadku Villarda de Honnecourt (1200? - ?). Jego szkicownik znajduje się obecnie w zbiorach Francuskiej Biblioteki Narodowej. Poza nim po autorze nie został żaden inny ślad. W szkicowniku na 33 stronach jest około 250 rysunków, przedstawiających m.in. ludzi, architekturę, maszyny, motywy dekoracyjne. Szkicownik jest jednym z najwcześniejszych zachowanych dzieł zawierających rysunki architektoniczne. U góry domniemany autoportret Villarda de Honnecourt. U dołu trzy przykładowe szkice.

Projekt wiecznie poruszającej się maszyny według Villarda⁵ przedstawia rysunek (4.2).

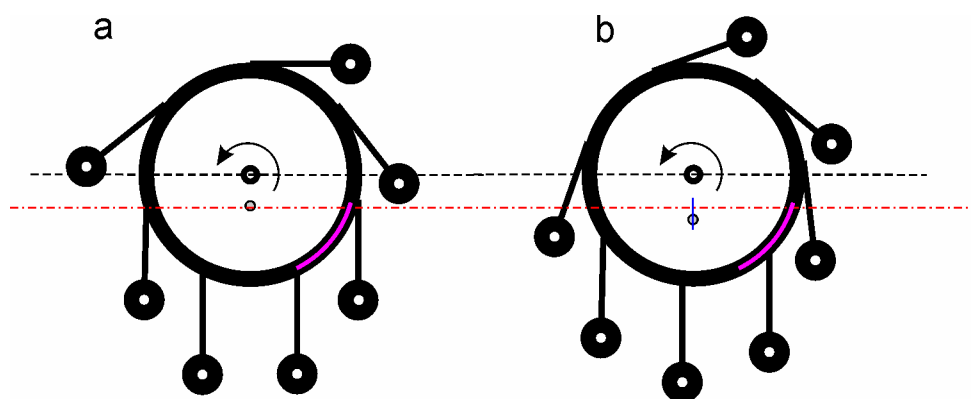
⁵ S. Walton, *Villard's Perpetuum Mobile*, *Avista Forum Journal*, 18 24-30 (2008)



Rysunek 4.2. Perpetuum mobile projektu Villarda de Honnecourt około 1230 roku, z prawej nowsza wersja tego projektu.

Przed Villardem podobny projekt znalazł się w pracy (1150 rok) indyjskiego uczonego Bhāskara. Bhāskara jest postacią bardzo ciekawą. Był prawdopodobnie największym matematykiem swojego czasu – wiemy o tym od niedawna. Bhāskara stworzył między innymi podwaliny pod rachunek różniczkowy. Ze względu na brak wystarczających źródeł trudno jest ocenić zakres wpływu prac Bhāskary na Villarda de Honnecourt i na innych europejskich uczonych.

Spróbuję dokonać podstawowej analizy działania maszyny Villarda. Rysunek (4.3) przedstawia analizowaną wersję maszyny. Środek masy maszyny znajduje się poniżej środka koła. Dzieje się tak dlatego, że większość kulistych obciążników znajduje się poniżej przerywanej linii wskazującej poziom, na którym jest środek koła maszyny. Ponieważ mamy siedem obciążników stan maszyny powtarza się co $1/7$ obrotu. Oznacza to, że zaczynając w pozycji (a) i przekręcając maszynę o $1/7$ pełnego obrotu wracamy do pozycji (a). Część (b) pokazuje stan maszyny po obrocie o kąt mniejszy niż $1/7$ pełnego obrotu. Widać, że średni poziom ciężarków obniżył się, a co zatem idzie obniżył się również środek masy całego urządzenia. Niemniej po $1/7$ pełnego obrotu środek masy powróci do poziomu wskazywanego na rysunku (a). Wynika z tego, że co $1/7$ pełnego obrotu środek masy maszyny wędruje tam i z powrotem wzdłuż pewnego odcinka. Odcinek ten może mieć składową poziomą, ale poruszanie się w poziomie nie zmienia bilansu energii potencjalnej, więc możemy się ograniczyć do analizy ruchu wzdłuż składowej pionowej (zaznaczonej na niebiesko). W gruncie rzeczy działanie maszyny sprowadziliśmy do podnoszenia ciężarka do dołu i do góry wzdłuż pewnego odcinka. To raczej kiepska perspektywa dla perpetuum mobile.

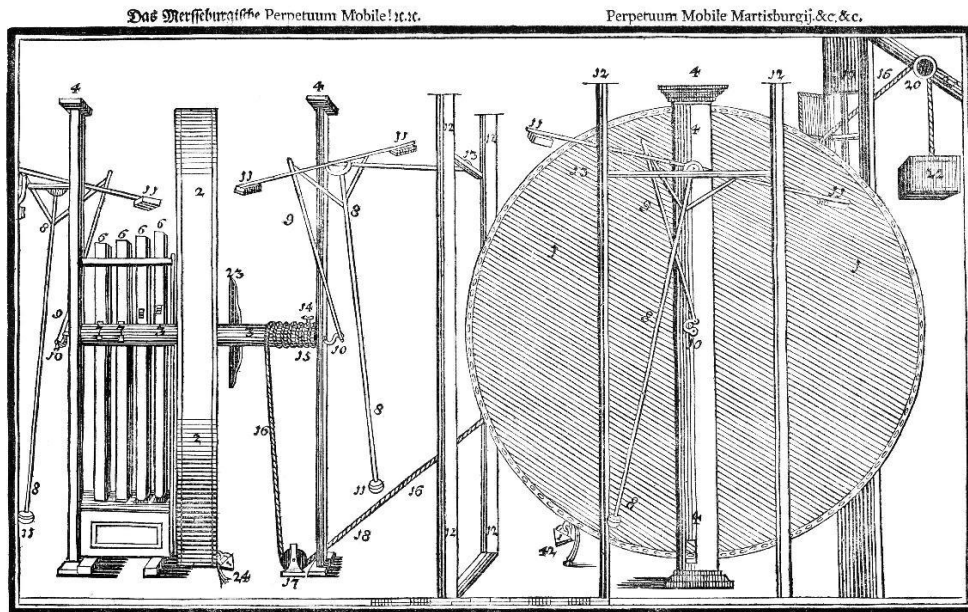


Rysunek 4.4. Przykładowe dwa stany maszyny typu Villarda

Zasadniczym problemem projektantów perpetuum mobile jest to, że działanie maszyny musi być cykliczne. Maszyna może przechodzić przez różne stany, ale w końcu musi powrócić do stanu początkowego i zacząć kolejny cykl pracy. Jak wiemy z tematu (§TII 7) pole grawitacyjne jest zachowawcze. Oznacza to, że zmiana energii ciała w polu grawitacyjnym jest zależna tylko od pozycji początkowej i końcowej ciała. To jak się to ciało poruszało między punktem wyjścia i punktem zakończenia przemieszczenia nie ma znaczenia dla zmiany jego energii potencjalnej. Pokazaliśmy wyżej, że działanie maszyny Villarda da się sprowadzić do cyklicznego procesu podnoszenia i opuszczenia ciała między tymi samymi położeniami granicznymi: dolnym i górnym. Podnosząc ciało do góry zwiększam jego energię potencjalną, a przy opuszczaniu do dołu ciało zmniejsza swoją energię potencjalną dokładnie o tę samą wartość, jaką zyskało w procesie podnoszenia. Nie ma tu żadnego zysku energii. Podobny wyniki dostaniemy analizując ruch każdego młota, czy kuli z osobna. Środek masy młota (lub kuli) porusza się po krzywej zamkniętej. Krzywa ta ma gdzieś punkt najniższego położenia i punkt najwyższego położenia. Młot jest podnoszony od punktu najniższego do najwyższego, a następnie opuszczany z powrotem do punktu najniższego. W całym cyklu zmiana jego energii potencjalnej jest równa zero. W efekcie zmiana energii całej maszyny w jednym cyklu musi być równa zero. Możemy teraz na zagadnienie budowy perpetuum mobile spojrzeć bardziej syntetycznie. Potrzebujemy procesu cyklicznego (taki proces nazywa się często procesem kołowym) podczas którego suma energii włożonej w maszynę jest mniejsza od sumy energii wydatkowanej przez maszynę przy powrocie do stanu początkowego. Nadwyżka energii oznacza łamanie zasady zachowania energii – czyli perpetuum mobile pierwszego rodzaju. Zachowawczość pola grawitacyjnego wyraźnie wskazuje, że na cyklicznych procesach wykorzystujących pole grawitacyjne wiele nie wygramy.

Znacznie trudniej jest się połapać w projekcie perpetuum mobile pokazanym na rysunku (4.4). Zawłość konstrukcji nie jest dowodem na jej poprawność, wręcz przeciwnie, jest to powód do sceptycyzmu. Perpetuum mobile, jeżeli jest możliwe, musi oprzeć się na jakimś genialnym pomysłem, a takie

pomysły zwykle porażają swą prostotą. Mnożenie kółek, dźwigni i innych maszyn prostych niczego nowego do zasad funkcjonowania maszyny nie wnosi. Ma tylko za zadanie zgubić krytyków, którym nie mają ochoty analizować kolejnego skomplikowanego układu trybików. Może też wywieść w pole samego autora, który w złożonym projekcie może przeoczyć jeden lub więcej szczegółów dzięki czemu bilans energii się zamknie. Niestety konstrukcja w czasie działania nie przeoczy niczego.

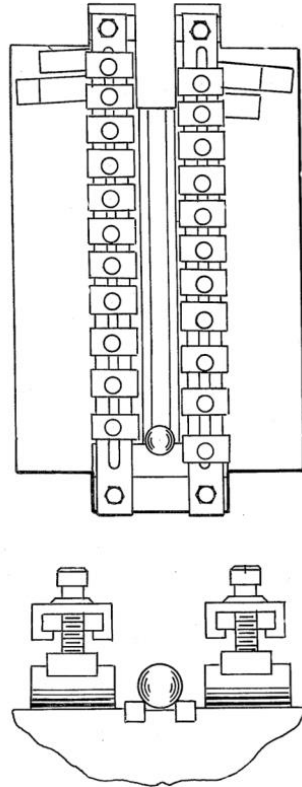


Rysunek 4.4. Jedna z wersji perpetuum mobile według projektu Johanna Besslera z 1719 roku, niemieckiego medyka i zegarmistrza, który przedstawił kilka projektów perpetuum mobile; źródło rysunku Wikipedia.

