07.10.2021

TEMAT

XVI

KLASYCZNA TEORIA GRAWITACJI

1. Newtonowska teoria grawitacji ♦

Aby napisać newtonowskie równania ruchu, dla układu ciał, musimy określić masy tych ciał, ich położenia oraz działające na nie siły. Rozkład sił można znajdować empirycznie. Możemy na przykład zmierzyć siłę reakcji sprężyny w zależności od jej wydłużenia. Bardziej elegancką metodą byłoby znalezienie kilku podstawowych rodzajów sił i nauczenie się określania ich wielkości. Dzisiaj nie mówimy o podstawowych siłach tylko o fundamentalnych oddziaływaniach. Znamy cztery fundamentalne oddziaływania: grawitacyjne, elektryczne, słabe i silne. Przyjmuje się, że wszystkie siły możemy wyprowadzić znając reguły rządzące tymi oddziaływaniami. W większości wypadków tak postawione zadanie jest na tyle trudne, że pozostajemy przy metodach wspomaganych eksperymentem. Przykładowo, w teorii moglibyśmy wyliczyć siłę tarcia między dwoma powierzchniami, gdyż tarcie generowane jest przez oddziaływanie elektromagnetyczne między cząsteczkami materiałów, z których zrobione są trące powierzchnie. Ważna jest również topografia obu powierzchni. Rachunkowo problem jest bardzo, bardzo trudny, łatwiej więc jest zrobić to eksperymentalnie.

Jako pierwsze spójnej teorii doczekało się oddziaływanie grawitacyjne. Dzisiaj nazywamy ją newtonowską teorią grawitacji lub klasyczną teorią pola grawitacyjnego. Ze wszystkich teorii opisujących cztery podstawowe oddziaływania newtonowska teoria grawitacji jest teorią najprostszą.

W newtonowskiej teorii grawitacji przyjmuje się, że wszystkie ciała punktowe przyciągają się z siłą proporcjonalną do ich mas i odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości między nimi (rys. 1.1).

Określenie 1.1: Prawo powszechnego ciążenia

Każde dwa punkty materialne przyciągają się z siłą, która działa wzdłuż linii łączącej te punkty, a jej wartość jest wprost proporcjonalną do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.

Wzorem zapisujemy to tak:

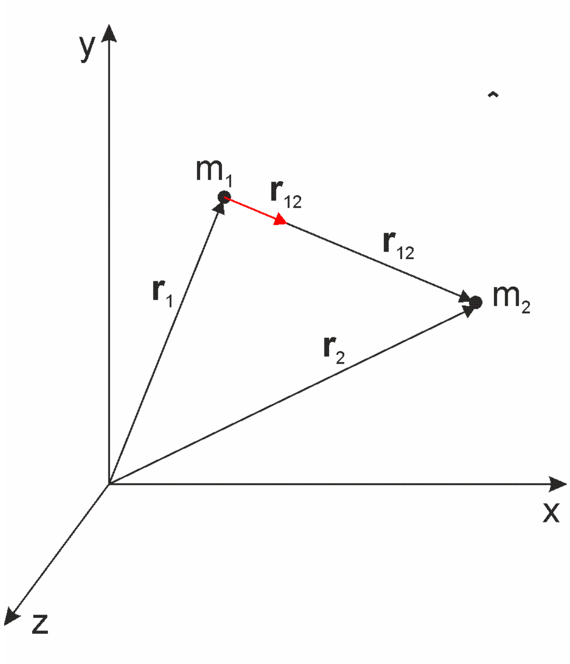
$$\mathbf{F_{1\leftarrow 2}} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{12}} \quad 1.1$$

$$\mathbf{r_{12}} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1} \quad 1.1a$$

$\mathbf{F}_{1\leftarrow 2}$ jest siłą z jaką punkt o masie m_1 przyciąga punkt o masie m_2, r_{12} jest długością wektora pociągniętego od punktu m_1 do punktu m_2, $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ jest jednostkowym wektorem równoległym do wektora $\mathbf{r}_{12}$. Współczynnik proporcjonalności G nazywany jest stałą grawitacyjną. Stała grawitacyjna jest liczbowo równa sile wzajemnego przyciągania dwóch punktów materialnych o jednostkowych masach oddalonych od siebie o jednostkę długości. W układzie SI mamy:

$$[G] = \left[\frac{N\,m^2}{kg^2}\right] = \left[\frac{m^3}{kg\,s^2}\right] \qquad 1.2a$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2} \qquad 1.2b$$



Rysunek 1.1. Dwa punkty materialne przyciągają się z siłą określoną przez prawo powszechnego ciążenia.

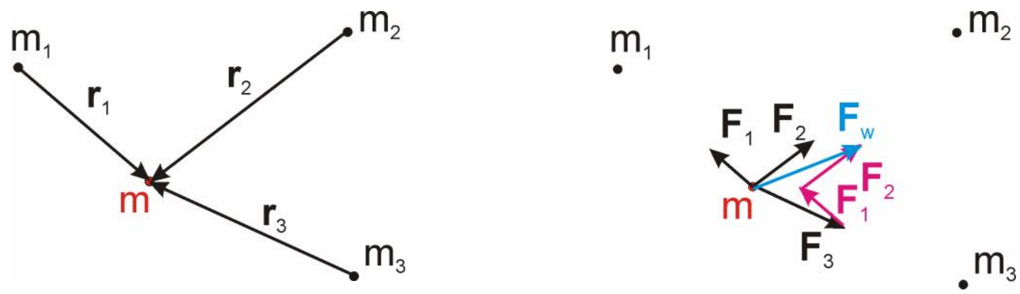
Prawo powszechnego ciążenia zdefiniowane jest dla punktów materialnych, czyli abstrakcyjnych i nie fizycznych (ze względu na nieskończoną gęstość) tworów. W praktyce ciała punktowe mogą odpowiadać obiektom tak małym, że w porównaniu do odległości między nimi, możemy uznać je za punkty. Możemy również przejść do gęstości masy i sformułować prawo powszechnego ciążenia, dla nieskończenie małych objętości. Wtedy siły oddziałujące między takimi objętościami są też nieskończenie małe, a przez procedurę całkowania możemy przejść do ciał skończonych. Procedurę tą wkrótce zastosujemy dla ciał o symetrii sferycznej.

Gdy mamy więcej punktów materialnych m_1, m_2,…, m_N, to siły grawitacji $\mathbf{F}_i$ jakie te punkty wywierają na wybrany punkt materialny m sumują się tak jak sumują się wektory (rys. 1.2.1). Oznacza to, że siły grawitacji od różnych punktów źródłowych (różnych mas punktowych) działające na wybrany punkt nie przeszkadzają sobie nawzajem. Możemy obliczać odziaływanie grawitacyjne między wybranym punktem a dowolnym innym punktem tak jakby nie było innych punktów materialnych. Gdy chcemy znać całkowite oddziaływanie na dany punkt, to dodajemy policzone niezależnie siły od wszystkich innych punktów materialnych. Mówimy, że oddziaływanie grawitacyjne spełnia zasadę superpozycji.

Fakt 1.1:

Oddziaływanie grawitacyjne spełnia zasadę superpozycji, to znaczy, że siła przyciągania danego ciała punktowego o masie m, przez układ ciał punktowych o masach m_i jest równa sumie wektorowej sił działających na m, przez masy m_i, przy czym każda taka siła składowa dla danej masy m_i jest wyznacza tak, jakby nie istniały inne masy układu

$$\mathbf{F_w} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i} \tag{1.3}$$



Rysunek 1.2. Siły przyciągania masy m przez i-tą masę $\mathbf{F}_i$ sumują się jak wektory. Z lewej - układ trzech punktów materialnych o masie m_1, m_2 i m_3, oraz punkt o masie m, dla którego wyznaczamy działające nań siły. Z prawej – składowe siły przyciągania (czarne wektory) punktu m przez trzy pozostałe punkty m_1, m_2 i m_3 oraz siła wypadkowa (niebieski wektor).

1.1. Masa grawitacyjna

Przyzwyczajeni jesteśmy do faktu istnienia ładunku elektrycznego, który jest źródłem pola elektrycznego. W teorii grawitacji rolę źródła (ładunku grawitacyjnego) pełni masa. Nie będziemy jednak mówić ładunek grawitacyjny, gdyż to się nie przyjęło. Jeżeli chcemy podkreślić, że chodzi nam o masę, jako źródło pola grawitacyjnego, to mówimy „masa grawitacyjna". Masa występuje również w drugim prawie Newtona

$$\mathbf{F} = m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1.1.1}$$

Drugie prawo Newtona nic nie mówi o polu grawitacyjnym. Użyta w tym prawie masa nie jest źródłem niczego poza oporem jaki stawia sile powodującej zmianę w ruchu ciała. Przy czym nie musi to być siła grawitacji. Może to być siła przyciągania elektrycznego, tarcia, czy jakakolwiek inna. Gdyby nie ten opór każda najdrobniejsza siła rozpędzałaby dowolnie wielkie ciało od razu do nieskończonej prędkości. Masa użyta w drugim prawie Newtona jest masą określającą bezwładność ciała i dlatego czasem nazywamy ją „masą bezwładnościową”.

Tak się przy tym składa, że dla każdego ciała masa grawitacyjna; oznaczmy ją jako m_g jest liczbowo dokładnie równa masie bezwładnościowej m_b. Jest to niesamowity, a przez to wysoce podejrzany zbieg okoliczności. Na przykład ładunek elektryczny, będący źródłem siły (siły elektrycznej) nijak ma się do masy bezwładnościowej. Dlaczego więc ładunek grawitacyjny m_g jawi się jako tożsamy z masą bezwładnościowa m_b? Uznanie tego faktu za dziwny i podejrzany było jednym z ważniejszych tropów prowadzących Alberta Einsteina do sformułowania ogólnej teorii względności.

Konsekwencje faktu, że $m_b = m_g$ są frapujące, nawet jeżeli nie sięgamy po ogólną teorię względności. Obliczmy z jakim przyspieszeniem, w danej chwili t, porusza się punktowe ciało o masie m_2, pod wpływem przyciągania punktowego ciała o masie m_1. Niech w tej danej chwili t ciała te są w odległości r. Siła grawitacji działająca na ciało m_1 jest równa (1.1)

$$\mathbf{F_{1\leftarrow 2}} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{12}} \qquad 1.1.2$$

Pod wpływem tej siły, zgodnie z drugim prawem Newtona, ciało o masie m_2 doznaje przyspieszenia

$$\mathbf{a_2} = \frac{\mathbf{F_{1\leftarrow 2}}}{m_2} = -G\frac{m_1}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{12}} \qquad 1.1.3$$

Spójrzmy na uzyskany wynik. Obliczone przyspieszenie nie zależy od masy ciała m_2. To oznacza, że niezależnie od tego jaką masę będzie miało ciało m_2, umiejscowione w danym punkcie przestrzeni, pod wpływem grawitacji ciała m_1, zawsze będzie doznawało tego samego przyspieszenia. Jednym z wniosków z tego wyniku jest znany ze szkoły fakt, że wszystkie ciała w polu grawitacyjnym Ziemi, przy braku oporu powietrza, spadałby tak samo. Ale konsekwencje uzyskanego wyniku są dużo ciekawsze i jeszcze do nich wrócimy. Zauważ, że gdyby $m_g \neq m_b$ otrzymalibyśmy inny wynik.

$$\mathbf{a_2} = \frac{\mathbf{F_{1\leftarrow 2}}}{m_2} = -G\frac{m_{1g}m_{2g}}{m_{2b}r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{12}} = -\frac{m_{2g}}{m_{2b}}G\frac{m_{1g}}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{12}} \qquad 1.1.4$$

Teraz przyspieszenie pierwszego ciała zależy zarówno od jego masy grawitacyjnej jak i od masy bezwładnościowej, chyba że

$$\frac{m_{2g}}{m_{2b}} = 1 \qquad 1.1.5$$

Równość masy grawitacyjnej i bezwładnościowej może być źródłem nieporozumień. Jednym z najczęściej występujących jest mylenie ciężaru ciała z jego masą. Masa ciała jest miarą liczności materii[1], która (przynajmniej w teorii klasycznej) nie zależy od pola grawitacyjnego. Ciężar ciała jest siłą jaka w danym polu grawitacyjnym działa na to ciało. W starym układzie jednostek MKSA (§TI 6) siła wyrażana była przez jednostkę nazywaną kilogramem siła - oznaczenie [kG]. Masa mierzona była (i jest) również w kilogramach tyle, że masy – oznaczenie [kg]. Kilogram siła jest siłą z jaką w średnim polu grawitacyjnym przy powierzchni Ziemi przyciągana jest masa 1 kg masy. Zatem jeden kilogram masa ważył jeden kilogram siła. W życiu codziennym mało kto rozróżniał między jednym, a drugim kilogramem. Ale kilogram masy nie wszędzie waży kilogram siła. Na wysokości 4000 m (np. w Tybecie) przyspieszenie grawitacyjne jest mniejsze niż średnie. To znaczy, że kilogram masy jest przyciągany z nieznacznie mniejszą siłą niż przy powierzchni Ziemi. Znacznie gorzej byłoby na Księżycu, gdzie kilogram masy waży zaledwie 0.16 kilogramów siła.

W układzie SI wprowadzono nową jednostkę siły - jeden niuton (def. TVI 3.1.1). Jeden niuton, to siła jaka jednemu kilogramowi masy nadaje przyspieszenie jednego metra na sekundę do kwadratu. Ponieważ średnie pole grawitacyjne nadaje jednemu kilogramowi masy przyspieszenie około 9.81 m/s^2 to, 1[kG] = 9.81 [N].

W praktyce używamy dwóch rodzajów wag. Częściej używanym typem jest waga mierząca siłę przyciągania danej masy (zwykle waga sprężynowa (rys. 1.1.1), lub elektryczna). Drugi typ jest najczęściej realizowany jako waga szalkowa i służy do porównywania dwóch mas.

Rysunek 1.1.1. Z lewej - przykład prostej wagi sprężynowej. Wagi tego typu mierzą siłę przyciągania grawitacyjnego mierzonej masy; Z prawej – waga szalkowa, która służy do wyznaczania masy przez porównanie z masą wzorcową.

Waga mierząca siłę (np. waga sprężynowa) wyskalowana jest w kilogramach siła [kG]. Wyniki pomiarów prowadzone przy użyciu wagi mierzącej siłę ciążenia zależą od wartość przyspieszenia grawitacyjnego **g** i w różnych punktach Ziemi

[1] Taka definicja masy nie jest bynajmniej powszechnie przyjęta. Masa, jak każde podstawowe pojęcie teorii fizycznej, sprawia przy próbach jej definiowania kłopoty, do czego jeszcze wrócę. Nam tu jednak takie określenie masy zupełnie wystarczy.

mogą się nieznacznie różnić. Na Księżycu kilogram masy waży około sześciu razu mniej niż na Ziemi. Wagi szalkowe, takie jak na rysunku (1.1.1), porównują masę ważonego ciała z masą wzorcową (odważnikami). Waga szalkowa daje oczekiwany wyniki niezależnie od lokalnej wartość przyspieszenia ziemskiego **g**. Dadzą również poprawny wynik na Księżycu. Jeżeli wagę przeniesiemy np. na Księżyc to ważone ciało będzie przyciągane prawie sześć razy słabiej. Ale tyle samo razy słabiej przyciągane będą odważniki. Zatem masa jednego kilograma pomidorów będzie na takiej wadze w równowadze z odważnikiem o masie 1kg zarówno na Ziemi jak i na Księżycu.

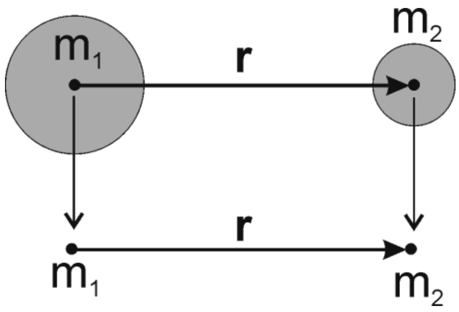
1.2. Przyciąganie ciał sferyczno-symetrycznych

Gdyby zastosowanie prawa powszechnego ciążenia ograniczało się do obliczania przyciągania ciał punktowych jego praktyczna wartość uległaby znacznemu ograniczeniu. Na szczęście tak nie jest. Stosując metody analizy matematycznej można udowodnić, że

Twierdzenie 1.2.1: Przyciąganie ciał sferyczno-symetrycznych

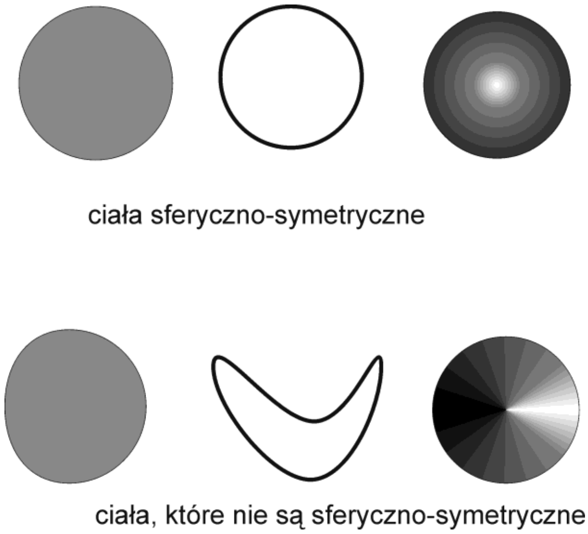
Ciała o sferyczno-symetrycznym rozkładzie masy przyciągają się tak, jakby cała ich masa zlokalizowana była w ich środku.

Dowód tego twierdzenia jest jeszcze przed nami, tu zajmę się jego omówieniem. Powiedzmy, że mamy dwie kule, których środki oddalone są o $|\mathbf{r}|$. Zgodnie z powyższą regułą układ tych kul możemy zastąpić układem dwóch punktów materialnych odległych tak jak odległe są środki kul i o masach równych masom kul. Siła przyciągania grawitacyjnego między takimi punktami jest równa sile przyciągania grawitacyjnego między odpowiednimi kulami.

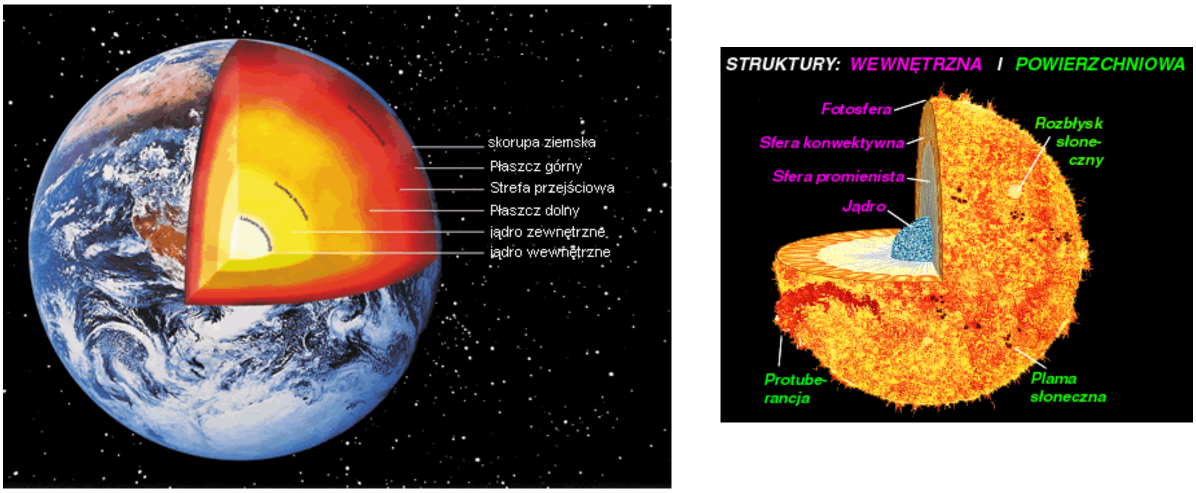


Rysunek 1.2.1. Dwie kule o masie m_1 i m_2 przyciągają się grawitacyjnie dokładnie tak samo jak dwa punkty materialne będące w tej samej odległości co środki kul i mające te same masy co kule. Obliczone dla kul siły przyciągania należy zaczepić w ich środkach.

Przez ciała sferyczno-symetryczne będziemy rozumieć ciała o sferyczno-symetrycznym rozkładzie gęstości masy. Przykładem takiego ciała jest jednorodna kula. Innym przykładem ciała o sferyczno-symetrycznym rozkładzie gęstości masy jest powłoka sferyczna o stałym rozkładzie gęstości masy. Jeszcze innym to kula złożona z współśrodkowych powłok sferycznych, każda o stałej gęstości masy (rys. 1.2.2). Przykład „cebulowego” ciała jest o tyle istotny, że planety i Słońce możemy, z dobrym przybliżeniem, uważać za ciała o sferyczno-symetrycznym rozkładzie gęstości masy; mają one warstwową budowę (rys. 1.2.3).

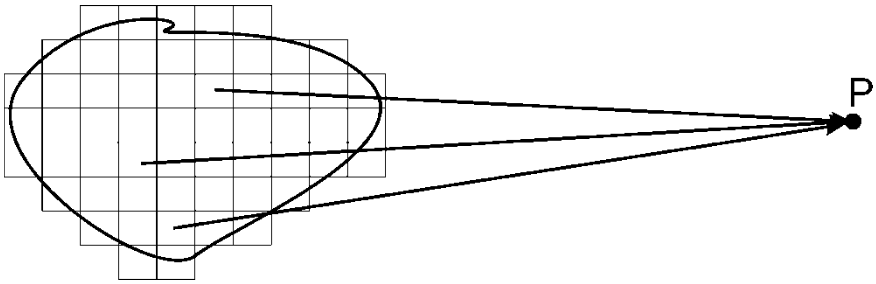


Rysunek 1.2.2. Góra – przykład ciał o sferyczno-symetrycznym rozkładzie masy; dół przykład ciał nie mających sferyczno-symetrycznego rozkładu masy. Różne stopnie szarości oznaczają różne gęstości masy.



Rysunek 1.2.3. Ziemia i Słońce (jak również inne planety) zbudowane są z warstw o różnej gęstości, które układają się jak warstwy cebuli. W pierwszym przybliżeniu możemy uznać, że są to idealnie sferyczne warstwy o jednorodnym rozkładzie masy.

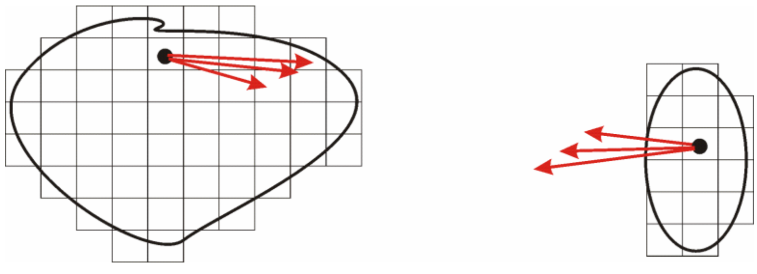
W bardziej ogólnym przypadku, kiedy jedno ciało jest punktowe (lub sferyczno-symetryczne), a drugie rozciągłe i nie o sferyczno-symetrycznym rozkładzie gęstości masy, musimy odwołać się do złożonej procedury rachunkowej. Dzielimy rozciągłe ciało na małe komórki, im mniejsze tym lepiej, a następnie wyznaczamy odległość pomiędzy ciałem punktowym (lub środkiem ciała sferyczno-symetrycznego) a środkiem każdej komórki ciała rozciągłego. Wyznaczamy również masę każdej komórki, a następnie siłę przyciągania pomiędzy ciałem rozciągłym a ciałem punktowym (lub sferyczno-symetrycznym) (rys. 1.2.4). Następnie tak wyznaczone siły sumujemy. Im mniejsze są komórki, na które dzielimy ciało niesymetryczne tym dokładniejsze obliczenia, ale więcej komórek. W granicy nieskończenie drobnego podziału zastępujemy sumowanie całkowaniem. Z rysunku (1.2.4) widać, że przy skończonych rozmiarach komórek nie można jednoznacznie określić odległości między komórką a ciałem w punkcie P. Pytanie: od którego punktu komórki należy liczyć odległość nie ma zwykle dobrej odpowiedzi, poza wyjątkiem ciała o symetrii sferycznej. Wtedy jak wiemy z twierdzenia (1.2.1) odległość należy liczyć od środka symetrii. Wybieramy zwykle środek komórek sześciennych, na które podzielone jest ciało.



Rysunek 1.2.4. Ciało o niesymetrycznej budowie lub niesymetrycznym rozkładzie gęstości masy dzielimy na małe komórki, które możemy uznać za masy punktowe. Następnie obliczamy przyciąganie między daną masą punktową P a kolejnymi komórkami niesymetrycznego ciała i wszystkie siły do siebie dodajemy. Na rysunku zaznaczone są trzy odcinki reprezentujące odległość od ciała punktowego znajdującego się w punkcie P, a trzema komórkami ciała niesymetrycznego.

Kiedy oba ciała są nieregularne, to oba musimy podzielić na komórki i obliczyć siły przyciągania grawitacyjnego między wszystkimi kombinacjami komórek z obu ciał (rys.1.2.5). Należy pamiętać, że dzielimy ciało na komórki, które są obecne w całej jego objętości, nie tylko na powierzchni.

Gdy ciało, na które działa siła grawitacji nie możemy uznać za punktowe pojawia się dodatkowy problem. Przeniesienie wszystkich sił do środka masy tego ciała i ich wysumowanie nie załatwia sprawy, gdyż w ten sposób możemy zgubić moment obrotowy jaki na dane ciało wywiera grawitacja drugiego ciała. Chyba, że istnienie tego momentu możemy pominąć. W przeciwnym razie musimy wyznaczyć i siły wypadkowe i momenty sił.

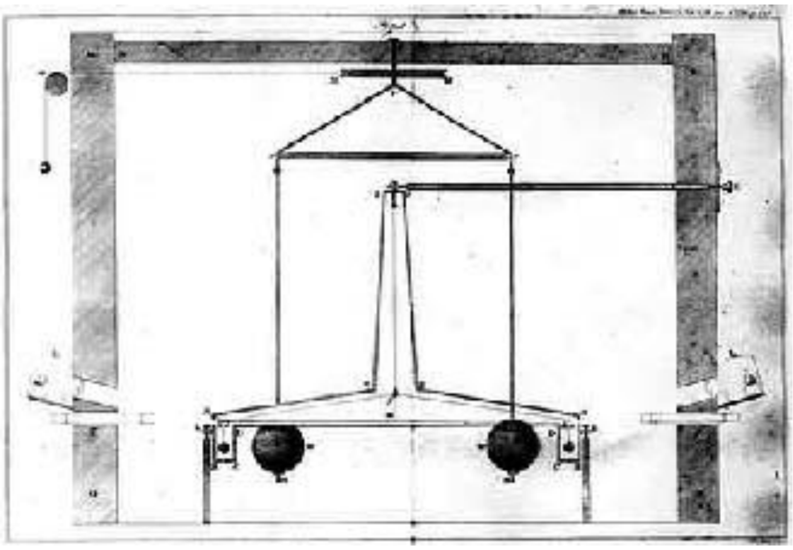


Rysunek 1.2.5. Rozwiązanie pełnego zagadnienia dla ciał rozciągłych i niesymetrycznych oznacza, że musimy obliczyć wypadkowe siły działające na każdą komórkę ciała. Tutaj wyrysowane są trzy wektory siły dla jednej z komórek każdego ciała. Te trzy wektory siły reprezentują przyciąganie przez trzy komórki drugiego ciała. Pamiętać również należy, że komórki znajdują się również we wnętrzu każdego z ciał – komórki sześcienne wypełniają całą objętość ciała i każda z nich wytwarza pole grawitacyjne jak również na każdą z nich działa pole grawitacyjnej wytworzone przez każdą komórkę drugiego ciała, tak jakby nie było innych komórek. Słowem działa zasada superpozycji (fakt 1.1).

1.3. Stała grawitacyjna

Do praktycznego wykorzystania prawa powszechnego ciążenia potrzebna jest wartość stałej grawitacyjnej G. Jej wyznaczenie nie jest proste, gdyż siły grawitacji są słabe. Dwie kule o masie 1000kg każda, których środki oddalone są od siebie o 1m przyciągają się z siłą zaledwie $6.67\ 10^{-5}$ N. Z taką siłą naciska na stół położona na nim kulka o masie 7mg. Newton próbował wyznaczyć wartość stałej grawitacyjnej. Ze względu na jej małą wartość metody laboratoryjne uznał za nieużyteczne. Oparł się na oszacowaniu średniej gęstości Ziemi i wartości przyspieszenia z jakim ciała spadają przy powierzchni Ziemi. Wartość średniej gęstości Ziemi oszacował zaskakująco dobrze, błąd mieścił się w granicach 10% w stosunku do wartości znanej obecnie. Jego następcy przez prawie sto lat próbowali sami szacować gęstość Ziemi, ale robili to gorzej od Newtona.

Pierwszy laboratoryjny pomiar wartości stałej grawitacyjnej wykonał Lord Henry Cavendish (1731-1810) w Wielkiej Brytanii. Cavendish użył wagi skręceń, zaprojektowanej i wykonanej przez Johna Mitchella (1724 – 1793), który nie zdążył jej wykorzystać. Po śmierci Mitchella aparatura dostała się w ręce Cavendisha (rys. 1.3.1), który w latach 1797-1798 roku dokończył dzieła. Waga skręceń używana przez Cavendisha składała się z cienkiej nici kwarcowej (ok. 180cm długości), na której zawieszony był lekki pręt (ok. 1m długości). Na końcach pręta zawieszony były małe kule ołowiane o masie 0.73kg każda. Do nici było przymocowane zwierciadło. Wiązka światła padająca i odbijająca się od zwierciadła i padająca następnie na skalę pozwalała na precyzyjne wyznaczenie niewielkich kątów skręcenia nici. Cavendish umieścił następnie, w pobliżu małych kul, dwie duże kule ołowiane (po 158kg każda) i zmierzył kąt skrętu pręta. Na podstawie tych pomiarów wyliczył wartość stałej G=6.74 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}.



Rysunek 1.3.1. Oryginalny rysunek wagi skręceń Cavendisha; źródło Wikipedia

Cavendish zdawał sobie sprawę z subtelności efektu, który chciał zmierzyć. Dużo wysiłku poświęcił eliminacji źródeł zakłóceń. Aby uchronić pomiar przed skutkami ruchów cieplnych powietrza pręt z małymi kulkami umieszczony był wewnątrz drewnianej skrzyni, zaopatrzonej w małe okienka które umożliwiały obserwację eksperymentu (rys. 1.3.1-2). Cały system pomiarowy zamknięty był w specjalnie przygotowanym pomieszczeniu, w którym panowała stała temperatura. Pomieszczenie to wyposażone było w system otworów, lunet i dźwigni, który pozwalał na pomiar i kontrolę ustawienia dużych kul bez wchodzenia do jego wnętrza. W czasie doświadczenia duże kula były przysuwane na odległości 0.5cm do ścianek skrzyni, która izolowała od otoczenia małe kule.

Waga skręceń do dziś stanowi jeden z najprecyzyjniejszych przyrządów pomiarowych. Kolejne dziesięciolecia przynosiły jej coraz doskonalsze wersje dające coraz lepsze pomiary wartości stałej G. Współczesne wagi skręceń pracują w niskich temperaturach (aby uniknąć błędów wynikających z drgań termicznych), wykorzystują magnetyczne łożyska i sterowane są komputerowo. Opracowano również inne metody pomiaru wartości stałej grawitacyjnej, lecz waga skręceń ciągle daje największą dokładność pomiaru. Niemniej, mimo licznych wysiłków wartość stałej grawitacyjnej G jest wyznaczona mało dokładnie, jeżeli porównamy ją do wartości innych, podstawowych stałych fizycznych. Obecnie przyjmuje się, że $G=6.6742\cdot10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}. W ostatnich latach pojawiła się nowa technika wykorzystująca interferometry atomowe. W 2007 roku Fixler[2] ze współpracownikami opublikowali wartość stałej grawitacyjnej, mierzonej w ten sposób, $G=6.693(34)\ 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}. W 2014 roku, po dopracowaniu tej techniki pomiarowej Rosi[3] ze współpracownikami

[2] J. B. Fixler; G. T. Foster; J. M. McGuirk; M. A. Kasevich (2007-01-05), *Atom Interferometer Measurement of the Newtonian Constant of Gravity*, Science, **315** (2007) 74–77

[3] G. Rosi, F. Sorrentino, L. Cacciapuoti, M. Prevedelli and G.M. Tino, Nature, *Precision measurement of the Newtonian gravitational constant using cold atoms*, **510** (2014) 518–521

zmierzyli wartość stałej grawitacyjnej jako G=6.67191(91) 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}. Sama technika wymaga jeszcze dopracowania i szerszej aprobaty ze strony fizyków.

Rysunek 1.3.2. Z lewej - Laboratorium Cavendisha - waga skręceń; z prawej - Henry Cavendish (10 X 1731 – 24 II 1810) brytyjski fizyk i chemik. Urodził się w bogatej arystokratycznej rodzinie. Rodzinny majątek pozwolił mu na poświęcenie całego czasu nauce. Cavendish był jednym z najlepszych eksperymentatorów w historii. Odkrył między innymi wodór, oznaczył skład powietrza i wody. Przed Coulombem odkrył prawo Coulomba, przy czym jego pomiary były znacznie precyzyjniejsze od Coulomba (inna metoda), wyznaczył stałą grawitacyjną G i obliczył masę Ziemi. W życiu prywatnym postrzegany była jako dziwak stroniący od ludzi. Nie szukał sławy i nie publikował swoich osiągnięć, które ujrzały światło dzienne dzięki jego spadkobiercom. Po śmierci, z jego pieniędzy ufundowano na uniwersytecie w Cambridge laboratorium badawcze – the Cavendish Laboratory. Rysunek autorstwa George'a Wilsona z 1851; rysunki, źródło Wikipedia

1.4. Problem z oddziaływaniem przez próżnię

Legenda głosi, że Newton wpadł na trop prawa powszechnego ciążenia, gdy podczas rozmyślań w ogrodzie, spadające jabłko ugodziło jego zamyśloną głowę. Nie wiadomo na ile jabłko to może sobie przypisywać udział w powstaniu klasycznej teorii grawitacji. Wydaje się, że obserwacje uporczywie spadających ciał (jabłek, kamieni, filiżanek) u osoby takiej jak Newton musiały pozostawiać jakieś niepokojące ślady myślowe. Owo jabłko, jeżeli tak rzeczywiście było, mogło być po prostu kroplą przelewającą czarę. Dodatkowo spekulacje o siłach wywieranych wzajemnie przez ciała niebieskie miały już długą historię. Kopernik, który usunął Ziemię ze środka Kosmosu, nie mógł już twierdzić, że ciała spadają na środek Kosmosu, tak jak to było w kosmologii Arystotelesa

(TVI 1.3). Postulował, że ciała mają w sobie zdolność przyciągania innych ciał, przynajmniej ze swojego otoczenia. Ale również nie był to oryginalny pomysł Kopernika. W czasach Newtona pomysł, wzajemnego przyciągania ciał był już znany w szerszym gronie uczonych. Oczywiście nie był jeszcze równie szeroko akceptowany. Co więcej, pomysł odwrotnej proporcjonalności sił przyciągania do kwadratu odległości też już się pojawił. Przedstawił go na przykład Robert Hook. Newton nie musiał więc wymyślać grawitacji od zera. Jego zasługą jest natomiast jej matematyczne opracowanie i połączenie z drugim prawem dynamiki. Ta dwa fakty spowodowały, że teoria grawitacji stała się nauką ilościową pozwalająca na wytyczanie orbit ciał niebieskich, oraz na głębsze uzasadnienie i uzupełnienie znanych wcześniej praw, takich jak prawa Keplera.

Pisałem w pierwszym temacie, że fizyka poszukuje reguł, których możliwie szeroko „trzyma się" przyroda. Prawo powszechnego ciążenia jest taką regułą – postuluje, że wszystkie ciała materialne (bez wyjątku) przyciągają się grawitacyjne. Z tego postulatu, w zasadniczej mierze, wynika bogactwo ruchów ciał niebieskich. Prawa dynamiki newtonowskiej idą dalej. Mają być jednako ważne i w sprawach nieba i w sprawach ziemskich. Kiedy Newton publikował swoje zasady mechaniki, wciąż żywy był jeszcze, w świadomości ówczesnych ludzi, podział świata na część podksiężycową i nadksiężycową (rys. TVI 1.3.6). Obie te części miałyby się rządzić odrębnymi zasadami. Mechanika newtonowska była zwieńczeniem wysiłków uczonych, którzy walczyli z tym podziałem. Prawo grawitacji połączyło niebiosa z ziemią węzłem wspólnego prawa powszechnego ciążenia i praw dynamiki.

Samo sprowadzenie fizyki Nieba i Ziemi do jednego mianownika, choć stanowiło światopoglądowe wyzwanie, nie było już wtedy postrzegane jako coś trudnego do przełknięcia. Wręcz przeciwnie Newton mógł oczekiwać na wsparcie ze strony rosnącej liczby ówczesnych uczonych. W prawie powszechnego ciążenia tkwiła jednak poważna intelektualna herezja. Wynikało z niego ni mniej ni więcej, że między dwoma ciałami, przez próżnię, działa magiczna siła przyciągania.

