

Dodatek Matematyczny

DF

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

1. Pierwsze kroki

Równanie będziemy nazywali równaniem różniczkowym, gdy w jego zapisie pojawiają się pochodne funkcji. W prostej postaci może wyglądać to tak

$$a y'(x) + b x + c = 0 \quad 1.1$$

Gdzie $y'(x)$ jej pochodną funkcji $y(x)$ po x , a a , b i c są liczbami. Zapiszemy to równanie w postaci

$$a \frac{dy}{dx} + b x + c = 0 \quad 1.1a$$

Następnie przeniesiemy wyrazy z x i c na lewą stronę, a całość podzielimy przez a .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} x - \frac{c}{a} \quad 1.1b$$

Pomnożymy obie strony przez dx

$$dy = -\frac{b}{a} x dx - \frac{c}{a} dx \quad 1.1c$$

Mamy zapisane równanie (1.1) w postaci, która umożliwia jego łatwe rozwiązanie, czyli znalezienie postaci funkcji $y(x)$. Obliczmy całki nieoznaczone po obu stronach

$$\int dy = -\frac{b}{a} \int x dx - \frac{c}{a} \int dx \quad 1.2$$

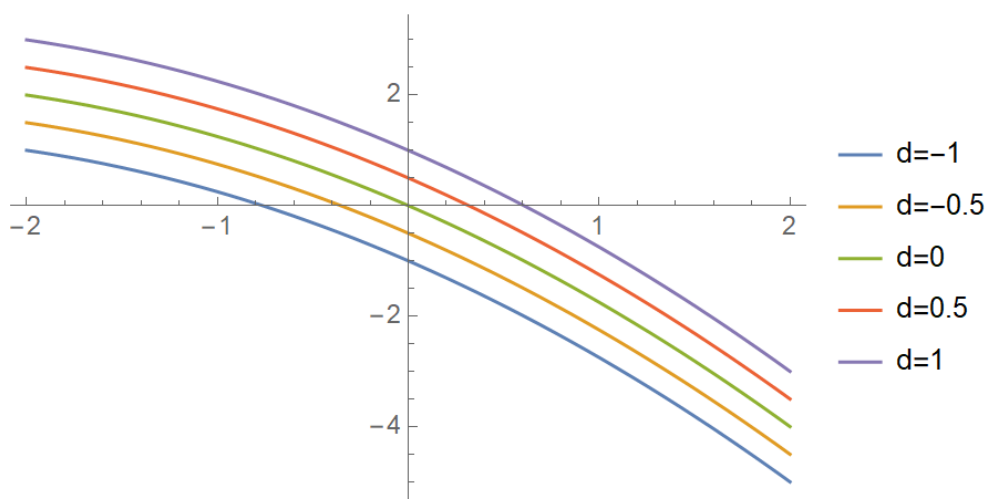
Po scałkowaniu otrzymamy

$$y(x) = -\frac{1}{2} \frac{b}{a} x^2 - \frac{c}{a} x + d \quad 1.3$$

Gdzie d jest stałą wynikającą z braku jednoznaczności obliczenia całki bez określonych granic. Jaka jest wartość tej stałej? Wartość stałej jest dowolna, łatwo jest to sprawdzić wstawiając rozwiązanie (1.3) do równania (1.1)

$$\frac{d}{dx} a \left(-\frac{1}{2} \frac{b}{a} x^2 - \frac{c}{a} x + d \right) + b x + c = -b x - c + b x + c = 0 \quad 1.4$$

Jak widać równanie jest spełnione dla dowolnego d . Prowadzi to do ważnego wniosku. Rozwiązaniem równania różniczkowego nie jest funkcją ale rodziną funkcji, co ilustruje rysunek(1.1).



Rysunek 1.1. Pięć krzywych z rodziny rozwiązań równania (3.1) dla pięciu różnych wartości stałej d .

Jeżeli równanie różniczkowe opisuje ewolucję układu fizycznego, to jego rozwiązaniem jest jedna z krzywych należących do rodziny rozwiązań tego równania. O tym, która jest to krzywa decyduje tzw. warunek początkowy, o którym piszę w temacie (TVI 7). Warunek początkowy pozwala nam wyznaczyć wartość stałej d .

Równanie (1.1) jest bardzo proste. Pozwala zastosować prostą metodę rozwiązywania nazywaną metodą rozdzielonych zmiennych. Możemy ją stosować wtedy, gdy możliwe jest takie przekształcenie równania, że wyrazy zależne od zmiennej x wraz z przyrostami dx znajdują się po jednej stronie znaku równości a wyrazy zależne od y wraz z przyrostami dy znajdują się po drugiej stronie równości.

W ogólnym przypadku rozwiązywanie równań różniczkowych jest złożonym problemem. Przy rozwiązywaniu równań różniczkowych możemy wspomagać się pakietami matematycznymi takimi jak Mathematica, które radzą sobie z dużym zbiorem równań. Jednak nawet z pomocą pakietów nie każdego równanie da się sensownie rozwiązać. Wtedy pozostają metody numeryczne.