Współczesne projekty chętnie wykorzystują możliwości tkwiące w polach elektrycznych i magnetycznych. Jeden z XX wiecznych projektów przedstawia rysunek (4.5). Niezależnie od tego jak mocne argumenty wysuniemy przeciw perpetuum mobile (a w przyszłości wysunę mocniejsze argumenty) to i tak znajdą się chętni do jego budowy. Bierze się to z kilku przyczyn. Po pierwsze te mocne argumenty nie są zbyt proste, co powoduje, że są to argumenty hermetyczne (trzeba mieć przygotowanie by je zrozumieć). Po drugie zawsze będzie istniała grupa ludzi z definicji odnoszące się nieufnie lub wrogo do tego co mówi tzw. oficjalna nauka. Więc jak oficjalna nauka powie A, to ludzie ci powiedzą „nie A”. Po trzecie kwestia perpetuum mobile dobrze wypisuje się w teorii spiskowej, które mają swoją szeroką publiczność. Tak więc tajne siły mataczą zagrządzając ludziom drogę do darmowej energii - to bardzo chwytliwe hasło.

Kwestia perpetuum mobile nie jest bynajmniej zamknięta. Co jakiś czas pojawiają się w oficjalnej nauce hipotezy zawierające w sobie złamanie zasady

zachowania energii. Tyle, że hipotezy te odnoszą się do egzotycznych obszarów naszej rzeczywistości. Budowa perpetuum mobile jako układu czysto mechanicznego i elektrycznego jest raczej zamkniętym rozdziałem historii.



Rysunek 4.5. Diagram z patentu *U.S. Patent 4,215,330*, autorstwa E.T. Hartmanna. Na pochyłym torze umieszczona jest metalowa kulka, która wciągana jest do góry przez dwa rzędy magnesów. Po wspięciu się na szczyt kulka spada i powraca, tocząc się pod równią pochyłą, do punktu wyjścia i wszystko zaczyna się od nowa. Kłopot z tym pomysłem polega, jak zwykle, na konieczności zamknięcia toru kulki. Wbrew stwierdzeniom autora takie zamknięcie jest niemożliwe bez strat energii, które dyskwalifikują to urządzenie jako perpetuum mobile (w idealnym wypadku bilans wyszedł by na zero). Warto zauważyć, że pole magnetostaticzne jest polem stacjonarnym. Zamknięcie toru kulki w takim polu oznacza, że pole to wykonało pracę równą zero. Po drodze w wyniku tarcia dojdzie do rozpraszania energii kulki. Stąd w praktycznych rozwiązaniach nie można domknąć bilansu nawet na zero. W Internecie można znaleźć bardziej szczegółową dyskusję tego rozwiązania.

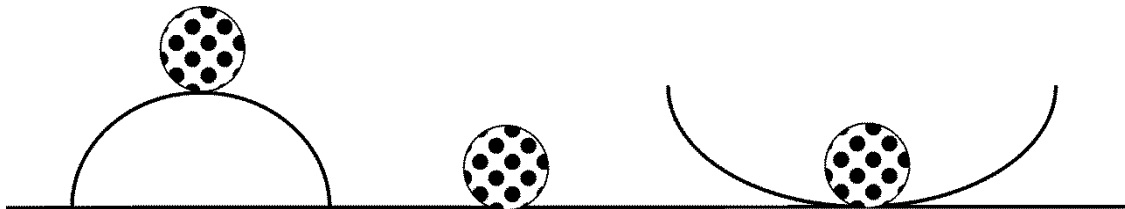
Może dobrze jest jednak, że ludzie próbują. Z kółek zębatych perpetuum nie zbudują, ale czasem powstają w ten sposób piękne konstrukcje mechaniczne, a ich autorzy mają twórcze zajęcie i rozwijają swoje umiejętności konstruktorskie.

5. Zasada prac wirtualnych ♦

Zasada prac wirtualnych jest bardzo ważnym przykładem zastosowania zasady zachowania energii do badania zagadnienia stabilności konstrukcji mechanicznych. Zaliczana jest zwykle do tematów trudniejszych, czyli pomijanych w typowych kursach fizyki. Ja jednak tą krzywdzącą opinią nie mam zamiaru się przejmować i wprowadzę zasadę prac wirtualnych w trzech odsłonach prostej (co zrobię teraz) i trudniejszej (§TV 4) i najtrudniejszej (§TXVII)

5.1. Typy równowagi

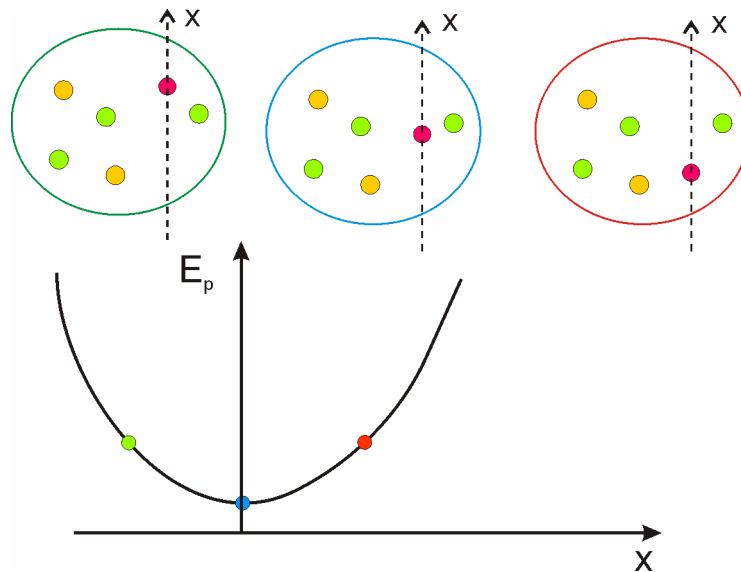
Pierwszą odsłonę zacznę od przedstawienia podstawowej typologii równowagi mechanicznej. Rysunek (5.1.1) załatwia sprawę.



Rysunek 5.1.1. Podstawowa typologia stanów równowagi. Z lewej strony przykład układu w stanie równowagi chwiejnej. Piłka stojąca na szczycie wzniesienia może z niego spaść nawet pod wpływem małego popchnięcia lub niewielkich drgań podłoża. Efektem spadku będzie oczywiście obniżenie energii potencjalnej piłki (§TII 4). W środku stan równowagi obojętnej. Piłka pozostaje na tym samym poziomie grawitacyjnej energii potencjalnej. Lekkie pchnięcie może zmienić jej położenie, ale nie zmieni wartości energii potencjalnej. Z prawej stan równowagi trwałej. Lekkie popchnięcie piłki spowoduje, że zmieni ona swoje położenie, ale zaraz potem wróci do najniższego punktu dołka.

Skoro już wiemy z jakimi typami równowagi możemy mieć do czynienia, czas na znalezienie metod pozwalających na określenie warunków, przy których układ będzie w równowadze trwałej, gdyż ta nas najbardziej interesuje. Ale nim przejdę do teorii kilka uwag praktycznych. Wiesz już, że jeżeli układ wpadnie do dołka energii potencjalnej, to na wydostanie się będzie potrzebował określonej dawki energii (§TII 4). Dopóki odpowiednia dawka energii nie pojawi się dopóki układ będzie tkwił w dołku. Oto cała tajemnica równowagi trwałej. Przy czym dołek energii potencjalnej nie musi być prawdziwym dołkiem, na przykład wykopany w ziemi. Zwykle jest to dołek na wykresie energii potencjalnej. Na przykład gdybyśmy narysowali energię potencjalną sprężyny jako funkcję jej naciągnięcia lub ściśnięcia, to dla położenia równowagi pojawiłby się dołek

energii potencjalnej; choć sama sprężyna w stanie równowagi nie ma dołka. Inny przykład pokazuje rysunek (5.1.2).



Rysunek 5.1.2. Układ związanych siłami elektromagnetycznymi sześciu atomów trzech rodzajów tworzy cząsteczkę chemiczną w taki sposób, że w położeniu równowagi suma energii potencjalnej atomów jest minimalna – układ jest w dołku energii potencjalnej. Ten równowagowy układ atomów wyobraża układ kropek otoczony niebieską linią. Energia potencjalna układu wykreślona jest niżej. Gdy układ jest w stanie równowagi energia potencjalna przyjmuje wartość minimalną; odpowiada mu niebieska kropka na wykresie energii. Gdy przemieścimy czerwony atom wzdłuż osi x -ów, to energia potencjalna zmieni się (wzrośnie). Wzrośnie również energia potencjalna całego układu. Po usunięciu sił powodujących to przesunięcie atom powróci do położenia wyjściowego. Kolory linii otaczającej układy atomów odpowiadają kolorom kropek wskazujących ich energię potencjalną na wykresie tej energii. Zauważ, że choć mamy tu ewidentny dołek na wykresie energii potencjalnej to nie ma to nic wspólnego z czymś, co można by nazwać dołkiem w układzie atomów.

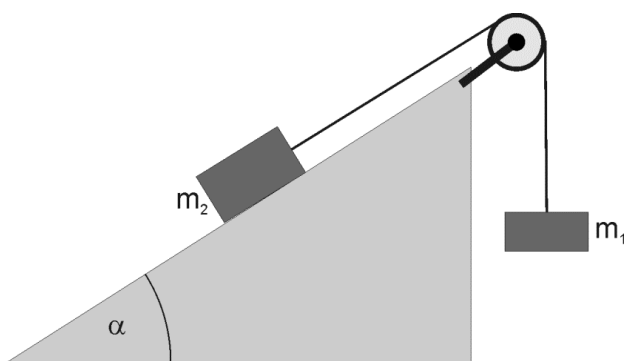
Równowaga chwiejna wyróżnia się tym, że dawka energii potrzebna na opuszczenie położenia równowagi jest bardzo mała, w idealnej sytuacji nieskończenie mała. Tu znowu muszę rozróżnić między podejściem teoretycznym a praktycznym. W teorii potrzebna dawka energii jest nieskończenie mała. W praktyce coś takiego nie ma miejsca. Spróbuj postawić ołówek na tej części, którą rysujesz. Przy bardzo dużej dozie ciepłoty prosty ołówek powinno dać się w końcu tak postawić. Ewentualnie nieco można spłaszczyć końcówkę grafitu, tak by było łatwiej. Stojący ołówek jest w położeniu równowagi. Z punktu widzenia praktycznego jest to równowaga chwiejna. Wystarczy mały ruch powietrza i ołówek spada na bok, czyli do pozycji równowagi trwałej. Energia potrzebna do przewrócenia ołówka jest bardzo mała,

ale nie nieskończenie mała. Zatem teoretycznie ołówek jest w równowadze trwałej (bo jest mały dołek związany z jego grawitacyjną energią potencjalną). W praktyce równowaga jest chwiejna, gdyż dołek energii potencjalnej jest bardzo płytki. Tak płytki, że procesy, nad którymi nie sprawujemy kontroli, są w stanie wyprowadzić układ poza dołek. Niewielki ruch powietrza, drgania mechaniczne wywołane zamknięciem drzwi, czy ruchem drogowym na pobliskiej drodze, które przez podłoże mogą przenieść się na stół na którym stoi ołówek. Wszystkie te zdarzenia mogą dostarczyć do ołówka energii niezbędnej do jego przewrócenia. Na zdarzenia te mamy niewielki wpływ i dlatego uznajemy, że od strony praktycznej ołówek znajduje się w stanie równowagi chwiejnej.