Powszechne już wówczas, przynajmniej w gronie uczonych, przyjęcie układu heliocentrycznego skłaniały do uznania, że olbrzymią przestrzeń między ciałami niebieskimi wypełnia próżnia. Przeświadczenie to wspierały doświadczenia z próżnią, które stały się popularne w drugiej połowy XVII wieku (np. kule magdeburskie) Z próżnią ciągle jednak nie było łatwo. Dla części ówczesnych uczonych próżnia to NIC. A NIC to nic - to taka próżnia, która w swej naturze filozoficznej nie znosi żadnego kompromisu. Krytycy, którzy wychodzili z pozycji próżni filozoficznej nie dostrzegali faktu, że nauka zaczęła badać własną próżnię. Próżnia w eksperymentach fizycznych byłą próżnią nowego typu; nie filozoficzną a fizyczną. Próżnia fizyczna to obszar pozbawiony materii. Obecność energii, na przykład w postaci światła oświetlającego ten pusty obszar, nie był traktowany jako naruszenie próżni fizycznej. Mogła w niej również przebywać subtelna materia obecnych w fizyce XVIII wieku fluidów, jak na przykład cieplika. Jednak na przełomie XVII i XVIII wieku próżnia filozoficzna i fizyczna ciągle się ludziom w głowach mieszały. Jeżeli ktoś nie rozróżniał tych dwóch próżni to miał problem. Pomyśl. jeżeli między dwoma ciałami jest NIC to jest to NIC i kropka. Nie może być między nimi nawet przestrzeni, bo przestrzeń to coś, co ma właściwości, na przykład metryczne (§TV 3.4), a NIC ich nie ma. Myśląc w taki sposób, istnienie próżni – jako prawdziwego NIC - negował Kartezjusz, którego poglądy wywierały duży wpływ na ówczesnych uczonych. Jeżeli myślimy kategoriami próżni filozoficznej, to trudno się z Kartezjuszem nie zgodzić. Próżni po prostu nie ma. My jednak odwołujemy się dziś do próżnia fizycznej, to jest do obszaru przestrzeni pozbawionego „normlanej" materii. Sama przestrzeń jest czymś co ma określone własności – na przykład metryczne i nie może być traktowana jako nic. Własności metryczne oznaczają, że między dwoma punktami tej przestrzeni możemy zdefiniować odległość. Inną cechą przestrzeni jest wymiar – żyjemy w trójwymiarowej przestrzeni. NIC nie ma żadnej własności. Na nieporozumieniach związanych z próżnią jednak problemy z grawitacją się nie kończyły. Powiedzmy, że mamy dwa oddalone od siebie ciała, np. Księżyc i Ziemię. Skąd Ziemia „wie" o Księżycu, a Księżyc o Ziemi? Z prawa powszechnego ciążenia wynika, że Ziemia „wie" nie tylko o Księżycu ale, gdy Księżyc oddali się od Ziemi, to Ziemia to wyraźnie „poczuje" (jako zmniejszenie się siły grawitacji). Wygląda to na działanie magiczne. Żeby choć Księżyc przesyłał jakieś sygnały do Ziemi, ale nic takiego w prawie powszechnego ciążenia nie znajdziecie. Działający przed Newtonem Kepler również borykał się z problemem oddziaływania między ciałami niebieskimi. Wymyślił koncepcję magnetycznych promieni wychodzących ze Słońca, poprzez które Słońce napędzało planety. Widać, że Kepler odczuwał potrzebę określenia nośnika oddziaływań. Podobnie czuli i inni uczeni, w tym również Newton, dla którego brak nośnika oddziaływań grawitacyjnych stanowił poważny problem. Newton nie był w stanie zaproponować żadnego przekonującego mechanizmu przenoszenia oddziaływań grawitacyjnych. Mógł tylko zapostulować, że takie oddziaływanie ma miejsce i że opisuje je prawo powszechnego ciążenia. Oficjalnie odmawiał wytłumaczenia mechanizmu grawitacji. Jednak mniej oficjalnie podjął przynajmniej trzy próby skonstruowania hipotezy rozwiązującej problem nośnika grawitacji. Hipotezy te ocierały się o ezoterykę i Newton żadnej z nich nie przedstawił jako swojej poważnej propozycji. Dociekliwy i filozoficznie nastawiony ludek ówczesnej nauki począł węszyć w prawie powszechnego ciążenia jakiś filozoficzno-naukowy przekręt. Na domiar złego Newton postulował, że oddziaływania grawitacyjne rozchodzą się nieskończenie szybko. Nie miał wyboru, jeżeli nie było nośnika oddziaływań grawitacyjnych to nie było czegoś czemu można by przypisać prędkość rozchodzenia się. Takie oddziaływanie niesie ze sobą poważne konsekwencje. Na przykład w momencie gdy jakaś masa przemieścić się na Ziemi (na przykład ciężarówka), to związaną z tym zmianę siły grawitacji odczuje każde ciało we Wszechświecie w tym samym momencie, tak jakby między ciałami nie było przestrzeni. Mówimy, że takie oddziaływanie jest nielokalne. Lokalność oznacza, że obiekt można analizować abstrahując przynajmniej przez chwilę od jego związków z innymi obiektami. W teoriach lokalnych zmiana oddziaływania między jednym a drugim obiektem może zachodzić na skutek bezpośredniego kontaktu, lub przez przesłanie „posłańca" poruszającego się ze skończoną prędkością. Przestrzeń między obiektami stanowi rzeczywistą separację między nimi, a pokonanie prawdziwej separacji wymaga skończonego czasu. Lokalność silnie zakładała fizyka Arystotelesa, fizyka wieków średnich i Odrodzenia. Dzięki licznym fluidom w lokalności pławiła się fizyka XVIII wieku, dumna, że wyrzuciła magiczne oddziaływania ze swego terytorium. Niestety był poważny wyjątek od tego szczęścia, nieszczęsna teoria grawitacji. Nielokalność jest bardzo niewygodną cechą z punktu widzenia rozwoju nauki nacelowanej na praktyczne cele. W czasach Newtona bardziej kojarzyła się magią niż z nauką. Część krytyków Newtona zwracała na to uwagę, to znaczy, że te tajemnicze, nielokalne oddziaływania grawitacyjne spychają naukę w ramiona magii. Samą magię dzielono na sympatyczną i homeopatyczną. Magia homeopatyczna zakładała, że podobne działa na podobne. Magia sympatyczna stwierdzała, że dwie rzeczy będące niegdyś w kontakcie pozostają zawsze ze sobą związane. Teoria powszechnego ciążenia miała cechy magii homeopatycznej. Wszystkie ciała materialne natychmiastowo oddziaływały ze sobą przez tajemniczą siłę grawitacji (podobne działało na podobne).

Ogólna teoria względności uratowała lokalność sił grawitacyjnych postulując, że oddziaływania te rozchodzą się z prędkością światła w postaci fal grawitacyjnych. Stąd taki szum, w ostatnim czasie, wokół detekcji fal grawitacyjnych. Ale nielokalność to twarda sztuka i powróciła do współczesnej fizyki za sprawą mechaniki kwantowej i to w jeszcze gorszej postaci niż to miało miejsce w przypadku prawa powszechnego ciążenia Newtona. Co więcej, okazało się również, że ogólna teoria względności również kryje w sobie groźnie wyglądające nielokalności. O tym więcej powiemy sobie później.

Wszystkie te filozoficzne problemy były potencjalnie groźne dla prawa powszechnego ciążenia. Newton miał jednak silnego asa w rękawie. Jego prawo powszechnego ciążenia było skuteczne. Świetnie tłumaczyło dlaczego Księżyc obiega Ziemię, a Ziemia Słońce. Wnioskiem z prawa powszechnego ciążenia i zasad dynamiki były prawa Keplera. Co więcej Newton mógł wprowadzić do tych praw poprawki. Praktycznych sukcesów było więcej.

Dziś praktyczne sukcesy są dla nas wystarczającym powodem do przyjęcia danej teorii. Jest to elementem szeroko akceptowanej filozofii, która w skrócie rzecz ujmując głosi, że jak coś działa, to należy to przyjąć niezależnie od wszelkich innych wątpliwości. Jednak w czasach Newtona niekoniecznie oczekiwano od nauki skutecznego rozwiązywania problemów. Nauka miała szukać prawdy o świecie – esencjonalnej prawdy, nieznoszącej częściowości i kompromisu. Skuteczność praktyczna była istotna dla rzemiosła a nie dla nauki. Dla tradycyjnie zorientowanych uczonych skuteczność praw Newtona nie była wystarczająco silnym argumentem, przynajmniej tak długo jak długo Newton nie wyjaśnił jak poprzez przestrzeń działa grawitacja.

Czasy się jednak zmieniały i szybko rosła liczba uczonych gotowych zamienić prawdę esencjonalną na prawdę skuteczną. Do prekursorów tego kierunku należał Galileusz. Dla większości uczonych współczesnych Galileuszowi nauka i rzemiosło były dwiema wyraźnie odrębnymi dziedzinami ludzkiej działalności. Jak już wspomniałem, nauka poszukiwała prawd esencjonalnych o świecie. Widać to choćby po odziedziczonej po greckich filozofach dysputach na temat tego czym jest ruch. Szukając prawd esencjonalnych fizyka zbliżała się w swym charakterze do filozofii, za której część była uważana, oraz do teologii. Rzemiosło miało aspekt praktyczny. Rzemieślnik nie szukał esencjonalnej prawdy na temat bytu czy bardziej szczegółowo natury na przykład garnka. Jego celem było wytworzenie owego garnka, a miarą sukcesu był tu stopień użyteczności tegoż garnka. Galileusz w czasie swojego życia starał się z działań naukowych czerpać korzyści finansowe jako rzemieślnik. Widać to szczególnie w okresie, który spędził w Wenecji, gdzie będąc profesorem uniwersytetu w Padwie był jednocześnie założycielem i właścicielem warsztatu, który miał przekuwać jego naukę w użyteczną produkcję. Choć dziś jest to dla nas oczekiwane podejście do sprawy, w czasach Galileusza taka działalność trąciła mocno mezaliansem między arystokratyczną w swej naturze naukę a plebejskim rzemiosłem. Mając taki stosunek do spraw nauki Galileusz przyczyniał się do zmiany podejścia do naukowej prawdy. Jego dywagacje na temat ruchu, opis wahadła i ruchu ciała w polu grawitacyjnym nie sięgał po esencję ruchu ale dawał praktyczne reguły do jego obliczania. Te praktyczne reguły mogły być zastosowane do budowy praktycznych urządzeń (np. teoria wahadła → zegar wahadłowy), czyli do działań o charakterze rzemieślniczym. Po Galileuszu widzimy prawdziwy wysyp nowych (np. termometr, barometr, elektroskop) i ulepszonych starych urządzeń pomiarowych. Fizyka idzie w pomiary i w coraz większym stopniu wchłania metody matematyczne, które pozwalają na ilościowe obliczanie różnych wielkości, a co za tym idzie, na projektowanie nowych, praktycznych przyrządów i urządzeń. Dochodzi do swoistego rozwodu z filozofią i teologią na rzecz związku z techniką (rzemiosłem) i matematyką. Efekty tych nowych związków na ludzką historię okazały się piorunujące. Nowa technika całkowicie zmieniała nasze życie.

Nie chcę tu powiedzieć, że Galileusz był samotnym wojownikiem, który zmienił bieg historii. W jego czasach działalność naukowo-rzemieślnicza zyskiwała na coraz większej popularności. Już w średniowieczu część uczonych zwracała uwagę na dużą praktyczną wartość badań naukowych. Wszystkie te wczesne działania możemy uznać za przygotowanie atmosfery pod przełom, który miał miejsce w czasach Galileusza. W tak przygotowanej atmosferze osiągnięcie Galileusza, oraz legenda związana z jego procesem uczynił zeń autorytet, który pociągał i dodawał odwagi potencjalnym następcom. A tych jak pokazała historia nie brakowało. Czasy po prostu dojrzały ku takiej przemianie.

Niestety równocześnie rozwinął się nurt pogardy do filozofii. Dziś, gdy pewnych rzeczy nie potrafimy sensownie wyjaśnić, wielu uczonych kryje swą niemoc za pogardliwym stwierdzeniem, że to filozofia. Ma to oznaczać, rzecz nie wartą zachodu. Jak się nieraz okazało rzeczy nie warte zachodu stawały się z czasem warte zachodu, dlatego też określenie „to tylko filozofia" winno nasunąć nam podejrzenie, że kryje się za nim ciekawy problem, a tylko współcześni nam uczeni nie mają pojęcia jak go ugryźć. Jego rozwiązanie, jeżeli nastąpi, zacznie się prawdopodobnie od rozważań natury filozoficznej.

1.5. Równoważność masy grawitacyjnej i bezwładnościowej

Wrócę jeszcze do zagadnienia równoważności masy bezwładnościowej i grawitacyjnej. Przypomnę, że fakt ten ma istotne konsekwencje. Wynika z niego, że wszystkie ciała spadają, przy braku innych sił niż grawitacja, z takim samym przyspieszeniem, niezależnie od ich masy. Dzięki temu mamy stan nieważkości i możemy umieszczać na orbicie satelity.

Z równoważnością masy bezwładnościowej i grawitacyjnej jest jeszcze jeden problem – na gruncie fizyki klasycznej nikt nie wie dlaczego tak jest. Oczywiści można wzruszyć ramionami i stwierdzić, że skoro tak jest to należy to przyjąć i głowy sobie sprawą nie zaprzątać. Jednak zawsze znajdą się niespokojne umysły, które nie będą mogły przejść obojętnie obok koincydencji o tak istotnych skutkach. Nieraz ich podejrzliwość okazała się owocna i tak też było w tym przypadku. Jak już wspomniałem równość masy grawitacyjnej i bezwładnościowej jest fundamentalnym faktem, na którym oparł się Einstein formułując ogólną teorię względności, w ramach której przestaje być ona zaskoczeniem, a staje się naturalną konsekwencją wypływającą z nowej teorii.

Zanim jednak pojawiła się ogólna teoria względności uczeni próbowali zmierzyć na ile dokładnie masa bezwładnościowa jest równa masie grawitacyjnej. Najbardziej bezpośrednią metodą sprawdzenia tego faktu jest pomiar czasu spadania (w próżni) kulek o tej samej wielkości wykonanych z substancji o różnej gęstości. Wymaga to jednak wytworzenia próżni i dokładnych pomiarów małych czasów spadku (chyba, ze zdecydujemy się na wykonanie bardzo wysokiej kolumny próżniowej). Pierwsze sensowne pomiary równoważności masy grawitacyjnej i bezwładnościowej wykorzystywały wahadło. Dwa wahadła o jednakowej długość L, na których zawieszono kulki z dwóch różnych materiałów powinny wahać się z tą samą częstością. Aby zbadać sprawę bliżej powrócę do równania ruchu wahadła matematycznego. Za ruch wahadła odpowiada składowa ściągająca siły ciężkości (rys. TVIII 1.2.1). W przybliżeniu małych kątów możemy napisać

$$F_s \approx -mg\varphi \qquad 1.5.1$$

Gdzie φ to kąt wychylenia wahadła. Równanie ruchu przyjmie postać

$$m_b L\ddot{\varphi} = -m_g g\varphi \qquad 1.5.2$$

Jak widzisz rozróżniłem masę bezwładnościową m_b od masy grawitacyjnej m_g (porównaj ten wzór ze wzorem (TVIII 1.2.1). Wzór ten zapiszę w postaci (TVIII 1.2.8)

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi \qquad 1.5.3$$

$$\omega^2 = \frac{m_g}{m_b}\frac{g}{L} \qquad 1.5.3a$$

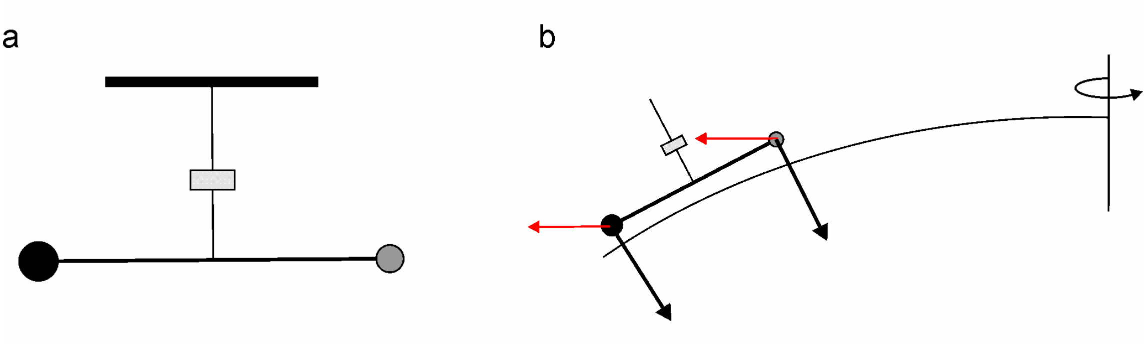
Widać z tego, że dla dwóch kulek A i B wykonanych z różnych materiałów będziemy mieli

$$\omega_A^2 = \frac{m_{gA}}{m_{bA}}\frac{g}{L};\ \omega_B^2 = \frac{m_{gB}}{m_{bB}}\frac{g}{L} \Rightarrow \omega_A^2 - \omega_B^2 = \frac{g}{L}\left(\frac{m_{gA}}{m_{bA}} - \frac{m_{gB}}{m_{bB}}\right) \qquad 1.5.4$$

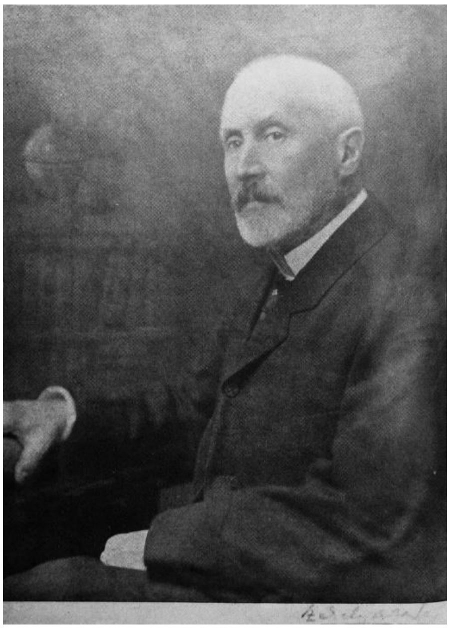
Różnica kwadratów częstości wahadeł wyraża się przez różnicę stosunków masy grawitacyjnej i bezwładnościowej. Gdy te stosunki są równe jeden to cała różnica jest równa zeru. Mierząc okres wahań wahadła z kulkami z różnych materiałów możemy wykryć różnicę w ich częstościach. Będzie to silny dowód na to, że masa bezwładnościowa nie jest równa masie grawitacyjnej. Doświadczenia takie prowadził między innymi Galileusz i Newton. Niestety dokładność tych pomiarów nie była duża. W analizie wahadła przyjmujemy przybliżenie małego kąta, nadto jest wiele innych czynników mogących zakłócić próbę precyzyjnego wyznaczenia częstości drgań wahadeł (lub ekwiwalentnie okresu ich drgań). Względna dokładność pomiarów Newtona wynosiła około 10^{-3}, co oznacza że różnica masy grawitacyjnej i bezwładnościowej nie powinna przekraczać 0.1% wartości masy bezwładnościowej (grawitacyjnej).

Precyzyjniejsze pomiary (w latach 1885-1890) przeprowadził węgierski fizyk Roland Eötvös. Schemat jego przyrządu pokazuje rysunek (1.5.1). Pomiary Eötvösa wykazały równość masy grawitacyjnej i bezwładnościowej z względną dokładnością wynoszącą $5\cdot10^{-9}$. W latach 60-tych XX wieku zespół Roberta Dickiego poprawił dokładność pomiarów Eötvösa o dwa rzędy wielkości. Dickie i zespół użył zmodyfikowanego przyrządu Eötvösa mierząc różnice przyspieszeń jakich musiałby doznawać ciężarki o różnej masie na skutek zmian ich położenia względem Słońca (dobowy ruch Ziemi), gdyby masa bezwładnościowa była inna niż masa grawitacyjna[4].

[4] Dokładnie o pomiarach Eötvösa i Dicka możecie przeczytać w znakomitym podręczniku A.K. Wróblewski, J.A Zakrzewski: Wstęp do fizyki, tom 2 cz. 1. PWN 1989, Warszawa.



Rysunek 1.5.1. a) W swoich eksperymentach Roland Eötvös użył wagi skręceń (rys. 1.3.1); a) na pręcie zawieszone były dwie kulki o takiej samej masie, ale wykonane z różnych materiałów. Pręt zawieszony był na cienkim drucie ze stopu platyny i irydu. Na drucie przymocowane było zwierciadło, które odbijało wiązkę światła dając zajączek na umieszczonej przed zwierciadłem skali pomiarowej; b) w czasie pomiarów pręt był orientowany wzdłuż precyzyjnie wyznaczonego kierunku wschód-zachód. Na kulki działała taka sama siła grawitacji (czarne strzałki), oraz siła odśrodkowa (czerwone strzałki). Oznacza to, że siły (a zatem i momenty sił) zależały zarówno od masy grawitacyjnej jak i od masy bezwładnościowej. Przy analizie wagi skręceń wygodnie jest użyć układu nieinercjalnego związanego z Ziemią. Gdyby masa bezwładnościowa różniła się od masy grawitacyjnej $m_b/m_g \neq 1$, to na układ zadziałałby niezerowy moment sił (zauważ, że siła odśrodkowa ma niezerową składową wzdłuż pionu) i waga obróciłaby się o pewien kąt. Eötvös nie stwierdził obrotu wagi.



Rysunek 1.5.2. Loránd Eötvös (27 lipca 1848 w Budzie, zm. 8 kwietnia 1919 w Budapeszcie) – węgierski matematyk, geofizyk i polityk (minister kultury i oświaty), którego nazwiskiem nazwano jednostkę zmiany siły grawitacji Eötvös. Zasłynął ze swojej grawitacyjnej wagi skręceń wykorzystywanej w geologii jak również do bardzo precyzyjnego testowania równości masy grawitacyjnej i bezwładnościowej. Takie postacie jak Tycho Brache i Eötvös przypomina nam jak bardzo ważna jest w fizyce (nauce) umiejętność zaprojektowania i przygotowania (trwa to czasem latami) i wykonania precyzyjnych doświadczeń

2. Pole grawitacyjne

Choć prawo powszechnego ciążenia kieruje naszą uwagę na wyznaczanie sił przyciągania między dwoma punktowymi masami, to oddziaływanie grawitacyjne charakteryzujemy dwiema innymi wielkościami: natężeniem pola grawitacyjnego i potencjałem pola grawitacyjnego. Zacznę od omówienia natężenie pola grawitacyjnego.

Definicja: 2.1: natężenia pola grawitacyjnego

Natężenie pola grawitacyjnego w danym punkcie przestrzeni jest równe liczbowo sile grawitacji działającej na punktową, jednostkową masę umieszczoną w tym punkcie. Kierunek i zwrot natężenia pola grawitacyjnego jest zgodny z kierunkiem i zwrotem siły grawitacyjnej działającej na to ciało.

Natężenie pola grawitacyjnego **g** wytworzonego przez punktową masę m wyrażamy w następującym wzorem

$$\mathbf{g} = -G\frac{m}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad 2.1$$

Gdzie $\hat{\mathbf{r}}$ jest wektorem jednostkowym wskazującym od masy m do punktu, w którym wyznaczamy natężenia pola grawitacyjnego. Wymiarem natężenia pola grawitacyjnego jest długość na czas do kwadratu czyli przyspieszenie; stąd częściej używana nazwa *przyspieszenie grawitacyjne*. W układzie SI mamy:

$$[\mathrm{g}] = \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\right] = \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] \qquad 2.2$$

Związek między siłą grawitacyjną **F** działającą na masę punktową m_p a natężeniem pola grawitacyjnego **g** (przyspieszeniem grawitacyjnym) jest bardzo prosty

$$\mathbf{F} = m_p\mathbf{g} = m_p\left(-G\frac{m}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\right) = -G\frac{m_p m}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad 2.3$$

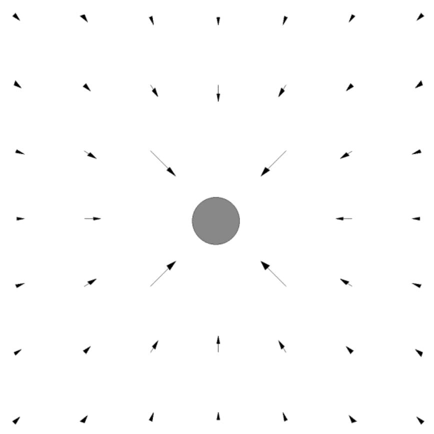
Ponieważ masa grawitacyjna jest równa masie bezwładnościowej a wymiarem natężenia pola jest przyspieszenia, natężenie pola grawitacyjnego wskazuje z jakim przyspieszeniem poruszają się ciała w polu grawitacyjnym, niezależnie od ich masy, co już wiemy z części pierwszej tego tematu.

Posługiwałem się do tej pory pojęciem pola grawitacyjnego bez jego zdefiniowania. Co to jest pole grawitacyjne od punktowej masy m? Pole grawitacyjne jest polem wektorowym (§TXIV 2), co oznacza, że w każdym punkcie przestrzeni mamy wektor, który to pole reprezentuje. Od strony fizycznej wektor ten, to natężenie pola grawitacyjnego dane wzorem (2.1). Gdy mamy wiele mas, rozrzuconych w przestrzeni, to pole grawitacyjne jest sumą wektorów natężenia pola od poszczególnych mas (zasada superpozycji). Możemy to ująć tak

Definicja 2.2: Pole grawitacyjne

Pole grawitacyjne to przyporządkowanie każdemu punktowi przestrzeni, z interesującego nas obszaru, wektora przyspieszenia grawitacyjnego, reprezentującego przyspieszenie, jakie masa punktowa doznaje w danym punkcie przestrzeni, na skutek oddziaływania grawitacyjnego z innymi masami.

Masa punktowa wytwarza radialne pole grawitacyjne pokazane na rysunku (2.1)



Rysunek 2.1. Wektorowe pole grawitacyjne wytworzone przez masę radialną.

Pole grawitacyjne dla masy punktowej ma osobliwości. W punkcie położenia masy jego wartość rośnie do nieskończoności, gdyż odległość punktu od siebie samego jest równa zeru, a masa punktu materialnego jest skończona. Cóż, to cena za tak osobliwy obiekt jak masa punktowa. Zwykle jednak nie sprawia nam to kłopotów. Dla realnego układu fizycznego masy punktowe reprezentują ciała o rozmiarach znacznie mniejszych niż odległości między nimi. Mogą również reprezentować ciała o sferyczno-symetrycznym rozkładzie masy. I w jednym i w drugim przypadku, gdy odnosimy się do praktycznych problemów, nie spotykamy się z koniecznością liczenia oddziaływania grawitacyjnego na odległościach dążących do zera. Oczywiście z punktu widzenia teorii to jest jednak rys na strukturze teorii.

Pole grawitacyjne wzajemnie oddziałujących ciał niebieskich nie jest statyczne. Ciała te poruszają się względem siebie, co powoduje, że ich przestrzenny układ nieustannie się zmienia. Zamiana ta pociąga za sobą zmianę pola grawitacyjnego. Jednak dla ciał znajdujących się pod dominującym wpływem grawitacji jednego masywnego obiektu pole grawitacyjne, tego obiektu, możemy uznać za stałe.

Żyjemy w polu grawitacyjnym Ziemi. Średnie przyspieszenie grawitacyjne przy powierzchni Ziemi wynosi 9.80665 m/s^2; w zadaniach przyjmujemy 9.81m/s^2, a czasem po prostu 10m/s^2. Przyspieszenie ziemskie maleje wraz z wysokością. Tabela (2.1) przedstawia wybrane przykłady wartości pola grawitacyjnego i siły grawitacyjnej na różnych wysokościach nad powierzchnią Ziemi. Tabela (2.2) pokazuje wartość przyspieszenia grawitacyjnego przy powierzchni planet układu Słonecznego oraz Księżyca, Plutona i Słońca.

h [km]	R_Z+h [km]	g [m/s^2]	siła [KG]	siła [N]
0	6372	9.81	80	785
4	6376	9.80	79.90	784
10	6382	9.78	79.75	783
250	6622	9.09	74.07	726
30000	36372	0.30	2.46	24
400000	406372	0.0024	0.02	0.19

Tabela 2.1. Wartości natężenia pola grawitacyjnego Ziemi na wybranych wysokościach nad jej powierzchnią. Kolumny „siła" pokazują wartość siły przyciągania grawitacyjnego osoby o masie 80kg. Przyjęto następujące wartości: promień Ziemi R_Z = 6378km (promień równikowy), masa Ziemi M_Z=5.98 10^{24}kg.

nazwa	promień równikowy [km]	masa (masa Ziemi = 1)	g [m/s^2]	ciężar [kG]	średnia gęstość g/cm^3
Księżyc	1738	0.012	1.6	12.9	3.34
Słońce	695980	332000	273.5	2231.0	1.4
Merkury	2420	0.056	3.8	30.6	5.4
Wenus	6052	0.815	8.9	72,8	5.2
Ziemia	6378	1	9.8	80.0	5.5
Mars	3389	0.107	3.7	30.3	3.94
Jowisz	71400	317.9	24.9	202.9	1.34
Saturn	60000	95.15	10.5	86.0	0.71
Uran	25560	14.54	8.9	72.4	1.25
Neptun	24600	17.23	11.4	92.7	1.64
Pluton	1140	0.0023	0.7	5.8	1.9

Tabela 2.2. Wartości natężenia pola grawitacyjnego przy powierzchnia planet Układu Słonecznego oraz Plutona, Księżyca i Słońca. Kolumna ciężar pokazuje siłą przyciągania grawitacyjnego osoby o masie 80kg. Uwaga: granica powierzchni Słońca i wielkich planet gazowych Jowisza, Saturna, Urana, Neptuna nie jest tak jednoznacznie określona jak mniejszych planet skalistych (Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Pluton). Jest to tzw. powierzchnia umowna.

Zwraca uwagę bardzo małe przyspieszenie przy powierzchni Saturna i Urana. Przyspieszenie przy powierzchni Saturna jest niewiele większe od ziemskiego, choć Saturn ma 95 razy większą masę od Ziemi. Jednak przy bardzo małej średniej gęstości, powierzchnia Saturna jest położona nieproporcjonalnie dalej od jego środka, stąd małe przyspieszenie. Podobnie jest w przypadku Urana, który mając masę ponad 14 razy większą od ziemskiej, ma przyspieszenie grawitacyjne mniejsze od ziemskiego.

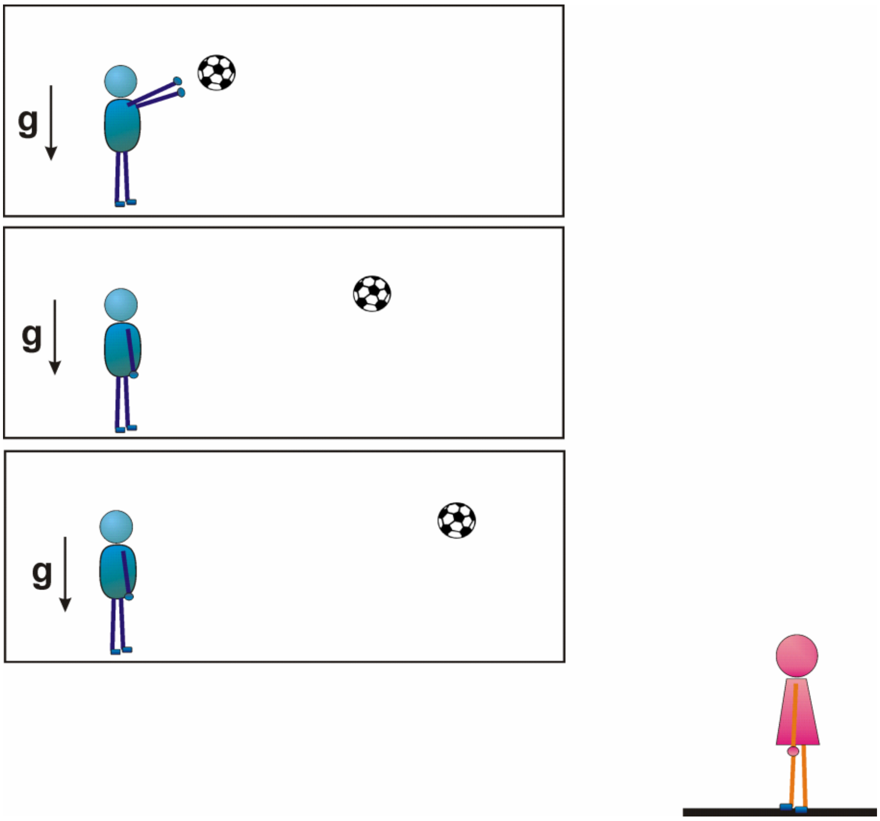
2.1. Stan nieważkości

Prawie każdy ma jakieś pojęcie o stanie nieważkości. Wiemy, że ludzie i przedmioty swobodnie latają w kabinach statków kosmicznych, tak jakby nie było siły ciążenia. Czy zatem na orbicie nie działa grawitacja?

Rozważmy kabinę windy, która z bardzo dużej wysokości spada na Ziemię. W kabinie jest pasażer. Czy pasażer odczuwa działanie siły grawitacji? Cała magia tej sytuacji tkwi w fakcie, że masa grawitacyjna jest równa masie bezwładnościowej. Jak już wiemy, z tego faktu wynika, że wszystkie ciała obdarzone masą spadają w polu grawitacyjnym z tym samym przyspieszeniem. Stąd pasażer nie czuje żadnego dociskania do podłogi kabiny i może po niej swobodnie „fruwać”. Rozważmy jeszcze jeden przykład. W swobodnie spadającej kabinie pasażer wyrzuca przed siebie piłkę. Kabina, piłka i pasażer spadają z przyspieszeniem **g**, tak więc z punktu widzenia pasażera poziomo wypchnięta piłka oddala się od niego nie spadając na podłogę kabiny.

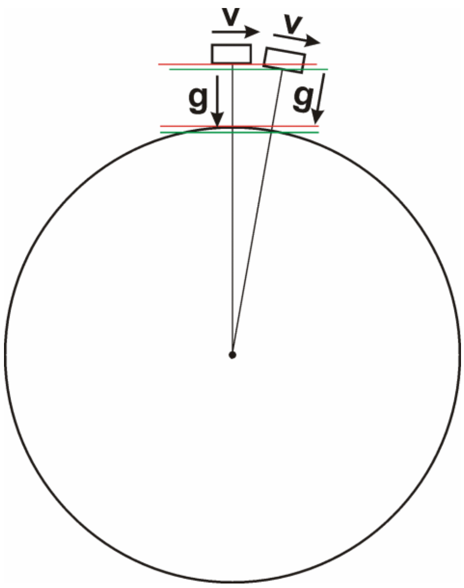
Rysunek 2.1.1. Na Ziemię spada swobodnie kabina z pasażerem. Kabina i pasażer spadają z tym samym przyspieszeniem o wartości g.

Dla obserwatora związanego z Ziemią wszystko leci na łeb i szyję w dół z tym samym przyspieszeniem. Jak, dramatyczne w swym zakończeniu, doświadczenie pasażera w spadającej na Ziemię kabinie ma się do nieważkości w statkach kosmicznych? Rysunek (2.1.3) odpowiada na to pytanie. Jak wynika z rysunku (2.1.3) statek orbitalny musi mieć odpowiednią prędkość poprzeczną w stosunku do kierunku przyspieszenia grawitacyjnego. Pod wpływem przyspieszenia grawitacyjnego statek spada na środek Ziemi. Jednak dzięki prędkości poprzecznej przesuwa się prostopadle do promienia Ziemi. Powierzchnia Ziemi opada względem przesuwającej się kabiny. Przy odpowiednim doborze wartość prędkości poprzecznej, prędkość opadania statku może być równa prędkości opadania powierzchni Ziemi. W efekcie statek może cały czas swobodnie spadać na powierzchnię Ziemi, nie zbliżając się przy tym do tej powierzchni.

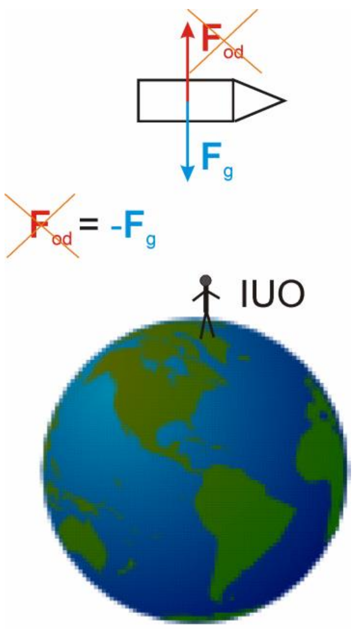


Rysunek 2.1.2. W swobodnie spadającej kabinie piłka pchnięta poziomo nie spada na podłogę kabiny. Dla obserwatora na Ziemi kabina, pasażer i piłka spadają z przyspieszeniem **g**.

W powyższym rozważaniu nie używaliśmy siły odśrodkowej, która jest siłą pozorną (rys. 2.1.4). Często podręczniki odwołują się jednak do siły odśrodkowej i bywa, że robią to niedbale. Na szczęście nie prowadzi to do błędnych wyników. Aby odwołać się do sił pozornych musimy być w układzie nieinercjalnym. Zwykle zakładamy, że Ziemia jest układem inercjalnym, więc kiedy nasz układ współrzędnych związany jest z Ziemią nie mamy prawa do stosowania sił pozornych.



Rysunek 2.1.3. Gdy kabina ma odpowiednio dużą prędkość poprzeczną, to jej odległość od powierzchni Ziemi pozostaje stała, gdyż przy odpowiednio dużym przesunięciu w kierunku prostopadłym do ziemskiego promienia powierzchnia Ziemi opada pod kabiną w takim samym stopniu jak kabina opada na powierzchnię Ziemi.



Rysunek 2.1.4. W układzie inercjalnym nie powinniśmy się odwoływać do siły odśrodkowej, tylko do siły dośrodkowej.

Patrząc na sprawę w układzie inercjalnym widzimy, że statek kosmiczny spada na Ziemię z przyspieszeniem **g**, ale dzięki prędkości poprzecznej powierzchnia Ziemi ucieka spod statku. Niepotrzebna jest żadna siła równoważąca siłę przyciągania. Inaczej sprawy się mają w układzie związanym ze statkiem kosmicznym, który jest układem nieinercjalnym (NUO). W tym układzie obserwator związany z kabiną statku stwierdza, że działa na nią siła grawitacji, a pomimo to, w jego układzie współrzędnych kabina nie porusza się w kierunku działania siły. Ewidentnie potrzebna jest pozorna siła równoważąca; w tym wypadku jest to siła odśrodkowa.

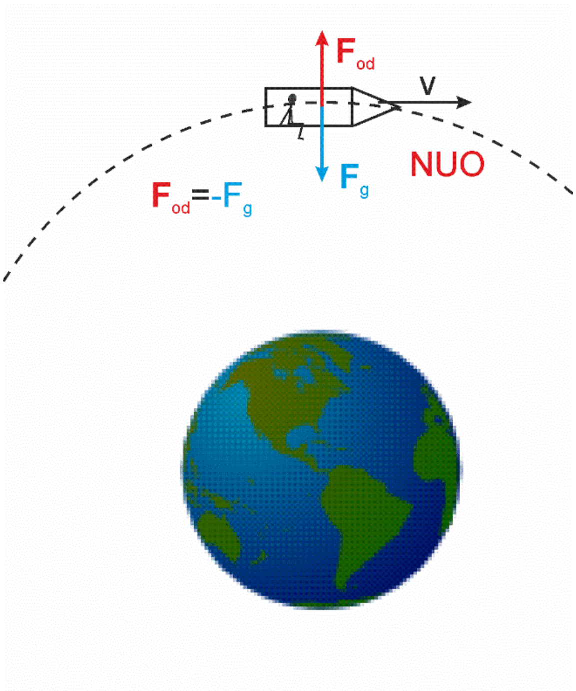
Warunek na równowagę wartości siły grawitacyjnej i wartości siły odśrodkowej zapisujemy w postaci równania

$$G\frac{M_N m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad (2.5)$$

Tutaj M_N oznacza masę ciała niebieskiego, *m* masę ciała orbitującego, *v* prędkość ciała orbitującego, *r* jest odległością od środka ciała niebieskiego do ciała orbitującego (ciało orbitujące traktujemy jako punkt materialny). Powyższy warunek pozwala nam obliczyć wartość prędkości ciała orbitującego po orbicie kołowej o promieniu *r*.

$$v = \sqrt{G\frac{M_n}{r}} \quad (2.6)$$

Jeżeli za *r* przyjmiemy promień Ziemi *r*= 6378km, za M_N masę Ziemi $5.98{\cdot}10^{24}$kg to otrzymamy wartość prędkości 7.91 km/s. Jest to prędkość jaką należy nadać ciału, znajdującego się blisko powierzchni Ziemi, w kierunku stycznym do promienia Ziemi, aby swobodnie spadając na Ziemię nie zbliżało się do jej powierzchni (czyli żeby weszło na orbitę). Oczywiście przy zaniedbaniu oporów powietrza.



Rysunek 2.1.5. Na pasażera w kabinie działa siła grawitacji. Pomimo to kabina stoi w miejscu (w układzie współrzędnych pasażera). Aby stosować drugą zasadę dynamiki pasażer musi dodać odpowiednią siłę pozorną; siłę odśrodkową.

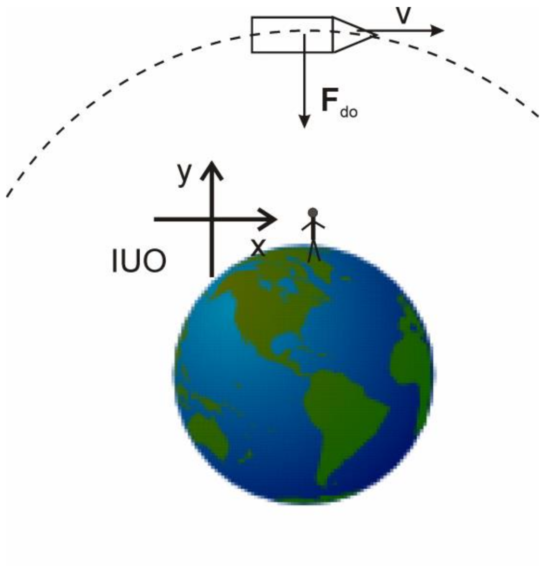
Spróbujmy teraz przeprowadzić analizę stanu nieważkości z punktu widzenia obserwatora związanego z Ziemią (rys. 2.1.6). Obserwator widzi, że kabina porusza się po orbicie kołowej o promieniu *r* wokół Ziemi z prędkością *v*. Wie, że ruch po okręgu wymaga działania siły dośrodkowej; w tym wypadku jest to siła grawitacji. Pisze więc równanie wiążące siłę dośrodkową (grawitacyjną) z przyspieszeniem dośrodkowym w ruchu po okręgu z prędkością liniową *v*.

$$-G\frac{M_Z m_s}{r^2} = -m_s\frac{v^2}{r} \qquad 2.7$$

Otrzymuje dokładnie ten sam związek co poprzednio, ale tym razem bez udziału sił pozornych. Obserwator na Ziemi stwierdza nadto, że na kabinę i jej pasażera działa ta sama siła grawitacji. Nie ma więc żadnych powodów, aby pasażer spadał z przyspieszeniem na podłogę kabiny – mamy zatem stan nieważkości. Obliczona powyżej prędkość (2.6) nazywana jest pierwszą prędkością kosmiczną.

Definicja 2.1.1: Pierwsza prędkość kosmiczna

Pierwsza prędkość kosmiczna jest to prędkość jaką należy nadać ciału, w kierunku stycznym do powierzchni Ziemi, aby ciało to utrzymało się na orbicie kołowej o promieniu równym promieniowi Ziemi.



Rysunek 2.1.6. W IUO związanym z Ziemią kabina porusza się po torze kołowym. Jest to możliwe wtedy, gdy na kabinę działa siła skierowana do środka okręgu, po którym przesuwa się kabina. Źródłem tej siły jest grawitacja.

Oczywiście, ze względu na góry i atmosferę nie można zawieszać satelitów tuż nad powierzchnią Ziemi. W praktyce na wysokości około 200km nad powierzchnią Ziemi sztuczka ta już udaje się. Różnica prędkości orbitalnych dla orbit kołowych o promieniu równym promieniowi Ziemi i promieniowi Ziemi plus dwieście kilometrów jest znikoma.

Uwaga 2.1.1:

Tak niskie orbity nie są zbyt trwałe, gdyż nawet na tej wysokości istnieje rzadka atmosfera, która hamuje satelitę i powoduje jego powolny spadek.

Chciałbyś zaznać stanu nieważkości? Nie musisz lecieć na orbitę. W sumie gdy zeskoczysz ze stopnia schodu przez moment jesteś w stanie nieważkości, czyli spadasz swobodnie z przyspieszeniem **g**. Niestety, opory powietrza powodują, że zwiększając prędkość zmniejsza się twoje przyspieszenie, co kończy stan nieważkości (o hamowaniu w powietrzu było w (§TVI 4.3.1)). Jeżeli chcesz być dłużej niż moment w stanie nieważkości, nie wydając milionów na lot w kosmos to jest jeszcze inna opcja, czyli lot paraboliczny samolotem.

Przykładowo firma[5] „Space Adventure” zaprasza. Twój lot odbędzie się w Star City (Gwiezdne Miasteczko w dawnym ZSRR), w samolocie Iliuszyn 76 (IL-76 MDK), specjalnie skonstruowanym do celów szkolenia kosmonautów w stanie nieważkości (rys. 2.1.7). Żeby umożliwić stan nieważkości, IL-76 MDK leci lotem parabolicznym. Lot rozpoczyna się poziomo, a następnie dziób pojazdu wznosi się pod kątem 45 stopni. W tym czasie pasażerowie doznają przeciążenia i ich ciała ważą dwukrotnie więcej. Następnie samolot kieruje swój lot ku dołowi po łuku paraboli i rozpoczyna się stan nieważkości. Dlaczego akurat po paraboli? Zgodnie z rozwiązaniem uzyskanym w (§TVI 3.5) swobodnie zrzucony kamień, to jest przy braku oporów powietrza, porusza się po łuku paraboli. A każdy swobodny lot oznacza opadanie z przyspieszeniem **g**, czyli stan nieważkości. Nawet gdy kamień wznosi się po łuku paraboli to „opada” z przyspieszeniem **g**; to znaczy, że hamuje w pionie z przyspieszeniem równym przyspieszeniu ziemskiemu. W czasie lotu po trajektorii parabolicznej odpowiadającej swobodnemu rzutowi, każda z osób w samolocie doznaje uczucia "stanu lewitacji". Następnie samolot wychodzi z nurkowej paraboli i kiedy wszyscy znajdą się bezpiecznie na miękkiej podłodze manewr jest powtarzany. Każdy lot paraboliczny wymaga pokonania różnicy poziomów z około 7600 m do ponad 10 000m. Pasażerowie uzyskują w czasie każdej paraboli około 20-30 sekund mikrograwitacji. Zazwyczaj jest od 8 do 12 lotów parabolicznych w czasie całej podróży. Mogłoby się wydawać, że 30 sekund trwania zerowej grawitacji to bardzo mało. Jednak jest to więcej niż chwila nieważkości przy skoku ze stołka, a przy tym wystarczająco długo by przez 30 sekund latać w całej przestrzeni pomieszczenia w samolocie, wykonując powietrzne ewolucje i ćwiczenia jak olimpijski gimnastyk. Podłoga kabiny przeznaczonej dla pasażerów wyłożona jest miękką okładziną tak, aby w momencie „wyłączenia” stanu nieważkości pasażerowie mogli bez szkody dla siebie na nią spaść. Do całej sztuczki potrzebny jest samolot z mocnymi silnikami. Przy prędkościach charakterystycznych dla samolotów opory powietrza są naprawdę duże, tak że utrzymanie toru parabolicznego wymaga sporej mocy.

Izaak Newton na drodze do swojej teorii grawitacji wspierał się prawami Keplera. Prawo powszechnego ciążenia, jako ogólniejsze od prawa Keplera powinno nam dać – no właśnie prawa Keplera. I tak się dzieje. Jak zobaczmy poniżej (część 4 bieżącego tematu) rozwiązaniem zagadnienia ruchu dwóch ciał są orbity eliptyczne z jednym z tych ciał w ognisku elipsy (I prawo Keplera), w takim ruchu spełniona jest zasada zachowania pędu, co jak wiemy daje drugie prawo Keplera (okr. TVI 2.21a). Pozostaje nam zmierzyć się z trzecim prawem Keplera. Wzór (2.6) daje nam prędkość ciała na orbicie kołowej o promieniu r wokół ciała o masie M. Okres ruchu wyrazi się wzorem

[5] Nie wiem czy ta firma istnieje w momencie gdy czytasz te słowa. Nawet jeżeli nie to być może jest jeszcze jakaś inna firma oferująca takie doznania.

Rysunek 2.1.7. Z lewej: IL-76 MDK; z prawej: panowie - na fikanie macie około 30 sekund

$$T = \frac{v}{2\pi r} \text{ podstawiając} (2.6) \; T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \qquad 2.8$$

Dla orbity kołowej r jest równa dużej półosi elipsy a. Mamy zatem

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{r^3}{GM} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \qquad 2.9$$

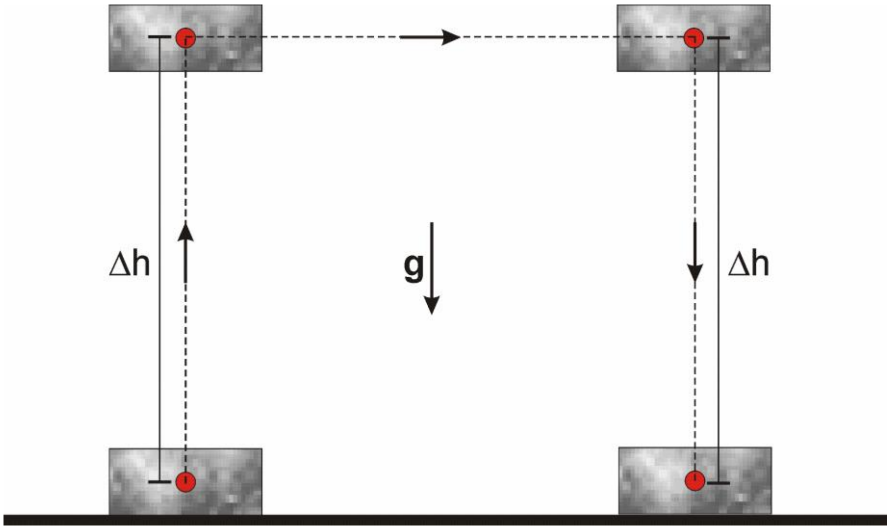
Czyli trzecie prawo Keplera, ale tym razem mamy dobrze określoną wartość stałej. Pokażemy (w części (4)), że ścisłe rozwiązanie zagadnienia ruchu dwóch ciał pod wpływem własnej siły grawitacji prowadzi do orbit eliptycznych, z jednym z ciał w ognisku. W takim przypadku dalej obowiązuje trzecie prawo Keplera, ale za stałą wyrażoną wzorem

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM\left(1 + \frac{m}{M}\right)} = const \qquad 2.10$$

Równanie (2.10) uwzględnia fakt, że oba ciała krążą wokół wspólnego środka masy. Ale okres T wyznaczony jest jako okres obiegu (po orbicie eliptycznej) jednego ciała, względem jednego z ognisk elips, w którym tkwi drugie ciało. Z tym drugim ciałem związany jest układ współrzędnych, który jest układem nieinercjalnym. Wzór (2.10) pokazuje, że stosunek sześcianu okresu do kwadratu długiej półosi orbity jest stały ale tylko dla danego ciała. To znaczy, że dane ciało poruszające się po różnych orbitach względem tego samego ciała centralnego ma ten stosunek taki sam dla każdej orbity. Gdy weźmiemy inne ciało o innej masie m_2, to stosunek ten zmieni wartość, chyba że możemy stosować przybliżenie (2.9). Stosunek m/M jest dla ciał w układzie słonecznym, gdy za M przyjmiemy masę Słońca, bliski zera. Dla największej planety Jowisz jego wartość wynosi 1.00095, dla Ziemi zaledwie 1.000003, więc stosowanie przybliżonego wzoru (2.9) jest w takich sytuacjach usprawiedliwione.

3. Praca w polu grawitacyjnym

Temat pracy w polu grawitacyjnym jest blisko związany z tematem jej grawitacyjnej energii potencjalnej, która to była omawiana w temacie (TII), dla przypadku stałego pola: **g**=const. W bieżącym temacie przyjrzymy się sprawie bliżej, mając na uwadze fakt, że przyspieszenie grawitacyjne zmienia się wraz z odległością od źródłowej masy. Na rysunku (3.1) przedstawiona jest trasa wzdłuż, której został przemieszczony bloczek. Środek masy bloczka zaznaczony jest na czerwono.

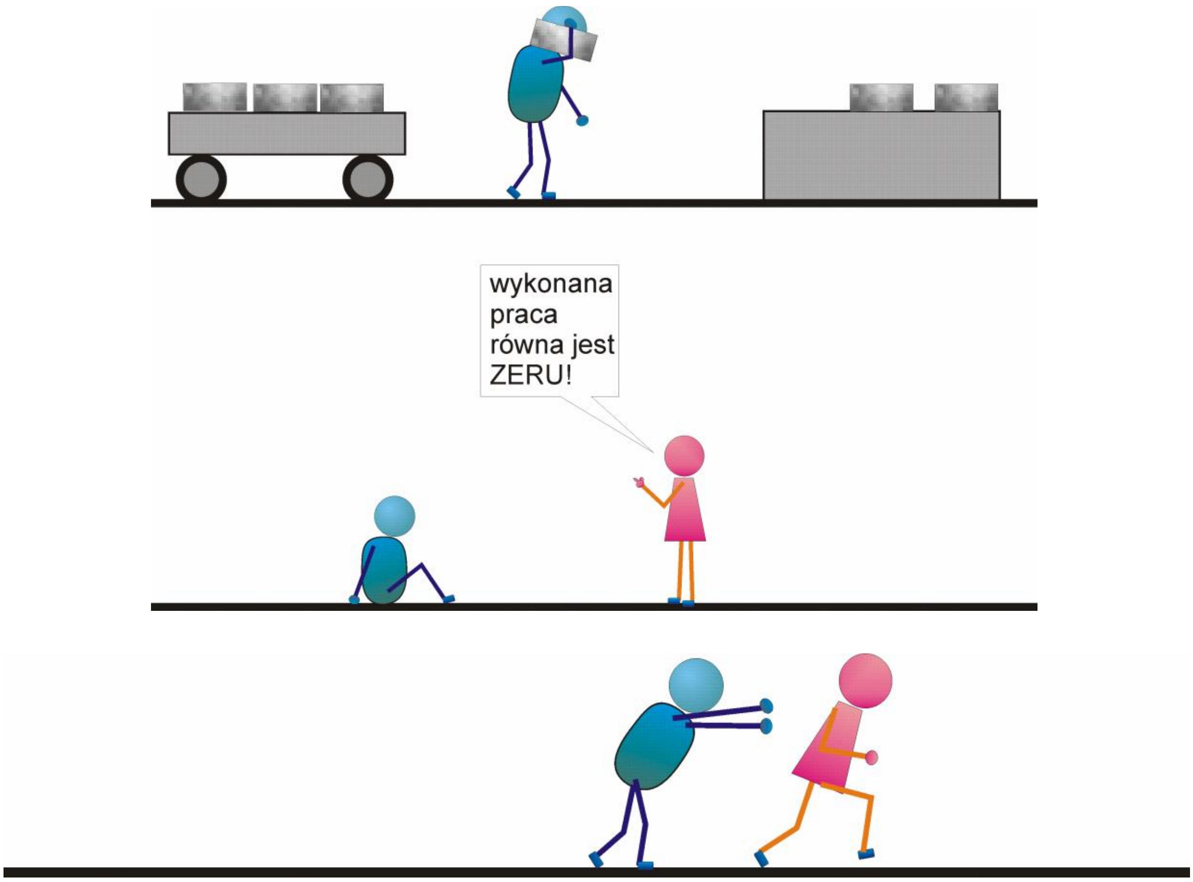


Rysunek 3.1 Gdy bloczek powraca na poziom początkowy, to jego energia nie ulega zmianie. Praca wykonana nad bloczkiem jest równa zeru.

Na pierwszym odcinku bloczek został podniesiony na wysokość Δh. Zewnętrzna siła wykonała pracę przeciw polu grawitacyjnemu, zgodnie z ruchem bloczka. W efekcie bloczek zyskał energię potencjalną. Mówimy, że siły zewnętrzne wykonały nad nim dodatnią pracę. Na drugim odcinku bloczek został przesunięty równolegle do poziomu (prostopadle do kierunku działania siły grawitacji). Jego energia nie zmieniała się. Na tym odcinku siły zewnętrzne nie wykonały żadnej pracy nad bloczkiem. Na trzecim odcinku siły zewnętrzne wykonują pracę przeciw sile grawitacji – siły te skierowane są przeciwnie do kierunku przesunięcie bloczka. Mówimy, że siły zewnętrzne wykonały nad nim ujemną pracę, lub, że to blok wykonał pracę nad siłami zewnętrznymi. Całkowita praca wykonana przez siły zewnętrzne nad blokiem jest równa zeru. Na końcu drogi energia bloczka (potencjalna, kinetyczna i każda inna) jest taka jak na początku drogi.

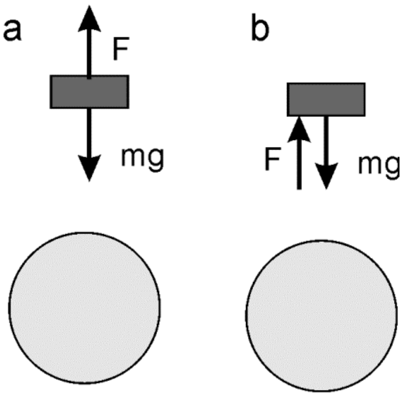
Zwykliśmy podchodzić do zagadnienia pracy bardzo osobiście. Stwierdzenie, że ktoś kto przenosił ciężary z jednej platformy na drugą nie wykonał przy tym żadnej pracy może doprowadzić do awantury (rys. 3.2). Jednak, jak już o tym mówiłem, w fizyce rozumiemy pracę inaczej (dygresja: TII 5.1).

Pytamy się o efekt energetyczny pracy wykonanej nad danym układem (ten układ to może być choćby worek kartofli). Jeżeli układ zyskuje energię to praca nad nim wykonana jest dodatnia. Jeżeli nic się nie zmienia to wykonana nad nim praca jest równa zeru. Jeżeli układ traci energię to wykonana nad nim praca jest ujemna, lub to układ wykonuje pracę nad siłami zewnętrznymi. Fizyczne pojęcie pracy zazwyczaj niewiele ma wspólnego z pojęciem potocznym. Oznacza raczej przepływ energii z jednego układu do drugiego.



Rysunek 3.2. Praca w potocznym sensie ma inne znacznie niż w fizyce.

Do tej pory używaliśmy przybliżonego wzoru na pracę w polu grawitacyjnym – $W = mgh$. Przyjmowaliśmy, że jeżeli h nie jest duże to natężenie pola grawitacyjnego $\mathbf{g}$ można uznać za stałe. Ale zgodnie ze wzorem (2.1) natężenie pola grawitacyjnego zmienia się wraz z odległością od środka Ziemi (lub innego obiektu o kulisto-symetrycznym rozkładzie masy). Obliczymy dokładny wzór na pracę wykonaną przy przesunięciu ciała o masie m od punktu A o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_A$ do punktu B o wektorze wodzącym $\mathbf{r}_B$, w polu grawitacyjnym ciała niebieskiego o masie M_N (układ współrzędnych jest zaczepiony w środku planety czy gwiazdy). Niech w punkcie A w okolicy ciała niebieskiego o masie M_N spoczywa ciało o masie m. Powoli przesuwamy to ciało do odleglejszego punktu B. Jaką przy tym wykona pracę pole grawitacyjne (rys. 3.3)?



Rysunek 3.3. a) Podnosząc ciało w polu grawitacyjnym działam siłą równoważącą siłę ciążenia, tak by ciało mogło przemieścić się od punktu początkowego do punktu końcowego ruchem jednostajnym; b) gdy ciało opada podtrzymuję je siłę równoważącą siłę grawitacji tak aby to ciało mogło opaść ruchem jednostajnym z punktu początkowego do punktu końcowego.

Korzystamy ze wzoru na pracę (TII 5.3), oraz ze wzoru (1.1.2) na siłę grawitacji F_g. Praca pola grawitacyjnego wynosi

$$W'_{A\to B} = -\int_{r_A}^{r_B} F_g \mathrm{d}r = -GM_N m \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = GM_N m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \qquad 3.2$$

Przy czym żaden z punktów A i B nie może leżeć wewnątrz ciała niebieskiego. Znak minus we wzorze (3.2) bierze się stąd, że przy podnoszeniu ciała, kierunek działania siły grawitacji jest przeciwny do kierunku przesunięcia. Praca wychodzi ujemna, co oznacza, że pole grawitacyjne jest biorąc energii, tak jak na przykład sprężyna przy naciąganiu. Możemy też powiedzieć, że biorąc energii jest przemieszczane ciało, ciało zyskuje energię potencjalną, która przy spadku zamienia się na energię kinetyczną. Na jednostkę masy otrzymamy wzór

$$W'_{A\to B} = GM_N\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \qquad 3.2a$$

Gdy oddalimy punkt B do nieskończoności to wzór (3.2a) przejdzie w

$$W'_{A\to\infty} = -GM_N\frac{1}{r_A} \qquad 3.3$$

Jest to praca jaką zyskuje pole grawitacyjne przy przesunięciu jednostkowej masy A do nieskończoności. Zyskuje gdyż mamy znak minus, więc to pole grawitacyjne jest biorąc energii. Gdybyśmy obliczali pracę wykonaną przez siłę zewnętrzną to byłby znak plus. Gdyż źródło tej siły zewnętrznej, przy podnoszeniu ciała traciłoby energię na rzecz pola grawitacyjnego.

Chcemy teraz każdemu punktowi P przestrzeni przyporządkować liczbę V_P, taką, że praca włożona w pole grawitacyjne przy przesunięciu ciała o jednostkowej masie od punktu A do punktu B, będzie równa różnicy tych liczb V_B-V_A, czyli będzie określała energię $W_{A\to B}$, wydatkowaną przez siłę zewnętrzną na drodze od A do B. Ta energia wydatkowana będzie równa minus energii $W_{A\to B}$

=-$W'_{A\rightarrow B}$, czyli minus energii wydatkowanej przez pole grawitacyjne. Patrząc na wzór (3.2a) widać jak powinien wyglądać wzór na V_P

$$V_P = -GM_N \frac{1}{r_P} \tag{3.4}$$

Tak zdefiniowany potencjał mówi nam jaka musi zostać wykonana praca, aby ciało o jednostkowej masie przenieść z punktu A do nieskończoności. Jednocześnie informuje nas ile energii zyska na tym procesie pole grawitacyjne, lub o ile zwiększy się energia potencjalna ciała. Zgodnie ze wzorem (3.4) w nieskończoności potencjał spada do zera. Zobaczmy zresztą jak to działa. Obliczę różnicę potencjałów dla punktu A i punktu w nieskończoności.

$$\Delta V_{A\rightarrow\infty} = V_\infty - V_A = GM_N\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{r_A}\right) = \frac{GM_N}{r_A} = -W'_{A\rightarrow\infty} \tag{3.5a}$$

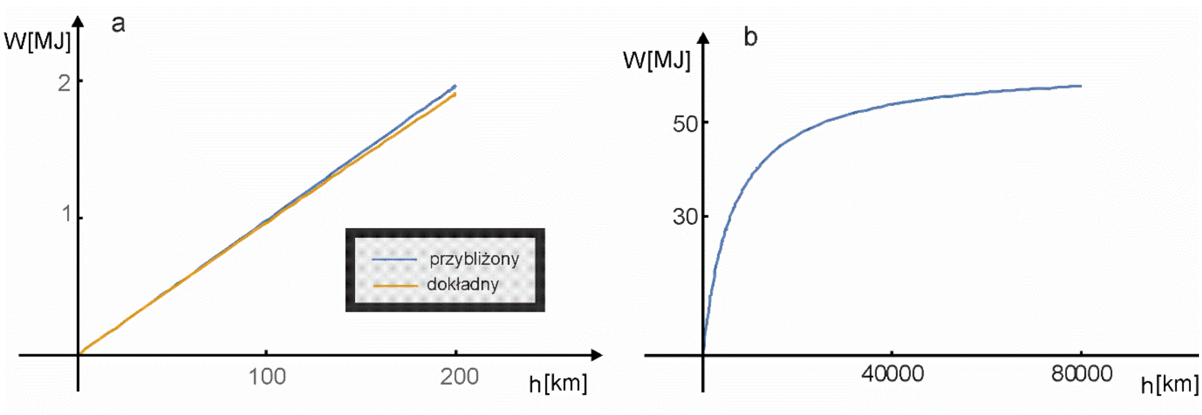
Wartość tej różnicy jest równa pracy jaką należy wykonać nad danym ciałem o jednostkowej masie aby go przenieść z punktu A do nieskończoności. Podobnie jeżeli przesunięcie następuje od punktu A do punktu B to różnica potencjałów daje

$$\Delta V_{A\rightarrow B} = V_B - V_A = GM_N\left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right) = -GM_N\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = -W'_{A\rightarrow B} \tag{3.5b}$$

Zauważ, że w nieskończoności potencjał jest równy zeru, jest to zarazem największa możliwa wartości energii potencjalnej ciała w polu grawitacyjnym ciała niebieskiego. Wartości mniejsze od zera jest wartością ujemną, czyli przy tak przyjętej definicji, potencjały są liczbami ujemnymi. Ważne są dla nas różnice potencjału. To oznacza, że w każdym punkcie przestrzeni możemy dodać do wartości potencjału tą samą liczbę, co nie zmieni wartości różnicy. Tą swobodę nazywamy cechowaniem. Możemy tak cechować potencjał, że zero energii wypadnie przy powierzchni planety (na przykład Ziemi). Zero energii potencjalnej przyjmujemy przy powierzchni Ziemi, gdy korzystamy ze wzoru $E_p=mgh$.

Jak wynika ze wzoru (3.2) praca wykonana przez pole grawitacyjne przy przejściu od punktu bliższego A do dalszego B jest ujemna. Jest to jednocześnie energia potencjalna jaką zyskuje pole grawitacyjne lub ciało. Czy energia może być ujemna? Energię potencjalną możemy traktować jako formę długu pola względem ciała. Ciało podniesiona na niewielką wysokość h nad Ziemię ma energię potencjalną mgh, co oznacza, że przy spadku cała ta energia może zostać zamieniona na energię kinetyczną tego ciała. Zauważ, że ciało samo z siebie nie może mieć energii potencjalnej. Energia potencjalna pojawia się zawsze przy oddziaływaniu na przykład ze sprężyną, lub polem grawitacyjnym lub polem elektrycznym. Opuszczając ciało w polu grawitacyjny przykładamy siłę skierowaną przeciwnie do kierunku siły grawitacyjnej, wartość pracy jest więc ujemna (siła działa przeciwnie do przesunięcia). Ciało znajdzie się w sytuacji innej niż ciało uniesiona na pewną wysokość nad powierzchnią. Ciało uniesione swobodnie puszczone zamieni energię potencjalną na kinetyczną. Ciało opuszczone na powierzchnię planety niczego bez pomocy z zewnętrz nie zrobi. Można uznać, ze zostało uwięzione w polu grawitacyjnym a wyzwolenie się z więzów oznacza konieczność spłaty długu energetycznego wobec pola. Dlatego sensownie jest uznać, że z punktu widzenia ciała energia pola grawitacyjnego to jego dług, czyli wartość ujemna. Tak też będziemy przyjmowali

Rysunek (3.4a) porównuje wartość pracy wykonanej przy podniesieniu jednostkowej masy na daną wysokość nad powierzchnię Ziemi, obliczonej ze wzoru dokładnego (3.5) i przybliżonego *mgh*. Widać, że przy zmianie wysokości o kilka tysięcy metrów obliczone różnice są tak małe, że w wielu praktycznych zagadnieniach nie mają znaczenia. Rysunek (3.4ba) pokazuje wartość pracy przy przeniesieniu ciała na większą wysokość (do 80 000km). Widać, że kiedy wysokość przekracza kilka tysięcy kilometrów przyrost wartości pracy szybko spada wraz z przyrostem wysokości. Nie może to dziwić biorąc pod uwagę, że promień Ziemi to ok. 6400km.

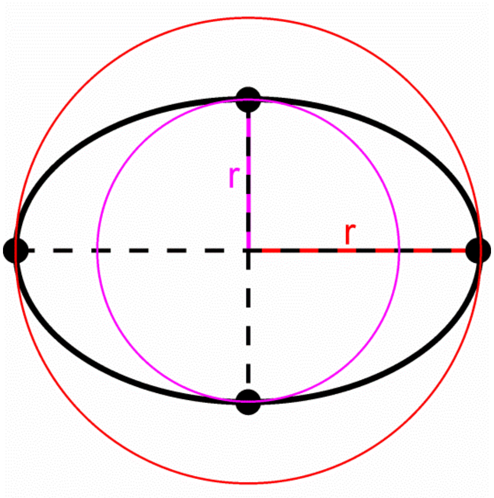


Rysunek 3.4. a) wartość pracy wykonanej nad masą m=1kg przeciwko polu grawitacyjnemu Ziemi przy przejściu różnicy wysokości od zero do dwustu kilometrów nad powierzchnię Ziemi nad masą 1kg. Praca obliczona jest ze wzoru dokładnego (3.5b) i przybliżonego $W=mgh$. Widać, że do wysokości niskich orbit satelitarnych (ok. 200km) obie linie biegną blisko siebie; b) wartość pracy wykonanej nad masą m=1kg przeciwko polu grawitacyjnemu Ziemi przy przejściu różnicy wysokości od zero do 80000 kilometrów nad powierzchnię Ziemi. Tym razem widać wyraźny spadek przyrostu pracy z wysokością. Ale dla wysokości 6400km nad powierzchnią Ziemi pole grawitacyjnej jest cztery razy słabsze niż na powierzchni.

Możemy teraz określić energię całkowitą E_c satelity o masie m na orbicie kołowej i eliptycznej wokół ciała o dużo większej masie M. Satelita krąży po orbicie o promieniu R. Energia ta jest równa sumie energii kinetycznej i potencjalnej. Korzystając ze wzoru (2.6) na prędkość satelity na orbicie kołowej oraz ze wzoru (3.4) na potencjał mamy

$$E_c = G\frac{mM}{2R} - G\frac{mM}{R} = -G\frac{mM}{2R} \qquad 3.6.$$

Znak minus wynika z tego, że teraz przenosimy satelitę z nieskończoności do punktu odległego o R od środka Ziemi. Energia potencjalna satelity jest więc ujemna. Jest to energia jego wiązania z polem grawitacyjnym. Widzimy, że energia całkowita jest ujemna, co wynika z faktu, że ujemna energia potencjalna jest dwa razy większa od dodatniej energii kinetycznej satelity. Podobnie będzie dla orbity eliptycznej. Dla orbity eliptycznej ze związku (3.6) możemy skorzystać w punktach, w których satelita przecina proste wyznaczające oś małą i wielką orbity eliptycznej. Tam krzywizna orbity jest taka jak krzywizna okręgu o promieniu równym, odpowiednio małemu i dużemu promieniowi orbity eliptycznej (rys. 3.5). Zatem w tych punktach możemy uznać, że lokalnie satelita porusza się po orbicie kołowej i zastosować wzór (3.6). Jednak zasada zachowania energii mówi nam, że energia jest stała, co pozwala nam uznać, że związek (3.6) jest ważny w każdym punkcie orbity.



Rysunek 3.5. W czterech wyróżnionych punktach elipsa jest styczna do okręgów o promieniu równym, odpowiednio dużej i małej osi elipsy. Oznacza to, że krzywizna elipsy w tych punktach jest taka sama jak krzywizna odnośnych okręgów i ruch w tych punktach można analizować jak ruch po okręgu o danym promieniu

Założenie, że masa *M* ciała centralnego jest dużo większa niż orbitującego, pozwala nam przyjąć, że satelita ma zaniedbywalnie mały wpływ na ciało centralne – środek masy układu wypada bardzo blisko środka masy ciała centralnego. W przypadku układu Ziemia-Księżyc założenie to nie jest dobrze spełnione. Układ krąży wokół wspólnego środka masy. Jednak dalej spełniona jest zależność (3.6). Mamy zatem

Fakt: 3.1:

W układzie dwóch ciał oddziałujących grawitacyjnie energia potencjalna układu jest dwukrotnie większa od energii kinetycznej.

W (§TXIV 4) pokazaliśmy, że gdy siły są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości to pole jest zachowawcze, to znaczy, że praca po krzywej zamkniętej jest równa zeru. Oznacza to, że pole grawitacyjne jest polem zachowawczym z czego korzystałem rysując rysunek (3.2).

Fakt 3.1:

Pole grawitacyjne jest polem zachowawczym

Wiemy już, że wektorowe pole zachowawcze możemy skutecznie reprezentować przez funkcję skalarną nazywaną potencjałem tego pola. Z potencjałem spotkaliśmy się powyżej i w (§TII 7). Poświęcę temu ważnemu pojęciu więcej uwagi.

3.1. Potencjał pola grawitacyjnego

Na podstawie tego co zostało już powiedziane możemy zdefiniować potencjał pola grawitacyjnego dla masy punktowej lub ciała o sferycznie symetrycznym rozkładzie masy

Definicja 3.1.1: Potencjał pola grawitacyjnego od masy punktowej (sferyczno-symetrycznej)

Potencjał pola grawitacyjnego od masy punktowej M w punkcie A odległym od $\boldsymbol{r}_A$ *od tej masy wyraża się wzorem*

$$V_A = -G\, M\, \frac{1}{r_A} + C \qquad 3.1.1$$

Gdzie C jest dowolną stałą liczbową

Fakt: 3.1.1.

Wymiarem potencjału jest [m^2/s^2]

Potencjał przyporządkowuje każdemu punktowi przestrzeni taką liczbę, że różnica tych liczb mówi o pracy włożonej przy przeniesieniu jednostkowej masy od punktu A do punktu B. Zatem praca wykonana w polu grawitacyjnym przy przeniesieniu masy *m* od punktu A o potencjale V_A, do punktu B o potencjale V_B, jest równa różnicy potencjałów pomiędzy tymi punktami

$$W_{A\to B} = m(V_B - V_A) \qquad 3.1.2$$

Jak już zostało powiedziane, w różnicy potencjałów znika wielkość *C*. Dzięki stałej *C*, jaką zawsze możemy dodać do potencjału (byleby we wszystkich punktach przestrzeni) punkt o zerowym potencjale możemy zdefiniować gdziekolwiek. We wzorze (3.4) jest on w nieskończoności. Możemy jednak dodać do potencjału (3.4) taką liczbę *C*, że zero potencjału znajdzie się przy powierzchni na przykład Ziemi. Wtedy wrócimy do przypadku z prostych zadań na energię potencjalną, opartych o przybliżony wzór *mgh*. Zgodnie z tym wzorem zero potencjału wypada dla *h*=0, co zwykle oznacza powierzchnię Ziemi.

Energia potencjalna ciała o masie *m*, w punkcie A, wynosi

$$E_{pA} = -Gm\, M\, \frac{1}{r_A} + mC \qquad 3.1.3$$

Wzór bierze się oczywiście stąd, że potencjał to energia potencjalna ciała na jednostkę masy.

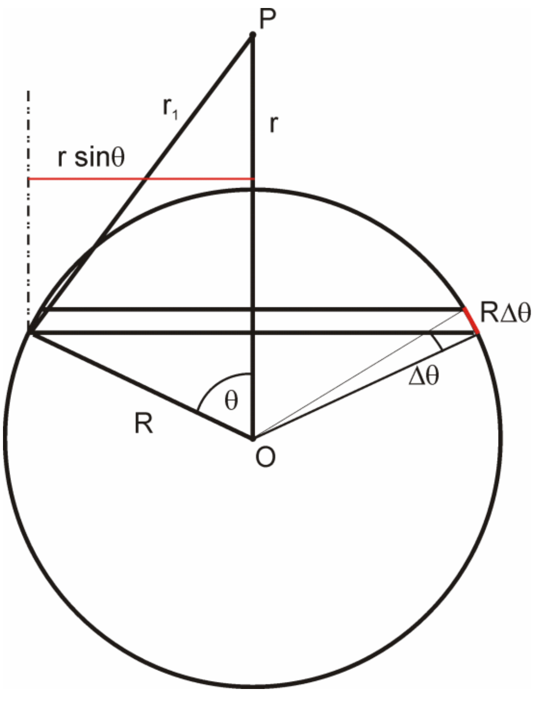
3.1.1. Potencjał powłoki sferycznej

Obliczmy wartość potencjału grawitacyjnego w wybranym punkcie P od jednorodnej powłoki sferycznej. Rozważmy powłokę sferyczną o promieniu *R*. Punkt P o masie m znajduje się w odległości r od środka powłoki (rys. 3.1.1). Obliczymy elementarną masę wybranego na rysunku nieskończenie cienkiego pierścienia powłoki

$$\mathrm{d}M_p = 2\pi R\sin(\theta)Rd\theta\sigma = 2\pi R^2\sin(\theta)d\theta\sigma \qquad 3.1.4$$

Biorąc pod uwagę, że wszystkie punkty pierścienia są jednakowo oddalone od punktu P łatwo jest obliczyć, że element potencjału pola grawitacyjnego od elementarnego pierścienia w punkcie P wynosi

$$\mathrm{d}E_p = -\mathrm{G}\frac{\mathrm{d}M_p}{r_1} = -G\frac{2\pi R^2\sin(\theta)d\theta\sigma}{r_1} \qquad 3.1.5$$



Rysunek 3.1.1. Ilustracja do obliczeń potencjału powłoki sferycznej.