5.2. Zasada prac wirtualnych dla wszystkich ♣

Jeżeli chcemy wiedzieć czy dany układ fizyczny jest w stanie równowagi trwałej lub obojętnej, musimy zbadać, czy nie znajduje się w dołku energii potencjalnej, lub na jej „wypłaszczeniu”. Od strony technicznej znajdowanie takich dołków (minimów) nie jest proste. Jednak zagadnienie jest na tyle ważne, że opracowano metody, które pozwalają na rozwiązywanie praktycznych problemów. Do najbardziej uniwersalnych metod należą te, które za punkt wyjścia biorą zasadę prac wirtualnych. Co więcej zasada prac wirtualnych urosnie nam, w toku wykładu, do zasady d’Alemberta, najbardziej ogólnej zasady mechaniki klasycznej. Temat prac wirtualnych jest więc ważki.

Zastanówmy się nad układem przedstawionym na rysunku (5.2.1) Czy korzystając z zasady zachowania energii jesteśmy w stanie wyznaczyć wartość masy m_1 i m_2 dla których układ jest w równowadze? W analizie pomijamy wpływ tarcia.



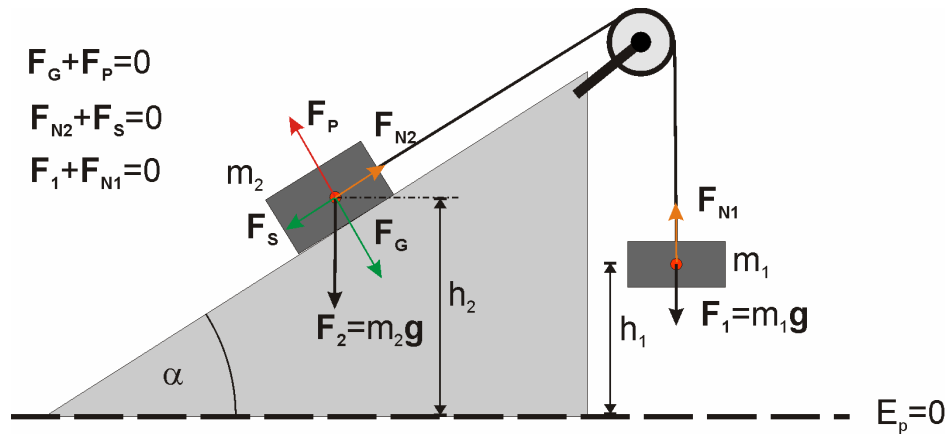
Rysunek 5.2.1. Pytamy o równowagę układu złożonego z dwóch ciężarków, równi i bloczka w konfiguracji takiej jak na rysunku.

Powiedzmy, że masy m_1 i m_2 są takie, że powyższy układ jest w stanie równowagi. Wyznaczę jego energię potencjalną przy różnych położeniach mas m_1 i m_2 . Zakładam, że nić łącząca ciężarki jest nierozciągliwa, to znaczy nie zmienia swojej długości przy przesuwaniu ciężarków. Energię potencjalną układu znajdę korzystając z pomocy rysunku (5.2.2). Przyjąłem iż na poziomie gruntu energia potencjalna jest równa zero. Energia potencjalna układu mas m_1 i m_2 jest równa

$$E_{12} = m_1 g h_1 + m_2 g h_2$$

5.2.1

Wysokości h_1 i h_2 są oczywiście wyznaczone od poziomu zerowego energii potencjalnej do środka masy poszczególnych ciał.



Rysunek 5.2.2. Rozkład sił działających na masy m_1 i m_2 na równi pochyłej. Zero energii potencjalnej zostało przyjęte na poziomie podstawy równi. Gdy układ jest w równowadze pary sił działających na daną masę wzdłuż tego samego kierunku dodają się do zera.

Jak zmieni się energia potencjalna gdy przesuniemy ten układ mas? Podnieśmy masę m_1 o δs_1 , działając siłą F_{D1} , która równoważy działanie siły ciężenia F_1 (rys. 5.2.3). Czyli mamy relację

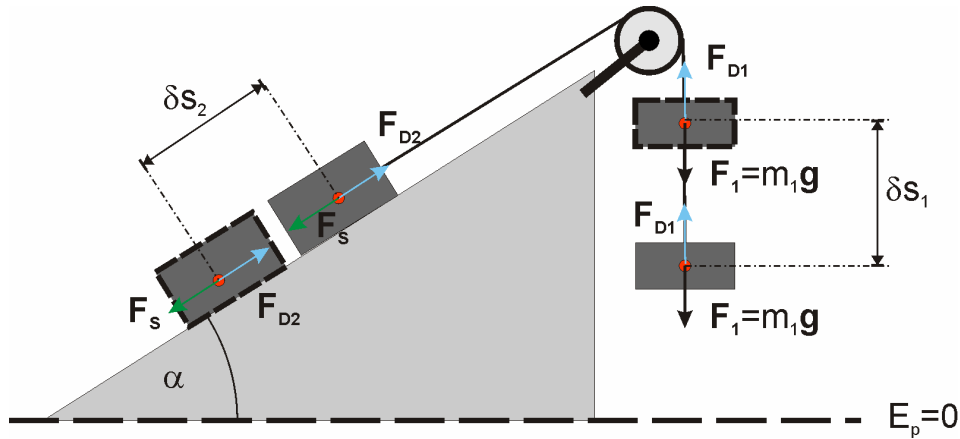
$$F_{D1} = -F_1$$

5.2.2

Dzięki zrównoważeniu siły ciężenia F_1 podnoszenie możemy wykonać bardzo powoli, czyli tak aby nie zwiększać energii kinetycznej masy m_1 . W takim przypadku przy podnoszeniu wykonamy pracę W_1 równą przyrostowi energii potencjalnej masy m_1 .

$$W_1 = F_{D1} \cdot \delta s_1 = -m_1 g \cdot \delta s_1 = m_1 g \delta s_1$$

5.2.3



Rysunek 5.2.3. Gdy przesuwamy obie masy ruchem jednostajnym, to praca wykonana przy tym przesunięciu jest równa zero. Oznacza to, że zmiana położenia obu mas, przy zachowaniu ich wzajemnej odległości, nie zmienia energii potencjalnej tego układu mas.

Warto zauważyć, że wektory \mathbf{g} i $\delta\mathbf{s}_1$ są skierowane przeciwnie, stąd ich iloczyn skalarny jest ujemny. Po przyłożeniu siły \mathbf{F}_{D1} , która równoważy siłę ciężkości $m_1\mathbf{g}$, przestaje działać siła naciągająca nić łączącą obie masy. Nie chcemy jednak aby masa m_2 zaczęła przyspieszać pod wpływem siły ściągnącej \mathbf{F}_s . By temu zapobiec zastępujemy siłę naciągu siłą \mathbf{F}_{D2} , taką że

$$\mathbf{F}_{D2} = \mathbf{F}_{N2} \quad 5.2.4$$

Teraz druga masa może zsuwać się bez zmiany prędkości, czyli bez zwiększania swojej energii kinetycznej na drodze równej co do wartości δs_1 . Opiszemy ten ruch wektorem $\delta\mathbf{s}_2$ takim że

$$|\delta\mathbf{s}_1| = |\delta\mathbf{s}_2| \quad 5.2.5$$

Praca wykonana przez tą siłę wyniesie

$$W_2 = \mathbf{F}_{D2} \cdot \delta\mathbf{s}_2 = -F_{D2}\delta s_2 \quad 5.2.6$$

Znak minus wziął się stąd, że wektor siły \mathbf{F}_{D2} jest skierowany przeciwnie do wektora przesunięcia $\delta\mathbf{s}_2$. Biorąc pod uwagę, że

$$\mathbf{F}_{D2} = \mathbf{F}_{N2} = -\mathbf{F}_2 \sin(\alpha) = -m_2\mathbf{g} \sin(\alpha) \quad 5.2.7$$

Mając na uwadze (5.2.5) praca nad drugą masą wyrazi się wzorem

$$W_2 = -m_2 g \delta s_2 \sin(\alpha) = -m_2 g \delta s_1 \sin(\alpha) \quad 5.2.8$$

Dodając do siebie wyrażenia (5.2.3) i (5.2.8) otrzymamy wzór na pracę całkowitą W_C

$$W_C = W_1 + W_2 = \underbrace{m_1 g}_{F_1} \delta s_1 - \underbrace{m_2 g \sin(\alpha)}_{F_2} \delta s_1 \quad 5.2.9$$

Zażądaliśmy przy tym by układ w położeniu początkowym był w równowadze. Oznacza to, że siła \mathbf{F}_1 musi być równa co do wartości przeciwnie skierowanej sile ściągnącej \mathbf{F}_{N2} . W przeciwnym razie obie siły by się nawzajem nie kompensowały i wypadkowa siła działająca na układ byłaby różna od zera. W efekcie układ ciężarków przemieszczałby się. Mówiąc krótko, aby lina pozostawała nieruchoma z obu końców trzeba ciągnąć z taką samą siłą. Fakt, że obie siły są przeciwnie skierowane zawarty jest w znaku minus przy drugim składniku wyrażenia (5.2.9). Korzystając z tego faktu stwierdzamy, że wzór (5.2.9), gdy układ jest w równowadze, przyjmie postać

$$W_C = W_1 + W_2 = (m_1 g - m_2 g \sin \alpha) \delta s_1 = 0 \quad 5.2.10$$

Całkowita wykonana praca jest równa zeru. Skoro przesuwanie układu mas w równowadze nie wiąże się z wykonaniem pracy, to energia potencjalna tego układu nie zależy od położenia układu tych mas. Zatem układ znajduje się w stanie równowagi obojętnej.