Stosują prawo cosinusów do trójkąta utworzonego z odcinków *r*, *r₁*, *R* mamy

$$r_1^2 = r^2 + R^2 - 2Rr\cos(\theta) \qquad 3.1.6$$

Obliczymy różniczkę z obu stron tego równania

$$2r_1\mathrm{d}r_1 = 2rR\sin(\theta)\mathrm{d}\theta \qquad 3.1.7$$

Wzór (3.1.5) na element potencjału przyjmie postać

$$\mathrm{d}E_p = -\mathrm{G}\frac{2\pi R\sigma}{r}\mathrm{d}r_1 \qquad 3.1.8$$

Potencjał od całej powłoki to suma (całka) elementów potencjału od wszystkich takich pierścieni. Słowem musimy wysumować wyrażenie (3.1.8) po wszystkich nieskończenie małych dr_1. Gdy punkt P leży na zewnątrz powłoki wtedy r_1 zmienia się w granicach od *r-R* do *r+R* i suma po wszystkich nieskończenie małych przyrostach wynosi

$$E_p = -\mathrm{G}\frac{2\pi R\sigma}{r}\int_{r-R}^{r+R}\mathrm{d}r_1 = -\mathrm{G}\frac{2\pi R\sigma}{r}\,2\mathrm{R} = -\mathrm{G}\frac{4\pi R^2\sigma}{r} = -G\frac{M_p}{r} \qquad 3.1.9$$

Gdzie M_p jest masą powłoki. Widać, że dla punktu leżącego na zewnątrz sfery potencjał wyraża się tak jakby cała masa sfery skupiona była w jednym punkcie. Z faktu tego już korzystałem (tw. 1.2.1), teraz go udowodniliśmy. Gdy punkt P leży wewnątrz powłoki sferycznej wtedy sumowanie rozciąga się w granicach od *R-r* do *R+r* i nasza suma ma postać

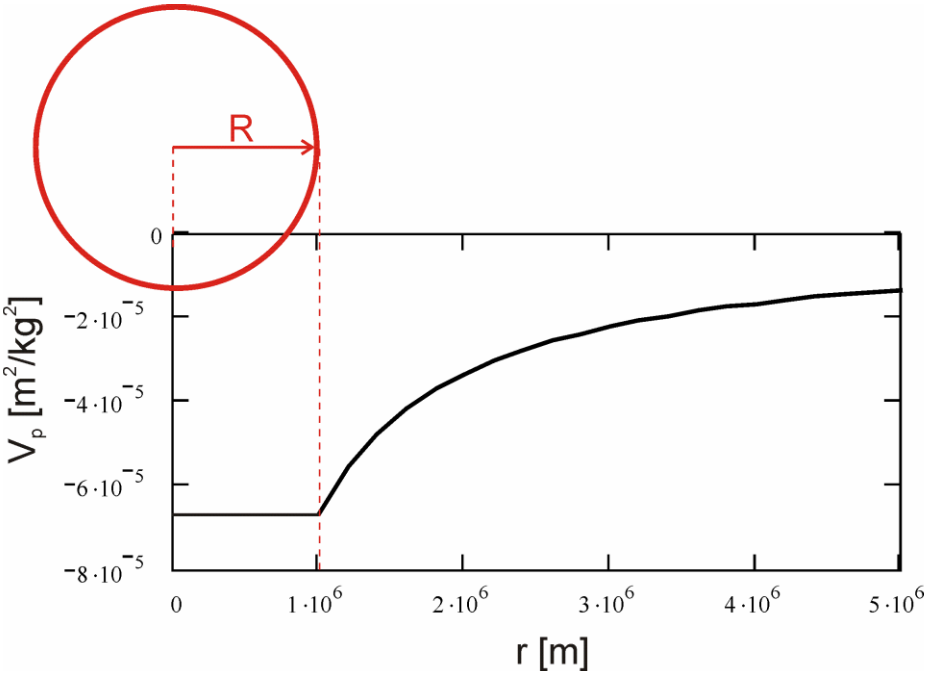
$$E_p = -\mathrm{G}\frac{2\pi R\sigma}{r}\int_{R-r}^{r+R}\mathrm{d}r_1 = -\mathrm{G}\frac{2\pi R\sigma}{r}\,2r = -G4\pi R\sigma = -G\frac{M_p}{R} \qquad 3.1.10$$

Potencjał wewnątrz powłoki sferycznej jest stały! Rysunek (3.1.2) pokazuje przebieg potencjału dla wybranej powłoki sferycznej.

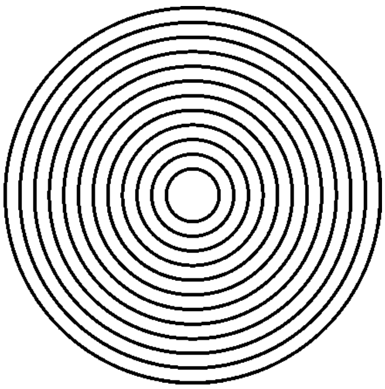
Potencjał grawitacyjny od jednorodnej kuli dla punktu leżącego na zewnątrz tej kuli można łatwo określić. Kulę można traktować jako złożoną ze współśrodkowych powłok (rys. 3.1.3). Potencjał w punkcie zewnętrznym P zależy tylko od masy powłoki i odległości od jej środka. Wszystkie powłoki tworzące kulę mają środek w tym samym punkcie. Mamy więc proste sumowanie

$$V_K = -G\frac{1}{r}\int_0^{\mathrm{M}_N}\mathrm{dM}_p = -G\frac{M_k}{r} \qquad 3.1.11$$

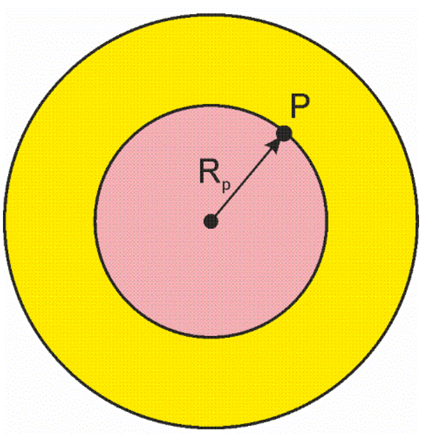
Gdzie M_N jest masą największej powłoki. Dla punktów leżących wewnątrz kuli sytuacja jest bardziej złożona. Kulę możemy podzielić na dwie części, tą pod punktem i tą nad punktem (rys. 3.1.4). Zaczniemy od wyznaczenia siły działającej na punkt materialny w funkcji jego odległości od środka kuli.



Rysunek 3.1.2. Przebieg potencjału dla wybranej powłoki sferycznej. W przykładzie masa powłoki wynosi M_S=10^{12}kg, jej promień R=1000km



Rysunek **3.1.3**. Kulę możemy rozłożyć na nieskończenie cienkie współśrodkowe sfery



Rysunek 3.1.4. Dla punktu P leżącego wewnątrz kuli, kulę możemy podzielić na część leżącą nad sferą obejmującą punkt P i pod tą sferą.

Kiedy pod sobą mamy kulę o masie M_{KP} (czyli od środka do punktu P) i promieniu R_P, to wartość siły grawitacji działającej na masę m wynosi

$$F_P = G\frac{m\mathrm{M}(R_P)}{R_P^2} \qquad 3.1.12$$

To, co jest nad nami nie ma znaczenia. Potencjał wewnątrz powłoki sferycznej jest stały. A jak stały jest potencjał to jego gradient jest równy zeru, a zatem, i siła od powłoki sferycznej jest równa zeru. Biorąc pod uwagę, że

$$\mathrm{M}(R_P) = \frac{4}{3}\pi\rho R_P^3 \qquad 3.1.13$$

Gdzie ρ jest gęstością kuli. Wstawiając (3.1.13) do (3.1.12) otrzymujemy

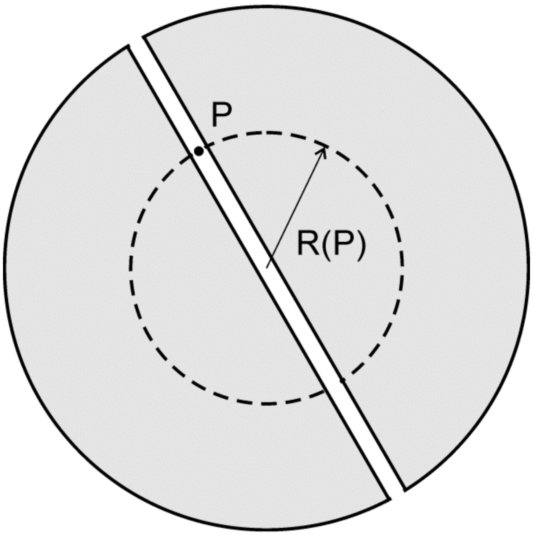
$$\mathrm{F}(R_P) = \frac{4}{3}G\rho m R_P \qquad 3.1.14$$

Wzór (3.1.14) opisuje wartość siły grawitacji, działającej na masę punktową *m*, dla jednorodnej kuli o promieniu R_P. Widać, że siła jest proporcjonalna do promienia R_P, a nie odwrotnie proporcjonalna do kwadratu tegoż promienia. Trzeba jednak pamiętać, że masa przyciągającej kuli została wyrażona przez jej gęstość i objętość. Objętość zawiera R_P^3 , co redukuje się z R_p do R_P^{-2} . Nadto wzór (3.1.14) jest mniej ogólny od prawa powszechnego ciążenia (1.1), gdyż obowiązuje tylko na powierzchni kuli o promieniu R_P. Nie mniej przydatny jest na przykład do analizy następującego zagadnienia.

Przyjmijmy, że przez Ziemię przewiercono tunel, o niewielkiej średnicy (rys. 3.1.5). Z wielu względów jest to nierealne, ale przeprowadzamy teraz eksperyment myślowy i problemami praktycznymi nie przejmujemy się. Niech mała kulka spada w tym tunelu. Lecąc w dół mija kolejne warstwy Ziemi. W danym punkcie P ma pod sobą kulkę o średnicy R(P), a nad sobą resztę Ziemi. Możemy powiedzieć, że w tej danej na kulę działa siła dana wzorem (3.1.14), pochodząca od kuli o promieniu R(P). Jaka siła działa na nią od reszty Ziemi? Reszta Ziemi tworzy nad kulą powłokę sferyczną, która składa się z sumy nieskończenie cienkich powłok współosiowych. Od każdej z tych powłok, siła jest równa zeru. Zatem od ich sumy również jest równa zeru. Zatem na naszą kulę działa tylko siła (3.1.14). Musimy ostrożnie uwzględnić znaki. Niech środek układu współrzędnych znajduje się w środku Ziemi. Ponieważ ruch jest jednowymiarowy *R* możemy zamienić na zmienną *x*. Wtedy mamy

$$\mathrm{F}(x) = -\underbrace{\frac{4}{3}G\rho m}_{k}\, x \Rightarrow \mathrm{F}(x) = -kx \qquad 3.1.15$$

Czyli siła działająca wewnątrz tunelu spełnia taką samą relację jak siła sprężystości (wzór TVIII_1.1). Mając siłę opisaną takim wzorem jak w przypadku oscylatora harmonicznego, mamy takie samo rozwiązanie równania ruchu, czyli spodziewamy się ruchu harmonicznego, możesz określić częstotliwość tego ruchu, korzystając z rozwiązań na oscylator harmoniczny przedstawionych w (§TVIII 1).



Rysunek 3.1.5. Ruch kulki w tunelu. Przez Ziemię przewiercony jest wąski tunel, w których podróżuje mała kulka. W punkcie P na kulkę działa grawitacyjnie masa zgromadzona w podkuli o średnicy R(P). Zewnętrzne części masy nie wywierają na kulkę siły. Wewnątrz powłoki sferycznej potencjał jest stały, a zatem jego zmiana jest równa zeru, co zgodnie ze wzorem daje zerową siłę.

Możemy w tym miejscu wrócić do wyjściowego zagadnienia, to jest obliczenia potencjału wewnątrz jednorodnej kuli. Zacznę od wzoru na pracę wykonaną przy przesunięciu kulki o masie *m* wewnątrz jednorodnej kuli. Przesuwanie ciała wewnątrz np. Ziemi jest wysoce kłopotliwe, ale my się praktycznymi aspektami tutaj nie przejmujemy, my przesuwamy myślowo małą, kulistą masę *m* dla potrzeb obliczania rozkładu potencjału, a nie projektujemy doświadczenia polegającego na takim przesuwaniu. Siła jest dana wzorem (3.1.14). Zatem praca na drodze od r=0 do r=R jest równa

$$W_{0\to R} = \frac{4}{3}\pi G\rho m \int\limits_{r=0}^{R} r\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\pi G\rho m R^2 \qquad 3.1.16$$

Zauważ, że ponieważ siła wyraża się tak jak w przypadku sprężyny, pracę mogliśmy policzyć wykorzystując wzór na pole trójkąta. Jest to zmiana energii potencjalnej, czyli różnicą potencjałów przemnożona przez masę *m*, a nam potrzebny jest wzór na potencjał. Różnica potencjałów przemnożona przez masę, daje pracę wykonaną przy przesunięciu tej masy między dwoma punktami. Mamy zatem

$$m\left(V_R - V_0\right) = \frac{2}{3}\pi G\rho m R^2 \Rightarrow V_R = \frac{2}{3}\pi G\rho R^2 + V_0 \qquad 3.1.17a$$

Jeżeli wykorzystamy wzór na objętość kuli to wzór (3.1.17a) przejdzie w

$$V_R = \frac{1}{2}\frac{G}{R}\mathrm{M}(R) + V_0 \qquad 3.1.17b$$

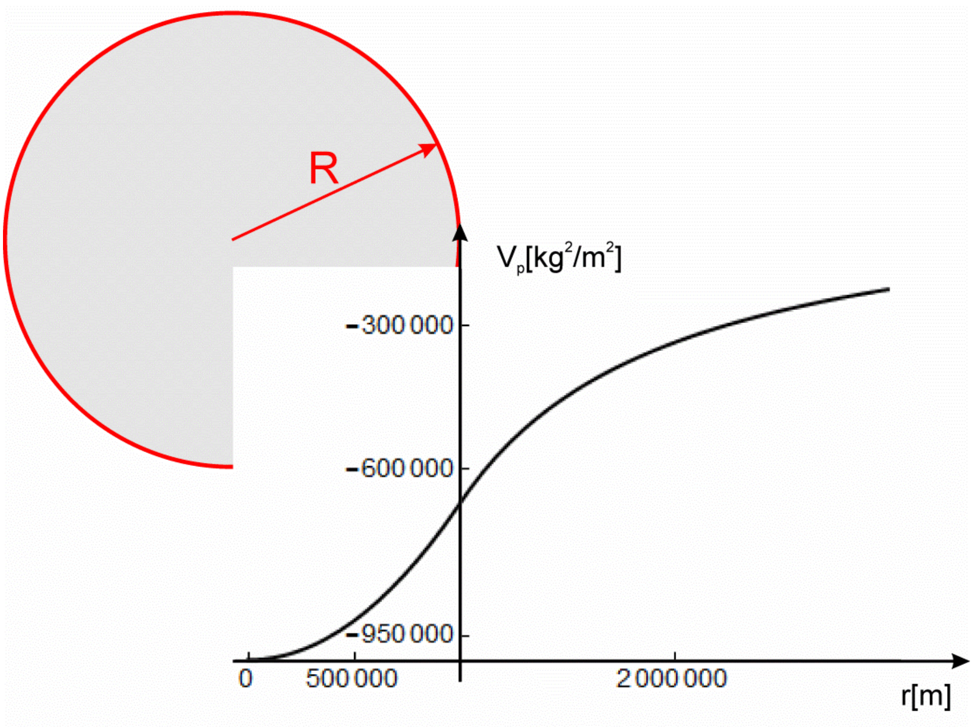
Wzór (3.1.17b) określa potencjał z dokładnością do stałej V_0 (V_0 to potencjał w środku kuli). Wiemy jednak, że dodanie dowolnej wartości do potencjału (byleby w każdym punkcie) niczego nie zmienia w kwestii energii i siły, które z potencjału zwykle wyznaczamy. Wyznaczmy wartość V_0 dla przypadku, gdy zero potencjału znajduje się w nieskończoności. Będziemy wtedy zgodni ze wzorami uzyskanymi dla punktów P leżących poza kulą (3.1.11). Niech zatem dla $R{=}R_K$ potencjał dany wzorem (3.1.17b) będzie równy potencjałowi

$$-G\frac{M}{R_K}=V_0+\frac{1}{2}G\frac{M}{R_K}\Rightarrow V_0=-\frac{3}{2}\frac{GM}{R_K} \qquad 3.1.17a$$

Wzór (3.1.17) podaje wartość potencjału, przy założeniu, że wartość zerowa jest w nieskończoności. Wzór na potencjał wewnątrz kuli przyjmuje postać

$$V_R=\frac{1}{2}\frac{G}{R}\mathrm{M}(P)-\frac{3}{2}\frac{GM}{R_K} \qquad 3.1.18$$

Rysunek (3.1.7) przedstawia pełny wykres potencjału dla kuli



Rysunek 3.1.7. Potencjał kuli w zależności od odległości od jej środka. Kula ma parametry: promień 1000km, masa 10^{22}kg, gęstość 2.39g/cm^3.

3.1.2. Związek między natężeniem pola i potencjałem

Z (TII 7.10) wiemy jaki jest związek między potencjałem a odpowiadającym mu zachowawczym polem wektorowym. Wektor gradientu potencjału *V* pola grawitacyjnego jest proporcjonalny do wektora natężenia **g** tego pola i przeciwnie skierowany. Dokładana relacja ma postać

$$\mathbf{g}=-\nabla V \qquad 3.1.29$$

Korzystają z relacji pomiędzy energią potencjalną $E_{p,}$ a potencjałem *V* oraz siłą przyciągania grawitacyjnego **F** i natężeniem pola grawitacyjnego **g** możemy również zapisać relację:

$$\mathbf{F}=-\nabla E_p \qquad 3.1.20$$

Korzystając z prawa powszechnego ciążenia możemy zapisać

$$\frac{\mathbf{F}}{m_1} = -\frac{\nabla E_p}{m_1} = -\nabla V_p = -G\frac{m_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad 3.1.21$$

Wzór

$$\nabla V_p = G\frac{m_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad 3.1.22$$

Możemy traktować jako inny matematyczny zapis prawa powszechnego ciążenia. No dobrze możemy, ale czy warto? Odpowiem tak, jak w przyszłości chcemy coś sensownego powiedzieć o ogólnej teorii względności, to taka postać prawa powszechnego ciążenia będzie przydatna.

Mając dany wzór na potencjał od powłoki sferycznej wewnątrz tej sfery (3.1.10), wiemy jakie jest natężenie pola wewnątrz takiej powłoki. Ponieważ wewnątrz powłoki potencjał jest stały, od razy możemy przewidzieć, że natężenie pola (czyli przyspieszenie **g**) będzie równe zeru.

Fakt: 3.1.1.

Wewnątrz powłoki sferycznej potencjał pola grawitacyjnego jest stały, z czego wynika, że natężenie pola grawitacyjnego **g** jest zerowe.

Na zewnątrz powłoki sferycznej potencjał w danym punkcie jest odwrotnie proporcjonalny do odległości między tym punktem a środkiem powłoki (3.1.9). Z (§TXIV 1.1.2) wiemy, że gradient z takiego pola skalarnego daje wyrażenie odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości, czyli wzór (3.1.22). Rysunek (3.1.8a) przedstawia wykres natężenia pola grawitacyjnego dla przykładowej powłoki sferycznej

W przypadku pełnej kuli natężenie pola możemy obliczyć w podobny sposób. W punkcie na zewnątrz kuli mamy zanany już nam wzór (2.1). Korzystając ze wzoru (3.1.18a), w punktach wewnątrz kuli mamy

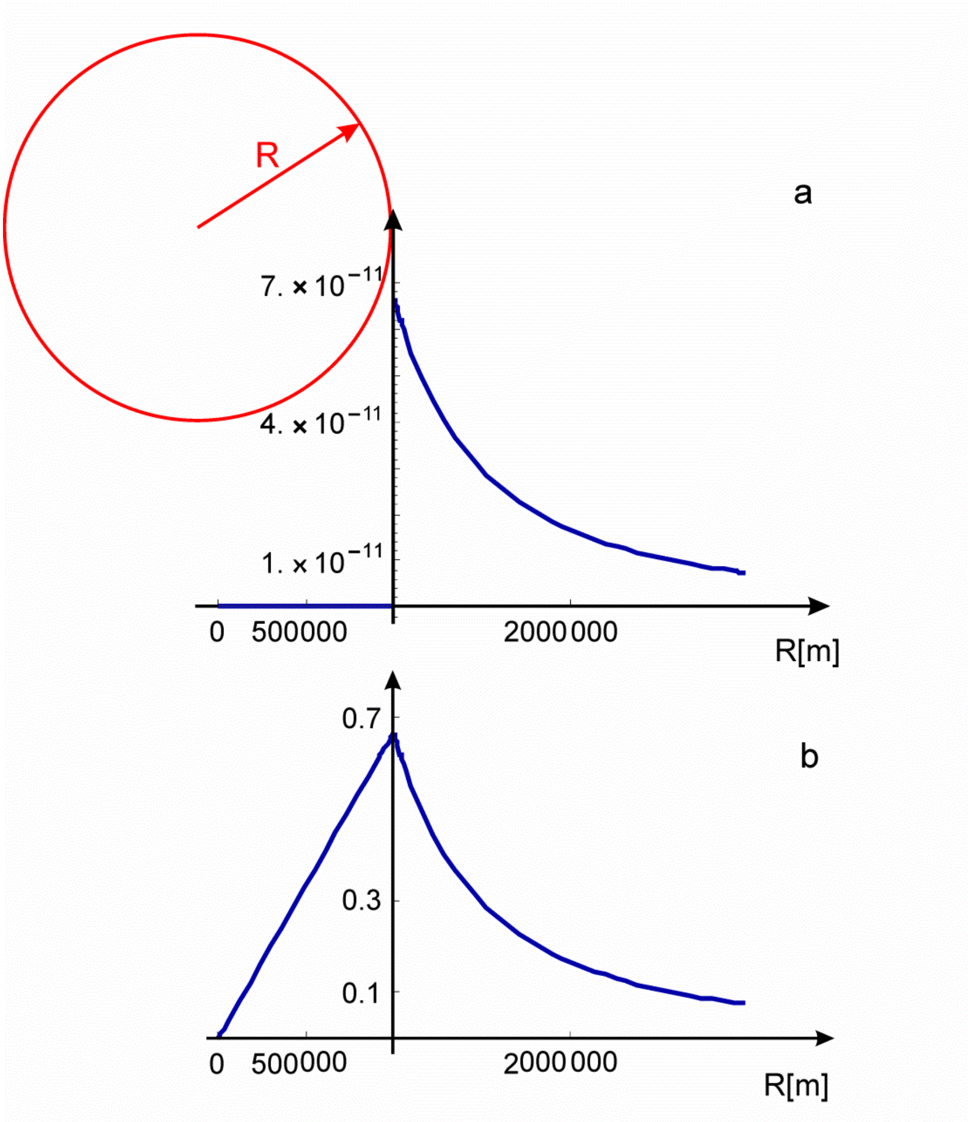
$$\mathrm{g}(R) = -\nabla\left(\frac{2}{3}\pi G\rho R^2 + V_0\right) = -\frac{4}{3}\pi G\rho R \qquad 3.1.23$$

Wykres wartości natężenia pola grawitacyjnego w funkcji odległości od środka pełnej kuli pokazuje rysunek (3.1.8b).

Wiemy, że prawo Coulomba dla dwóch ładunków elektrycznych q_1 i q_2 ma postać podobną do prawa powszechnego ciążenia (1.1)

$$\mathbf{F}_{12} = -k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad 3.1.24$$

Przez analogię do pola grawitacyjnego możemy pokazać, że potencjał elektryczny od jednorodnie naładowanej sfery jest wewnątrz tej sfery stały, a przez to i natężenie pola elektrycznego jest równe zeru. Poza sferą, jak i dla przypadku kuli odnośne relacje są takie same jak dla grawitacji, z tym, że trzeba uważać na znak ładunku. W grawitacji ładunki (czyli masy) są dodatnie, a ładunki elektryczne mogą być dodatnie i ujemne, przez co siły mogą być i przyciągające i odpychające. Nie mniej z faktu, że struktura równań (3.1.24) i (1.1) jest taka sama, a w szczególności siły są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości między punktowymi ładunkami, cechy obu oddziaływań są do siebie pod wieloma względami podobne. Działa zasada uniwersalności matematyki, która mówi, że właściwości wyrażeń matematycznych nie są czułe na nasze fizyczne interpretacje.



Rysunek 3.1.8. Wartość natężenia pola grawitacyjnego dla sfery i kuli w funkcji odległości od środka *R*; a) dla powłoki sferycznej – dane powłoki jak na rysunku (3.1.2); b) dla pełnej kuli – dane kuli jak na rysunku (3.1.7).

To czy rozważana przez nas siła odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości jest siłą elektryczną, grawitacyjną czy inną dla wyrażenia matematycznego nie ma żadnego znaczenia. Oczywiście fakt, że mamy dwa rodzaje ładunku (dodatnie i ujemne), oraz że siły elektryczne są dużo potężniejsze od grawitacyjnych niesie za sobą wiele istotnych skutków fizycznych, których nie znajdziemy w oddziaływaniu grawitacyjnym. Przykładowo, atom jest dla nas praktycznie obojętny, co wynika z takiego samego ładunku dodatniego i ujemnego zgromadzonego w jego bardzo małej objętości. Takiej wzajemnej kompensacji oddziaływań nie znajdziemy w grawitacji. Ale różnice te wynikają albo z faktu istnienia dwóch rodzajów ładunku elektrycznego albo z różnic wartości parametrów. W pierwszym przypadku ma to odniesienie do dziedziny, w zakresie której stosujemy równania (3.1.25) i (1.1). W pierwszym przypadku dziedzina zmienności mas jest dodatnia, w drugim, dla ładunków, jest to cała oś liczbowa. Poszerzenie dziedziny zmienia niektóre właściwości wyrażeń matematycznych. W drugim przypadku jest to kwestia innych wartości jakie generują oba wyrażenia, ale to już bardziej kwestia fizyki niż matematyki.

3.2. Prędkość ucieczki

Rozważmy następujący problem: z jaką minimalną prędkością należy wyrzucić przy powierzchni Ziemi kamień o masie *m*, aby oddalił się od Ziemi na dowolną odległość? Zakładamy, że nie ma oporów ruchu (zaniedbujemy istnienie atmosfery)

Niech wartość prędkości naszego kamienia przy wyrzucie wynosi *v*. Jeżeli kamień oddali się na jakąś odległość *h*, od powierzchni Ziemi, to jego energia kinetyczna zamieni się na energię potencjalną pola grawitacyjnego. Nie możemy jednak korzystać z przybliżonego wzoru $\Delta E_p = mgh$, gdyż *h* mogą być dowolnie duże. Musimy skorzystać ze wzoru dokładnego.

$$\Delta E_p = -G\,M_Z\,m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \qquad 3.2.1$$

Punkt początkowy znajduje się na powierzchni ziemi $r_A = R_Z$, a punkt końcowy w nieskończoności (dalej już się nie da) $r_B = \infty$. Przyrost energii potencjalnej ma zatem wartość

$$\Delta E_p = \frac{G\,M_Z\,m_k}{R_Z} \qquad 3.2.2$$

Z zasada zachowania energii mamy równanie

$$\frac{m_k\,v^2}{2} = \frac{G\,M_Z\,m_k}{R_Z} \qquad 3.2.3$$

Stąd znajdujemy wartość szukanej prędkości

$$v = \sqrt{2\frac{G\,M_Z}{R_Z}} \qquad 3.2.4$$

Dla Ziemi prędkość ta ma wartość 11.19km/s i jest nazywana drugą prędkością kosmiczną.

Definicja 3.2.1: Druga prędkości kosmiczna

Druga prędkości kosmiczna jest prędkością ucieczki z powierzchni Ziemi, to jest najmniejszą prędkością, jaką należało by nadać ciału przy powierzchni Ziemi, przy braku oporu powietrza, aby ciało to wyrzucone z tą prędkością pionowo do góry nie powróciło na powierzchnię Ziemi wyłącznie na skutek oddziaływania ziemskiej grawitacji.

Druga prędkość kosmiczna daje nam pojęcie o wysiłku jaki należy włożyć w uwolnienie się od ziemskiej grawitacji. Nie daje jednak odpowiedzi na pytanie jak to zrobić. Użycie wielkiego działa do nadania kapsule statku kosmicznego odpowiedniej prędkości[6] nie ma szans powodzenia z powodów zasadniczych (nie wspominając o problemach technicznych). Pierwszym z tych problemów jest atmosfera, która z jednej strony hamowałaby kapsułę (trzeba by jej było nadać prędkość znacznie większą od prędkości ucieczki), a drugim przyspieszenie jakie panowałoby w kapsule w momencie wystrzału. Jeżeli założymy, że lufa działa ma 1000m długości, to średnie przyspieszenie wewnątrz działa przekroczyłoby 6000g. Przy takim przyspieszeniu 5 kg krwi dorosłego człowieka miałoby ciężar ponad trzydziestu ton. Byłoby to zabójcze dla człowieka, ale również dla większości pokładowych przyrządów. Kolejnym czynnikiem jest ciepło jakie wydzieliłoby się na skutek oporów atmosfery. Osiągnięcie prędkości większej od 11km/s w gęstych warstwach atmosfery rozgrzałoby powierzchnię statku do bardzo dużej temperatury, stawiając niemożliwe do spełnienia wymogi materiałowe. Z tego powodu lot w Kosmos odbywa się według znacznie łagodniejszego schematu (co nie znaczy, że łagodnego), to jest z użyciem rakiet nośnych.

3.3. Kształt Ziemi

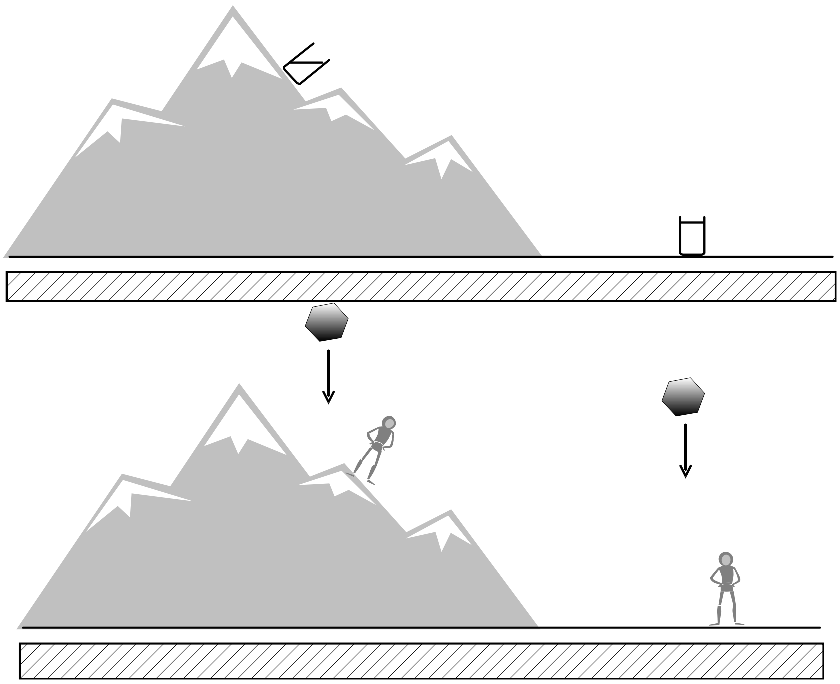
Jaki Ziemia ma kształt? Nawet dzieci wiedzą, że jest kulą. No dobrze, Ziemia jest kulą w pewnym przybliżeniu. W lepszym przybliżeniu jest elipsoidą, czyli nieco spłaszczoną na skutek własnego obrotu kulą. Ale na dobrą sprawę nie jest również elipsoidą. Są na Ziemi przecież i góry i doliny i oceany. Podyskutujmy nieco na temat kształtu Ziemi.

Dawniej ludzie myśleli, że Ziemia jest płaska. Można by również zapytać: dlaczego płaska? Mieszkańcy równin może byliby usprawiedliwieni w swym domniemaniu płaskości Ziemi, ale górale (rys. 3.3.1). A jednak górale również gustują w płaskiej Ziemi. Za nasze odczucie w sprawie kształtu Ziemi nie odpowiada geometria jej powierzchni tylko geometria linii równego potencjału. Dobrze - wiem, że dawniej ludzie nie mieli pojęcia o czymś takim jak powierzchnia równego potencjału pola grawitacyjnego, nie mniej mieli możność jej pośredniego obserwowania. Mogę przytoczyć przynajmniej dwa przykłady łatwej do poczynienia obserwacji (rys. 3.3.2). Kiedy mówimy o kulistym

[6] Tak jak to opisał Juliusz Verne w powieści „Wokół Księżyca"

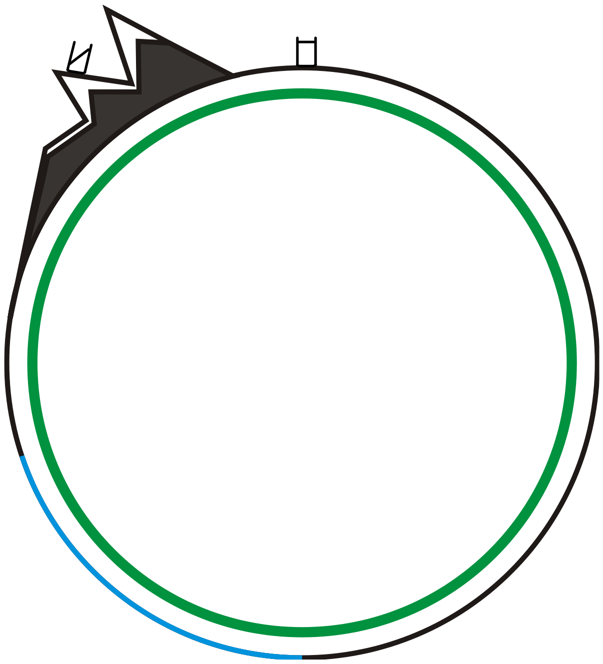
kształcie Ziemi, mówimy również o tej tajemniczej wyróżnionej powierzchni (równego potencjału), ale tym razem mającej kształt sfery (rys. 3.3.3). Możemy zdefiniować kształt Ziemi odnosząc się do powierzchni równego potencjału. Zdefiniujmy zatem, powierzchnię Ziemi jako powierzchnię równego potencjału, przebiegającą najbliżej powierzchni światowego oceanu.

Rysunek 3.3.1. Płaska Ziemia?

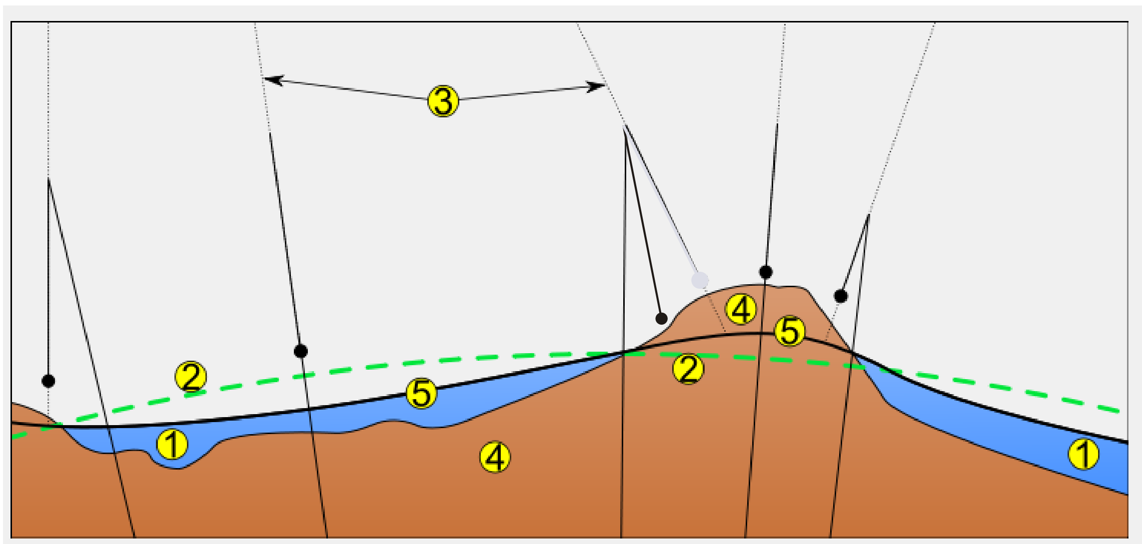


Rysunek 3.3.2. Górny rysunek - lustro wody przyjmuje taką samą orientację niezależnie od tego czy naczynie stoi na stoku czy na równinie. Dolny rysunek - kierunek pionu, tutaj reprezentowany przez kierunek spadania kamieni, nie zależy od tego czy wyznaczamy go na równinie czy na stoku górskim. Również my odczuwamy pochyłość stoku (mamy poczucie kierunku pionu). Wszystko to skłania nas do przyjęcia istnienie wyróżnionej płaszczyzny (kreskowana belka), która niezależnie od kształtu powierzchni Ziemi wyznacza orientację lustra wody i kierunek pionu.

Pozostaje nam jeszcze znaleźć kształt tej powierzchni, co nie jest zadaniem łatwym. Robi się to za pomocą pomiarów grawimetrycznych, które mają za zadanie wyznaczenie lokalnego przyspieszenie grawitacyjnego. Na tej samej powierzchni ekwipotencjalnej przyspieszenie grawitacyjne musi mieć taką samą wartość, oraz być skierowane prostopadle do tej powierzchni.



Rysunek 3.3.3. Powierzchnia kulistej Ziemi oznacza, że istnieje wyróżniona powierzchnia sfery, względem której orientuje się zarówno kierunek pionu jak i powierzchnia wody. Na rysunku lustro wody w szklance, niezależnie czy na zboczu góry, czy na równinie, jest równoległe do tej wyróżnionej powierzchni sferycznej (zielona gruba kreska). Ściśle rzecz biorąc lustro wody winno być wycinkiem sfery, ale szklanka jest za mała aby to było widoczne. Co innego morza czy oceany. Część powierzchni Ziemi narysowana jest na niebiesko. To ilustracja powierzchni oceanu, która oczywiście jest częścią sfery.



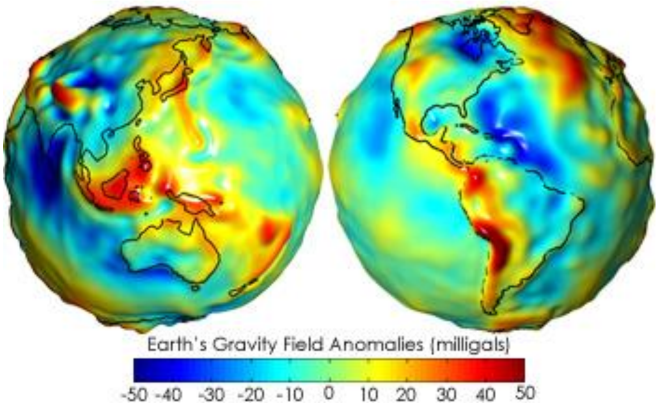
Rysunek 3.3.4. Geometria geoidy zależy od różnic w lokalnym rozkładzie mas. Na rysunku: 1 - ocean; 2 fragment geoidy reprezentujący przybliżony kształt tej części Ziemi; 3 lokalny kierunek pionu (różnica odchyleń w różnych punktach jest tu dla celów ilustracyjnych mocno przesadzona); 4 ląd; 5 - lokalny przebieg geoidy.

Otrzymana w ten sposób powierzchnia jest w swych szczegółach skomplikowana i otrzymała swoją własną nazwę *geoida*. Jej przykładowy przebieg lokalny (na małym obszarze) pokazuje rysunek (3.3.4). Rysunek (3.3.5) pokazuje mapę geoidy w skali globalnej. Użytą do jej wyrysowania jednostką jest gal [Gal]. Jest to jednostka spoza układu SI, ale chętnie wykorzystywana w grawimetrii. Kolory pokazują wartość odchylenia przyspieszenia grawitacyjnego wyrażonego w galach w stosunku do wartości średniej dla oceanu (wartość 0). Nierówności pokazane na rysunku to właśnie kształt geoidy.

Definicja 3.4.1: Gal

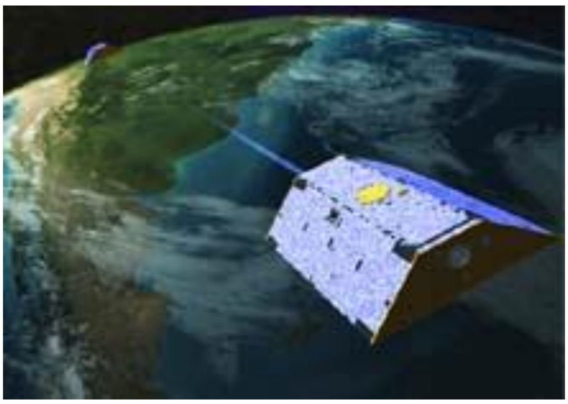
Jeden gal jest równy przyspieszeniu jednego centymetra na sekundę do kwadratu

Dodam jeszcze, że nazwa gal wzięła się z chęci uczczenia Galileusza.



Rysunek 3.3.5. Ziemia widziana „oczyma" kosmicznego grawimetru GRACE; źródło NASA.

Pokazana na rysunku geoida została wykonana przez dwa satelity o nazwie GRACE, które stanowiły grawimetr kosmiczny zdolny do obmierzenia całej planety (rys. 3.3.6).



Rysunek 3.3.6. GRACE to dwa bliźniacze satelity wystrzelone w marcu 2002 przez NASA. Zadaniem bliźniaków było przeprowadzenie precyzyjnych pomiarów grawimetrycznych w skali całej planety. Gdy bliźniaki znajdują się nad obszarem o nieco innej wartości przyspieszenia grawitacyjnego oddalają się lub przybliżają do siebie. Precyzyjny dalmierz laserowy śledzi te wzajemne ruchy a system komputerowy przelicza na dane grawimetryczne. Szczegóły można znaleźć na stronach NASA.

Oprócz kosmicznego grawimetru GRACE istnieje jeszcze wiele innych ich odmian. A zastosowań mają wiele. Przykładowo w czasie Zimnej Wojny grawimetry były używane do nawigacji w łodziach podwodnych. Mając mapę grawitacyjną dna morskiego i grawimetr można było dokładnie określać położenie okrętu. Ogromną zaletą tej metody było to, że okręt nie musiał emitować żadnego sygnału, jak to ma miejsce na przykład w metodach echolokacyjnych. Mógł zatem unikną wykrycia. Po zakończeniu zimnej wojny wiele technik zostało odtajnionych i grawimetria zrobiła wielką karierę przy poszukiwaniu złóż minerałów i w badaniach geofizycznych Ziemi.

To, że Ziemia jest kulą było powszechnie uznaną prawdą w świecie starożytnych greckich filozofów. W oparciu o to przekonanie zbudował swój model kosmologiczny Arystoteles (rys. TVI 1.3.6). Wbrew obiegowej opinii elity Kościoła katolickiego w średniowieczu również przyjmowały to za fakt. Zapewne niekształcony lud miał na ten temat swoje własne zdanie, zbliżone do zdania naszych archaicznych przodków. Ale w dawnych czasach stanem wykształcenia ludu z zasady nikt się nie przejmował.

3.3.1. Grawimetry

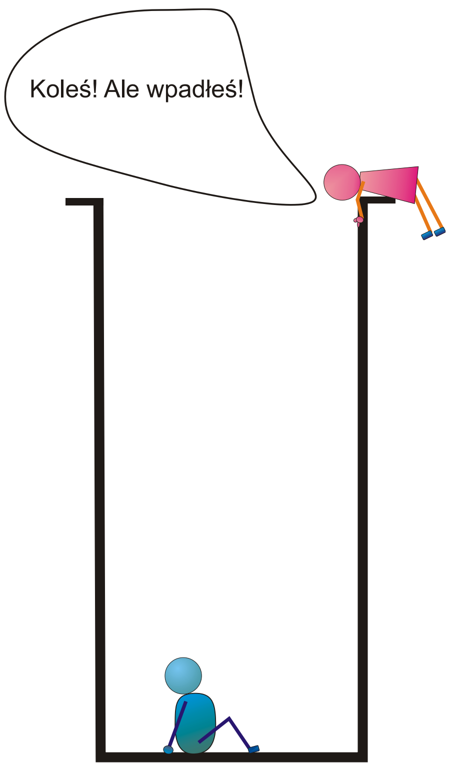
Na zakończenie tematu dotyczącego kształtu Ziemi jeszcze kilka słów o grawimetrach. Grawimetry to urządzenia do pomiaru wartości przyśpieszenia grawitacyjnego. Ogólnie dzielimy ja na grawimetry absolutne i względne. Grawimetry absolutne mierzą wartość przyśpieszenia a względne różnicę przyśpieszenia grawitacyjnego w dwóch punktach. Najprostszym grawimetrem absolutnym jest wahadło, które wykorzystałem do pomiaru przyspieszenia ziemskiego w temacie (rys. TI 3.2). Mój eksperyment był dość prymitywny, po jego dopracowaniu możemy uzyskać dokładniejsze wartości. Niemniej grawimetr oparty o wahadło jest mało dokładny (nawet po dopracowaniu) a pomiar zajmuje sporo czasu. Współczesne grawimetry absolutne wykorzystują spadek zwierciadła (ściślej jest to retroreflektor) w kolumnie próżniowej. Wykorzystując układ interferometru Michelsona (rys. TX 1.1.1) można bardzo precyzyjnie określić przyśpieszenie zwierciadła. Najbardziej rozpowszechnionym typem grawimetru względnego jest grawimetr sprężynowy. Wykorzystują one ciężarek na sprężynie. W różnych miejscach na Ziemi ciężarek rozciąga sprężynę w różnym stopniu. Urządzenie trzeba skalibrować względem wybranego punktu odniesienia na Ziemi. Najczulszymi urządzeniami są grawimetry nadprzewodzące. Wykorzystuje się w nich lewitację przewodzącej kuli (zwykle niobowej) w polu magnetycznym, w temperaturze nadprzewodnictwa. Wartość pola magnetycznego potrzebna dla utrzymania kuli w stabilnej lewitacji zależy od przyspieszenia grawitacyjnego. Czułość tego typu instrumentów jest rzędu 10^{-11}m/s^2 (jeden nanogal). Czułość tych przyrządów pozwala wykryć zmiany w przyspieszeniu związane z ruchem Słońca i Księżyca (tzw. siły pływowe), których poziom nie przekracza ±100nanogali (±1000nm/s^2). Inną klasą grawimetrów są grawimetry orbitalne (rys. 3.4.6). Ich dokładność jest mniejsza niż grawimetrów ziemskich, ale pozwalają na mapowanie pola grawitacyjnego w skali całej planety. Być może już niedługo rozpowszechnią się grawimetry wykonane w technologii mikro. Ich zasadniczą zaletą będzie niewielki koszt jednostkowy przy ich masowym wytwarzaniu.

3.4. Energia grawitacyjna kuli

Jeżeli na Ziemię spadł kawałek materii z kosmosu, to dla jego uwolnienia z pola grawitacyjnego planety należy mu dostarczyć pewnej energii. Energia ta jest równa energii kinetycznej tego kawałka poruszającego się z prędkością równą drugiej prędkości kosmicznej. Przyjmując, że druga prędkość kosmiczna to 11.9km/s mamy, że na każdy kilogram materii potrzeba energii o wartości

$$E = \frac{1kg\,11900^2 \left(m/s\right)^2}{2} = 70805000J \approx 70MJ \qquad 3.4.1.$$

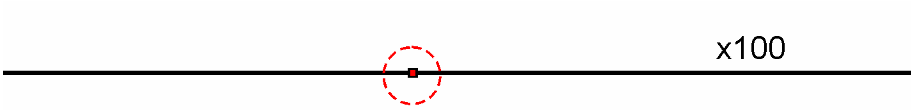
To całkiem sporo. Możemy powiedzieć, że energia ta jest grawitacyjną energią wiązania kilograma materii znajdującego się przy powierzchni Ziemi. Energia wiązania to coś w rodzaju długu wobec pola grawitacyjnego, który musimy spłacić jeżeli chcemy się od niego uwolnić. Dlatego, we wzorach na potencjał, przyjmuje się wartości ujemne (3.4), a zero potencjału znajduje się w nieskończoności, gdzie dług jest całkowicie spłacony. Inne wyobrażenie to tzw. studnia potencjału grawitacyjnego. Wyobrażamy sobie, że przy powierzchni Ziemi jesteśmy jakby w głębokiej studni. Wysokość ścian tej studni obrazuje wysiłek jaki musimy włożyć w wydostanie się na zewnątrz.



Rysunek 3.4.1. Naszą sytuację w polu grawitacyjnym Ziemi możemy sobie przedstawić jako sytuację kogoś kto znalazł się w głębokiej studni. Głębokość studni reprezentuje wielkość naszego energetycznego długu wobec pola grawitacyjnego planety.

Oczywiście o studni grawitacyjnej możemy również mówić w przypadku innych ciał niebieskich. Ich głębokość zależy od pola grawitacyjnego przy powierzchnia planety[7].

Energia grawitacyjna wiązania Ziemi jest niewyobrażalnie ogromna. Spróbuję jednak dać wam pewne wyobrażenie. Ziemia ma ponad 12000km średnicy, przyjmijmy dla prostoty, że jest to dokładnie 12000km. Jeżeli zmniejszymy ją milion razy to otrzymamy kulę o średnicy 12m. Powiedzmy, że chcemy nadać prędkość ucieczki 1km sześciennemu ziemi. Jeżeli sześcian o rozmiarach 1km×1km×1km zmniejszymy milion razy to otrzymamy sześcian o długości krawędzi 1mm. Pomyśl jak małym kawałkiem kuli o średnicy 12m jest sześcian o boku 1mm. Na powierzchni 12 metrowej kuli mamy ponad 450 milionów takich sześcianów[8]. Rysunek (3.4.2) pokazuje odcinek o długości 12cm i kwadrat o boku 1mm. Dwunastometrowa kula ma sto razy większą od tego odcinka średnicę. Równoważenie, aby zachować skalę możemy zmniejszyć rozmiar kwadratu do jednej setnej milimetra. Wtedy byłby jednak niewidoczny.



Rysunek 3.4.2. Kwadra o boku 1mm na tle odcinak o długości 12cm – sto razy mniejszego od średnicy dwunastometrowej kuli.

Można zatem powiedzieć, że sześcian o boku 1km drobniutki odprysk na powierzchni Ziemi. Ile trzeba energii aby nadać mu drugą prędkość kosmiczną? Przyjmijmy, że średnia gęstość Ziemi przy jej powierzchni to 3.5g/cm^3. Zatem jeden kilometr sześcienny waży 3.5 miliarda ton, czyli 3.5 biliona kilogramów; $3.5\cdot 10^{12}$kg. Przyjmijmy, że w objętości sześcianu przyspieszenie ziemskie jest stałe. Idąc na ledwie kilometr w głąb Ziemi przyspieszenie rzeczywiście zmienia się w sposób nieznaczny. Oznacza to, że prędkość ucieczki dla naszego sześciennego bloku jest praktycznie taka jak dla kamienia przy powierzchni Ziemi. Niech to będzie, dla okrągłości 11km/s. Teraz możemy policzyć energię potrzebną na nadanie sześcianowi tej prędkości

$$\frac{1}{2}11000^2\cdot 3.5\cdot 10^{12}\approx 2.8\cdot 10^{20}\,\mathrm{J} \qquad 3.4.2$$

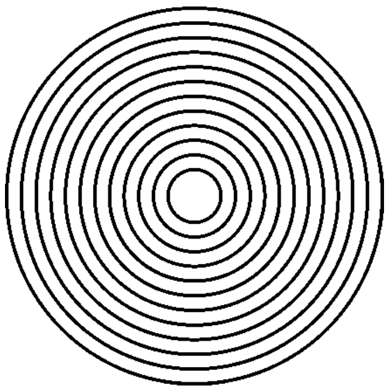
Wyszło nam 280 trylionów dżuli. A przy powierzchni jest ponad 500 milionów takich kawałków! Jest to liczba, która jest tak wielka, że nic nam nie mówi. Spróbujmy zatem ugryźć ją inaczej. Powiedzmy, że na Ziemi jest w arsenałach 40 tysięcy bomb atomowych o mocy 1Mt każda[9]. Czy energia tych wszystkich ładunków wystarczy do wystrzelenia jednego kilometra sześciennego ziemi

[7] W przypadku gazowych planet olbrzymów jest to powierzchnia umowna
[8] W rzeczywistości Ziemia ma ponad 12600km średnicy a jej powierzchnia wynosi około 520 milionów kilometrów kwadratowych.
[9] Jest to więcej niż moc ładunków nuklearnych zgromadzonych na Ziemi.

w kosmos? Zgodnie z (def. TII 2.8) jedna megatona to równoważnie $4.18 \cdot 10^{15}$J. Zatem 40 tysięcy bomb o mocy jednej megatony daje energię $1.67 \cdot 10^{20}$J, czyli mniej od tej wynikającej ze wzoru (3.4.1). Mimo, że energia zgromadzona w ładunkach nuklearnych jest dla nas zatrważająca wielka, jest jej za mało na wysłanie w kosmos okruchu jakim dla naszej planety jest 1 km^3 jej materii. Świadczy to o tym jak wielka jest energia grawitacyjna wiążąca Ziemię.

Jaka jest całkowita energia wiązania grawitacyjnego jednorodnej kuli o danej masie i średnicy? Wróćmy do Ziemi. Jeżeli nadalibyśmy pierwszą prędkość kosmiczną całej wierzchniej warstwie o grubości 1km, to promień Ziemi stałby się mniejszy o 1km. Zatem przyspieszenie grawitacyjne, przy powierzchni, zmalałoby (Ziemia zawierałaby mniej masy), co pociągnęłoby za sobą zmniejszenie prędkości ucieczki. Nasuwa to pomysł na obliczenie energii grawitacyjnego wiązania kuli.

Podzielmy jednorodną kulę o promieniu R zbudowaną z materii o gęstości ρ na nieskończenie cienkie sfery o grubości dr (rys. 3.4.3).



Rysunek 3.4.3. Kulę o promieniu R dzielimy na nieskończenie wiele nieskończenie cienkich współśrodkowych powłok sferycznych.

Masa powłoki o promieniu r jest nieskończenie mała i równa jej polu powierzchni przemnożonej przez grubość powłoki dr i jej gęstość

$$\mathrm{d}m = \frac{4}{3}\pi r^2 \rho \mathrm{d}r \qquad 3.4.3$$

Energia potencjalna takiej powłoki w polu kulistej masy znajdującej się w jej wnętrzu jest równa (3.4)

$$\mathrm{d}E = -G\frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho\right)\left(4\pi r^2 \rho \mathrm{d}r\right)}{r} = -\frac{1}{3}G\left(4\pi\rho^2\right)r^4 \mathrm{d}r \qquad 3.4.4$$

Zauważ, że w pierwszym nawiasie mamy masę kuli o promieniu r i gęstości ρ, a w drugim masę powłoki. Całkując (3.4.4) po wszystkich powłokach tworzących Ziemię mamy

$$E = -\frac{1}{3}G\left(4\pi\rho^2\right)\int_0^R r^4 \mathrm{d}r = -\frac{1}{3}G\left(4\pi\rho^2\right)\frac{1}{5}R^5 \qquad 3.4.5$$

Masa kuli wyraża się wzorem

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \qquad 3.4.5a$$

Co pozwala uprościć (3.4.5a) do postaci

$$E = -\frac{3}{5}\frac{M^2}{R} \qquad 3.4.6$$

Dla kuli o średniej gęstości Ziemi i jej rozmiarach energia wiązania wynosi

$$E_z = -\frac{3}{5} 6,67 \cdot 10^{-11} \left[N \frac{m^2}{kg^2} \right] \frac{\left(5,96 \cdot 10^{24}\right)^2 \left[kg^2\right]}{6370000[m]} = -2.2 \cdot 10^{32}\, J \qquad 3.4.7$$

Daje to jeszcze dwanaście rzędów wielkości więcej niż wyrażenie (3.4.2). Nie jest to dokładnie energia Ziemi, której gęstość rośnie w kierunku jej środka, ale dobrze oddaje rząd wielkości grawitacyjnej energii wiązania naszej planety. Dla porównania energia wiązania kuli ołowianej o masie jednej tony wynosi zaledwie

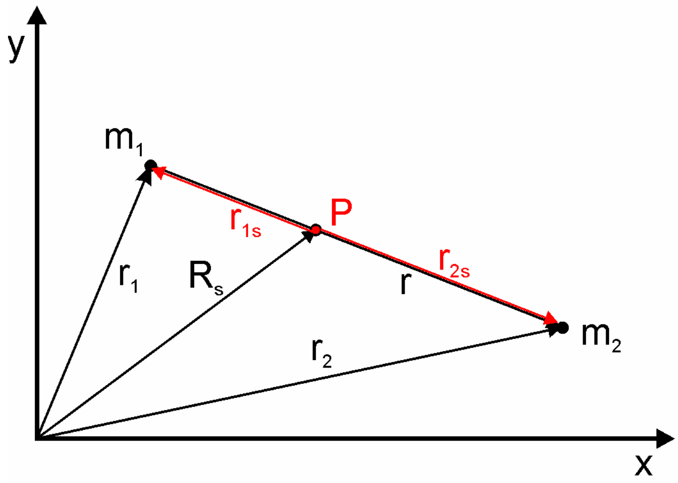
$$E_z = -\frac{3}{5} 6,67 \cdot 10^{-11} \left[N \frac{m^2}{kg^2} \right] \frac{(1000)^2 \left[kg^2\right]}{1[m]} = -4.0 \cdot 10^{-5}\, J \qquad 3.4.8$$

Na szczęście dla kuli ołowianej jej spójność zależy od sił elektrycznych a nie grawitacyjnych. Olbrzymia wartość grawitacyjnej energii wiązania Ziemi związana jest z niewyobrażalną dla nas ilością materii jaka się w niej znajduje.

Wiem, że znęcanie się nad wytworami współczesnej kinematografii może wyglądać jak znęcanie się nad małym dzieckiem, ale od czasu do czasu warto coś, tak na wszelki wypadek, skomentować. W sadze „Gwiezdne Wojny" brzydkie Imperium terroryzuje nieszczęsnych mieszkańców Galaktyki urządzeniem nazywanym Gwiazdą Śmierci. Ta wielka maszyneria wypuszcza z siebie strumień cząstek zdolnych do rozbicia planety. Popatrz na wzór (3.4.5) określający energię potrzebną na wyrwanie z Ziemi drobnego okruszka z jej powierzchni w postaci sześcianu o krawędzi jednego kilometra. Energia na rozbicie Ziemi mieści się między wartością daną wzorem (3.4.5) a wartością daną wzorem (3.4.6). Dlaczego nie dokładnie (3.4.6)? Wyobraź sobie, że rozbijamy planetę na dwie półkule. Uwolnienie ich z długu wobec pola grawitacyjnego wymaga ogromnej energii. Jednakże w każdej połówce związana jest połowa materii planety, która zawiera jakiś ułamek energii wiązania całej planety. Wzór (3.4.6) określa energię potrzebną na rozbicie kuli w drobny mak. Gdy pozostają duże kawałki potrzebna energia jest mniejsza – mniejsza o kilka rzędów wielkości, co dalej, w przypadku Ziemi, dałoby energię leżącą poza naszym wyobrażeniem. Z drugiej strony przyjmujemy, że kometa o objętości kilku kilometrów sześciennych spowodowała wyginięcie dinozaurów. Nie ma w tym żadnej sprzeczności. Życie na Ziemi jest zjawiskiem powierzchniowym. Wyzwolenie bardzo dużej energii w jednym punkcie powoduje, że po powierzchni Ziemi rozchodzi się miażdżąca fala uderzeniowa, a przy uderzeniu małej komety cała powierzchnia planety jest nadto bombardowana jej ognistymi odłamkami. Wzbudzone przy tym masy pyłu na lata obniżają ilości energii jak ze Słońca dociera do powierzchni Ziemi. Krótko mówiąc Imperator z Gwiezdnych Wojen poniósł ogromne koszty związane z budową machiny, której użycie przypomina strzelanie z armaty do komara. Miast jednej potężnej Gwiazdy Śmierci mógł zbudować kilka powiedzmy miliard razy mniej potężnych machin wojennych, które z punktu widzenia życia mieszkańców planet takich jak Ziemia byłyby ciągle totalnie destruktywnymi urządzeniami. Wtedy zniszczenie jednej z tych machin byłoby małą stratą dla floty Imperatora. Cóż, ani strategii, ani taktyka nie była mocną stroną bohaterów Gwiezdnych Wojen.

4. Zagadnienie dwóch ciał ♣

Mając prawo powszechnego ciążenia potrafimy określić siły przyciągania działające między dwoma kulistymi masami. Oznacza to, że możemy napisać równanie ruchu dla tych mas. Zaczniemy od dwóch mas m_1 i m_2 położonych tak jak na rysunku (4.1).



Rysunek 4.1. Dwie oddziałujące grawitacyjnie masy w wybranym inercjalnym układzie odniesienia. Punkt P jest punktem środka masy tych dwóch mas. Układ współrzędnych związanych z punktem P jest układem inercjalnym. Nasz układ współrzędnych może być układem przesuniętym w przestrzenie względem punktu P. Taki układ też jest inercjalny.

Zakładamy, że siły zewnętrzne działające na te masy możemy pominąć. Siły działające na masy spełniają warunek (trzecie prawo Newtona)

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \tag{4.1}$$

Przy czym, zgodnie z (1.1.3) i oznaczeniami na rysunku (4.1)

$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_{12};\ \mathbf{F}_{21} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_{12} \tag{4.2}$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{12} = -\hat{\mathbf{r}}_{21} = \hat{\mathbf{r}} \tag{4.2a}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \tag{4.2b}$$

Układ równań ruchu dla obu mas ma postać

$$m_2\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{4.3a}$$

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{4.3b}$$

Pozwolę sobie na małą dygresję rachunkową. Dodając stronami równania (4.3) mamy

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t^2} + m_2\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

Całkując to równanie po czasie mamy

$$m_1 \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t} + m_2 \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t} = \mathbf{const} \tag{4.5}$$

Równanie (4.5) wyraża zasadę zachowania pędu dla naszego układu. Dostajemy ją dlatego, że prawa strona (4.4) jest wektorem zerowym, co wynika z trzeciego prawa Newtona, zgodnie z którym dwie masy przyciągają się z siłami o tej samej wartości ale przeciwnie skierowanymi. Czas wrócić do rozwiązywania układu równań (4.3). Przepiszę równania ruchu (4.3) w postaci

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{1}{m_2} G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \tag{4.6a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{m_1} G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \tag{4.6b}$$

a następnie odejmę je stronami i skorzystam z (4.2b)

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \tag{4.7}$$

Niech

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{4.8}$$

Wielkość μ nazywamy masą zredukowaną.

Definicja 4.1: Masa zredukowana układu dwóch mas

Masą zredukowaną układu dwóch mas nazywamy wielkość określoną wzorem (4.8)

Masa zredukowana jest dość ważną wielkością. Pojawi się przy rozwiązaniu układu równań ruchu dla dwóch cząstek naładowanych, oraz w mechanice kwantowej (między innymi w modelu Bohra atomu wodoru).
Z użyciem masy zredukowanej równanie (4.7) przyjmie postać

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{4.9}$$

$$\alpha = G m_1 m_2 \tag{4.9a}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{4.9b}$$

I mamy czary mary, gdyż równanie (4.9) możemy traktować jako równanie ruchu pojedynczego ciała o masie μ w polu siły skierowanej zgodnie z wektorem $-\mathbf{r}$, przy czym wektor $\mathbf{r}$ traktujemy jako wektor wodzący ciała o masie zredukowanej μ. Wektor $\mathbf{r}$ wskazuje jednocześnie położenie jednego ciała względem drugiego. Zatem ruch wyznaczamy w układzie związanym z ciałem, w którym zaczepiamy wektor $\mathbf{r}$. Na rysunku (4.1) jest to ciało o masie m_1, ale równie dobrze moglibyśmy przenieść punkt zaczepienia do ciała o masie m_2. Wiemy, że układ związany z ciałem m_1 (lub m_2) jest układem nieinercjalnym (zobacz np. (rys. TIV 2.1)), jednak układ równań ruchu (4.3) napisaliśmy w układzie inercjalnym. Po drodze nie łamaliśmy żadnych zasad matematyki, możemy więc uznać, że przenosząc układ współrzędnych do ciała o masie m_1 automatycznie uwzględniamy efekt nieinercjalności nowego układu odniesienia. Tutaj jest element naszej wiary w matematykę. Jak dokonując przekształceń nie łamiemy zasady matematyki, to nie spodziewamy się przykrych niespodzianek.

Podkreślę, że od teraz nie rozwiązujemy układu równań względem początku układu współrzędnych pokazanego na rysunku (4.1), tylko względem jednego z ciał. Zgodnie z rysunkiem (4.1) względem masy m_1. Przyjmując przeciwny znak w (4.2b), co spowodowałoby zmianę znaku w równaniach (4.3), rozwiązanie odnosiłoby się do położenia ciała m_2.

Musimy to równanie rozwiązać. Pomnożę wektorowo obie strony równania (4.9) przez wektor **r**

$$\mathbf{r}\times\mu\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}=-\mathbf{r}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\alpha}{r^2}=\mathbf{0} \qquad 4.10$$

Wykorzystamy następującą zależność

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}\times\mu\dot{\mathbf{r}}\right)=\dot{\mathbf{r}}\times\mu\dot{\mathbf{r}}+\mathbf{r}\times\mu\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{0} \qquad 4.11$$

Zerowanie się tego wyrażenia wynika z (4.10). Stąd mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{r}\times\mu\dot{\mathbf{r}}\right)=\mathbf{0}\Rightarrow\mathbf{r}\times\mu\dot{\mathbf{r}}=const \qquad 4.12$$

Wyrażenie to ma postać wzoru na moment pędu masy zredukowanej μ. Jest ono równoważne wyrażeniu na moment pędu mas m_1 i m_2 obliczonego względem układu związanego ze środkiem masy. Aby to pokazać wprowadzimy wektory położenia $\mathbf{r}_{1s}$, $\mathbf{r}_{2s}$ obu mas względem środka masy $\mathbf{R}_s$

$$\mathbf{R}_s=\frac{\mathbf{r}_1m_1+\mathbf{r}_2m_2}{m_1+m_2} \qquad 4.13a$$

$$\mathbf{r}_{1s}=\mathbf{r}_1-\mathbf{R}_s=-\frac{\mu}{m_1}\mathbf{r}\Rightarrow\mathbf{r}=-\frac{m_1}{\mu}\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{R}_s\right) \qquad 4.13b$$

$$\mathbf{r}_{2s}=\mathbf{r}_2-\mathbf{R}_s=-\frac{\mu}{m_2}\mathbf{r} \qquad 4.13c$$

Moment pędu mas m_1 i m_2 w układzie środka masy ma postać

$$\mathbf{K}_s=\mathbf{r}_{1s}\times m_1\dot{\mathbf{r}}_{1s}+\mathbf{r}_{2s}\times m_2\dot{\mathbf{r}}_{2s} \qquad 4.14$$

Wstawiając (4.13b-c) do (4.14) mamy

$$\mathbf{K}_s=\frac{\mu}{m_1}\mathbf{r}\times m_1\frac{\mu}{m_1}\dot{\mathbf{r}}+\frac{\mu}{m_2}\mathbf{r}\times m_1\frac{\mu}{m_2}\dot{\mathbf{r}}=\left(\frac{m_1m_2^2}{m_1+m_2}+\frac{m_1^2m_2}{m_1+m_2}\right)\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} \qquad 4.15$$

Po dalszych przekształceniach, wykorzystując (4.8) otrzymujemy

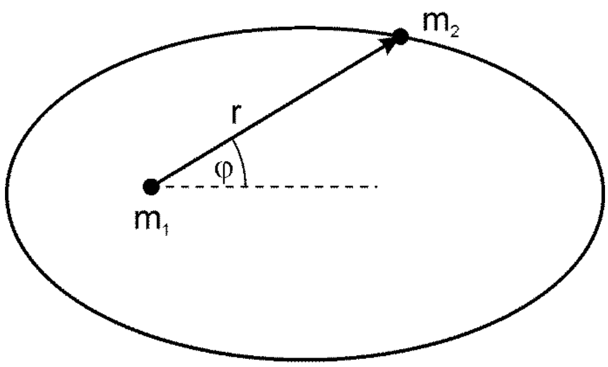
$$\mathbf{K}_s=\mu\left(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right)=\mathbf{r}\times\mu\dot{\mathbf{r}} \qquad 4.16$$

Czyli wzór (4.14). Pokazaliśmy istotny fakt:

Fakt 4.1:

Moment pędu (kręt) dla masy zredukowanej μ, liczony względem punktu wyznaczającego położenie jednej z mas składowych jest równy momentowi pędu obu mas liczonemu względem punktu określającego położenie środka masy tego układu.

Zasada zachowania momentu pędu powoduje, że ruch cząstek odbywa się w stałej płaszczyźnie. Pozwala to na przejście do układu biegunowego (rys. TIV 5.2.1). Niech początek układu biegunowego znajdzie się w punkcie o masie m_1 (rys. 4.2).



Rysunek 4.2. W układzie biegunowym masa m_1 jest w jego początku, a położenie masy m_2 określa wartość kąta φ i promienia wodzącego r.

Tu niestety będę sięgał po wzory wyprowadzone dopiero w temacie (TXVII 5), gdzie zajmę się bliżej współrzędnymi krzywoliniowymi. W układzie biegunowym prędkość rozkładam na dwie składowe, radialną (wzdłuż promienia r) i azymutalną (prostopadle do promienia). W układzie biegunowym prędkość punktu wyrażamy przez współrzędne przez wzory

$$v_r = \dot{r};\ \ v_\varphi = r\dot{\varphi} \qquad 4.17$$

Punkt wskazywany przez wektor $\mathbf{r}$ ma oczywiście współrzędne $\mathbf{r}(r,0)$. Wzór na moment pędu przyjmie postać

$$\left|\mathbf{K}_s\right| = \left|\mathbf{r}\times\mu\dot{\mathbf{r}}\right| = \left|\left(r,0,0\right)\times\mu\left(\dot{r},r\dot{\varphi},0\right)\right| = \mu r^2\dot{\varphi} \qquad 4.18$$

Zapis $(r,0,0)$ pokazuje jakie współrzędne ma wektor $\mathbf{r}$. Drugi nawias zawiera współrzędne wektora prędkości pomnożone przez masę zredukowaną. Przyjmujemy dla wygody, że trzecia współrzędna jest równa zeru (wszystko odbywa się w płaszczyźnie). Iloczyn wektorowy liczmy tak jak zawsze.

Tu ponownie nieco skręcimy w kierunku zasady zachowania energii. Jest to o tyle usprawiedliwione, że będę później ze wzoru na energię układu dwóch ciał korzystał. Wrócę do naszego równania (4.9) i pomnożę skalarnie jego obie strony przez wektor prędkości ciała o masie zredukowanej w układzie masy m_1: $\mathbf{v}=\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$

$$\mu\mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha}{r^2}\mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad 4.19$$

Wykorzystamy wzór na różniczkowanie iloczynu wyrażeń

$$\mu\mathbf{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}{2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mu v^2}{2} \tag{4.20a}$$

$$-\frac{\alpha}{r^2}\mathbf{v}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}=\mathbf{v}\cdot\nabla\frac{\alpha}{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\alpha}{r} \tag{4.20b}$$

Po wstawieniu tych zależności do (4.19) mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu v^2}{2}-\frac{\alpha}{r}\right)=0\Rightarrow\frac{\mu v^2}{2}-\frac{\alpha}{r}=E_c \tag{4.21}$$

Pierwszy wyraz ostatniej równości wyraża energię kinetyczną układu mas obliczoną w układzie środka masy. Można to pokazać zapisując wyrażenie na energię kinetyczną

$$E_k=\frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_{1s}+\frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_{2s}=\frac{\mu}{m_1}\frac{\mu\dot{\mathbf{r}}^2}{2}+\frac{\mu}{m_2}\frac{\mu\dot{\mathbf{r}}^2}{2}=\frac{\mu\dot{\mathbf{r}}^2}{2}=\frac{\mu v^2}{2} \tag{4.22}$$

Gdzie skorzystałem z (4.13b-c). Wyrażenie

$$-\frac{\alpha}{r}=-G\frac{m_1m_2}{r} \tag{4.23}$$

wyraża energię potencjalną oddziałujących mas w układzie środka masy, zatem suma (4.21) wyrażeń (4.22) i (4.23) wyraża całkowitą energię w układzie środka masy, która jest na mocy (4.21) stała, co jest zgodne z zasadą zachowania energii. Mający wzory na energię układu możemy wrócić do rozwiązywania układu równań ruchu.

Kwadrat momentu pędu (4.18) wyrażony w układzie biegunowym wynosi

$$K_s^2=\mu^2r^4\dot{\varphi}^2 \tag{4.24}$$

Kwadrat wartość wektora prędkości we współrzędnych biegunowych (4.17) wyraża się wzorem

$$v^2=v_r^2+v_\varphi^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\Rightarrow r^2\dot{\varphi}^2=v^2-\dot{r}^2 \tag{4.25}$$

Wstawiając ostatnie równanie do (4.24) mamy

$$K_s^2=\mu^2r^2\left(v^2-\dot{r}^2\right) \tag{4.25}$$

Obliczmy z tego kwadrat wartości prędkości

$$v^2=\frac{K_s^2}{\mu^2r^2}+\dot{r}^2 \tag{4.26}$$

Po sprowadzeniu prawej strony do wspólnego mianownika mamy

$$v^2=\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{K_s^2}{r^2}+\frac{\dot{r}^2r^2\mu^2}{r^2}\right) \tag{4.27}$$

Wyrazimy μ^2 z pomocą wzoru (4.24) i wstawimy do wyrażenia w nawiasie, po uporządkowaniu mamy

$$v^2=\frac{K_s^2}{\mu^2}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\dot{r}^2}{r^4\dot{\varphi}^2}\right) \tag{4.28}$$

Korzystając z zależności

$$\frac{\dot{r}^2}{r^4\dot{\varphi}^2}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{1}{r}\right)^2 \quad 4.29$$

Wzór (4.27) mogę przepisać w postaci

$$v^2=\frac{K_s^2}{\mu^2}\left(\frac{1}{r^2}+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{1}{r}\right)^2\right) \quad 4.30$$

Wyrażenie to podstawię do wzoru na całkowitą energię układu (4.21)

$$\frac{K_s^2}{2\mu}\left(\frac{1}{r^2}+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\frac{1}{r}\right)^2\right)-\frac{\alpha}{r}=E_c \quad 4.31$$

Przekształcimy postać równania (4.31) do wygodniejszej przez podstawienie

$$\rho=\frac{1}{r} \quad 4.32a$$

$$\frac{K_s^2}{2\mu}\left(\rho^2+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\rho\right)^2\right)-\alpha\rho=E_c \quad 4.32$$

Zróżniczkujemy obie strony po φ, kolejne składowe nowego wyrażenia mają postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\rho^2=2\rho\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} \quad 4.33a$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\rho\right)^2=2\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\varphi^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} \quad 4.33b$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\rho=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi} \quad 4.33c$$

Po zebraniu mamy

$$\frac{K_s^2}{2\mu}\left(2\rho\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}+2\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\varphi^2}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}\right)-\alpha\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}=0\Rightarrow\frac{K_s^2}{\mu}\left(\rho+\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\varphi^2}\right)-\alpha=0 \quad 4.34$$

Ostatnie równanie możemy zapisać w postaci

$$\rho+\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}\varphi^2}=\frac{\alpha\mu}{K_s^2} \quad 4.35$$

A to możemy zapisać w postaci

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\rho-\frac{\alpha\mu}{K_s^2}\right)=-\left(\rho-\frac{\alpha\mu}{K_s^2}\right) \quad 4.36$$

Wynika z tego, że nasze równanie przyjmuje postać

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}x=-kx;\ \text{gdzie}\ k=1;\ x=\rho-\frac{\alpha\mu}{K_s^2} \quad 4.37$$

Jest to postać harmonicznego równania ruchu. Znamy jego rozwiązanie ogólne (TVIII 1.3), po skorzystaniu z niego i wstawieniu za *x* wyrażenia (4.37) mamy

$$\rho = \frac{\alpha\mu}{K_s^2} + A\cos(\varphi - \delta) \qquad 4.38$$

A i δ, to stałe (wyznaczane z warunków początkowych). Przechodząc do r (4.32a) i porządkując otrzymujemy

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \delta)} \qquad 4.39$$

$$p = \frac{K_s^2}{\alpha\mu} \qquad 4.39a$$

$$\varepsilon = A\frac{K_s^2}{\alpha\mu} \qquad 4.39b$$

Uzyskane rozwiązanie przedstawia równanie krzywej stożkowej napisane w biegunowym układzie współrzędnych. Zanim przejdę do jego analizy zrobię krótką dygresję.

Zajmowaliśmy się następującym problemem - Dwie izolowane punktowe (lub sferyczno-symetryczne) masy poruszają się pod wpływem oddziaływania grawitacyjnego. Opisz ruch tych mas. Izolowane oznacza brak innych oddziaływań prócz ich własnego oddziaływania grawitacyjnego. Rozwiązaliśmy to zagadnienie korzystając z dwóch reguł: prawa powszechnego ciążenia oraz praw dynamiki Newtona. Reguły te pozwoliły nam napisać układ równań ruchu (4.3). Od tego punktu zaczęła się niełatwa droga przez matematykę. Układ równań ruchu rozwiązaliśmy sprowadzając je do znanej postaci równania ruchu dla oscylatora harmonicznego (4.37), czyli skorzystaliśmy z drogi wiadra. Nie jest to jedyna droga rozwiązania równań ruchu dla zagadnienia dwóch ciał, ale inne drogi do prostych też nie należą. Fakt, że rozwiązanie problemu dwóch ciał można sprowadzić do równania ruchu harmonicznego dla ciała o masie zredukowanej (4.8), to godny podkreślenia wynik.

Fakt 4.2:

W układzie biegunowym układ równań dwóch ciał poruszających się tylko pod wpływem własnej grawitacji można sprowadzić do postaci równania ruchu oscylatora harmonicznego

Po drodze pokazaliśmy, że w układzie dwóch mas punktowych oddziałujących grawitacyjnie spełniona jest zasada zachowania pędu (4.5), momentu pędu (4.12) i energii (4.21). Wsparliśmy się również tymi zasadami. Zasada zachowania momentu pędu pozwoliła nam stwierdzić, że ruch układu mieści się w płaszczyźnie.