Teraz możemy odwrócić nasze działania. Powiedzmy, że mamy układ taki jak na rysunku (5.2.1) i znamy wartość masy m_2 . Jaka powinna być masa m_1 , aby układ był w równowadze obojętnej? Robimy to zadanie tak. Wiemy, że w stanie równowagi obojętnej spełnione musi być równanie (5.2.10). Z równania tego możemy znaleźć wartość szukanej masy.

$$m_1 g - m_2 g \sin \alpha = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 \sin(\alpha) \quad 5.2.11$$

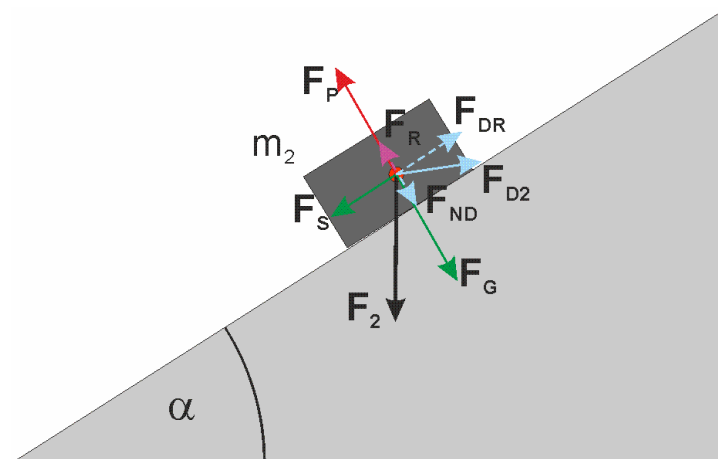
Wnioski z równania (5.2.11) uogólnię do rangi zasady nazywanej zasadą prac wirtualnych. Zasady to mówi co następuje:

Określenie 5.2a: Zasada prac wirtualnych

Układ w którym działają siły F_1, \dots, F_N i tylko te siły jest w równowadze obojętnej, wtedy gdy praca wykonana przez te siły przy dowolnym przesunięciu wirtualnym $\delta \mathbf{r}$, które nie zmienia istniejących w układzie sił reakcji, jest równa zeru. Czyli

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad 5.2.12$$

Przez przesunięcie wirtualne rozumiem tu małe, ale skończone przesunięcie zrealizowane myślowo. Co oznacza żądanie by owo przesunięcie wirtualne nie zmieniło sił reakcji? Z przesunięciem wirtualnym musi być stowarzyszona siła działająca w kierunku tego przesunięcia. Te stowarzyszone siły mogą zmieniać układ sił reakcji, co tłumaczy rysunek (5.2.4).



Rysunek 5.2.4. Przesunięcie planujemy w kierunku skośnym w stosunku do powierzchni równi. Z przesunięciem tym kojarzymy siłę F_{D2} . Siłę tą możemy rozłożyć na składową prostopadłą do powierzchni równi F_{ND} oraz składową równoległą do powierzchni równi F_{DR} . Załóżmy, że ciężarek jest dalej w równowadze. Oznacza to, że $F_{DR} = -F_S$. Ale zrównoważona musi być również siła F_{ND} . Siła ta powoduje dodatkowy nacisk na podłoże. Ten nacisk powoduje reakcję podłoża o takiej samej wartości jak siła nacisku ale przeciwnie skierowaną, czyli siłę F_R . Jak widać tak określona siła F_{D2} zmienia siły reakcji (w tym wypadku reakcji podłoża) i nie może być użyta w równaniu (5.2.12). Zauważ, że siła F_{D2} skierowana do góry w stosunku do poziomu równi zmniejszyłaby siłę nacisku na powierzchnię równi i w efekcie również zmieniłaby siłę reakcji podłoża równi. Tak też być nie może.

Zanim przejdę do dalszej dyskusji zasady prac wirtualnych uczynię dwie krótkie dygresje na temat przesuwania ciężarków bez zwiększania ich energii kinetycznej oraz prostowania układów prosto zakręconych.

Dygresja 5.2.1: O przesuwanie bez zwiększania energii kinetycznej

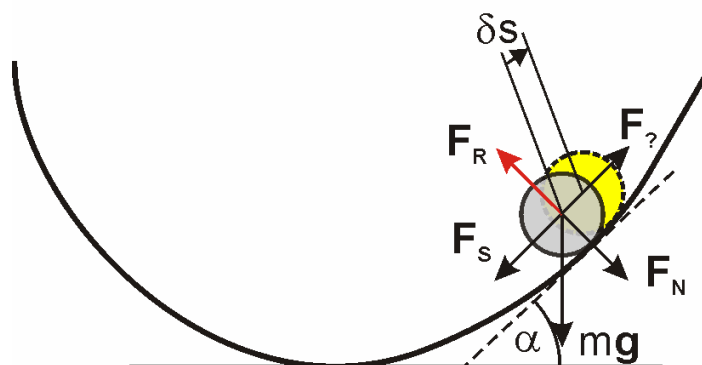
Powiedzmy, że podnosimy masę m do góry na wysokość Δh . Jeżeli początkowo masa spoczywa, to by ją podnieść do góry musimy nadać jej pewną prędkość początkową. Czyli na samym początku działamy sumą dwóch sił, siły F_A równoważącej ciężar tej masy, oraz siły F_B potrzebnej na zwiększenie jej prędkości. W momencie gdy masa m uzyska jakąś niezerową prędkość, ta druga część siły F_B staje się niepotrzebna. Teraz masa m może podróżować w górę ze stałą prędkością. Gdy liczymy zmianę energii potencjalnej masy m interesuje nas tylko działanie siły F_A . Siła F_B zmienia energię kinetyczną ciała, więc w obliczeniach pomijamy ją. Cała ta procedura kryje się za niezbyt szczęśliwym zwrotem, że podnosimy ciało bardzo wolno. Oznacza to, że siła F_B jest na tyle mała, że możemy ją pominąć. Jednak ściśle rzecz biorąc nie pomijamy jej jako bardzo małej, tylko nie bierzemy jej pod uwagę w obliczaniu przyrostów energii potencjalnej, gdyż siła ta odpowiada za przyrost energii kinetycznej.

Dygresja 5.2.2: O prostowaniu układów prosto zakręconych

Chcę zwrócić również uwagę na fakt, że choć układ ciężarków na równi jest układem dwuwymiarowym, to możemy go traktować jako układ jednowymiarowy. Jak widać

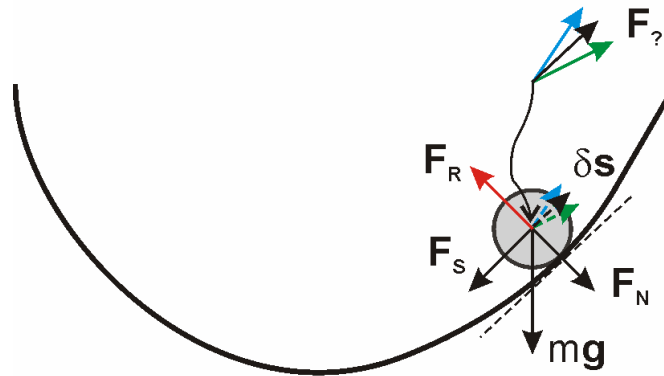
z rysunku (5.2.2) siły, które analizujemy w przykładzie z równią, działają albo równoległe do powierzchni równi albo w kierunku pionu. Ruch obu ciężarków jest ze sobą ściśle skorelowany poprzez sztywną linkę, która zawija się wokół boczka. Jedynym zadaniem boczka jest zmiana kierunku ułożenia linki. Ponieważ wszystko dzieje się wzdłuż linki i mamy jedno proste łamanie kierunku linki, które samo w sobie nic do dynamiki układu nie wnosi, linkę możemy traktować jako linię prostą wyznaczającą oś układu współrzędnych względem, którego analizujemy cały układ. W takich przypadkach przechodzimy do „wyprostowanego” układu jednowymiarowego (prostujemy w myśli linkę). Mogę tu uogólnić pojęcie ruchu jednowymiarowego na taki, który odbywa się wzdłuż jednej linii, która może być linią łamaną, pod warunkiem, że zmiany kierunku jej biegu nie dodają żadnych sił do układu oraz, że wszystkie rozważane masy poruszają się po liniach prostych (nie wchodzi w zakręt).

Zróbmy teraz taki przykład. W dołku jest kulka, położona na jej stoku (rys. 5.2.5). Siła nacisku na podłoże jest zrównoważona siłą reakcji tego podłoża. Jest jeszcze niezrównoważona siła ściągnięta kulkę na dno dołka F_s . Jaką musimy przyłożyć siłę $F?$ aby kulka była w równowadze?



Rysunek 5.2.5. W położeniu początkowym kulka leży na stoku dołka i jest w stanie równowagi. Siłę nacisku F_N równoważy siła reakcji podłoża F_R . Musimy znaleźć siłę $F?$, która równoważy siłę ściągniętą F_s . Siła ta musi być antyrównoległa do siły F_s . Aby znaleźć jej wartość nadajemy kulce wirtualne przesunięcie δs w kierunku szukanej siły $F?$ i korzystamy z zasady prac wirtualnych. Linia przerywana wyznacza styczną do dołka w punkcie styku między kulką a dołkiem.

Obliczenia wykonam wykorzystując zasadę prac wirtualnych. Nadam kulce przesunięcie wirtualne, ale uwaga musi to być przesunięcie styczne do powierzchni dołka w danym punkcie, inaczej siła nie spełni warunku mówiącego, że przesunięcie wirtualne nie może generować dodatkowych sił reakcji. Sprawę wyjaśnia rysunek (5.2.6).



Rysunek 5.2.6. Mamy trzy wersje przesunięcia wirtualnego δs środka kulki, czarna wersja działa równoległe do stycznej do powierzchni dołka w punkcie styku kulka-dołek, niebieska podnosi nieco kulkę nad styczną, zielona wciska nieco kulkę w powierzchnię dołka. Szukana siła $F_?$ musi być równoległa do wirtualnego przesunięcia. Rozkładając te siły na składowe równoległą i prostopadłą do stycznej (analogicznie jak na rysunku (5.2.4)) widać od razu, że siła stowarzyszona z zielonym i niebieskim przesunięciem wirtualnym zmieni siłę reakcji ze strony podłoża. Reakcji podłoża nie zmieni tylko siła stowarzyszona z czarnym przesunięciem.

Korzystam z zasady prac wirtualnych (5.2.12)

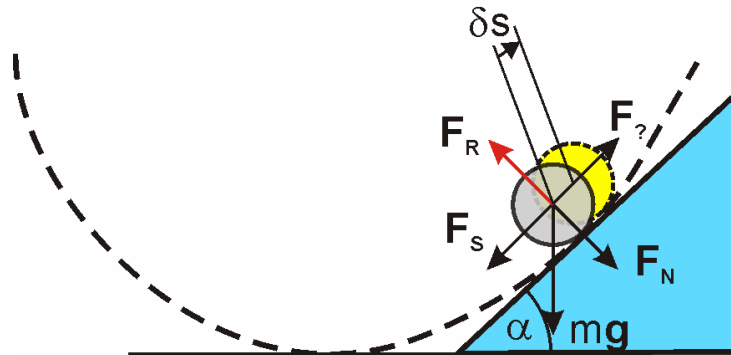
$$F_? \delta s + F_s \delta s = 0 \Rightarrow F_? = -F_s \quad 5.2.13$$

Też mi odkrycie! Wyliczyłem właśnie, że aby kulka była w równowadze szukana siła $F_?$ musi być równa, co do wartości, ale przeciwnie skierowana do siły ściągnącej F_s . Wystarczy spojrzeć na układ i widać, że tak ma być. Ale takie oczywiste przykłady mają swoją wartość. Widać z nich, że metoda daje poprawne wyniki, i że potrafimy ją poprawnie zastosować. A wobec oczywistości osiągniętego wyniku nie myślimy o tym czy jest on aby na pewno dobry i możemy z większą ufnością skupić na głębszym zrozumieniu samej metody.

Powiedzmy, że przyłożyłem do kulki obliczoną siłę $F_?$. Z jakim typem równowagi mamy teraz do czynienia? Choć układ jest prosty, to nie jest łatwo na to pytanie odpowiedzieć. Sprawdzenie typu równowagi wymaga przesunięcia kulki, a to wiele zmienia. Przyjrzyj się rysunkom, wystarczy przesunąć kulkę nieco do góry lub do dołu, a siła ściągnąca zmieni swoją wartość i kierunek. Czy powinniśmy to uwzględnić szukając odpowiedzi na zadane wyżej pytanie czy nie? Jeżeli założymy, że siła $F_?$ jest stała, to po lekkim przesunięciu kulki zmieni się siła reakcji podłoża, co jest niedozwolone. Z drugiej strony stosując zasadę prac wirtualnych zakładamy, że wszystkie siły są stałe na drodze wirtualnego przesunięcia. Czy mamy zatem prawo stosować ją w układzie, gdzie nawet małe przesunięcie powodują zmianę kierunku działania sił?

Na szczęście dla zasady prac wirtualnych dzieje się coś magicznego. Magia polega na tym, że ignorujemy zmiany wartości rzeczywistych sił i zmiany

kierunku ruchu układu i jednocześnie twierdzimy, że to nic nie szkodzi! Ignorując zmiany sił dokonujemy jakby transformacji dołka do kształtu równi o powierzchni stycznej do dołka w danym punkcie (rys. 5.2.7). A na równi wszystkie rozważane siły są stałe, a przesunięcia proste.



Rysunek 5.2.7. Stosując zasadę prac wirtualnych przesuwamy kulkę po powierzchni równi, a nie po powierzchni dołka. Równia ta ma punkt styczny z powierzchnią dołka, który jest punktem styku kulki i równi przed zastosowaniem przesunięcia wirtualnego. Im bliżej punktu stycznego tym bardziej podobna jest powierzchnia równi do powierzchni dołka.

Czy to ma sens? Ma, dlatego że lokalnie każdy dołek, nawet mocno zaokrąglony wygląda jak kawałek powierzchni stycznej do dołka w danym punkcie. Z punktu widzenia nieskończenie małego przesunięcia nie ma znaczenia czy poruszamy się po powierzchni dołka czy po płaszczyźnie stycznej. Biorąc za punkt wyjścia takie nieskończenie małe przesunięcie możemy zatem zamiast (5.2.12) napisać

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r} = 0$$

5.2.14

Widzisz różnicę? Skończone przesunięcie $\delta\mathbf{r}$ zastąpione zostało nieskończenie małym przesunięciem $d\mathbf{r}$. Teraz jest czas na hokus pokus. Ponieważ dla nieskończenie małych przesunięć nie ma znaczenia czy idziemy po równi o powierzchni stycznej do powierzchni dołka czy po powierzchni dołka, możemy nieskończenie małe $d\mathbf{r}$ zamienić na skończone $\delta\mathbf{r}$ i przejść na ruch po równi. Dzieje się tak dlatego, że na równi wszystkie siły i kierunki przesunięć są stałe. A dla stałych wielkości nie ma znaczenia czy bierzemy przyrosty nieskończenie małe czy skończenie małe. Wynik obliczeń jest taki sam. Podsumowując, mamy następując ciąg kroków. Zaczynamy od nieskończenie małych przesunięć. Potem zauważamy, że dla nieskończenie małych przesunięć nie ma różnicy między dołkiem a równią o powierzchni stycznej do dołka, więc skaczymy na równię i rozwiązujemy równoważny problem dla równi. Zauważamy, że na powierzchni

równi nie ma różnicy czy przesunięcia są nieskończenie małe czy nie, więc zamieniamy przesunięcia nieskończenie małe na przesunięcia skończone!

Mogę już odpowiedzieć na pytanie: w jakiej równowadze jest układ pokazany na rysunku (5.2.5)? W sumie nie ma to już znaczenia. Bo wiem, że korzystając z zasady prac wirtualnych zamieniam ten układ na układ równoważny, który jest układem będącym w równowadze obojętnej; w naszym przypadku dołek zamieniłem na równię. Zasadę prac wirtualnych stosuję do znalezienia sił, dzięki którym układ jest w równowadze. Stosując ją przenoszę się do matematycznego świata, w którym układ jest w równowadze obojętnej. W tym świecie znajduję szukaną siłę, która równoważy rzeczywisty układ. Słowem pytanie o typ równowagi naszego układu jest z punktu widzenia zasady prac wirtualnych niezbyt istotne. W praktyce pytanie może być jednak ważne. Ale sama zasada prac wirtualnych go nie rozstrzyga. Pozwala nam znaleźć siły, dla których mamy stan równowagi.

Zauważ również, że stan równowagi czy to obojętnej, czy chwiejnej, czy też trwałej osiągamy, na wypłaszczeniu wykresu energii potencjalnej, a więc tam, gdzie układ ma maksimum (równowaga chwiejna) minimum (równowaga stała) wartości energii potencjalnej, lub wartość tejże energii jest stała. Przy dojściu do takiego miejsca maleje do zera tempo zmian energii potencjalnej.

Za sprawą komputerów słowo „wirtualny” zrobiło błyskawiczną karierę. Doszło do tego, że czujemy się czasem zobowiązani do poinformowania naszego rozmówcy, czy rzecz dzieje się w „realu” czy w rzeczywistości wirtualnej. Niektórzy futuryści przewidują, że już niedługo przeciętny zjadacz chleba większość czasu będzie spędzał w rzeczywistości wirtualnej. Jednak zanim pojawiły się komputery osobiste zdolne do stworzenia tego co dziś nazywamy rzeczywistością wirtualną, słowo wirtualne pojawiło się w fizyce. W fizyce wysokich energii roi się od wirtualnych cząstek. Nim jednak ten rój wirtualnych cząstek się nam objawił, mechanika powołała do służby wirtualne prace i przesunięcia. Samo słowo pochodzi z języka francuskiego, gdzie słowo *virtuel* tłumaczy się jako *teoretycznie możliwy*.

Czas na krótką klasyfikację przesunięć do jakich odwołujemy się mechanice. Powiedzmy, że w pewnym układzie na punkt materialny działają siły $\{\mathbf{F}_i\}$, które nazwiemy siłami zadanymi oraz siły reakcji więzów $\{\mathbf{G}_k\}$ (na przykład siła reakcji podłoża).

Definicja 5.2.1: Przesunięcie rzeczywiste

Przesunięciem rzeczywistym dr punktu materialnego nazywa się nieskończenie małe przesunięcie tego punktu pod wpływem zarówno zadanych sił \mathbf{F}_i , jak i sił reakcji więzów \mathbf{G}_k .

Z przesunięciem rzeczywistym sprawa wygląda tak. Bierzemy wszystkie działające siły zadane i więzy i układamy równanie ruchu dla punktu

materialnego, na który te siły i więzy działają. Jeżeli przesunięcie dr jest rozwiązaniem tego układu ruchu to jest to przesunięcie rzeczywiste.

Definicja 5.2.2: Przesunięcie możliwe

Przesunięciem możliwym punktu materialnego nazywamy takie przesunięcie dr punktu materialnego, które jest zgodne z więzami działającymi w układzie.

Na przykład jeżeli mamy powierzchnię dołka, który ogranicza ruch kulki, to dla tej kulki przesunięcia możliwe to takie przesunięcia, które nie naruszają sił reakcji więzów, czyli leżą w płaszczyźnie stycznej do danego punktu powierzchni dołka.

Definicja 5.2.3. Przesunięcie wirtualne w stanie równowagi statycznej

Przesunięciem wirtualnym punktu materialnego, w stanie równowagi statycznej, nazywamy takie skończone przesunięcie dr tego punktu, które odbywa się po wymyślonej powierzchni, na której układ jest w stanie równowagi obojętnej i która, w danym punkcie P zawiera maksymalny zbiór liniowo niezależnych wektorów przesunięcia możliwego układu dr .

Przez maksymalny zbiór wektorów liniowo niezależnych rozumiem tu taki zbiór, że każdy następny niezerowy wektor dodany do tego zbioru jest już liniowo zależny od pozostałych. Przykładem jest analizowane tu przesunięcie wirtualne kulki na zboczu dołka. W analizowanym wyżej przykładzie powierzchni, na której układ jest w stanie równowagi obojętnej jest styczna do powierzchni dołka w punkcie, w którym analizowana jest energia kulki. Przesunięcie wirtualne ma miejsce wzdłuż powierzchni tej równi. Tak przesuwana kulka porusza się poza powierzchnią dołka ale to nam nie przeszkadza. Mówimy w końcu o przesunięciu wirtualnym, a nie rzeczywistym. Zwracam uwagę na fakt, że definicja (5.2.3) dotyczy układów w stanie równowagi statycznej. W ogólnym przypadku definicja przesunięcia wirtualnego⁶ będzie nieco bardziej złożona. Póki co zajmujemy się zagadnieniem równowagi statycznej i podana tu definicja jest wystarczająca.

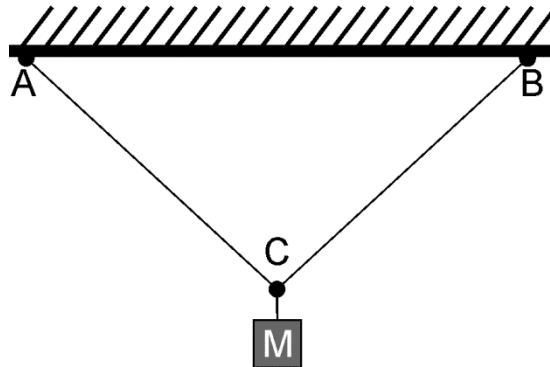
5.3. Zadania ♣

Czas zrobić użytek z zasady prac wirtualnych. Pierwsze zadanie rozwiązaliśmy omawiając zagadnienie równowagi ciężarków na równi (patrz wzór (5.2.11) i opis). Następne przykłady zadań przedstawiam poniżej.

Zadanie 5.3.1

⁶ S. Ray and J. Shamanna, *On virtual displacement and virtual work in Lagrangian dynamics*, Eur. J. Phys., **27** 311-329 (2006)

Bloczek o masie $M=50\text{kg}$ zawieszony jest w środkowym punkcie linki ACB, tak jak jest to pokazane na rysunku (5.3.1). $AC=BC=5\text{m}$, $AB=5\sqrt{2}\text{m}$. Wyznacz siły naciągu drutu

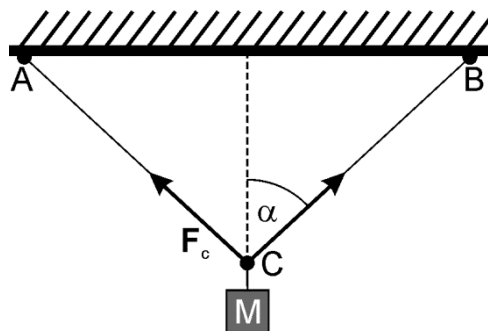


Rysunek 5.3.1. Rysunek do zadania (5.1.1)

Mam zamiar się nad tym zadaniem nieco poznać. W pierwszym kroku zrobię je zupełnie elementarnie.