W (§TIV 2) stwierdziłem, że gdy Księżyc porusza się wokół Ziemi po orbicie kołowej, to łamana jest zasada zachowania pędu. To samo dotyczy również orbity eliptycznej. Rozwiązanie (4.39) pokazuje, że Księżyc może się poruszać po orbicie eliptycznej z Ziemią w jej ognisku. Nie ma tu jednak sprzeczności. Rozwiązanie (4.39) zakłada, że układ współrzędnych jest w ognisku krzywej stożkowej. Taki układ współrzędnych jest nieinercjalny i zasada zachowania pędu nie jest w nim spełniona, co podkreśliłem również w (§TIV 2). Rozwiązując układ równań ruchu ze względu na **r**, to jest wektor względnego położenia mas punktowych, przenieśliśmy się niepostrzeżenie do nowego, nieinercjalnego układu odniesienia. W tym nowym układzie zasady zachowania nie są spełnione, ale rozwiązanie uzyskuje wygodną postać. Możemy zatem stwierdzić teraz, że I prawo Keplera (okr. TIV 2.1) obowiązuje w układzie nieinercjalnym. Przejście do układu nieinercjalnego nie powinno nas tu niepokoić. Równania ruchu zostały napisane w układzie inercjalnym. Dokonując przejścia do innego układu automatycznie uwzględniamy siły pozorne, które pojawią się w nowym równaniu ruchu jako człony dodatkowe. Problem dopisania sił pozornych zaistniałby, gdybyśmy na samym starcie próbowali napisać układ równań ruchu w układzie nieinercjalnym.

Wrócę do rozwiązania (4.37) i określę jego warunki początkowe, co sprowadza się do określenia wartości stałych p i A. Stałą p mamy daną poprzez (4.39a). Znając masy ciał możemy określić stałą α (4.9a), jeżeli dodatkowo znamy wzajemne położenie i pędy ciała w danej chwili początkowej t_0, to możemy w tejże chwili określić moment pędu układu K_s względem środka masy. Musimy jeszcze wyznaczyć stałą A. W tym celu wstawię rozwiązanie (4.36) do równania (4.31).

$$\frac{K_s^2}{2\mu}\left(\left(\frac{\alpha\mu}{K_s^2}+A\cos(\varphi-\delta)\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\alpha\mu}{K_s^2}+A\cos(\varphi-\delta)\right)\right)^2\right) \qquad 4.40a$$

$$-\alpha\left(\frac{\alpha\mu}{K_s^2}+A\cos(\varphi-\delta)\right)=E_c$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\alpha\mu}{K_s^2}+A\cos(\varphi-\delta)\right)=-A\sin(\varphi-\delta) \qquad 4.40b$$

Wstawiając (3.38b) do (3.38a) i porządkując wyrazy mamy

$$\frac{K_s^2}{2\mu}\left(\left(\frac{\alpha\mu}{K_s^2}+A\cos(\varphi-\delta)\right)^2+\left(-A\sin(\varphi-\delta)\right)^2\right) \qquad 4.40c$$

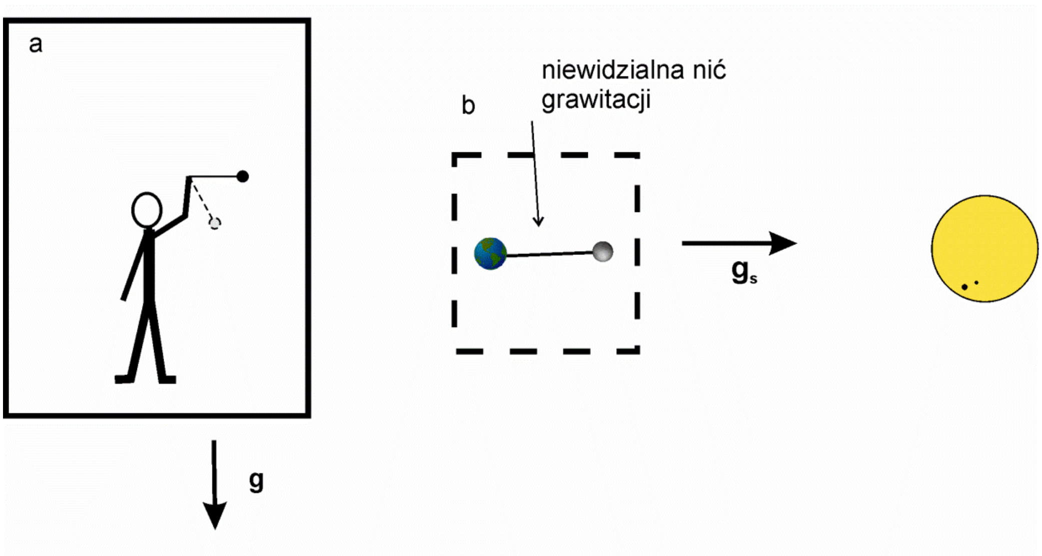
$$-\alpha\left(\frac{\alpha\mu}{K_s^2}+A\cos(\varphi-\delta)\right)=E_c$$

Po wymnożeniu wyrazów i uproszczeniu oraz rozwiązaniu ze względu na A mamy

$$A=\frac{\alpha\mu}{K_s^2}\sqrt{1+\frac{2K_s^2}{\mu\alpha^2}E_c} \qquad 4.41$$

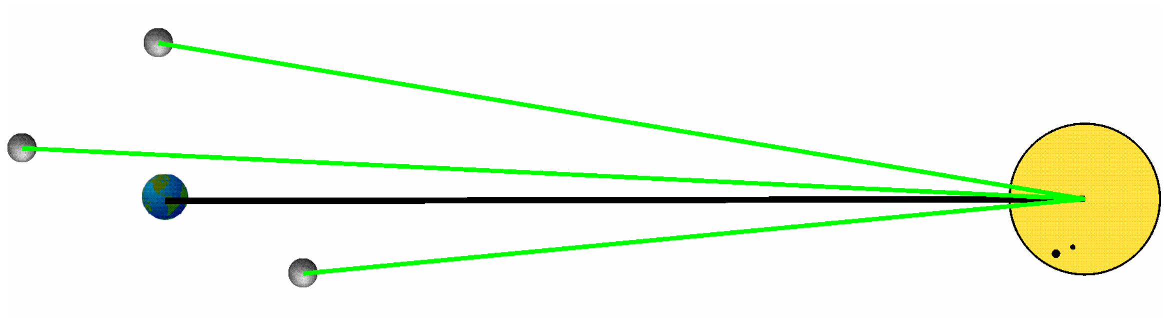
Zanim przejdę do omówienia przykładów uzyskanego rozwiązania omówię jeszcze kwestie jego stosowalności na przykładzie układu Ziemia-Księżyc.

Czy możemy uzyskane rozwiązanie sensownie zastosować do układu Ziemia-Księżyc? Na podstawie uzyskanych wyrażeń, przy określeniu warunków początkowych powinniśmy umieć określić ruch Ziemi i Księżyca. Czy możemy jednak zaniedbać wpływ Słońca? Policzymy natężenie pola grawitacyjnego Ziemi w punkcie znajdującym się w średniej odległości do Księżyca, to jest ok. 380000km i porównajmy wynik z natężeniem pola grawitacyjnego Słońca w środku Księżyca przyjmując odległość Księżyc-Słońce za równą 150 000 000km. Masa Ziemi wynosi $M_z \approx 6.0 \cdot 10^{24}$kg, a masa Słońca $M_s \approx 2.0 \cdot 10^{30}$kg. Natężenie ziemskiego pola wynosi g_z=0.0028m/s^2, a słonecznego g_s=0.006m/s^2. Wygląda na to, że Słońce mocniej przyciąga każdy kilogram Księżycowej masy niż Ziemia. Na jakiej podstawie możemy zaniedbać wpływ Słońca? Wyjaśnia to rysunek (4.3).



Rysunek 4.3. a) chłopiec powoli kręci kulką uwiązaną na nici, starając się utrzymać jej tor w poziomie. Gdyby stał na Ziemi kulka opadłaby pod wpływem przemożnej ziemskiej grawitacji. Chłopiec jednak jest w windzie, która swobodnie spada na Ziemię – jest zatem w stanie nieważkości. W tej sytuacji może kręcić kulką, utrzymując jej tor w poziomie, siłą znacznie mniejszą od siły grawitacji; b) Układ Ziemia-Księżyc możemy sobie wyobrazić jako układ zamknięty w kabinie wielkiej windy. Układ ten obraca się wokół środka masy podtrzymany niewidzialną nicią sił grawitacji. Przemożna siła grawitacji Słońca nie przeszkadza w tym krążeniu, gdyż układ Ziemia-Księżyc swobodnie spada na Słońce.

Sprawy nie są jednak aż tak proste. Odległość Ziemi i Księżyca w stosunku do Słońca różni się, czasem nawet o ok. 400 000km (rys. 4.4). W porównaniu do 150 000 000mln km to niewiele ale pamiętaj, że przy braku oporu ruchu nawet małe siły, działając przez dłuższy czas mogą dać wymierny efekt. Dla 150 000 000km natężenie pola słonecznego już znamy. Napiszę jego wartość z większą dokładnością: $g_s \approx 0.005929$m/s^2. Ile wynosi to natężenie dla 150 400 000km? Po obliczeniu mamy $g_{s2} \approx 0.005900$m/s^2. Ta niewielka różnica ma znacznie. Powoduje zaburzenia ruchu Księżyca i w efekcie nasze rozwiązanie może dać dobre przewidywanie jego ruchu w względnie krótkich okresach czasu. Gdy chcemy zbadać ruch Księżyca dokładniej, tak aby móc opisać jego trajektorię w dłuższej perspektywie czasu, musimy uwzględnić działanie Słońca, a to już jest zagadnienie trzech ciał. Przy jeszcze dokładniejszym podejściu musielibyśmy uwzględni oddziaływanie bliskich planet: Jowisza, Wenus i Marsa. Inna sprawa to przyjęcie modelu, w którym Ziemia i Księżyc jest idealnym ciałem sferyczno-metrycznym. Im dokładniej chcemy poznać przyszłą lub przeszłą trajektorię Księżyca, tym dokładniej musimy przeanalizować prawomocność wszystkich uproszczeń w naszym modelu.



Rysunek 4.4. Trzy różne położenia Ziemi względem Księżyca dają trzy różniąca się odległości Księżyc-Słońce, przy tej samej odległości Ziemia-Słońce. Oznacza to, że siła grawitacji Słonecznej nie działa tak samo na Ziemię i na Księżyc. Oba ciała spadają na Słońce nieznacznie różnymi przyspieszeniami.

4.1. Zagadnienie dwóch ciał – analiza

Pozostaje nam przyjrzeć się bliżej co ciekawszym konsekwencjom przeprowadzonej wyżej analizy ruchu dwóch ciał. Rozwiązanie (4.37) przedstawia krzywą stożkową. W ognisku tej krzywej jest jedno z dwóch ciał, a drugie obiega je po tejże krzywej. Przypomnę, że oznacza to, że układ współrzędnych związany z ciałem obieganym jest układem nieinercjalnym. O rodzaju krzywej stożkowej decyduje parametr ε, ale parametr ε nie wystarcza do określenia toru ciała – ważna jest również energia całkowita. Aby to zobaczyć wezmę pod uwagę wzory (4.9, 4.21, 4.37b, 4.39), które tu przepiszę

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\alpha}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \text{4.1.1a}$$

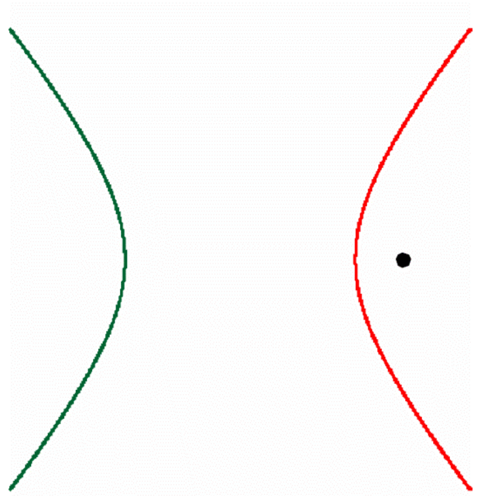
$$\frac{\mu v^2}{2} - \frac{\alpha}{r} = E_c \qquad \text{4.1.1b}$$

$$\varepsilon = A\frac{K_s^2}{\alpha\mu} \qquad \text{4.1.1c}$$

$$A = \frac{\alpha\mu}{K_s^2}\sqrt{1+\frac{2K_s^2}{\mu\alpha^2}E_c} \qquad 4.1.1d$$

Parametr α jest liczbę określającą wartość i znak siły centralnej odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości działającą na masę zredukowaną μ. Dla oddziaływania grawitacyjnego jest on dodatni (4.9a), ale dla oddziaływania elektrycznego będzie mógł być ujemny, gdyż siły elektryczne mogą być odpychające. Zatem traktujemy teraz uzyskane rozwiązanie jako ogólne rozwiązanie zagadnienia dwóch ciał w polu sił centralnych o wartości odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu odległości. Parametr α dookreśla fizyczną naturę tych sił.

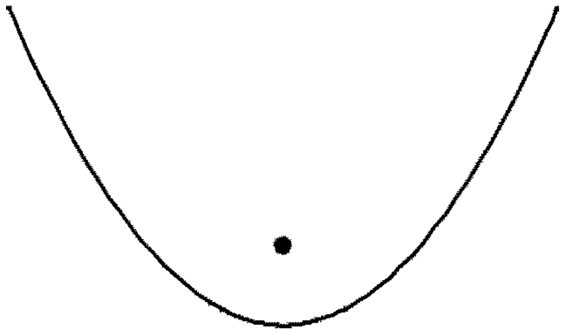
Ze wzoru (4.1.1a) widać, że gdy siła jest odpychająca $\alpha<0$ energia całkowita jest większa od zera $E_c>0$, co oznacza brak związania obu ciał. Wtedy po wstawieniu za A w (4.1.1c) wzoru (4.1.1d) widać, że $\varepsilon>1$, i mamy do czynienia z hiperbolą. Ponieważ siły są odpychające ciało musi biec po dalszej gałęzi hiperboli (rys. 4.1.1). Ten przypadek będzie ważny w elektrostatyce. Gdy $\alpha>0$, to siły są przyciągające i E_c może być ujemne, dodatnie lub równe zeru. Gdy $E_c>0$ i $\varepsilon>1$, to ciało biegnie po bliższej gałęzi hiperboli (rys. 4.1.1).



Rysunek 4.1.1. Zagadnienie dwóch ciała – ruch po hiperboli. Ciało centralne, czyli to w którym lokujemy układ współrzędnych, reprezentowane jest przez czarny punkt. Gdy siły są odpychające $\alpha<0$ to wtedy $E_c>0$ i $\varepsilon>1$, a tor ciała biegnie po dalszej gałęzi hiperboli (zielona linia). Gdy $\alpha>0$ (siła przyciągająca) oraz $E_c>0$ i $\varepsilon>1$, to tor ciała wyznacza dalsza gałąź hiperboli (zielona linia).

Gdy $\alpha<0$ oraz $E_c<0$ (układ jest związany), to $\varepsilon<1$ i tor jest elipsą. Mamy przypadek analogiczny do opisywanego przez pierwsze prawo Keplera (okr. TVI 2.1). Gdy $\alpha<0$ i $E_c=0$, to $\varepsilon=1$ i tor jest parabolą (rys. 4.1.2).

Jak z tego widać, teoria Newtona odtwarza drugie prawo Keplera wskazując jednocześnie, że prawo to wyróżnia tylko jeden z możliwych typów orbity, to jest orbitę eliptyczną. Gdy energia kinetyczna ciała orbitującego jest odpowiednio duża, to ciało centralne nie jest w stanie utrzymać go na zamkniętej orbicie. Wtedy ciało porusza się po zakrzywionym ale otwartym torze hiperbolicznym, a w szczególnym przypadku parabolicznym. Możemy również uwzględnić przypadek ciał, które się odpychają. Wtedy orbita jest zawsze otwarta i ma kształt hiperboli.



Rysunek 4.1.2. Zagadnienie dwóch ciał – ruch po paraboli. Ciało centralne, czyli to w którym lokujemy układ współrzędnych, reprezentowane jest przez czarny punkt. Siła jest przyciągająca α>0, oraz E_c=0, co oznacza, że ε=1 i tor jest parabolą.

Planety obiegają Słońce po orbitach eliptycznych, których spłaszczenie jest bardzo nieduże. Tabela (4.1.1) pokazuje parametry orbitalne planet Układu Słonecznego.

Planeta	Perycentrum [mln km]	Apocentrum [mln km]	Mimośród	Okres [doby]	Prędkość [km/s]
Merkury	46.0	69.8	0.2060	88,0	38.9-59.0
Wenus	107.5	108.9	0.0067	224.7	35.3-34.8
Ziemia	147.1	152.1	0.0167	365.3	30.3-29.3
Mars	206.6	249.2	0.0934	686.98	26.6-22.0
Jowisz	740.5	816.6	0.0484	4332	13.7-12.4
Saturn	1352	1515	0.0541	10 759	9.09-10.18
Uran	2741	3004	0.0472	30685	6.49-7.11
Neptun	4444	4546	0.0009	60189	5.37-5.50

Tabela 4.1.1. Wybrane dane ruchu orbitalnego planet Układu Słonecznego. Perycentrum to najmniejsze odległość między planetą a Słońcem, apocentrum to odległość największa. Mimośród określa stopień spłaszczenia elipsy.

Przy okazji zdefiniuję pojęcia używane przy charakteryzacji orbit opisanych z użyciem prawa Keplera (tzw. orbit keplerowskich).

Definicja 4.1.1: Apocentrum

Apocetrum to punkt na orbicie keplerowskiej położony najdalej od ciała centralnego

Definicja 4.1.2: Aphelium

Aphelium to punkt na orbicie słonecznej położony najdalej od Słońca.

Definicja 4.1.3: Apogeum

Apogeum to punkt na orbicie ziemskiej położony najdalej od Ziemi.

Definicja 4.1.4: Perycentrum

Perycetrum to punkt na orbicie keplerowskiej położony najbliżej od ciała centralnego

Definicja 4.1.5: Peryhelium

Peryhelium to punkt na orbicie słonecznej położony najbliżej od Słońca.

Definicja 4.1.6: Perygeum

Perygeum to punkt na orbicie ziemskiej położony najbliżej od Ziemi.

Zobaczmy jak wygląda kwestia energii potencjalnej, obliczanej względem masy m_1. Zacznę od równania (4.7). Pomnożę je przez m_2

$$\mathbf{F_2} = m_2\ddot{\mathbf{r}} = -m_2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -G\frac{\left(m_1+m_2\right)m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad 4.1.1$$

Wielkość $\mathbf{F_2}$, to siła działająca na masę m_2. Zależność siły $\mathbf{F_2}$ od odległości między masami r, we wzorze (4.1.1) jest taka sama jak w prawie powszechnego ciążenia. Tu muszę podkreślić, że podczas zmiany układ współrzędnych obliczane siły grawitacyjne między dwoma punktowymi (sferyczno symetrycznymi) masami nie ulega zmianie. W każdym układzie współrzędnych masa m_1 i m_2 oraz odległości między nimi są takie same, zatem i wyliczone siły są takie same[10]. Możemy więc traktować równanie (4.1.1) jako wzór określający siłę wywieraną na ciało o masie m_2 przez nieruchome (jesteśmy ciągle w NUO związanym z m_2) o masie m_1+m_2. Nasz układ współrzędnych jest co prawda nieinercjalny, ale równanie o tym nie wie. Pamiętasz zasadę: od strony matematycznej to samo równanie daje to samo rozwiązanie, niezależnie od tego jak je interpretujemy fizycznie. Możemy teraz przez analogię zapisać wzór na energię potencjalne cząstki m_2 (przyjmujemy, że $E_{p2}=0$, dla $r=\infty$).

$$E_{p2} = -G\frac{\left(m_1+m_2\right)m_2}{r} = -G\frac{m_1\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)m_2}{r} \qquad 4.1.2$$

---

[10] Nie jest to prawdą na gruncie szczególnej teorii względności. Dlatego potrzebna była ogólna teoria względności, która rozwiązała problemy z grawitacją. My jednak poruszamy się w ramach fizyki klasycznej i póki się to nie zmieni póty obowiązują jej zasady. Zresztą dla słabych pól grawitacyjnych (takich jak pole Ziemi czy Słońca) i niewielkich względnych prędkościach układów odniesienia (1000km/s to ciągle niewielka prędkość) efekty relatywistyczne są bardzo słabe.

Zauważ, że jeżeli m_1 jest dużo większe od m_2, to ułamek w nawiasie możemy przyjąć jako równy zeru i dostajemy wzór (3.1.3), który wyznacza nam energie potencjalną masy m_2, przy założeniu, że masa m_1 ma przyspieszenie własne równe zeru; wtedy układ stowarzyszony z masą m_1 wyznacza układ inercjalny. W rzeczywistości obie masy pod wpływem własnego przyciągania poruszają się. Zatem wzór (4.1.2) wyznacza energię potencjalną z uwzględnieniem tego wzajemnego ruchu. Gdy $m_1=m_2$, to (4.1.2) przechodzi w

$$E_{p2} = -G\frac{2m_1m_2}{r} \tag{4.1.2a}$$

Jest to wartość dwa razy większa niż w przypadku wzoru (3.1.3), który zakłada, że masa m_1 ma zerowe przyspieszenie własne. Oczywiście, w układzie nieinercjalnym zasada zachowania energii nie obowiązuje. Ale pisząc równanie (4.1.2a) nie mamy takich wymagań.

Energia potencjalna powinna nam wskazać z jaką prędkością uderzy jedno ciało w drugie. Jeżeli obie masy są takie same, to obie masy zbliżają się do siebie z tym samym przyspieszeniem (patrząc z inercjalnego układu odniesienia). Zakładając, że przyspieszenie jednej z nich jest równe zeru robimy błąd, który skutkuje, mniejszą energią kinetyczną przy zderzeniu. Obserwując układ z ciała m_1 i obliczając jego energię potencjalną ze wzoru (3.1.3) nie doszacujemy wpływu prędkości ciała m_2 przy zderzeniu. Wzór (4.1.2a) uwzględnia obecność przyspieszenia obu mas. Przy tych samych masach m_1 i m_2 przyspieszenie obu ciał mierzone w IUO (np. względem środka masy) jest takie same. Oznacza to, że względna prędkość ciał przy zderzeniu jest cztery razy większa niż wyliczona ze wzoru (3.1.3) w układzie ciała m_1. Podwojenie energii potencjalnej (4.1.2a), pozwala na obliczenie poprawnej wartości prędkości przy zderzeniu. Oczywiście gdy masa m_1 jest dużo większa od masy m_2 przyspieszenie masy m_2 jest dużo mniejsze i błąd popełniony przy stosowaniu wzoru (3.1.3) jest bardzo mały.

Uwzględnienie ruchu obu mas wprowadza korekty również do trzeciego prawa Keplera, którego zmodyfikowaną postać podałem we wzorze (2.10).

4.2. Ruch fotonu w klasycznym polu grawitacyjnym

Foton poruszający się w polu grawitacyjnym kojarzy się fizykom z ogólną teorią względności. Jednak ruch wiązki promieni świetlnych w polu grawitacyjnym był analizowany jeszcze przed pojawieniem się teorii względności. Nie posługiwano się wówczas pojęciem fotonu, ale samo światło, we wszelkich aspektach, znajdowało się w centrum uwagi badaczy. W XVIII i na początku XIX wieku założenie, że światło oddziałuje grawitacyjnie, w świetle teorii korpuskularnej Newtona, wydawało się naturalne. Nie znano tylko masy cząsteczek światła, ale w spadku swobodnym masa nie ma wpływu na przyspieszenie cząsteczki. W połowie XIX wieku przewagę zyskała teoria falowa światła i sprawy jego ruchu w polu grawitacyjnym pogmatwały się.

My przeanalizujemy ruch światła korzystając z pojęcia fotonu oraz wzoru Plancka na jego energię

$$E_f = h\nu = \hbar\omega \qquad 4.2.1$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \qquad 4.2.1a$$

Gdzie ν jest częstością światła podaną w cyklach na jednostkę czasu, ω jest częstością w radianach na jednostkę czasu, a h jest stałą Plancka. W (§TXI 4.4) wykorzystując ten wzór pokazałem, że z fotonem możemy stowarzyszyć pęd. Podobnie, wykorzystując wzór Einsteina $E=mc^2$, możemy przypisać fotonowi masę

$$m_f = \frac{\hbar\omega}{c^2} \qquad 4.2.2$$

Niech teraz foton „spadnie" w polu grawitacyjnym obniżające swoje położenie o Δh. Jego energia wzrośnie, kosztem energii potencjalnej, o

$$\Delta E = m_f g \Delta h \qquad 4.2.3$$

Wzrost energii fotonu, zgodnie z (4.2.1) musi przejawiać się zmianą jego częstości

$$\omega' = \hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{c^2} g\Delta h \qquad 4.2.4$$

Zmiana częstości wynosi

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \omega\frac{g}{c^2}\Delta h \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{g}{c^2}\Delta h = 1.09\cdot 10^{-16}\Delta h \qquad 4.2.5a$$

We wzorze (4.2.5) przyjąłem g=9.81m/s^2. Mamy jednocześnie

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = 1.09\cdot 10^{-16}\Delta h \qquad 4.2.5$$

Wzór (4.2.5a) opisuje względne przesunięcie częstotliwości światła w polu grawitacyjnym ciał niebieskich. W (§TIV 6) pisałem o doświadczeniu Pounda-Rebeki, którzy wykorzystując efekt Mössbauera zmierzyli przesunięcie częstości dla światła biegnące wzdłuż linii pionu. Wartości uzyskane ze wzoru (4.2.5a) zgadzają się z danymi eksperymentalnymi, choć nasze wyprowadzenie ma charakter półklasyczny i nie uwzględniamy równań ogólnej teorii względności. Jednak w tak słabych polach grawitacyjnych jak pole Ziemi należy się spodziewać, że wiele klasycznych wzorów zachowa są użyteczność.

Łatwo jest pokazać, że gdy uwzględnimy zmianę wartości przyspieszenia z wysokością to wzór (4.2.5) przejdzie w

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r_p}\right) \qquad 4.2.6$$

Gdzie G to stała grawitacyjna, M masa kulisto symetrycznego obiektu (planety, gwiazdy), r_p odległość początkowa od środka masy M, r_k odległość końcowa od środka masy M. Podstawiając $r_p \to R$, oraz $r_k \to \infty$ mamy

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=-\frac{GM}{c^2}\frac{1}{R} \qquad 4.2.7$$

Przez R oznaczyłem promień ciała o masie M. Wzór ten mówi nam ile najmniej energii straci foton oddalający się z powierzchni np. gwiazdy do nieskończoności, przy pominięciu obecności innych źródeł pola grawitacyjnego. Mając (4.2.7) możemy oszacować zmianę częstości światła emitowanego z powierzchni gwiazd. Spodziewamy się tu, że linie widmowe np. wodoru będą przesunięte ku czerwieni. Dla Słońca, względne przesunięcie częstotliwości wyniesie

$$\frac{\Delta\nu}{\nu}=-\frac{GM_S}{c^2}\frac{1}{R_S}\approx 2.1\cdot 10^{-6} \qquad 4.2.8$$

Białe karły są gwiazdami o masie porównywalnej z masą Słońca, ale o promieniu około sto razy mniejszym. Oznacza to, że przesunięcie ku czerwieni powinny mieć około sto razy większe. I rzeczywiście pomiary tego przesunięcia wykazały dużą zgodność ze wzorem (4.2.7).

Uwaga 4.2.1:

Choć znamy wiele białych karłów, to pomiar przesunięcia linii widmowych, zgodnego ze wzorem (4.2.7) do prostych nie należy. Przesunięcie związane z polem grawitacyjnym nakłada się na przesunięcie związane z efektem Dopplera, wynikającym z ruchu gwiazd względem obserwatora na Ziemi. Musimy zatem dokładnie znać wektor prędkości tych gwiazd. Nadto musimy umieć dokładnie wyznaczyć ich masę i promień. Na szczęście dla części białych karłów możliwe jest spełnienie powyższych warunków.

Z prowadzonych tu rozważań wynika, że grawitacyjne przesunięcie częstości fal jest tym większe im silniejsze jest pole grawitacyjne. Ziemskie i Słoneczne pole grawitacyjne jest słabe. Słabe jest również pole grawitacyjne białego karła, stąd wyniki na przesunięcie uzyskane w ramach klasycznej teorii grawitacji dobrze zgadzają się z eksperymentem. Co to jednak znaczy, że pole grawitacyjne jest słabe? Spróbujmy dokonać następującej analizy. Obliczymy siłę przyciągania jednego kilograma masy na powierzchni różnych obiektów o masie Słońca M=1.98·10^{30}kg. Przy okazji obliczę również różnicę siły przyciągania jednego kilograma masy przy różnicy wysokości Δh=1m. To znaczy, że jeden punkt o masie m=1kg jest na powierzchni a drugi też o masie m=1kg znajduje się o metr wyżej. Wyniki pokazuje tabela (4.2.1). Widać z niej, że na powierzchni Słońca sama grawitacja nie powinna nam zrobić krzywdy. W przypadku białego karła sprawy robią się niepokojące. Stojący dorosły człowiek czułby bardzo wyraźną różnicę ciążenia przy stopach i na poziomie głowy. Na jeden kilogram masy, przy różnicy metra wysokości jest to ponad 200kG siły. Spadający swobodnie człowiek, w pozycji pionowej czułby się rozciągany. Takie siły działające na ciało w wyniku różnego natężenia pola grawitacyjnego w różnych punktach tego ciała nazywamy siłami pływowymi.

Obiekt	Promień [km]	Siła w pkt. 1 [N]	Siła w pkt. 2 [N]	Różnica sił [N]	
Słońce	$6.960 \cdot 10^5$	272.6	272.4	0.2	
Biały karzeł	$6.960 \cdot 10^3$	2726000	2724000	2000	
Gwiazda neutronowa	10	$1.3200 \cdot 10^{12}$	$1.31970 \cdot 10^{12}$	$3 \cdot 10^8$	
Horyzont czarnej dziury	2.95	1.5168^{13}	1.5157^{13}	1.1^{10}	
Tabela 4.2.1. Różnica sił grawitacji działających na obiekty o masie 1kg przy różnicy wysokości 1m. W każdym przypadku masa obiektu jest równa masie Słońca.					

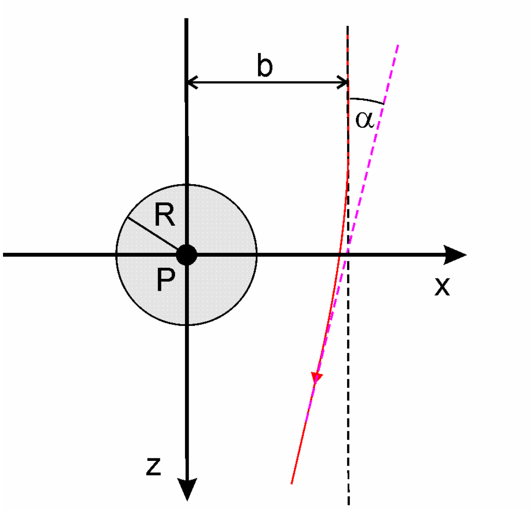
Przy powierzchni gwiazdy neutronowej o masie Słońca różnica sił wynosi 30 milionów kG siła. Spadający swobodnie człowiek zostałby w mgnieniu oka rozciągnięty do rozmiarów długiego spaghetti. Przy horyzoncie zdarzeń czarnej dziury o masie Słońca różnica sił przekroczyłaby miliard kG siła. Horyzont zdarzeń jest granicą po przekroczeniu, której nie ma powrotu. Liczymy ją od środka czarnej dziury, dla ciała o masie *M*, ze wzoru

$$R_s = 2\frac{GM}{c^2} \qquad 4.2.9$$

Tak obliczona wielkości nazywana jest również promieniem Schwarzschilda. Obliczona tu siła przyciągania jednego kilograma masy obrazuje możliwości pola grawitacyjnego. We wszystkich przypadkach, przyjąłem, że masa obiektu źródłowego jest równa masie Słońca, tyle że masa ta mieści się w coraz to mniejszej kuli. W efekcie powierzchnia kolejnych obiektów zbliża się do ich środka, a pole grawitacyjne zmienia się coraz bardziej intensywnie wraz z wysokością. Jeżeli porównamy siłę przyciągania jednego kilograma masy (co jest liczbowo równe natężeniu pola) przy powierzchni białego karła i powierzchni gwiazdy neutronowej to widać ogromny skok jej wartości. Pole grawitacyjne przy powierzchni białego karła, choć dużo większe niż przy powierzchni Ziemi, wydaje się polem słabym, a w pobliżu gwiazdy neutronowej pole zdaje się być silne. To nie jest niestety dobra intuicja. Dla czarnej dziury o masie miliarda mas Słońca promień Schwarzschilda wynosi 3mld km, a siły pływowe przy horyzoncie zdarzeń są małe, choć pole grawitacyjne jest potężne. Człowiek swobodnie spadający w pobliżu horyzontu zdarzeń takiej czarnej dziury nie czułby niepokojących efektów grawitacyjnych. A pole grawitacyjne przy horyzoncie zdarzeń takiej czarnej dziury uznajemy za silne. Cała ta zabawa prowadzi nas do wniosku, że z kryterium pozwalającym określić czy pole jest silne czy słabe musimy poczekać do momentu, kiedy zajmiemy się ogólną teorię względności. Teraz musimy przyjąć, że ziemskie czy słoneczne pole grawitacyjne należy do klasy słabych.

Pamiętaj, że przeprowadzone wyżej rozważania mają charakter fizycznej zabawy. Nieco arbitralnie pomieszaliśmy tam wyniki z mechaniki kwantowej, z wzorem $E=mc^2$ rodem ze szczególnej teorii względności oraz z klasyczną teorią grawitacji. Zabawa ta dała całkiem sensowne wyniki. Nie ma w takiej zabawie nic zdrożnego, jest to nawet pouczające. Dlatego fizycy też tak się bawią. Jednak takie miksowanie różnych teorii wymaga ostrożnego podejścia – wyniki nie zawsze są poprawne. Mając dziś szerszą wiedzę możemy zrozumieć dlaczego nasza zabawa dała poprawne rezultaty, więc zabawa jest bezpieczna.

Oszacujemy jak zmienia się tor fotonu w pobliżu obiektu o masie M (rys. 4.2.1).



Rys 4.2.1. W pobliżu masywnego ciała tor fotonu ulega zakrzywieniu, przy założeniu, że foton oddziałuje grawitacyjnie. W naszym modelu przypisujemy fotonowi masę zgodnie z podstawowymi wzorami mechaniki kwantowej i teorii względności

Ponieważ interesuje nas odchylenia promienia będziemy szukali zmiany współrzędnej x fotonu. Prawo powszechnego ciążenia daje nam równanie ruchu dla osi x w postaci

$$m_f \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -G \frac{M m_f}{r^2} \frac{x}{r} \qquad 4.2.10$$

$$r^2 = x^2 + z^2 \qquad 4.2.10a$$

Zakładamy, że odchylenie działa efektywnie w pobliżu punktu P (rys. 4.2.1), gdyż oddziaływanie grawitacyjne zmniejsza się z kwadratem odległości (szybko maleje). Mamy zatem

$$x \approx b \qquad 4.2.11a$$

Przyjmujemy nadto, że w kierunku osi x światło nie zmienia swojej prędkości, bo siła grawitacyjna jest normalna do prędkości, mamy zatem

$$z = ct \qquad 4.2.11b$$

Po podstawieniu do (4.2.10) otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}z^2} = -G \frac{Mb}{c^2 \left(z^2 + b^2\right)^3} \qquad 4.2.11$$

Obie strony mnożymy przez dz.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z = -G\frac{Mb}{c^2\left(z^2+b^2\right)^3}\mathrm{d}z \qquad 4.2.12$$

Musimy z całkować obie strony. Lewa strona daje

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\infty} - \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right|_{z=-\infty} \qquad 4.2.13a$$

Ale wyrażenie dx/dz określa kąt α stycznej do toru. Przyjmując, że wiązka fotonów jest równoległa, dla x=-∞ mamy α_p=0. Zatem wzór (4.2.13a) określa kąt odchylenia α_k.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}z^2}\mathrm{d}z = \alpha_k = \alpha \qquad 4.2.13$$

Druga strona (3.2.12) daje

$$-G\frac{Mb}{c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{\left(z^2+b^2\right)^3} = -G\frac{Mb}{c^2}\left.\frac{z}{b^2\sqrt{z^2+b^2}}\right|_{z=-\infty}^{z=\infty} = -2G\frac{M}{c^2 b} \qquad 4.2.14$$

Mamy zatem

$$\alpha = -2G\frac{M}{c^2 b} \qquad 4.3.15$$

Dla światła przechodzącego w pobliżu Słońca przyjmujemy $b=R_s=6.96\cdot 10^8$m. Wstawiając masę Słońca $M_s=1.98\cdot 10^{30}$kg, dostajemy kąt odchylenia: α=-0.87 sekundy kątowej. Ogólna teoria względności daje dwa razy większą wartość na kąt odchylenia

$$\alpha = -4G\frac{M}{c^2 b} \qquad 4.3.16$$

Mogłoby się zdawać, że różnica jest spowodowana przyjętymi przybliżeniami. Ale najgrubsze z nich (4.2.11) zwiększa otrzymaną wartość odchylenia, więc należy się spodziewać, że wartość uzyskana z dokładniejszego modelu będzie mniejsza a nie większa. Pomiar odchylenia światła gwiazd podczas całkowitego zaćmienia Słońca został przeprowadzony po raz pierwszy w dniu 29 maja 1919 w dwóch miejscach: w Sobral w Brazylii i Principe w Zatoce Gwinejskiej. Obie ekspedycje został zorganizowane przez A. Eddingtona i F. Dysona w celu przetestowania świeżo sformułowanej ogólnej teorii względności. Pomiary potwierdziły jej przewidywania, tak samo jak pomiary powtarzane wielokrotnie przy okazji innych całkowitych zaćmień Słońca.

4.3. Siły pływowe

Wyniki pokazane w tabeli (4.2.1) wskazują, że na różne punkty ciała znajdującego się w swobodnie spadającej kabinie działają różne siły. Różnice w wartości sił mogą powodować deformację spadających ciał. Siły te nazywamy siłami pływowymi.

Definicja 4.3.1: Siły pływowe

Różnica sił wywieranych przez pole grawitacyjne dla różnych punktów danego ciała nazywamy siłami pływowymi działającymi na to ciało.