5.3.1.1. *Metoda szkolna*

Rysunek (5.3.2) ilustruje metodę „szkolną”.



Rysunek 5.3.2. Ilustracja do metody „szkolnej”

Z symetrii układu wynika, że siły podtrzymujące ciężar z lewej i prawej strony muszą być takie same. Suma składowych pionowych tych sił musi być równa ciężarowi M . Stąd mamy

$$2F_c \cos(\alpha) = Mg \Rightarrow F_c = \frac{Mg}{\cos(\alpha)} \quad 5.3.1$$

Mamy przy tym

$$d = \frac{AB}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} [\text{m}] = \frac{5}{\sqrt{2}} [\text{m}] \quad 5.3.2a$$

$$\cos(\alpha) = \frac{L}{d} = \sqrt{2} \quad 5.3.2b$$

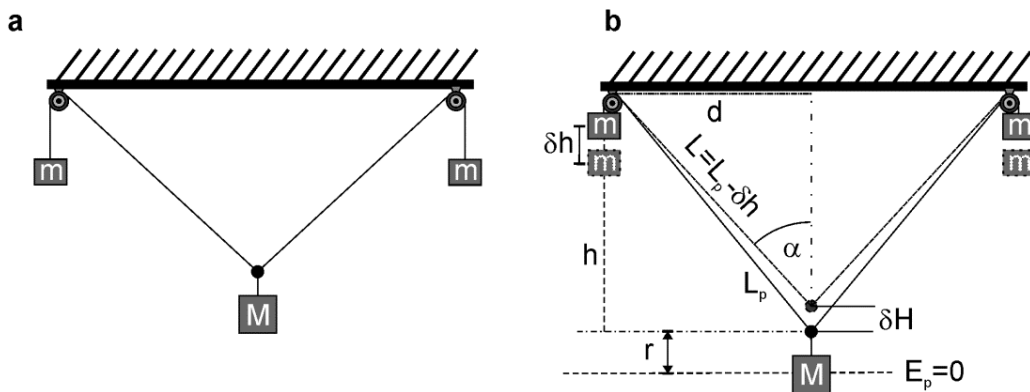
Pisząc wyrażenie (5.3.2b) skorzystałem z faktu, że kąt CBA jest równy kątowi α . Ostatecznie mamy

$$F_c = \frac{Mg}{\sqrt{2}} = 346.8[\text{N}] \quad 5.3.3$$

Zadanie okazało się być proste. Czy warto dalej się nad nim pastwić? Właśnie proste zadania stanowią dobry poligon do ćwiczeń nad metodą i dyskusji nad jej niuansami. Dlatego zrobię to zadanie jeszcze dwoma innymi metodami.

5.3.1.2. Przez zasadę energii minimalnej

Druga metoda odwołuje się do zasady energii minimalnej. Poddam układ z rysunku (5.3.1) modyfikacji. Zamiast podwieszać masę m bezpośrednio do belki, zrobię to poprzez dwa bloki (rys. 5.3.3a).



Rysunek 5.3.3. a) Układ z rysunku (5.3.1) zamieniam na fizycznie równoważny, w którym trwałe zaczepy do belki zostają zamienione na bloczki z podwieszonymi ciężarkami o masie m . Ciężarkami tymi mogą jeździć do góry i do dołu, szukając takiego położenia, w którym energia potencjalna całego układu jest minimalna; b) stan po zmianie położenia ciężarków. Ciężarki i kółka możemy uznać za dowolnie małe, są to konstrukty teoretyczne. Dlatego przyjmujemy, że odcinek h rozciąga do górnej belki.

Za stan początkowy przyjmę pozycje ciężarków pokazaną na rysunku (5.3.3b). Będę szukał takiego położenia ciężarków, przy którym energii potencjalnej układu osiąga minimum. Przerywana kreska u dołu rysunku (5.3.3b) pokazuje przyjęty poziom zerowy energii potencjalnej. Zgodnie z tym co zostało powiedziane w (§TII 7) poziom ten mogę przyjąć w dowolnym miejscu. Energia potencjalna układu na rysunku (5.3.3b) wynosi.

$$E_{pot} = 2mg(h - \delta h) + 2mgr + \underbrace{\left(h - \sqrt{(L_p - \delta h)^2 - d^2} \right)}_{\delta H} Mg \quad 5.3.4$$

δH jest odcinkiem, o który podniesie się masa M , gdy ciężarki m opadną o δh . L_p jest początkową długości linki łączącej bloczek z ciężarkiem M . Szukamy warunku na minimum tak określonej energii potencjalnej. Policzę pochodną powyższego wyrażenia ze względu na zmianę wysokości δh i przyrównam ją do zera.

$$\frac{dE_{pot}}{d\delta h} = 2mg + \frac{L_p - \delta h}{\sqrt{(L_p - \delta h)^2 - d^2}} Mg = 0 \quad 5.3.5$$

Stąd możemy wyznaczyć m

$$m = \frac{L_p - \delta h}{\sqrt{(L_p - \delta h)^2 - d^2}} \frac{M}{2} = \frac{M}{2 \cos(\alpha')} \quad 5.3.6$$

Przez α' oznaczyłem kąt między osią pionową a drutem o bieżącej długości. Gdy układ spełnia początkowe warunki zadania, to jest: $L_p - \delta h = L = 5\text{m}$, to mamy $\alpha' = \alpha$. Dla masy m wyznaczonej przez wzór (5.3.6) układ jest w równowadze. W zasadzie powinienem udowodnić, że zero pochodnej dane wzorem (5.3.5) wyznacza jej minimum. Zrobię to rysując wykres energii E_{pot} , danej wzorem (5.3.5) jako funkcji δh (rys. 5.3.4). Z rysunku (5.3.4) możemy odczytać wartość δh , przy której funkcja ma minimum. Mając δh i h można obliczyć jakie jest L przy spełnionym warunku równowagi. L wyznaczone na podstawie wykresu, jest inne niż L_p dane w zadaniu, co oznacza, że masa $m=30\text{kg}$ użyta do wykreślenia rysunku (5.3.4.) nie jest szukanym rozwiązaniem. Z warunków zadania wynika, że mamy znaleźć równowagę, gdy:

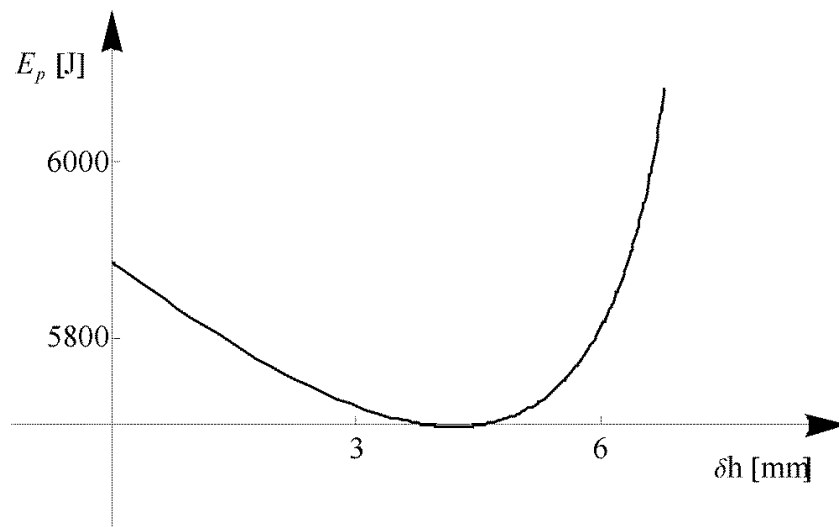
$$L = L_p - \delta h = AC = 5\text{m} \quad 5.3.7a$$

$$\sqrt{(L_p - \delta h)^2 - d^2} = \frac{5}{\sqrt{2}} \quad 5.3.7b$$

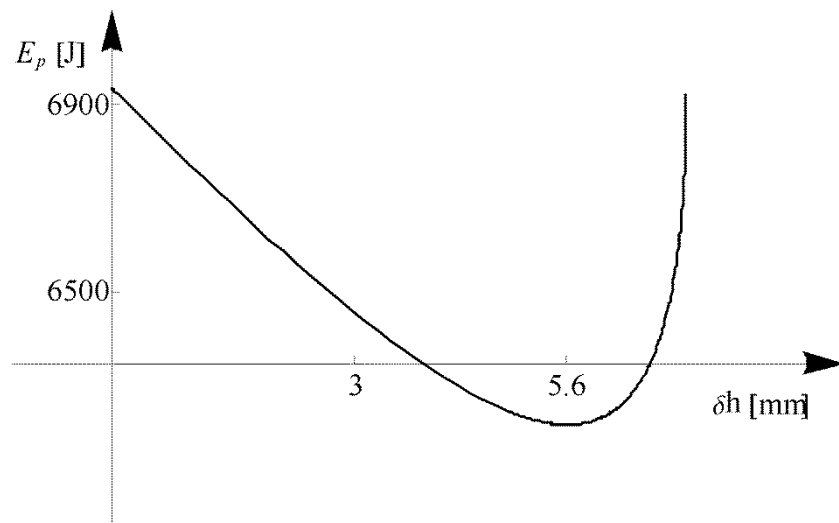
Stąd ze wzoru (5.3.6) mam

$$m = \frac{5\sqrt{2}}{5} \frac{M}{2} = \frac{M}{\sqrt{2}} \approx 35.355\text{kg} \quad 5.3.8$$

Wykres zmian energii potencjalnej dla tej masy pokazuje rysunek (5.3.5).



Rysunek 5.3.4. Wykres przebiegu wartości energii potencjalnej jako funkcji δh , dla $m=30\text{kg}$, i $h=10\text{m}$; pozostałe wartości jak w zadaniu. Widać, że krzywa ma minimum – jest to szukany punkt równowagi dla masy $m=30\text{kg}$.



Rysunek 5.3.5. Wykres zależności energii potencjalnej analizowanego układu od δh , dla wartości masy danej wzorem (5.3.6).

Teraz wszystko się zgadza. Dla przyjętego powyżej $h=10\text{m}$, L_p wynosi $L_p=10.6\text{m}$. Zgodnie z wykresem minimum przypada dla $\delta h=5.6\text{m}$, stąd $L = L_p - h = 5\text{m}$, czyli tyle ile dane jest w zadaniu. Oznacza to, że gdy dla masy $m=35.355\text{kg}$ ciężarki m spadną o 5.6m , to wtedy układ będzie miał wymiary dokładnie odpowiadające warunkom zadania i zarazem układ będzie w położeniu równowagi. Zatem

$m=35.355\text{kg}$ jest szukany rozwiązaniem. Mając daną masę m mogę obliczyć siłę naciągu nici

$$F_c = mg = 346.8\text{N} \quad 5.3.9$$

Otrzymaliśmy tę samą wartość co poprzednio (5.3.3.)

Patrząc na wykresy (5.3.3) i (5.3.4) widać, że wyrysowana krzywa nie jest symetryczna względem punktu równowagi. Po prawej stronie krzywa wspina się znacznie szybciej do góry. Wiem, że dla części z was jest to zaskoczenie. Oznacza to bowiem, że masa M idzie szybciej do góry niż spadają do dołu ciężarki m . Że tak, rzeczywiście jest pokazuje prosty rachunek. Szybkość zmian odcinka L (równa szybkości opadania ciężarków m), jako funkcji kąta γ między tym odcinkiem a odcinkiem r (rys. 5.3.6) wynosi

$$L(\gamma) = \frac{r}{\cos(\gamma)} \Rightarrow L'(\gamma) = r \frac{\sin(\gamma)}{\cos^2(\gamma)} \quad 5.3.10a$$

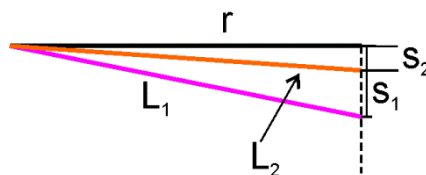
Szybkość zmian odcinka s jako funkcji tego samego kąta wynosi

$$s(\gamma) = r \tan(\gamma) \Rightarrow s'(\gamma) = r \frac{1}{\cos^2(\gamma)} \quad 5.3.10b$$

stąd

$$\frac{s'(\gamma)}{L'(\gamma)} = r \frac{1}{\cos^2(\gamma)} \frac{1}{r \sin(\gamma)} = \frac{1}{\sin(\gamma)} \quad 5.3.10$$

Wyrażenie (5.3.10) jest, dla $\gamma \in (0, \pi)$ większe od jedności, zatem odcinek s skraca się szybciej niż odcinek L . Pokazałem to również na schematycznym rysunku (5.3.6).



Rysunek 5.3.6. Zmiana długości odcinka L : $L_1 \rightarrow L_2$, jest wolniejsza niż odpowiadającego mu w trójkącie odcinka s : $s_1 \rightarrow s_2$. Aby to pokazać przyjmę, że $r=d/2=2.5\text{m}$, tak jak w zadaniu (5.3.1). Niech kąt między L_1 , a odcinkiem r wynosi 4° . Wtedy odcinek L_1 ma długość $L_1=2.5061\text{m}$, odcinek L_2 ma długość $L_2=2.5015\text{m}$, odcinek s_1 ma długość $s_1=0.1748\text{m}$, a odcinek s_2 ma długość $s_2=0.0873\text{m}$. Różnica $\delta h=L_1-L_2=0.0046\text{m}$ jest mniejsza niż różnica $\delta H=s_1-s_2=0.0916\text{m}$. To znaczy, że ciężar M porusza się szybciej od ciężarków m .

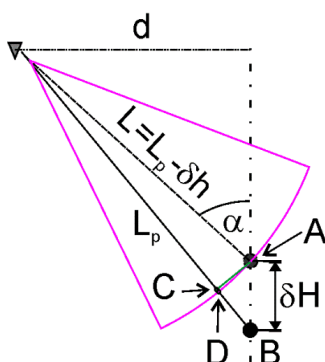
Linia na wykresie (rys. 5.3.5) nie przekracza wartości $\delta h=7.1$, przy której nie ulega zerwaniu. Opuszczając ciężarki m do dołu trafimy w końcu na punkt, w którym $L=d$. Dalsze wyciąganie nici spowoduje jej zerwanie. Wyrażenie pod pierwiastkiem (5.3.7b) staje się ujemne, a pierwiastek ma wartości urojonej. W ten sposób matematyka daje sygnał, że wartość $\delta h=7.1$ wyznacza punkt krytyczny, przy którym zachowanie układu ulega zasadniczej zmianie.

5.3.1.3. Metoda 3. Użycie zasady prac wirtualnych

Obliczę teraz warunek równowagi wykorzystując zasadę prac wirtualnych. Powiedzmy, że ciężarki m przesunęły się o δh w dół. Wtedy ciężar M podniósł się do góry o odcinek δH . Odcinek δH wyznaczę z rysunku (5.3.7). Jeżeli przyjmę przybliżenie objaśnione w podpisie rysunku (5.3.8) obliczenia stają się proste

$$\cos(\alpha) = \frac{\delta h}{\delta H} \quad 5.3.11a$$

$$\delta H = \frac{\delta h}{\cos(\alpha)} = \frac{\delta h}{\sqrt{L^2 + H^2}} L \quad 5.3.11$$



Rysunek 5.3.7. Rysunek przedstawia fragment rysunku (5.3.3b). Aby obliczyć δH punkt A rzutujemy na dłuższy odcinek nici (punkt C). W ten sposób otrzymujemy trójkąt prostokątny ABC. Długość δh jest dokładnie równa długości odcinka DB. Punkt D otrzymujemy jako przecięcie okręgu o promieniu L z odcinkiem L_p . W przybliżeniu przyjmujemy dalej, że $\delta h \approx CB$. Dla małych kątów między L i L_p błąd wynikający z przyjętego przybliżenia (to jest zastąpienia punktu D punktem C) jest bardzo mały. Przyjęcie tego przybliżenia pozwala na wyliczenia δH z relacji w trójkącie prostokątnym ABC.

W ostatnim wzorze cosinus kąta α został wyrażony przez parametry z rysunku (5.3.1b), dzięki czemu wiążemy się z warunkami przyjętymi w zadaniu. Przyjmę, że ciężarki o masie m doznały wirtualnego przesunięcia $-\delta h$, a ciężar M doznał wirtualnego przesunięcia δH . Oba przesunięcia nie naruszają sił reakcji w układzie. Stosując zasadę prac wirtualnych (5.2.12) mam

$$-2mg\delta h + Mg\delta H = 0 \Rightarrow m \frac{M}{2} \frac{\delta H}{\delta h} \quad 5.3.12$$

Wstawiłem znak minus przy δh , gdyż δH jest przeciwnie skierowana w stosunku do δh . Wstawiając wyrażenia (5.3.10 i 5.3.11) mam

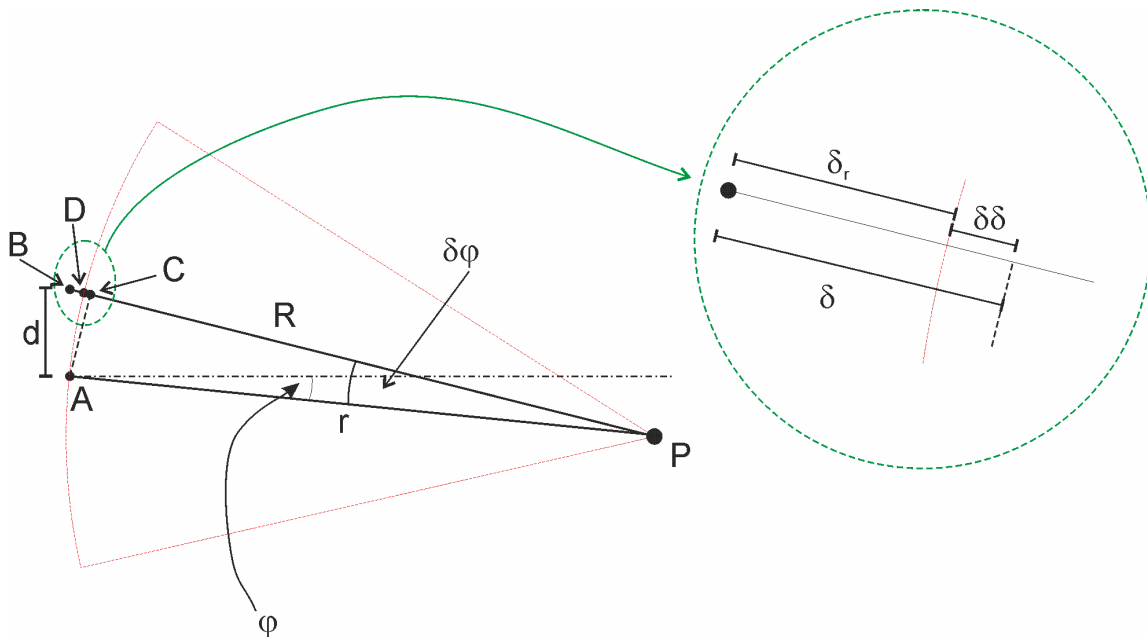
$$m = -\frac{M}{2} \left(-\frac{\delta h}{\sqrt{L^2 + H^2}} \right) L \frac{1}{\delta h} = \frac{M}{2 \cos \alpha} = 35.355 \text{ kg} \quad 5.3.13$$

Mając daną masę m mogę obliczyć siłę naciągu nici

$$F_c = mg = 346.8 \text{ N} \quad 5.3.14$$

Otrzymaliśmy tą samą wartość co poprzednio (5.3.3.)

Masz prawo mieć wątpliwości związane z przyjętym przybliżeniem, w ramach którego różnice między odcinkami L i L_p wyznaczam z trójkąta prostokątnego ABC (rys. 5.3.7). Jest to często stosowane przybliżenie, więc przyjrzę mu się dokładniej. Powiedzmy, że mamy dwa odcinki wychodzące z jednego punktu P i odchyłone o niewielki kąt (rys. 5.3.8).



Rysunek 5.3.8. Dwa odcinki o długościach r i R tworzące niewielki kąt $\delta\varphi$, przy czym jeden z nich jest nieznacznie większy od drugiego. W przybliżeniu pierwszego rzędu możemy przyjąć, że różnica długości δ_r między tymi odcinkami wyraża się przez odcinek δ .