Jak widzieliśmy w tabeli (4.2.1) dla ciał o dużej gęstości, różnice te potrafią być bardzo duże nawet przy różnicy położeń (liczonej wzdłuż pionu) równej jeden metr. Działanie sił pływowych oznacza, że część ciała bliższa powierzchni planety (lub innego masywnego ciała niebieskiego) spada z większym przyśpieszeniem niż część dalsza. Oszacuję w ogólny sposób wartość siły pływowej w polu grawitacyjnym Ziemi na bazie prostego modelu pokazanego na rysunku (4.3.1). Obliczmy przyspieszenie grawitacyjne (natężenie pola grawitacyjnego) działające na cząstkę P. Zacznę od składowej z-towej. Z rysunku widać, że dla dużych R i cząstki P leżącej blisko początku lokalnego układu współrzędnych mogę przyjąć.

$$R \approx r \tag{4.3.1a}$$

Czyli składową z-tową natężenia pola mogę liczyć tak jakby cząstka leżała w punkcie P_z, to jest na osi z-owej układu współrzędnych

$$g_P = -\frac{GM_Z}{(r+z)^2} \tag{4.3.1}$$

Gdzie M_Z to masa Ziemi, r jest odległością od środka Ziemi do początku lokalnego układu współrzędnych O, z jest z-tową współrzędną tej cząstki w układzie odniesienia o początku w punkcie O. W punkcie O natężenie pola (czyli przyspieszenie grawitacyjne) ma wartość

$$g_O = -\frac{GM_Z}{r^2} \tag{4.3.2}$$

Zatem przyspieszenie cząstki względem początku lokalnego układu O, czyli składowa z-towa przyspieszenia z jakim cząstka spada na początek lokalnego układu O, wynosi

$$a_Z = -\frac{GM_Z}{(r+z)^2} + \frac{GM_Z}{r^2} = -GM_Z \frac{-2rz - z^2}{r^4\left(1+\frac{z}{r}\right)^2} \tag{4.3.3a}$$

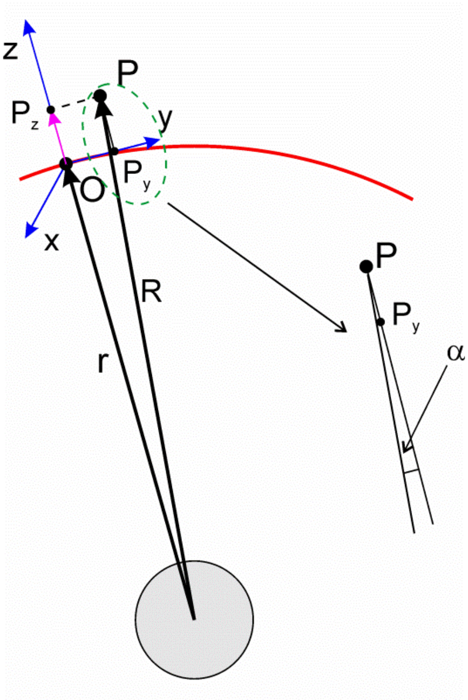
Biorąc pod uwagę, że układzie współrzędnych O współrzędna $z << r$ wzór (4.3.3a) przyjmie przybliżoną postać

$$a_Z \approx GM_Z \frac{2z}{r^3} \tag{4.3.3}$$

Zatem w układzie O siła $\mathbf{F_z}$, która powoduje to przyspieszenie, ma wartość

$$F_Z \approx GM_Z m \frac{2z}{r^3} \qquad 4.3.4$$

Gdzie *m* masa cząstki. Podobnie postępując mogę wyznaczyć składową *y*-ową natężenia pola (w lokalnym układzie współrzędnych O) jakie działa na cząstkę w punkcie P. Aby to zrobić wyznaczę wartość natężenia pola dla cząstki umieszczonej w punkcie P_y na osi *y*, a następnie zrzutuję tą wartość na oś *y*. Punkt P_y leży w położeniu rzutu punktu P na oś *y*. Jak widać z rysunku wektor R tworzy niewielki kąt α z kierunkiem PP_y. Siła działa wzdłuż promienia więc jej rzut na osi *y* będzie zależał od tego niewielkiego kąta α.



Rysunek 4.3.1. Schemat do szacowania sił pływowych. Na niebiesko zaznaczony jest lokalny układ współrzędnych

$$a_Y = -g'\sin(\alpha) = -\frac{GM_Z}{r'^2}\frac{y}{r'} = -\frac{GM_Z}{(r^2+y^2)}\frac{y}{\sqrt{r^2+y^2}} \approx -\frac{GM_Z}{r^3}y \qquad 4.3.5$$

gdzie skorzystałem z faktu, że $y \ll r$. Siła odpowiadająca za to przyspieszenie wynosi

$$F_Y = -\frac{GmM_Z}{r^3}y \qquad 4.3.6$$

Analogicznie wyrażenie możemy zapisać dla składowej *x*-owej

$$F_X = -\frac{GmM_Z}{r^3}x \qquad 4.3.7$$

Zatem całkowita siła ma współrzędne

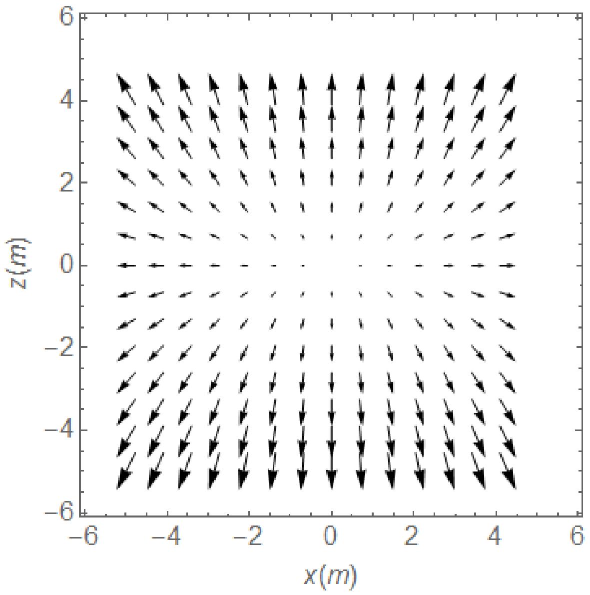
$$\mathbf{F_P} = -\frac{GmM_Z}{r^3}(x, y, -2z) \qquad 4.3.8$$

Wzór (4.3.8) opisuje siły pływowe, przy założeniu, że w lokalnym układzie współrzędnych spełniony jest warunek $x,y,z<<r$. Rysunek (4.3.2) przedstawia wykres pola wektorowego (4.3.8) na jednostkową masę punktu P (czyli wykreśla rozkład przyspieszeń powodowanych przez siły pływowe).

W ogólnym przypadku (ale dla małych x,y,z), czyli dla dowolnego pola grawitacyjnego, siły pływowe dane są wzorem

$$\mathbf{F_P} = \mathbf{r}\nabla \cdot \mathbf{F} \qquad 4.3.9$$

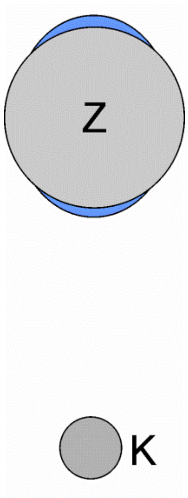
Gdzie **r** jest wektorem wodzącym w lokalnym układzie współrzędnych a gradient obliczany jest dla **r**=**0**.



Rysunek 4.3.2. Przykładowy rozkład sił pływowych na jednostkę masy, na wysokości 300km nad Ziemią. Oś *z* skierowana jest wzdłuż osi ziemskiej. Punkt odniesienia (początek lokalnego układu współrzędnych) jest w centrum rysunku. Widać, że odchodząc od punktu odniesienia w górę lub w dół różnice sił grawitacji działają tak, że ciało rozciągłe jest rozciągane. Rozciągane jest również na boki ale z dwukrotnie mniejszą siłą. Dla różnicy położenia 6m wzdłuż osi *z*, różnice sił mają wartość rzędu 10^{-5}N. Wynika z tego, że kosmonauci w stacji orbitalnej nie są w stanie poczuć ich działania

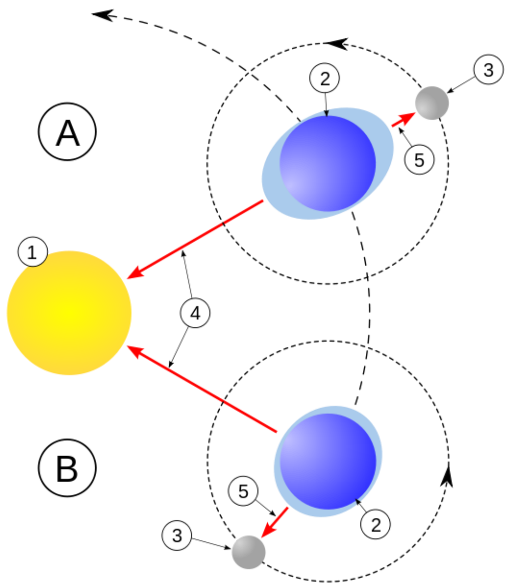
Siły pływowe w statku kosmicznym na ziemskiej orbicie są niewielkie, przy różnicy odległości 1m mają wartość rzędu 10^{-6}N na jeden kilogram masy. Jednak mogą skutkować w dobrze widocznych efektach nawet w słabym polu grawitacyjnym, gdy odległości między dwoma punktami są duże (to znaczy ciało jest duże). Przykładowo Księżyc wywiera siły pływowe na Ziemię, których skutkiem są pływy morskie (rys. 4.3.3). Zjawisko pływów morskich jest złożone i rysunek (4.3.3) przedstawia bardzo uproszczone podejście do tej kwestii. Dokładniejszą jej dyskusję oraz efektów z nią związanych (np. wydłużanie się doby ziemskiej) znajdziesz w podręczniku[11]. Podam jeszcze tylko garść podstawowych informacji o rzeczywistych pływach. Ich wysokość zależy od wielu czynników: takich jak grawitacja Księżyca i Słońca, wzajemne położenie Księżyca i Słońca, kształt wybrzeża, głębokość wody, bezwładność mas wody. Powoduje to znaczne różnice lokalne w wysokości pływów morskich. Największe notuje się na Atlantyku w Zatoce Fundy (Kanada), gdzie

[11] A.K. Wróblewski, J. A Zakrzewski, Wstęp do Fizyki, tom 2 część 1, PWN 1989.



Rysunek 4.3.3. Schematyczne przedstawienie powstawiania pływów morskich pod wpływem grawitacji Księżyca. Zgodnie z rysunkiem Księżyc generuje siły pływowe, które po przeciwnych stronach Ziemi zwrócone są od środka na zewnątrz (zobacz też rysunek (4.3.2)). Powoduje to wybrzuszenie powierzchni mórz i oceanów, tu narysowane bardzo przesadnie. Należy również pamiętać, że zjawisko pływów jest bardzo złożone. Musi uwzględniać między innymi działanie Słońca, bezwładność mas wody, kształt wybrzeża i inne czynniki. Rysunek ogranicza się do przedstawienia w uproszczony sposób efektu działania Księżyca

średnio poziom wody zmienia się o około 11 metrów, a podczas pływu syzyginjego (rys. 4.3.4) jest to średnio 15metrów. Maksymalna zanotowana różnica poziomów między odpływem a przypływem wynosiła 19.6m.



Rysunek 4.3.4. Schemat ilustrujący pływy morskie: a) syzygijny; b) kwadraturowy. Oznaczenia: (1) Słońce, (2) Ziemia, (3) Księżyc, (4) kierunek przyciągania przez Słońce, (5) kierunek przyciągania przez Ziemię. Przy położeniu Słońca i Księżyca w jednej linii obserwujemy maksymalnie duże pływy. Gdy trójkąt oparty o środki Słońca, Ziemi i Księżyca jest trójkątem prostokątnym poziom pływu jest najmniejszy; źródło: Wikipedia, autor: MesserWoland, licencja: Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported

W prostym modelu[8] działania samego Księżyca zmiana poziomu oceanu szacowana jest na około 30cm. Uwzględnienie wpływu Księżyca i Słońca w optymalnej wzajemnej pozycji (przypływ syzygijny) daje wyniki na poziomie jednego metra. Pokazuje to, że prosty model oparty o działanie Księżyca i Słońca daje zgrubne pojęcie o pływach morskich.

Na tak zamkniętym akwenie jak Bałtyk (brak szerokiego połączenia z oceanem) pływy są niewielkie. Na południowym Bałtyku poziom wody zmienia się o jeden centymetr, przy cieśninach duńskich jest to około 14cm.

Ruch wody podczas pływów próbuje się wykorzystać do produkcji energii elektrycznej. Obecnie (2020 rok) wszystkie elektrownie pływowe mają sumaryczną moc około 500MW. Jednak planowane są potężniejsze instalacje.

Siły pływowe rozpraszają energię ruchu obrotowego Ziemi, powodując wydłużanie się doby. W ciągu najbliższych stu lat doba może wydłużyć się o pięć milisekund (§TI 6.3). Szacuje się, że cztery miliardy lat temu doba miała długość około sześciu godzin. Jednocześnie spowolnieniu doby towarzyszy oddalanie się Księżyca, jednak według obecnych przewidywań to uciekanie Księżyca ma swoje granice i po osiągnięciu maksymalnego oddalenia Księżyc zacznie się do Ziemi zbliżać. Jest to wynik modelowania opartego o złożony model uwzględniający działanie wielu czynników. Słowem stosowane do tego modele są już dalekie od prostoty modelu kulistej krowy, ale dają za to wgląd w subtelne efekty, których kumulacja w długim okresie czasu może mieć istotny wpływ na ewolucję badanego układu fizycznego.

Siły pływowe mogą być znaczne, albo ze względu na duży gradient pola grawitacyjnego, albo ze względu na duże rozmiary ciała w polu o małym gradiencie. Przy dużych różnicach oddziaływania grawitacyjnego na dwa krańce ciała może dojść do jego rozerwania. Z efektem tym wiąże się pojęcie granicy Roche'a. Granica Roche'a określa jak blisko dwa ciała mogą się do siebie zbliżyć aby siły pływowe nie rozerwały jednego z nich. Wynika z tego, że nie można jej wyznaczyć dla samej Ziemi. Granica Roche'a musi być wyznaczona dla pary ciał. I tak przykładowo, dla układu Ziemia-Księżyc granica Roche'a wypada w odległości ok. 9500km, to znaczy w takiej odległości muszą się znaleźć środki Ziemi i Księżyca, aby granica Roche'a została przekroczona. Dla Ziemi i typowej komety jest to ok. 18000km. Oczywiście rozmiary przeciętnego statku kosmicznego są zbyt małe aby mógł zostać rozerwany przez siły pływowe Ziemi.

Jedna z hipotez mówi, że pierścienie Saturna są resztkami jego księżyca, który „śmiał" przekroczyć granicę Roche'a. co zakończyło się jego rozerwaniem. Działanie sił pływowych mogliśmy obserwować w lipcu 1994 roku, kiedy w Jowisza uderzyła kometa Shomaker-Levy 9. Zanim dotarła do atmosfery planety została rozerwana przez siły pływowe. W efekcie w Jowisza uderzyło wiele kawałków komety o różnych wielkościach (rys. 4.3.5).

Inny przykład efektów działania sił pływowych pokazuje rysunek (4.3.6). Na najbardziej wewnętrzny galileuszowy księżyc Io silnie oddziałuje pola grawitacyjne Jowisza. Planeta deformuje księżyc w wyniku czego wydziela się w nim dużo ciepło. Powoduje, to że relatywnie małe ciało jakim jest Io jest ciągle na tyle gorące, że na jego powierzchni działają liczne czynne wulkany.

Rys. 4.3.5. Zdjęcie Jowisza (w ultrafiolecie), w 2h 30 minut po ostatnim większym uderzeniu resztek komety Shoemaker-Levy 9. Czarne plamy na dole są śladami kolejnych uderzeń. Okrągła plamka na górze jest obrazem księżyca Io przesuwającym się na tle planety. Zdjęcie wykonane przez kosmiczny teleskop Hubble'a; źródło NASA

Rys. 4.3.6. Czynny wulkan na księżycu Jowisza Io. Zdjęcie zostało wykonane przez sondę Galileo w 1999 roku podczas bliskiego przelotu w pobliżu tego księżyca. Io jest pierwszym pozaziemskim ciałem niebieskim, na którym stwierdzono obecność czynnych wulkanów; źródło zdjęcia NASA.

Skoro już jesteśmy przy kosmicznych tematach, to proponuję małą wycieczkę w przestrzeń kosmiczną Układu Słonecznego.

5. Małe co nieco o lotach w kosmos ♦

Newtonowska mechanika nieba jest wykorzystywana do obliczania trajektorii statków kosmicznych. Wymaga to posługiwania się złożonymi modelami, które prowadzą do wymagających i wielkoskalowych obliczeń. Zajmowanie się analizą złożony modeli jest zadaniem tak absorbującym, że zwykle staje się przedmiotem życia zawodowego. Fizyka w swych ideach może być prosta (w końcu prawo powszechnego ciążenia i drugie prawo Newtona specjalnie trudne do zrozumienia nie są), ale w praktycznych działaniach bywa skrajnie trudna. Można to ponownie porównać do muzyki. Możemy słuchać muzyki wykonanej na wielu instrumentach, możemy również słuchać wielu gatunków muzyki, rozumieć ją i cieszyć się nią, ale to nie oznacza, że możemy nauczyć się mistrzowsko grać na wszystkich instrumentach. Każdy z nich osobno wymaga lat ciężkiej pracy. Co więcej profesjonalni muzycy, na profesjonalnym poziomie grają zwykle na jednym instrumencie jeden gatunek muzyki. Mówiąc o lotach w kosmos mogę przedstawić przykładowe rozwiązanie kilku prostych problemów, co może nam dać pojęcie o pewnych technikach i trudnościach, ale na pewno jest to dalekie od tego czym zajmują się profesjonaliści w tej dziedzinie. Mogę natomiast i to uczynię powiedzieć do jakich dziwów owi specjaliści dochodzą. W pierwszym kroku powiem kilka słów o otwarciu kosmicznego szlaku.

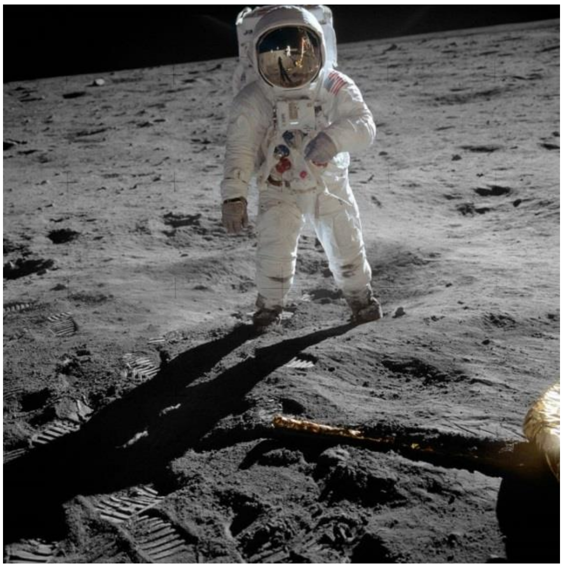
5.1. Otwarcie szlaku

W 1957 roku ZSRR umieściła na orbicie pierwszego sztucznego satelitę o nazwie sputnik 1, data ta jest dla nas symboliczną datą początku eksploracji przestrzeni kosmicznej. W 12 kwietnia 1961 roku na orbicie okołoziemskiej znalazł się pierwszy człowiek Jurij Gagarin (obywatel ZSRR – rys. 5.1).

Rysunek 5.1. Z lewej Jurij Gagarin w kosmicznym kombinezonie. Był zawodowym pilotem, oficerem Armii Czerwonej. Jako pierwszy człowiek znalazł się na orbicie wokółziemskiej. Zginał w katastrofie samolotu

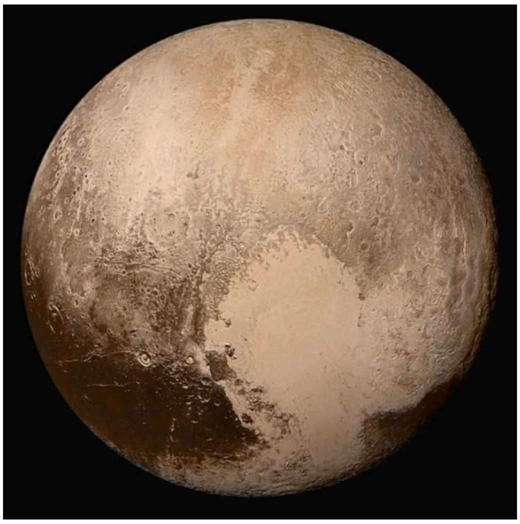
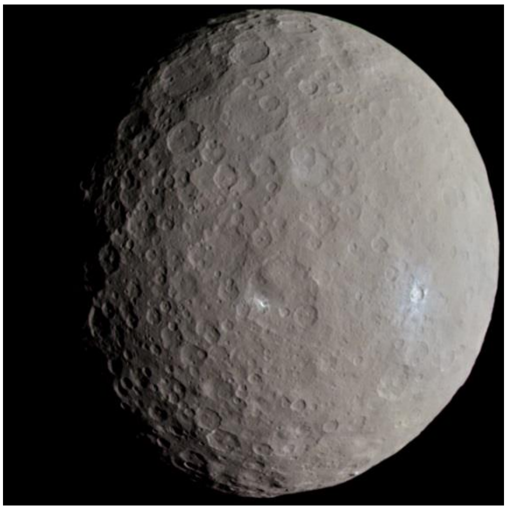
treningowego MiG -15; z prawej kapsuła lądownika statku Wostok; źródło Wikipedia

To druga symboliczna data wyznaczająca początek ludzkiej obecności w przestrzeni kosmicznej. W lipcu 1969 roku załoga Apollo 11 wylądowała na Księżycu (rys. 5.2). To najdalszy punkt osiągnięty do tej pory przez człowieka.



Rysunek 5.2. Z lewej - zdjęcie modułu dowodzenia Columbia pilotowanego przez Michaela Collinsa zrobione z pokładu lądownika Eagle (orzeł), po rozłączeniu. Columbia wraz z Collinsem pozostała na orbicie Księżyca, a moduł lądownika rozpoczął procedurę lądowania; z prawej – Edwin Aldrin na powierzchni Księżyca. Zdjęcie zrobił Neil Armstrong, którego odbicie widać w szybie hełmu Aldrina; źródło Wikipedia

Kosmiczne roboty - sondy spenetrowały sąsiedztwo wszystkich planet Układu Słonecznego. Dotarły również do dwóch planet karłowatych Plutona i Ceres (rys. 5.3)

Rysunek 5.3. Z lewej – mozaika zdjęć Plutona zrobiona przez sondę New Horizons w lipcu 2015 roku; z prawej – zdjęcie Ceres wykonane przez sondę Dawn 4 maja 2015 z odległości 40 000km; źródło NASA

Do kosmicznej eksploracji włącza się coraz więcej państw. Załogowe misje zrealizowały Chiny. Międzyplanetarne misje sond zrealizowały ESA[12] i JAXA[13]. Zanim to jednak nastąpiło człowiek musiał otworzyć kosmiczny szlak i to nie poprzez postęp umiejętności technicznych, ale we własnym umyśle.

W dawnych czasach niebo dla człowieka było miejscem zakazanym. W archaicznych czasach mitologie czyniły z nieba miejsce zamieszkania duchów i bogów. Zwykle na skutek występku wobec kosmicznego porządku człowiek miał zakaz wstępu do nieba. Skazany był na egzystencję w marnym ciele, a większej swobody zaznawał w czasie snu lub szamańskiego transu. W tej sytuacji nikt nie myślał o podróżach kosmicznych, przynajmniej nie tak jak my. Z drugiej strony uwolniony od ciężaru ciała duch mógł się w tych wyższych przestrzeniach poruszać. My jednak mówiąc o podróży kosmicznej nie myślimy o wysyłaniu tam w czasie snu czy transu naszego ducha, tylko całości, to jest ducha i ciała. W tym sensie w umyśle archaicznego człowieka kosmiczny szlak był zamknięty.

W religiach wielkich cywilizacji świata starożytnego Kosmos był ciągle innym światem. Pod wieloma względami nawet, w tej swojej inności, oddalił się od doczesnego człowieka bardziej niż w czasach archaicznych. Zamieszkany był przez potężne byty zasadniczo odmienne od ziemskich, tak że trudno było marzyć o dostaniu się „tam”. Mimo odejścia od archaicznego światopoglądu kosmiczny szlak w ludzkim umyśle pozostał zamknięty. Grecka filozofia niewiele tu zmieniła, przynajmniej jej dominująca część. Kosmos ciągle pozostał inny. W filozofii Arystotelesa był zbudowany z zupełnie innej podstawowej substancji eteru (kwintesencji), podczas gdy świat pod sferą Księżyca konstytuowały cztery inne pierwiastki: ziemia, woda, powietrze i ogień (rys. TVI 1.3.6). W tej sytuacji

[12] ESA – European Space Agency
[13] JAXA – Japan Aerospace Exploration Agency

dostanie się do obszaru o innej fizyce, przez ciało zbudowane z czterech elementów było tak niemożliwe jak dla nas wydostanie się z czarnej dziury. System Arystotelesa nie był jedynym stworzonym przez Greków. Największe nadzieje na otwarcie kosmicznego szlaku, budziły systemy wieloświatowe, takie jak na przykład atomistyczny system Demokryta. W systemach wieloświatowych Kosmos był nieograniczony i zapełniony nieskończoną różnorodnością światów, których podstawowa natura była taka sama jak naszego. Nie mamy jednak świadectw mówiących o tym, że ich twórcy przemyśliwali o podróżach między tymi światami. Być może więc kosmiczny szlak nawet w ich umysłach pozostawał zamknięty. Ponadto systemy atomistyczne nie były systemami głównego nurtu ówczesnej filozofii.

Średniowiecze arabskie i europejskie przejęło system Arystotelesa. W innych kosmologiach (ludów Chin, Indii, Ameryk) szlak również był zamknięty, ogólnie rzecz biorąc z tych samych powodów, to jest inności i boskości nieba. Jego powolne otwieranie zaczęło się od przełomu kopernikańskiego. Przełom kopernikański otworzył drogę do fizycznej jedności świata. Nie stało się to od razu, a sam Kopernik jeszcze takiego jednolitego obrazu nie stworzył. Jednak przyjęcie systemu heliocentrycznego wiązało się z odrzuceniem fizyki Arystotelesa i związanego z tym podziału na świat pod i nadksiężycowy. W 1610 roku Galileusza zaczyna badania Kosmosu z użyciem teleskopu. Odkrywa góry na Księżycu, plamy na Słońcu, fazy Wenus, cztery księżyce Jowisza. Świat planet staje się podobny w swym charakterze do świata ziemskiego i coraz mniej przypomina arystotelesowski system idealnych kul. Planety i ich księżyce stają się wielkimi globami na których można postawić nogę, pod warunkiem, że się tam dotrze. W umyśle człowieka epoki Renesansu kosmiczny szlak zostanie otwarty. Nie oznacza to jednak, że człowiek może w Kosmos polecieć. Długo jeszcze nie będzie ku temu możliwości technicznych. Ponadto na początku XVII wieku olbrzymie połacie Afryki obu Ameryk i Azji nie zostały jeszcze przez Europejczyków zbadane. Nieznana pozostaje Australia i mnogość wysp Oceanu Spokojnego. Zamiast w Kosmos oczy podróżników-odkrywców patrzą w dal oceanów.

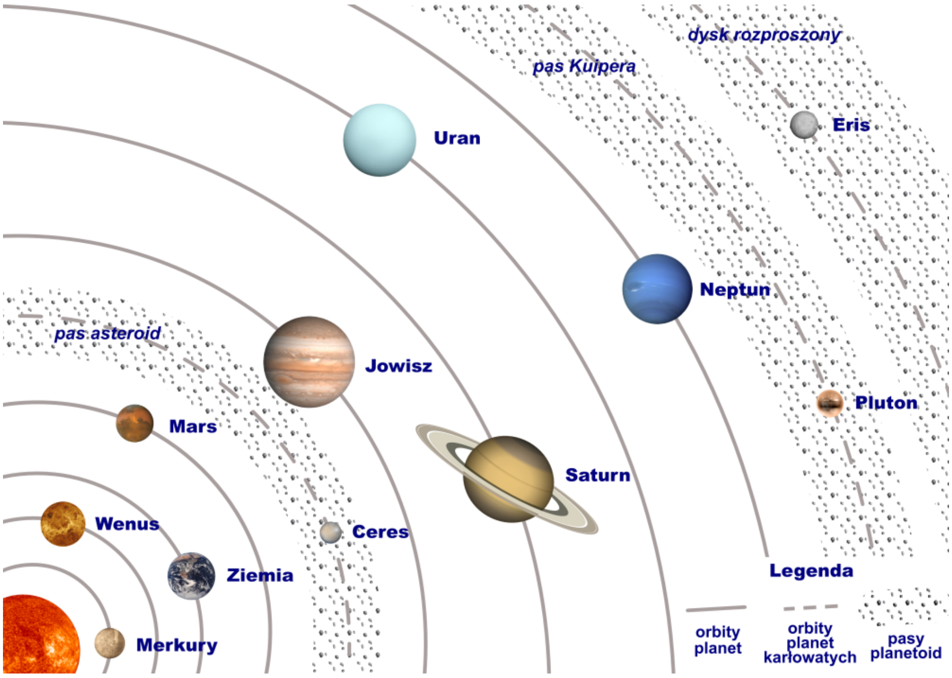
Kosmiczny szlak jest za to coraz intensywniej badany przez teleskopy. Odkrywane są kolejne księżyce (na przykład w 1655 roku Huygens odkrywa duży księżyc Saturna – Tytan), komety. Powoli rozróżniane są wielkie struktury geologiczne na powierzchniach Księżyca i Marsa. Edmond Halley odkrywa, że pozycje jasnych gwiazd Arktura i Syriusza różnią się od pozycji wyznaczonych przez astronomów hellenistycznych. Dokonuje również pomiaru ruchów Aldebarana. Ruchu własne gwiazd na sferze niebieskiej są niewielkie i nie przekraczają kilku sekund miary kątowej rocznie. Nie można ich jednak pogodzić z Kosmosem Arystotelesa. Fakt, że gwiazdy poruszają się na swój indywidualny sposób (a nie jako część sfery niebieskiej) jest jeszcze jednym z argumentów za potraktowaniem ich za obiekty zbudowane ze zwykłej materii. William Herschel ogłasza w dniu 13 marca 1781 odkrycie nowej planety, nazywanej dziś Uran.

Sukces, który szybko obiega europejskie społeczności i silnie działa na wyobraźnie. Herschel jest też pierwszy astronomem, który wykorzystuje budowane przez siebie teleskopy do systematycznego badania gwiazd. Nowych gwiazd teleskopy uwidaczniają całe mrowie. Herschel publikuje katalog 850 gwiazd podwójnych i potwierdza obserwacyjnie ich wzajemny ruch. Ludzie zaczynają dostrzegać coś co moglibyśmy nazwać „życiem” gwiazd. Herschel publikuje również pierwszy katalog tajemniczych obiektów – mgławic, których naliczył 2500. Kosmiczny szlak jest nie tylko otwarty ale również zawiera coraz więcej potencjalnych celów.

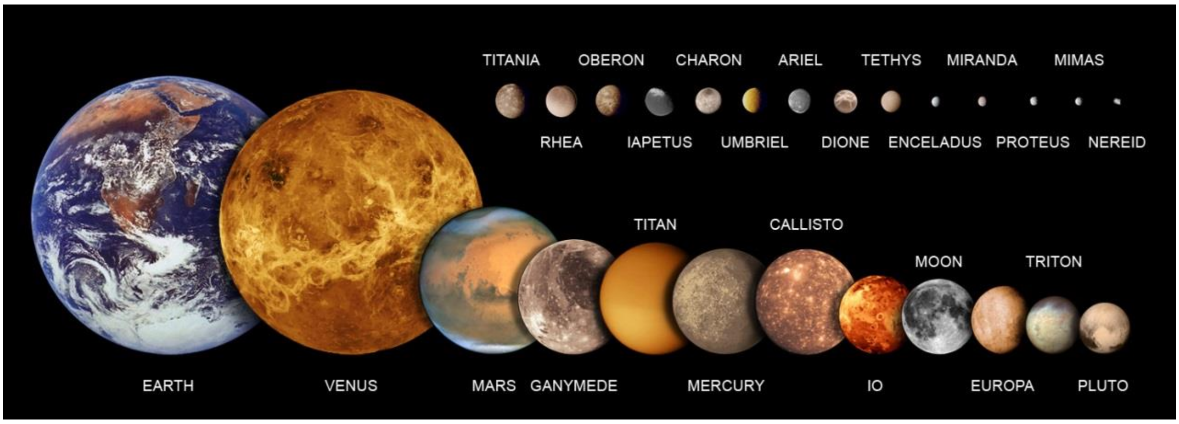
5.2. Układ Słoneczny dziś

W czasach starożytnych i w średniowieczu model Układ Słonecznego zawierał siedem planet: Słońce, Księżyc, Merkury, Wenus, Mars, Jowisz i Saturn. Całość otaczała sfera gwiazd stałych. Planety były ciałami, które krążyły wokół Ziemi bez trzymania się gwiezdnego szyku. Po przyjęciu modelu heliocentrycznego planety były ciałami, które bezpośrednio obiegały Słońce, a samo Słońce przestało być planetą, stała się nią natomiast Ziemia. Planetą przestał być również Księżyc, który bezpośrednio obiega Ziemię, a pośrednio, wraz z Ziemią Słońce. Układ Słoneczny zawierał więc sześć planet: Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz i Saturn. W 1781 roku Herschel odkrywa siódmą planetę Uran. W 1846r. Urbain Leverrier i John Adams odkrywają rachunkowo Neptuna (§TI 4). A w 1930r. Amerykanin Clyde Tombaugh odkrywa Plutona. Od tego czasu Układ Słoneczny ma dziewięć planet i tak jest przez wiele następnych lat. 24 sierpnia 2006 roku Międzynarodowa Unia Astronomiczna (IUA) znów wprowadza do Układu Słonecznego zamieszanie. IUA definiuje nową kategorię ciał planety karłowate (planetki), do której degraduje Plutona. Układ Słoneczny ma więc osiem planet: Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz, Saturn, Uran i Neptun (rys. 5.2.1). Decyzja IUA spowodowana jest pojawieniem się kilku obiektów o masie zbliżonej do masy Plutona odnalezionych poza orbitą Neptuna. Spodziewając się więc wysypu takich obiektów IUA, aby zachować powagę „urzędu” planety nakłada na planety trzy kryteria. Po pierwsze planeta musi być na tyle masywna aby pod wpływem własnej grawitacji przyjęła kształt prawie kulisty. Po drugie jej pole grawitacyjne musi być na tyle silne aby wymiotło śmieci w pobliżu swojej orbity. Po trzecie musi być to obiekt bezpośrednio obiegający Słońce. Gdy obiekt nie spełnia drugiego z tych warunków to jest planetą karłowatą (planetką). Co oznacza owo wymiecenie śmieci z sąsiedztwa orbity wyjaśnia rysunek (5.2.1).

Warto podkreślić, że niektóre księżyce planet Układu Słonecznego są większe od największych planetek i planety Merkury (rys. 5.2.2). Niestety ich przywiązanie do znacznie większych planet (brak samodzielności) eliminuje je z grona planet i planetek



Rysunek 5.2.1. Zgodnie z oficjalnym podziałem uchwalonym na XXVI Zgromadzeniu ogólnym IAU (Międzynarodowa Unia Astronomiczna) 24 sierpnia 2006 r., każdy z obiektów Układu obiegających Słońce należy do jednej z 3 kategorii: planety (8), planety karłowate (oficjalnie uznane 5, przypuszczalnie jest ich przynajmniej kilka więcej). Małe ciała układu Słonecznego (mnóstwo wiele). Zauważ, że planety wymiotły swoje sąsiedztwo z drobnych ciał. Planetki poruszają się w dyskach zawierających mnogość planetoid.



Rysunek 5.2.2. Montaż zdjęć największych Księżycy, planet skalistych i planet karłowatych (jednak bez Eris i innych takich „nowinek"); źródło Wikipedia; licencja Creative Commons Attribution 3.0 Unported

5.2.1. Planety karłowate

Obecnie mamy pięć planet karłowatych (2016 rok). Stara gwardia to Ceres, która awansowała z planetoidy do miana planety karłowatej, oraz Pluton, który został zdegradowany z pozycji planety (rys. 5.2.1). Trzy pozostałe to nowo odkryte obiekty, z których najmasywniejsza to Eris. Tabela (5.2.3) zawiera podstawowe parametry planet karłowatych

Nazwa	Średnica [km]	Masa [kg]	Półoś wielka [j.a.]	Okres orbitalny [lata]	Liczba księżycy
Ceres	952	$9{,}5\times10^{20}$	2,77	4,61	0
Pluton	2374	$1{,}3\times10^{22}$	39,48	247,9	5
Haumea	~1393	$\sim4{,}0\times10^{21}$	43,31	285	2
Makemake	~1454	$\sim2{,}9\times10^{21}$	45,76	310	0
Eris	~2326	$1{,}66\times10^{22}$	67,69	557	1

Tabela 5.2.3. Lista planetek Układu Słonecznego – stan na kwiecień 2016.

Znak ~ oznacza, że dana wielkość nie została jeszcze wyznaczona z zadowalającą dokładnością, co wynika z dużych odległości do badanych obiektów i ich niewielkich (jak na skale kosmiczne) rozmiarów.

Rysunek (5.2.3) ilustruje wielkości wybranych obiektów transplutonowych, ich albedo oraz znane księżyce. Potencjalnych kandydatów na planetki jest co najmniej kilkanaście. Ze względu na znaczne odległości i małe rozmiary nie można obecnie, z wystarczającą pewnością stwierdzić, które z nich spełniają wymagane kryteria. Przy okazji wyjaśnijmy sobie co to jest albedo

Definicja 5.2.1: Albedo

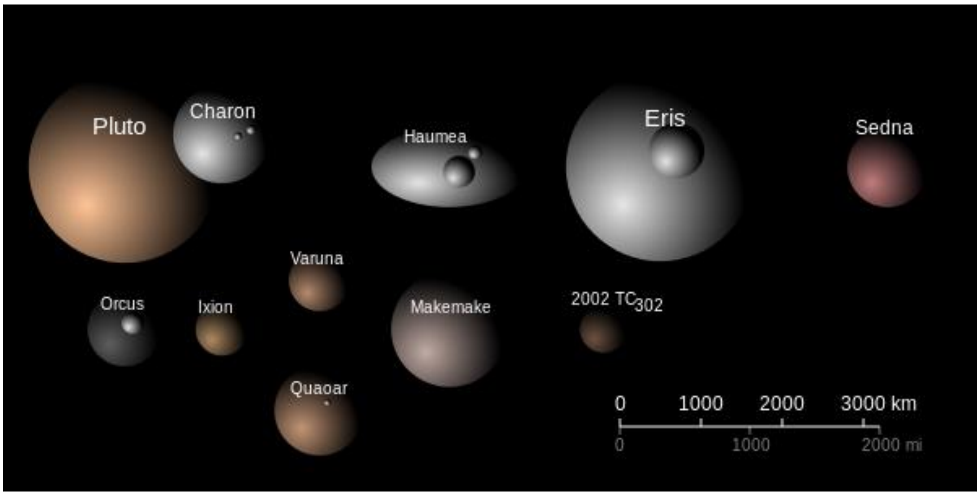
Albedo to stosunek ilości promieniowania odbitego do padającego na daną powierzchnię.

Słowo „albedo” jest pochodzenia łacińskiego i oznacza „białość”

Rozłożeniem planet w Układzie Słonecznym „rządzi” dość tajemnicza reguła nazywana regułą Titiusa-Bodego. Reguła została odkryta przez Daniela Titiusa w 1766 roku i opublikowana w 1772 roku przez dyrektora obserwatorium astronomicznego w Berlinie Johanna Bodego. Zgodnie z tą regułą, średnia wartość połowy długiej osi a orbity planety spełnia zależność

$$a = 0.4 + 0.3k, \quad k = 0,1,2,4,8,\ldots 2^n \qquad 5.2.1$$

Jak widać k to kolejne potęgi dwójki. Tabela (5.2.1) przedstawia zakres dokładności reguły Titiusa-Bodego



Rysunek 5.2.3. Względne wielkości, kształty, albedo i znane księżyce dużych transplutonowych obiektów. Zwraca uwagę mocno spłaszczony profil Haumea, spowodowany szybką rotacją planetki; źródło Wikipedia, Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported

k	obiekt	reguła TB j.a.	pomiar j.a.
0	Merkury	0.4	0.39
1	Wenus	0.7	0.72
2	Ziemia	1.0	1.0
4	Mars	1.6	1.52
8	Ceres	2.8	2.77
16	Jowisz	5.2	5.20
32	Saturn	10.0	9.54
64	Uran	19.6	19.2
128	Neptun	38.8	30.1
256	Eris	67.4	67.78

Tabela 5.2.1. Długości długiej półosi orbity dla planet i planetek Układu Słonecznego, wynikające z reguły Titiusa-Bodego i z pomiarów. Długość zostały podane w jednostkach astronomicznych

Jak widać z tej tabeli zgodności nie są idealne ale niepokojąco dobre. W połowie XVIII wieku nieznane były planetoidy, więc na pozycji *k*=8 była luka. Reguła Titiusa-Bodego była jedną inspiracji do poszukiwania brakującej planety. W efekcie znaleziono liczne drobne ciała niebieskie – pas planetoid. Największa planetoida Ceres jest obecnie zaliczana do klasy planetek. Według popularnej hipotezy pas planetoid to pozostałość po większej planecie rozerwanej przez siły pływowe Jowisza, lub materiał po planecie, która ze względu na bliskość Jowisza nie zdołała się uformować. Nieobecny w tabeli Pluton (obecnie to nie planeta a planetka) źle się wpisuje w powyższy schemat. Natomiast całkiem dobrze pasuje do niego planetka Eris. Im dalej od Słońca tym gorzej spisuje się reguła Titiusa-Bodego. Jednak jej dokładność jest na tyle duża, że astronomowie szukają mechanizmów, które powodują taki a nie inny rozkład planet i planetek. Reguła Titiusa-Bodego została poprawiona w latach 60-tych XX wieku przez astronoma Stanleya Dermotta, tak, że obejmowała również naturalne, duże satelity większych planet.

$$\mathrm{T}(n) = \mathrm{T}(0) \cdot C^n \qquad 5.2.2$$

Gdzie T(n) jest okresem obiegu n-tego satelity, C jest stałą charakterystyczną dla danego układu satelitów. I tak C=2.03 dla układu Jowisza, C=1.59 dla układu Saturna i C=1.80 dla układu Urana.

Od strony teoretycznej regułę Titiusa-Bodego próbuje się wiązać z efektami rezonansowymi w polu grawitacyjnym. Planety i inne orbitujące obiekty poruszają się cyklicznie, a jak wiemy z teorii drgań, takie cykliczne ruchy pod wpływem zewnętrznych sił mogą wykazywać efekty rezonansowe. Teoria rezonansów grawitacyjnych jest dość złożona i nie będę jej tu omawiał.

Na zakończenie tej części przytoczę definicję jednostki astronomicznej

Definicja 5.2.2: Jednostka astronomiczna

Jedna jednostka astronomiczna jest to odległość równa 149 597 870 700m.

Jednostka astronomiczna jest równa, z dobrym przybliżeniem średniej odległości Ziemia-Słońce.

Fakt 5.2.1:

W układzie SI symbolem jednostki astronomicznej jest „au", w Polsce stosuje się również oznaczenie „j.a".

5.3. Środki transportu

Eksploracja kosmicznego szlaku przez człowieka napotyka dwie zasadnicze trudności. Pierwsza z nich to metody wynoszenia ładunku na orbitę. Druga to długotrwały pobyt człowieka w przestrzeni kosmicznej.

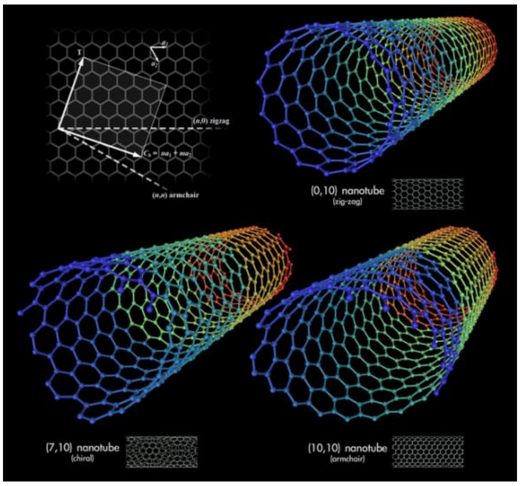
Drogę w Kosmos otworzyły nam rakiety nośne (§TVI 3.8.1). Pisałem jednak o tym, że obecnie stosowane rakiety mają bardzo małą sprawność, przez co koszty wynoszenia ładunków na orbitę są bardzo wysokie. Trzeba zdać sobie sprawę, że gdyby koszt transportu na orbitę był rzędu stu dolarów za kilogram nic nie stało by na przeszkodzie w budowie dużych statków kosmicznych na ziemskiej orbicie. Dalsza podróż, to jest z orbity do dalszych celów jest już łatwiejszym zadaniem. Aby rakiety stały się bardziej ekonomiczne trzeba zwiększyć ich impuls właściwy (def. TIV 1.1.2). Jedną z dróg jest zastosowanie napędu jądrowego. Jednak z powodów bezpieczeństwa napęd taki nie będzie stosowany przy starcie z Ziemi ale w dalszej podróży przez Układ Słoneczny. Inną obiecującą technologią na rakiety startujące z Ziemi są silniki przelotowe.

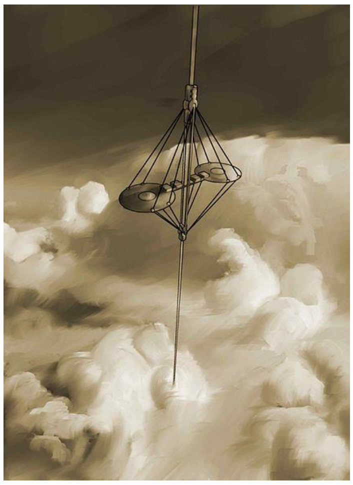
Na razie jednak takiego silnika nie ma. W tej sytuacji pojawia się pytanie czy poza rakietami istnieje inna metoda do wyjścia na orbitę? Taką potencjalną konkurencją dla rakiet jest winda kosmiczna.

5.3.1. Winda Kosmiczna

Podstawą konstrukcji windy kosmicznej jest bardzo długa linia łącząca Ziemię (punkt zaczepienia musi być na równiku) z przeciwwagą umieszczoną na orbicie (rys. 5.3.1) tak aby środek masy układu znajdował się na orbicie geostacjonarnej (ok. 35700km nad równikiem). Według obecnych projektów, aby spełnić ten warunek lina windy powinna mieć długość rzędu 100 000km. Lina windy obracałaby się wraz z Ziemią. W układzie odniesienia związanym z Ziemią lina będzie nieruchoma, co oznacza konieczność uwzględnienia siły odśrodkowej. Przy środku masy znajdującym się na orbicie geostacjonarnej siła odśrodkowa i ciężkości będzie równoważyła się na orbicie geostacjonarnej. Powyżej orbity geostacjonarnej siła odśrodkowa będzie przeważała nad siłą ciężkości powodując napięcie liny.

Największym wyzwaniem dla projektu jest dobór materiału na linę. Lina będzie musiała wytrzymać własny ciężar. Przy długości rzędu 100000km jest to poważne wyzwanie. Tradycyjne materiały takie jak stal pozwoliłyby na linę o długości około 30km. Współczesne materiały kompozytowe, takie jak kevlar pozwoliłby na utrzymanie liny o długości do 500km. Najnowsze materiały takie jak rurki nanowęglowe pozwoliłyby na budowę windy do wysokości 6000km. Bez pojawienia się materiału do wytworzenia liny winda kosmiczna nigdy nie powstanie. Jest to w tej chwili najcięższe wyznanie technologiczne dla tego projektu.



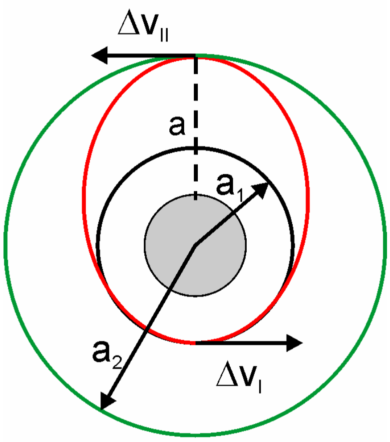


5.4. Dwa przykładowe manewry

Zagadnienie wytyczania trajektorii sond i statków kosmicznych jest złożonym zagadnieniem obliczeniowym. Nierzadko to co wynika z obliczeń kłóci się ze zdrowym rozsądkiem. Grawitacyjny krajobraz przestrzeni międzyplanetarnej ma swoistą geografię. Łagodne obszary potrafią przejść w dzikie okolice, gdzie mogą się zdarzyć dziwne rzeczy. O tym jeszcze opowiem. Niżej przedstawię dwa proste manewry wykorzystywane w lotach kosmicznych.

5.4.1. Manewr Hohmann

Manewr Hohmanna wykorzystywany jest przy zmianie orbity wokół Ziemi lub innego ciała niebieskiego z niższej na wyższą lub na odwrót. Stosowany jest ze względu na optymalne zużycie energii (paliwa). Składa się z dwóch etapów. Powiedzmy, że zaczynamy na orbicie okołoziemskiej (lub około innego ciała niebieskiego) o promieniu a_1. W pewnym punkcie orbity włączamy silniki rakietowe tak aby nadane statkowi przyspieszenie było styczne do orbity. Nowa prędkości styczna będzie odpowiadała nowej orbicie o eliptycznym kształcie (rys. 5.4.1). Niestety nowa orbita, po pełnym obiegu, przywiedzie statek do tego samego punktu, więc trudno tu mówić o podwyższeniu orbity. Możemy co najwyżej mówić o zmianie jej kształtu. Podwyższenie orbity wymaga drugiego włączenia silnika w punkcie apocentrum nowej orbity eliptycznej. Zmiana prędkości spowodowane tym drugim impulsem powinna być taka aby skorygować jej mimośród do oczekiwanej wartości, czyli w naszym przypadku przejść na orbitę kołową o nowym promieniu *a*.



Rysunek 5.4.1. Manewr Hohmanna na przykładzie zmiany wyjściowej niskiej orbity kołowej (czarna) poprzez orbitę transferową (czerwona) do wyższej kołowej orbity docelowej (zielona).

Powiedzmy, że chcemy zmienić orbitę kołową o promieniu a_1=6678km (300 km nad powierzchnią Ziemi) na orbitę kołową geostacjonarną o promieniu a_2=42164km. W pierwszym kroku musimy przenieść statek na eliptyczną orbitę transferową (czerwona na rysunku (5.4.1a)), której półoś wielka dana jest wzorem (rys. 5.4.1a)

$$a_T = \frac{a_1 + a_2}{2} = 24421\text{km} \qquad 5.4.1a$$

Wzór (5.4.1a) wynika z właściwości elipsy. Mimośród orbity transferowej wynosi

$$e = \frac{a_2 - a_1}{2a_T} = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} = 0.73 \qquad 5.4.1b$$

Korzystając ze wzoru (2.6) obliczmy prędkości na orbicie początkowej i docelowej

$$v_1^2 = GM\frac{1}{a_1} \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{GM}}{\sqrt{a_1}} = 7.73\text{km/s} \tag{5.4.2a}$$

$$v_2^2 = GM\frac{1}{a_2} \Rightarrow v_2 = \frac{\sqrt{GM}}{\sqrt{a_2}} = 3.07\text{km/s} \tag{5.4.2b}$$

Przez M oznaczyłem masę Ziemi. Obliczamy również prędkość satelity w perygeum i apogeum orbity transferowej

$$v_p^2 = GM\left(\frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_T}\right) \Rightarrow v_p = \sqrt{GM}\sqrt{\frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_T}} = 10.15\text{km/s} \tag{5.4.3a}$$

$$v_a^2 = GM\left(\frac{2}{a_2} - \frac{1}{a_T}\right) \Rightarrow v_p = \sqrt{GM}\sqrt{\frac{2}{a_2} - \frac{1}{a_T}} = 1.61\text{km/s} \tag{5.4.3b}$$

Zatem zmiana prędkości przy przeniesieniu satelity z orbity wyjściowej na transferową wynosi

$$\Delta v_1 = v_p - v_1 = \sqrt{GM}\left(\sqrt{\frac{2}{a_1} - \frac{1}{a_T}} - \sqrt{\frac{1}{a_1}}\right) = 2.42\frac{km}{s} \tag{5.4.4a}$$

Przy wejściu na orbitę docelową zmiana prędkości wynosi

$$\Delta v_2 = v_2 - v_a = \sqrt{GM}\left(\sqrt{\frac{2}{a_2} - \frac{1}{a_T}} - \sqrt{\frac{1}{a_2}}\right) = 1.46\text{km/s} \tag{5.4.4b}$$

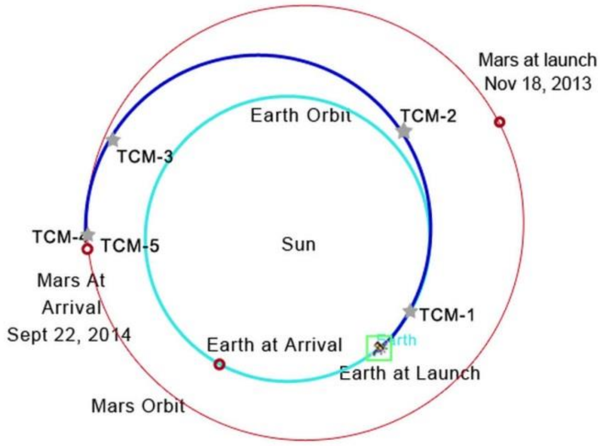
Całkowita zmiana prędkości wynosi

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 3.88\text{km/s} \tag{5.4.5}$$

Czas przejścia między orbitami możemy wyznaczyć z trzeciego prawa Keplera jako równy połowie okresu obiegu na orbicie transferowej

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM}} = \pi\sqrt{\frac{(a_1 + a_2)^3}{8GM}} \approx 5\text{h} \tag{5.4.6}$$

Manewr Hohmanna można również zastosować przy przejściu z orbity jednego ciała niebieskiego na orbitę drugiego ciała (np. z orbity Ziemi na orbitę Księżyca lub Marsa), ale jest to jego bardziej złożona wersja. W przypadku lotu międzyplanetarnego lot z wykorzystaniem manewru Hohmanna wymaga dopasowania wzajemnych położeń obu ciał, tak aby statek opuszczający orbitę wokół Ziemi i lecący swobodnie na przykładowo Marsa trafił na tegoż Marsa (rys. 5.4.2). Wiąże się z tym pojęcie okna startowego, czyli przedziału czasowego, w którym start z wykorzystaniem manewru Hohmanna jest wykonalny. Lot na Księżyc z wykorzystaniem manewru Hohmanna wymaga około pięciu dni, a na Marsa około 260dni. Skrócenie tego czasu jest możliwe, jednak kosztem zużycia dodatkowego paliwa. W przypadku lotu do dalszych planet można jeszcze wykorzystać efekt asysty grawitacyjnej.



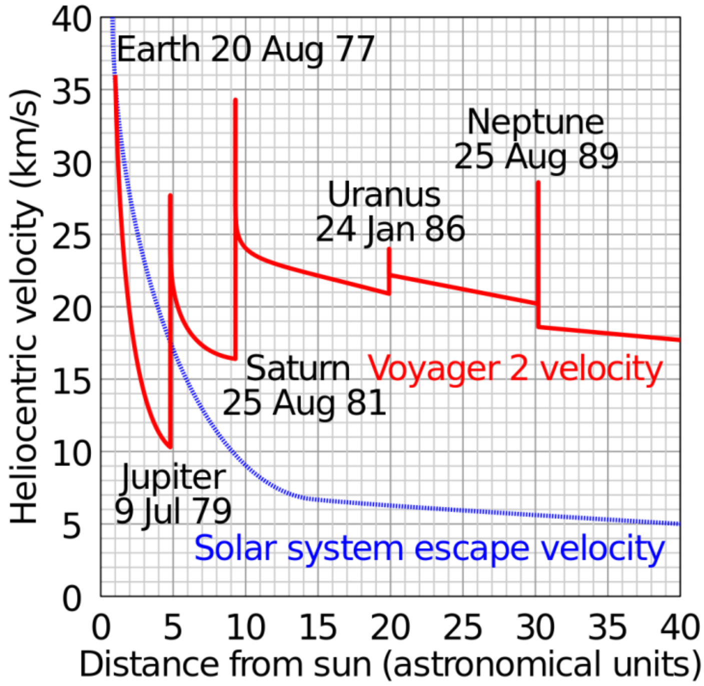
Rysunek 5.4.2. Przykład orbity transferowej (niebieski) dla sondy marsjańskiej MAVEN, prowadzonej przez NASA. Kolor jasno niebieski pokazuje orbitę Ziemi, kolor czerwony orbitę Marsa; źródło NASA

5.4.2. Asysta grawitacyjna

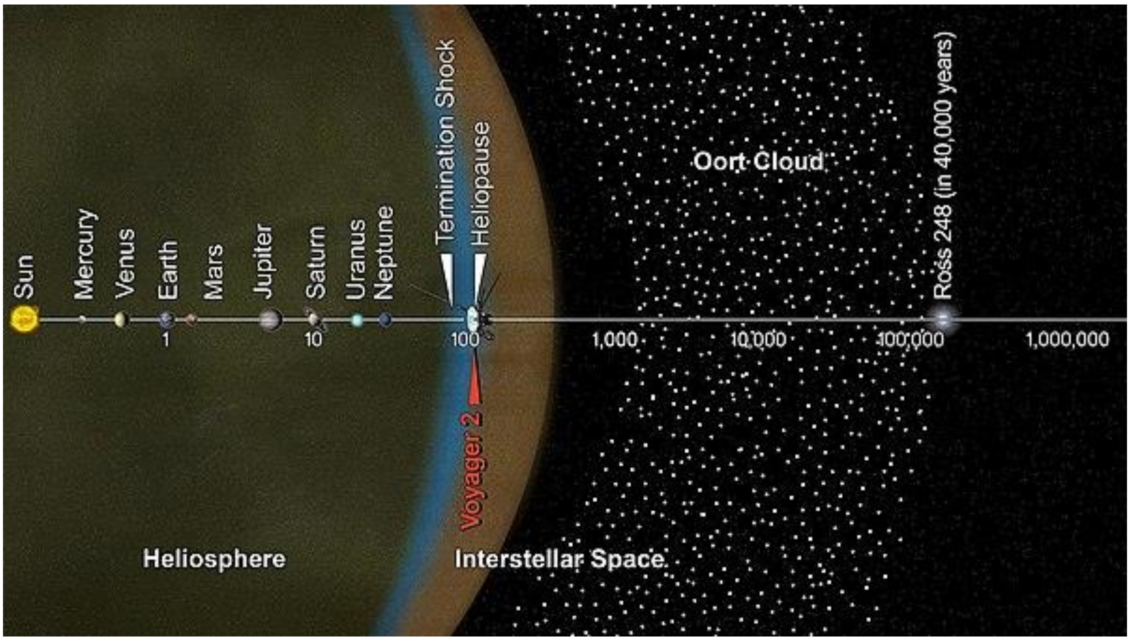
Czasy przelotu z wykorzystaniem manewru Hohmanna, przy podróżach międzyplanetarnych są bardzo długie. Bardziej aktywne użycie silników rakietowych mogłoby oczywiście ten czas skrócić, ale kosztem znacznego zwiększenia zużycia paliwa, a co za tym idzie znacznego zwiększenia masy startowej rakiety nośnej. Możemy jednak zwiększyć prędkość sondy wykorzystując efekt asysty grawitacyjnej.

Asysta grawitacyjna wykorzystywana jest do zmiany trajektorii lotu sondy lub zmiany jej prędkości względem Słońca na większą lub mniejszą. O ile manewr zmiany kierunku lotu przez pole grawitacyjne planety jest dość oczywisty o tyle kwestia zmiany prędkości sondy wymaga uwagi. Przeloty sond w pobliżu dużych ciał niebieskich możemy uważać za uogólnienie przypadku zderzeń elastycznych kul. Energie kinetyczne obu ciał są zachowane (o ile nie dojdzie do zderzenia), a ciała zmieniają swoją prędkość względem inercjalnego układu odniesienia. Istotna różnica polega na tym, że ciała „zderzają" się przez długi czas a nie w jednej krótkiej chwili jak to ma miejsce w przypadku kul. Masa sondy w porównaniu z masą planet jest znikomo mała, więc wpływ sondy na ruch planety możemy zaniedbać. Odpowiada to zderzeniu elastycznemu małej kulki ze ścianą. Jeżeli ściana porusza się w kierunku kulki tak, że zbliża się do niej z prędkością v, to po zderzeniu ma ona prędkość $-2v$, podczas gdy prędkość ściany praktycznie nie ulega zmianie. W przypadku sond analiza sytuacji jest bardziej złożona, gdyż jak już wspomniałem zderzenie trwa przez dłuższy czas (czas przelotu sondy w pobliżu planety) i odbywa się po zakrzywionych trajektoriach. Niemniej idea pozostaje ta sama.

Po raz pierwszy asysta grawitacyjna została wykorzystana w locie radzieckiej sondy Łuna 3 (1959), która jako pierwsze zdjęcia odwrotnej strony Księżyca. Łuna wykorzystała grawitację Księżyca do zmiany swojej trajektorii, tak by możliwy był jego oblot i powrót na Ziemię, w której atmosferze sonda spłonęła, po przesłaniu zdjęć. Pierwszym statkiem, który wykorzystał asystę grawitacyjną do uzyskania prędkości ucieczki z Układu Słonecznego był amerykański Pionier 10. Amerykańska sonda Mariner 10, jako pierwsza wykorzystała asystę grawitacyjną Wenus do zmiany trajektorii tak by mogła osiągnąć bliskie sąsiedztwo innej planety (Merkurego). Potem przyszły kolejne misje. Misja sondy Cassini-Hugens do Saturna dwukrotnie korzystała z pomocy Wenus i Ziemi, zanim sonda skierowała się do Saturna, korzystając po drodze z pomocy Jowisza. Rysunek (5.4.1) pokazuje wpływ pól grawitacyjnych planet zewnętrznych na prędkość sondy Voyager. Po minięciu Neptuna Voyager 2 znalazł się na trajektorii prowadzącej na zewnątrz Układu Słonecznego (rys. 5.4.2)



Rysunek 5.4.1. Prędkość względem Słońca amerykańskiej sondy Voyager 2. Sonda Voyager 2 została wystrzelona w sierpniu 1977r. Wykorzystując korzystne ułożenie planet zewnętrznych (Jowisz, Saturn, Uran, Neptun) dokonał bliskich względem nich przelotów. Jednocześnie wykorzystała asystę grawitacyjną tych planet do zmiany kierunku lotu i prędkości względem Słońca. Pozwoliło jej to, po minięciu Neptuna, na wejście na trajektorię ucieczki z Układu Słonecznego; źródło NASA.



Rysunek 5.4.2. Rysunek przedstawia oddalenie sondy Voyager 2 od Słońca w grudniu 2018 roku. Skala odległości nie jest liniowa (w jednostkach astronomicznych); źródło NASA.

5.5. Kosmiczny chaos

Poradziłem sobie z napisaniem i rozwiązaniem układu równań dla dwóch ciał. A co z przypadkiem trzech ciał, lub ogólniej *N*-ciał? Cóż napisać układ równań, to nie problem. Poniżej napisałem układ równań dla trzech ciał

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} \quad 5.5.1a$$

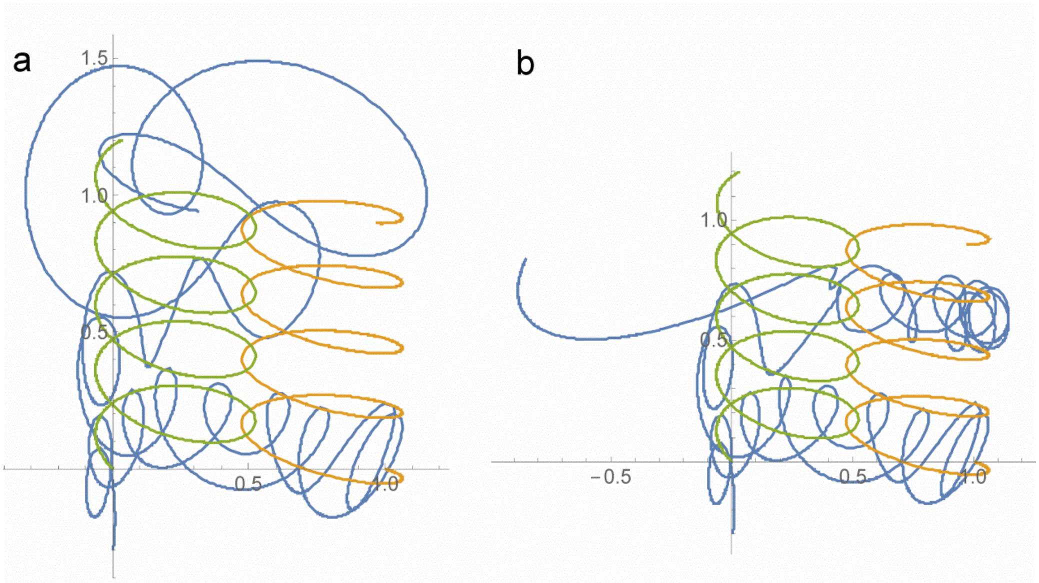
$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} \quad 5.5.1b$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \quad 5.5.1c$$

Ale rozwiązać go to prawdziwy koszmar. Już problem trzech ciał staje się potężnym wyzwaniem. Jest on tak trudny, że nie istnieje zamknięte rozwiązanie w postaci zamkniętego wzoru złożonego z funkcji elementarnych. Można natomiast napisać rozwiązanie w postaci nieskończonego szeregu, ale i tu są ograniczenia. Problem z takim rozwiązaniem może się pojawić, gdy dwa lub wszystkie trzy ciała zderzają się. W pobliżu punktu zderzenia nieskończony szereg opisujący problem trzech ciał może stać się rozbieżny. W ogólnym przypadku ruch trzech i więcej ciał nie jest periodyczny. Oczywiście w szczególnych przypadkach możemy uzyskać rozwiązania periodyczne, jak również skończone rozwiązania analityczne. Jeszcze gorzej przedstawia się rozwiązanie problemu z większą ilością ciał.

W ograniczonym zagadnieniu trzech ciał przyjmujemy, że jedno z nich, powiedzmy trzecie ciało, ma masę m_3 tak małą w porównaniu z pozostałymi dwoma, że możemy założyć, że nie wpływa ono na ruch pozostałych dwóch ciał. Klasyczny przykład, to meteor wędrujący w układzie Ziemia – Księżyc. Duże ciała dalej jednak przyciągają się wzajemnie i kształtują ruch małego ciała.

Chciałem tu zilustrować problemy jakie się pojawiają na przykładzie ograniczonego zagadnienia trzech ciał. Skorzystam tu z instrukcji NBodySimulation w pakiecie Mathematica. Z jej pomocą obliczyłem trajektorie trzech ciał, dwóch masywnych i jednego lekkiego przy dwóch zestawach warunków początkowych (rys. 5.5.1). Mamy tam dwa przypadki ruchu trzech ciał, przy czym pierwsze z nich ma masę dziewięćset razy mniejsze niż ciało drugie czy trzecie. Warunki początkowe (położenie i prędkość) obu masywnych ciał są takie same, podobnie jak prędkości początkowa pierwszego ciała. Oba przypadki różnią się nieznacznie x-ową współrzędną trzeciego ciała.

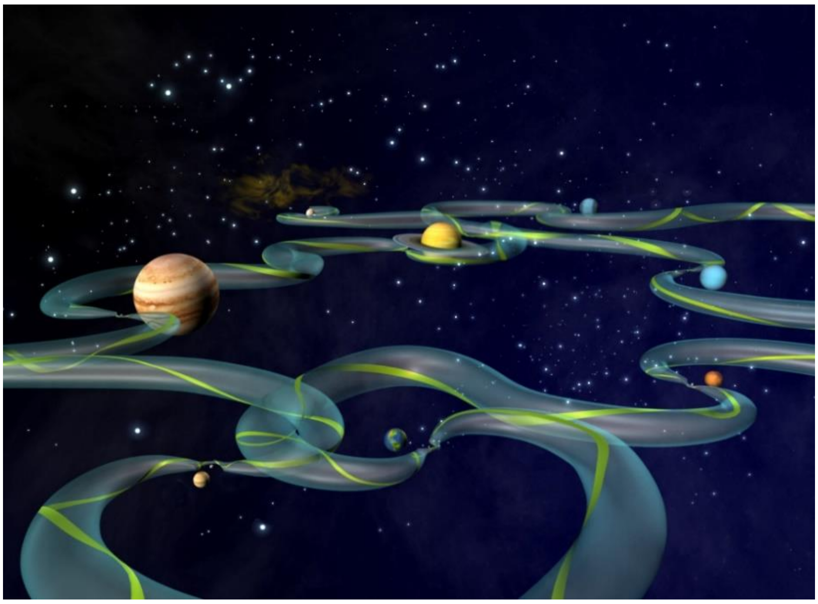


Rysunek 5.5.1. Trajektorie trzech ciał, ruch w dwóch wymiarach – dwa przypadki. W obu przypadkach masywne ciała (oznaczane dalej indeksami 2 i 3) mają te same parametry: m_2=9, położenie początkowe drugiego ciała $\mathbf{r}_{\mathbf{p2}}$(1,0), prędkość początkowa drugiego ciała $\mathbf{v}_{\mathbf{p2}}$(1,-0.3), m_3=9, położenie początkowe trzeciego ciała $\mathbf{r}_{\mathbf{p3}}$(0,0), prędkość początkowa drugiego ciała $\mathbf{v}_{\mathbf{p2}}$(1,1), pierwsze ciało ma w obu przypadkach masę m_1=0.01, prędkość początkową $\mathbf{v}_{\mathbf{p1}}$(0.15,0.1) i różne a bliskie sobie położenie początkowe: a) $\mathbf{r}_{\mathbf{p1}}$(0,-0.3); b) $\mathbf{r}_{\mathbf{p1}}$(0.003,-0.3). Linia niebieska pokazuje trajektorię pierwszego ciała, pomarańczowa drugiego ciała, a zielona trzeciego ciała. W obu przypadkach czas symulacji był taki sam.

Mimo nieznacznej różnicy warunków początkowych trajektoria małego ciała, choć w pierwszych częściach toru jest bardzo podobna w obu przypadkach, szybko zaczyna się istotnie różnić, co jest charakterystyczne dla układu zachowującego się chaotycznie. Trajektorie ciała drugiego i trzeciego są takie same. Rysując trajektorie wybrałem tryb „bez jednostek”, z określeniem charakteru sił jako „odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości”. Chaotyczne zachowanie się ciał jest wypadkową charakteru oddziaływań, a nie faktu, że są to oddziaływania grawitacyjne. Każde oddziaływanie odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości i proporcjonalne do iloczynu ładunków (czy to elektrycznych czy grawitacyjnych) przyniesie te same problemy obliczeniowe i podobne chaotyczne rozwiązania. Przypomnę, że z chaosem deterministycznym już się spotkaliśmy na przykładzie analizy równania logistycznego (xx). Równania opisujące ruch układu trzech ciał są w pełni deterministyczne, zatem reprezentowany przez nie układ jest deterministyczny. Nie wiemy czy układ Słoneczny jest deterministyczny, ale układ równań opisujący ruchy ciał w klasycznej teorii pola grawitacyjnego taki jest. Zatem to model jest deterministyczny. Układ równan wymaga jednak określenia warunków początkowych (xxxx). Niestety dla pewnej części parametrów rozwiązania układu równań ruchu są skrajnie wrażliwe na niewielkie zmiany warunków początkowych. Bardzo bliskie sobie układy warunków początkowych prowadzą, w relatywnie krótkim czasie, do zasadniczo odmiennych trajektorii układu. Ponieważ nie jesteśmy w stanie określić tych warunków wystarczająco dokładnie, to deterministyczny w swym charakterze układ jest dla nas nieprzewidywalny.

Chciałem tu jeszcze raz mocno podkreślić, że przedstawiona analiza opiera się na klasycznej teorii grawitacji. Widać tu wyraźnie złożony pod względem obliczeniowym charakter współczesnych teorii. To, że możemy w prosty sposób napisać układ równań dla trzech ciał, nie oznacza, że mamy prosty sposób na znalezienie trajektorii ich ruchu. Już trzy ciała stawiają wysokie wymagania. Dla więcej niż trzech ciał, poza szczególnymi przypadkami, pozostają metody numeryczne. Jednak metody numeryczne mogą zawieść, gdy układ jest chaotyczny (§TVI 7). Pojawia się problem dokładnego określenia warunku początkowego. W zasadzie już ograniczony problem dwóch ciał (jedno duże jak Ziemia a drugie małe jak sztuczny satelita) może nastręczyć olbrzymich trudności. Wszystko zależy od precyzji, którą chcemy osiągnąć. Analiza ruchu satelitów Grace (rys. 3.3.6) pokazała, że ich względne prędkości są w różnych punktach różne, co odzwierciedla „zmarszczki” na grawitacyjnym portrecie Ziemi. Te zmarszczki wynikają z faktu, że Ziemia nie jest ciałem sferycznosymetrycznym. Dokładne obliczenie ruchu satelity wokół Ziemi, wymaga znacznie bardziej złożonego modelu samej Ziemi. Trzeba mieć mapę jej potencjału grawitacyjnego taką jak na rysunku (3.3.5). Uwzględnienie tej zróżnicowanej topografii potencjału grawitacyjnego wymaga ponownie użycia potężnych komputerów. Jaka jest mapa potencjału grawitacyjnego Układu Słonecznego. Ma ona trzy istotne cechy, pierwsza jest to mapa czterowymiarowa (trzy wymiary na punkt przestrzeni i jedna na wartość potencjału), ewentualnie jest to trójwymiarowa mapa poziomicowa. Druga cecha to fakt, że mapa jest zmienna w czasie. Wraz z przemieszczającymi się planetami i innymi ciałami niebieskimi mapa ulega zmianie. Jeżeli czas uznamy z wymiar, to nasza mapa staje się czterowymiarową mapą poziomicową, lub pięciowymiarową mapą rysowaną jako wykres wartości potencjału we współrzędnych przestrzennych i czasu. Trzecia cecha to złożoność tej mapy. W każdej chwili czasu dany układ ciał niebieskich rysuje na nowo złożoną mapę potencjału grawitacyjnego. W tej mapie widać różne ścieżki, którymi może podążać statek kosmiczny przy minimalnym zużyciu paliwa (te ścieżki są określane jako Interplanetary Transport Network ITN). Takie ścieżki to jak drogi przez doliny wśród górskich grzbietów; jej przykład ilustruje rysunek (5.5.1.). Idąc nimi nie trzeba wspinać się na stoki, przez co potrzeba mniej energii na przejście trasy. Ale widać również, że ścieżki wytyczone przez te doliny kryją sobie zaskakujące zakręty – optymalna droga bywa kręta.

Wystrzelona w 1978 roku misja oznaczona jako ISEE-3 jako pierwsza wykorzystała elementy ITN. Kolejne misje korzystające z tych grawitacyjnych ścieżek to japońska misja księżycowa Hiten (1991), misja NASA Genesis (2001), misja ESA Smart-1 (2003).



Rysunek 5.5.1. Przykład międzyplanetarnej drogi (jasny pas) wchodzącej w sieć ITN; źródło NASA.

Problem przewidywania takich tras zarówno pod kątem projektowania torów statków kosmicznych jak i prognozowania ruchu małych ciał w Układzie Słonecznym, gwiazd w Galaktyce czy Galaktyk we Wszechświecie, jest ciągle otwarty. Możemy pisać równania ruchy w ramach klasycznej teorii grawitacji, czy też ogólnej teorii względności, ale ich rozwiązywanie i analiza wyników to sztuka sama w sobie. Rozwój metod matematycznych i numerycznych jak i samych komputerów. Nowe metody i silniejsze komputery mogą odsłonić przed nami jeszcze nie jedną tajemnicę układów związanych grawitacyjnie.

Zagadnienie trzech ciał znalazł swoje odbicie w powieści SF chińskiego autora Cixin Liu „Problem trzech ciał". Mieszkańcy planety w układzie potrójnym Trisolarianie, mają problem z nieprzewidywalnością warunków, w których przyszło im żyć. Zapomnijcie o regularnych zmianach lato-zima. Ich planeta uwięziona w polach grawitacyjnych trzech gwiazd wykonuje dziki taniec. Nigdy nie wiadomo co będzie w perspektywie najbliższych miesięcy, pogoda umiarkowana, dramatyczne ochłodzenie, tragiczny w skutkach upał, czy coś pomiędzy. Nie wiadomo również jak długo potrwa na przykład silne ochłodzenie, które właśnie się pojawiło – może trawać miesiąc a może kilka wieków. Problemy może dla nas wydumane, ale pamiętajmy, że najbliższa nam gwiazda Proxima Centauri jest najprawdopodobniej członkiem układu potrójnego, który może tworzyć wraz z gwiazdami układu Alfa Centauri, składającego się z dwóch gwiazd Alfa Centauri A i Alfa Centauri B. Wszystkie składniki układu mają prawdopodobnie planety. W układach wielkokrotnych znajduje się większa część gwiazd (ponad 50%). Z tej liczby gwiazd układów wielokrotnych, w układach podwójnych jest około 60% gwiazd, potrójnych około 30% gwiazd, pozostałe 10% to układy poczwórne i liczniejsze. Jak z tego wynika planety pędzące niepewny żywot w układach potrójnych (jak i innych wielokrotnych), nie muszą być czymś wyjątkowym. Oczywiście nie każda planeta w układzie wielokrotnym musi mieć taki problem. Te, które znajdują się blisko gwiazdy macierzystej są pod dominującym wpływem jej grawitacji. Strefa bezpieczeństwa nazywana jest strefą Hilla. Pojęcie strefy Hilla możemy rozszerzyć na dowolne obiekty, na przykład na planety i ich układy księżycy. Przykładowo w układzie Ziemia-Słońce, strefa Hilla wokół Ziemi wynosi ok 1.5 mln kilometrów. Na szczęście Księżyc jest wyraźnie wewnątrz tej bezpiecznej strefy, więc nie ma obawy, że nagle zmieni orbitę i oddali się od Ziemi.