Chcemy wyznaczyć różnicę długość δ_r tych odcinków. Geometrycznie robimy to w prosty sposób. Ustawiamy nóżkę cyrkla w punkcie P i zakreślamy okrąg

o promieniu równym długości krótszego odcinka. Punkt D przecięcia tego okręgu z dłuższym odcinkiem wyznaczy odcinek δ_r . Aby zobaczyć jak to działa bez cyrkla zastosuję metodę przybliżoną. Pociągnę prostopadłą AC między długim a krótkim odcinkiem. Z rysunku widać, że im mniejszy jest kąt $\delta\varphi$ między tymi odcinkami, tym bardziej punkt D zbliży się do punktu C. Jak duża jest różnica $\delta\delta$ pomiędzy wartością przybliżoną różnicy δ długości odcinków a wartością dokładną δ_r ? Korzystając z rysunku (5.3.8) możemy wypisać następujące zależności

$$\delta\delta = \delta - \delta_r = \underbrace{d \sin(\varphi)}_{\delta} - \underbrace{(R - r)}_{\delta_r} \quad 5.3.15$$

$$R = \delta + \sqrt{r^2 - r^2 (\sin(\delta\varphi))^2} = d \sin(\varphi) + r \sqrt{1 - (\sin(\delta\varphi))^2} \quad 5.3.16$$

Teraz dokonam rozwinięć funkcji sinus i $\sqrt{1-x}$ w szereg potęgowy (DB 3.3) i odrzucę wyrazy w potędze dwa i wyższe

$$\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} + O[\varphi]; \quad \sin(\varphi) \approx \varphi \quad 5.3.17$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{5}{128}x^4 + O[x]; \quad \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} \quad 5.3.18$$

Symbole $O[x]$ i $O[\varphi]$, oznaczają wszystkie pominięte wyrazy w wyższych potęgach. Jak widać oba rozwinięcia obcinam na pierwszym rzędzie. Podstawiając te rozwinięcia za pierwiastek we wzorze (5.3.16) mam

$$\sqrt{1 - (\delta\varphi)^2} \approx 1 - \frac{(\delta\varphi)^2}{2} \approx 1 \quad 5.3.19$$

Ponownie pominąłem przyrosty w kwadratach i w wyższych potęgach. Teraz wyrażenie (5.3.16) na długość R mogę zapisać w postaci

$$R \approx d \sin(\varphi) + r = \delta + r \quad 5.3.20$$

Czyli długość odcinka R jest równa długości krótszego odcinka r powiększonego o odcinek δ . A długość odcinka δ obliczamy z trójkąta prostokątnego ABC, co oznacza zastąpienie odcinka AD, odcinkiem AC. Błędy jakie przy tym popełniamy są drugiego rzędu w stosunku do kąta $\delta\varphi$. Zależności (5.3.17-5.3.20) pokazują, że zastąpienie różnicy długości δ_r różnicą δ ma sens, gdyż w granicy wielkości nieskończenie małych wielkość w potędze 2 lub wyższej możemy pominąć (§TII 6). Pamiętajasz jak wygląda sztuczka związana z zasadą prac wirtualnych? Zaczynamy od nieskończenie małych przesunięć, które przedłużamy do małych, ale skończonych przesunięć, nawet jeżeli te skończone

przesunięcia są fizycznie nierealne; na przykład wchodzą w głąb jakiegoś materialnego elementu układu, jak to było w przypadku ruchu wewnątrz kolistego dołka (rys. 5.2.5-5.2.7). Te nieskończenie małe przesunięcia możemy wyznaczać odrzucając wyrazy w potęgach 2 i wyższej, tak jak to ma miejsce w naszym przykładzie.

Aby nie było wątpliwości obliczę jeszcze wartość błędu $\delta\delta$ (rys. 5.3.9). Podstawiając do (5.3.16) wyrażenie (5.3.15), ale tym razem wraz z drugą potęgą do mam

$$\delta\delta \approx r - r\sqrt{1 - (\sin(\delta\varphi))^2} \quad 5.3.21$$

Korzystając z (5.3.19) mam

$$\delta\delta \approx r - r\sqrt{1 - \frac{(\delta\varphi)^2}{2}} = r\frac{(\delta\varphi)^2}{2} \quad 5.3.22$$

Tak jak się należało spodziewać błąd $\delta\delta$ jest proporcjonalny do drugiej potęgi $\delta\varphi$. Oczywiście wyrażenie dokładne na $\delta\delta$, będzie zawierało również $\delta\varphi$ w potęgach wyższych niż 2, ale te wyższe potęgi, przy małych $\delta\varphi$ mają jeszcze mniejsze znaczenie od wyrażenia w drugiej potęgach. Ważne jest to, że we wzorze (5.3.22) nie ma wyrazów proporcjonalnych do $\delta\varphi$.

Zauważ również, że zadane przesunięcie wirtualne nie zmienia sił reakcji. W osi poziomej z obu stron masy M działają te same siły tylko przeciwnie skierowane. Zatem wypadkowa tych sił jest cały czas równa zero. W osi pionowej działa siła grawitacji oraz składowa pionowa F_{pion} siły naciągu nici F_N , która wyraża się wzorem

$$F_{pion} = F_N \cos \alpha \approx F_N + F_N \frac{\alpha^2}{2} + \dots \quad 5.3.23$$

W rozwinięciu wyraz liniowy dla kąta α jest równy zero. Z dokładnością do pierwszorzędowego rozwinięcia siła naciągu nici jest stała. Zatem nieskończenie małe przesunięcie $dr=dH$ nie zmieni sił reakcji nici. Wiemy, że w metodzie prac wirtualnych, takie przesunięcie możemy przedłużyć do przesunięcia skończonego $\delta r=\delta H$. Reasumując:

a) pokazałem że w granicy nieskończenie małego $\delta\varphi$: $\delta\varphi \rightarrow 0$, przyrost dH wyrazi się wzorem

$$dH = \frac{dh}{\cos(\alpha)} = \frac{dh}{\sqrt{L^2 + H^2}} L \quad 5.3.24$$

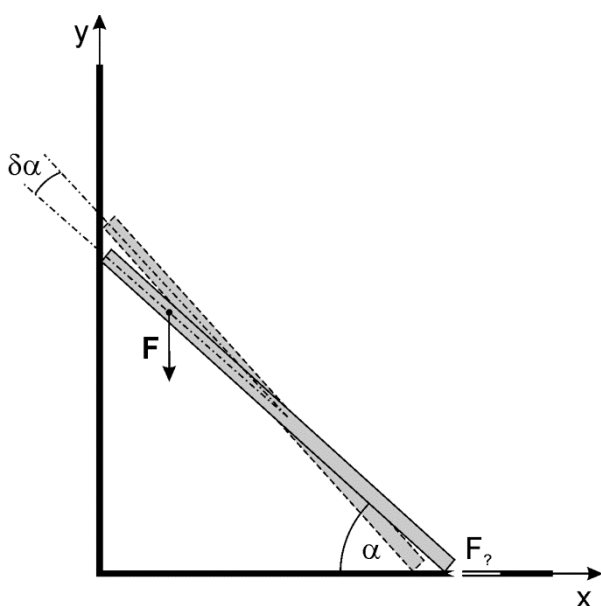
b) zastosowałem do badanego układu przesunięcie wirtualne, to jest przedłużyłem nieskończenie małe dH do skończonego δH , które wyraża się wzorem (5.3.11).

c) stwierdziłem że zastosowane przesunięcia wirtualne nie naruszają sił reakcji w układzie.

Dla lepszego wyczucia metody prac wirtualnych zrobię kolejny przykład.

Zadanie 5.3.2

Cienki pręt o długość równej L opiera się jednym końcem o pionową ścianę, a drugim o podłogę. Kąt między podłogą a prętem wynosi α (rys. 5.3.9). W punkcie A pręta przyłożono pionową siłę \mathbf{F} . Jaka powinna być wartość siły $\mathbf{F}_?$ przyłożonej jak na rysunku, aby układ był w równowadze statycznej. Ciężar pręta i tarcie pomijamy.



Rysunek 5.3.9. Ilustracja do zadania (5.3.2)

Zgodnie z treścią zadania uwzględniamy tylko dwie siły \mathbf{F} i $\mathbf{F}_?$. Siła \mathbf{F} dąży do zrzucenia pręta na podłogę, czemu przeciwdziała siła $\mathbf{F}_?$. Jeżeli pod działaniem obu sił pręt jest w równowadze, to musi być spełnione równanie (5.2.12). Nadamy prętowi przesunięcie wirtualne w kierunku siły $\mathbf{F}_?$. Przesunięcie to jest równoległe do podłogi więc nie powinno zmienić sił reakcji tegoż podłogi. Gorzej rzeczy się mają po drugiej stronie pręta. Pręt będzie się wciskał w ścianę, co może skutkować zmianą sił reakcji. Założyliśmy jednak, że siły tarcia są pomijalnie małe. Możemy więc przyjąć, że pręt nie czując oporu przy ruchu wzdłuż pionowej ściany przesunie się gładko do góry i siły reakcji nie ulegną zmianie. Poza tym „realne” musi być tylko przesunięcie nieskończenie małe, a jego przedłużenie może już przebijać ścianę. W wyniku tego przesunięcia punkt przyłożenia siły \mathbf{F} przemieści się nieco w kierunku osi y i nieco w kierunku osi x . Jednak ruch w kierunku osi x jest prostopadły w stosunku do kierunku siły \mathbf{F} . Zatem mamy

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot (\delta y, \delta x) = F \cdot \delta y \quad 5.3.25$$

a równanie (5.2.12) przyjmie postać

$$-F \delta y + F_7 \delta x = 0 \quad 5.3.26$$

Przy czym skorzystałem z faktu, że ruch dolnego i górnego końca pręta mogę traktować jako zachodzący w jednym wymiarze (dygresja 5.2.2). Przesunięcia wirtualne δx i δy są ze sobą powiązane i wygodnie jest je przedstawić jak funkcje kąta α . Przy nieskończeniu małych przyrostach mamy

$$y = s \sin(\alpha) \Rightarrow dy = s \cos(\alpha) d\alpha \quad 5.3.27a$$

$$x = L \cos(\alpha) \Rightarrow dx = -L \sin(\alpha) d\alpha \quad 5.3.27b$$

Odwołując się do zasady prac wirtualnych mogę zamienić nieskończenie małe przyrosty na przyrosty skończone

$$\delta y = s \cos(\alpha) \delta \alpha \quad 5.3.28a$$

$$\delta x = -L \sin(\alpha) \delta \alpha \quad 5.3.28b$$

Podstawiam te przesunięcia do równania (5.3.26)

$$(-Fs \cos(\alpha) + F_7 L \sin(\alpha)) \delta \alpha = 0 \quad 5.3.29$$

Szukana siła wyraża się wzorem

$$F_7 = F \frac{s}{L} \cot(\alpha) \quad 5.3.30$$

Poszło szybko, łatwo i przyjemnie.

Może Was jeszcze niepokoić sprawa siły ciężkości oraz sił jakie na drabinę wywiera podłoże i ściana. Jeżeli chodzi o siły reakcji podłoża i ściany to zadane przesunięcia wirtualne jest prostopadłe do tych sił i ich nie zmienia. Siła ciężkości jest ważna, ale w zadaniu nie ma nic na jej temat. Należy więc przyjąć, że drabina jest lekka i w porównaniu z siłą \mathbf{F} siła ciężkości niewiele znaczy. Siła \mathbf{F} może pochodzić na przykład od 120 kg malarza, który stoi w punkcie B. Przy tej masie malarza wagę aluminiowej drabiny możemy pominąć. Możesz oczywiście rozwiązać to zadanie z dodaniem siły ciężkości. Załóż, że drabina jest jednorodna i środek masy drabiny przypada w środku jej długość. Tam należy przyłożyć siłę ciężkości.

Mam nadzieję, że zasad prac wirtualnych, dla układów statycznych, stała się dla Was klarowna. Ale to dopiero początek. Następne spotkanie z zasadą będzie miało miejsce w temacie V.