Nawet równanie o rozdzielonych zmiennych może być kłopotliwe w rozwiązaniu. Rozpatrzmy na przykład równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x)}{(3 + y^3)} \quad 1.5$$

Z rozdzieleniem zmiennych nie będziemy problemu

$$(3 + y^3)dy = \cos(x)dx \quad 1.6$$

Całkowanie obu stron równania również nie będzie problemem, w jego wyniku otrzymujemy

$$3y + \frac{1}{4}y^4 = \sin(x) + c$$

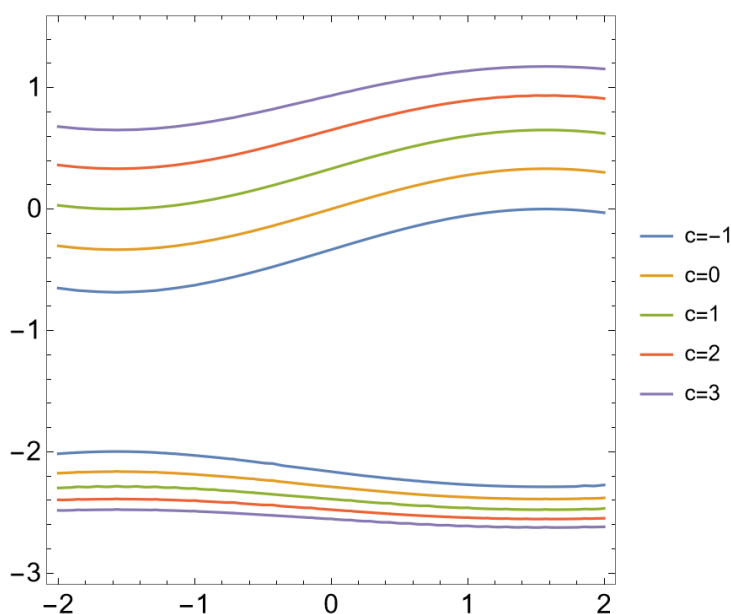
1.7

Stałą c to stała całkowania, której wartość możemy określić mając warunek początkowy. Jak zapisać rozwiązanie tego równania w postaci $y(x)$? Jeżeli nie możemy tego zrobić, tak jak w powyższym przykładzie, to mówimy, że rozwiązanie jest w postaci funkcji uwikłanej

Definicja 1.1: postać uwikłana rozwiązania równania różniczkowego

Jeżeli rozwiązanie równania różniczkowego nie można sprowadzić do postaci $y(x)$, to mówimy, że rozwiązanie to jest uwikłane.

Nie możemy się obrażać na rozwiązanie uwikłane. Przy pewnym wysiłku możemy z nich odczytać potrzebną informację, na przykład metodą graficzną. Zanim jednak zrobię rysunek zwrócę waszą uwagę na jeden fakt. Czasem wcale nie musimy rozwiązywać równania (1.5). Pewne interesujące informacje możemy uzyskać w prostszy sposób. W równania (1.5) z lewej strony mamy pochodną, czyli tangens kąta nachylenia krzywej $y(x)$ do osi x -ów. Równanie (1.7) pokazuje ile w danym punkcie wynosi przyrost dx i przyrost dy , To pozwala na wykres fazowy, który już używałem do analizy równania oscylatora harmonicznego (§TVIII 5.4). Wróćmy jednak do wykresu funkcji uwikłanej.



Rysunek 1.2. Wykres funkcji uwikłanej będącej rozwiązaniem równania różniczkowego (1.5) dla pięciu przykładowych wartości parametru c .

Przedstawię inny przykład metody pozwalającej na rozwiązanie nieco bardziej złożonych równań różniczkowych niż równanie (1.1). Będzie to metoda czynnika całkującego.

1.1. Metoda czynnika całkującego

Wprowadzę metodę czynnika całkującego bazując na przykładzie. Rozważmy równanie

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t) \quad 1.1.1$$

Pomnożymy obie strony tego równania przez czynnik $\mu(t)$ nazywany czynnikiem całkującym

$$\frac{dy}{dt}\mu(t) + ay\mu(t) = \mu(t)g(t) \quad 1.1.2$$

Na razie wygląda na to, że skomplikowaliśmy nasze równanie, ale cierpliwości. Lewa strona naszego równania przypomina nieco pochodną iloczynu funkcji. Spróbuję pójść tym torem

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)] = \mu(t)\frac{d}{dt}y(t) + \left[\frac{d}{dt}\mu(t)\right]y(t) \quad 1.1.3$$

Wyrażenie (1.1.3) podpowiada nam, że wystarczy przyjąć, że

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = a\mu(t) \quad 3.1.3a$$

Rozwiążmy równanie (3.7a), zaczynając od jego przekształcenia

$$\frac{d\mu}{\mu} = a dt \quad 1.1.3b$$

Całkując obie strony mamy

$$\ln|\mu| = at + b \quad 1.1.3.c$$

Gdzie b jest stałą całkowania. Wyrażenie (1.1.3c) możemy przekształcić do postaci

$$\mu(t) = e^{at+b} = ce^{at}; \quad c = e^b \quad 1.1.3.d$$

Tak obliczony czynnik całkujący wstawiamy do równania (1.1.2)

$$\frac{dy}{dt}ce^{at} + aye^{at} = ce^{at}g(t) \quad 1.1.4a$$

Stałą c możemy skrócić

$$\frac{dy}{dt}e^{at} + aye^{at} = e^{at}g(t) \quad 1.1.4b$$

Równanie to możemy przepisać w postaci

$$\frac{d}{dt}(ye^{at}) = e^{at}g(t) \Rightarrow d(ye^{at}) = e^{at}g(t)dt \quad 1.1.4c$$

Co nawiązuje do równania (1.1.2). Inaczej mówiąc tak obliczyliśmy czynnik całkujący, wychodząc od równania (1.1.2), aby prawa strona (1.1.3b) dała się zapisać w postaci (1.1.3c). Lewa strona (1.1.3c) ma postać różniczki z wyrażenia w nawiasie, zatem jej całka jest równa temu wyrażeniu. Całkując obie strony (1.1.3c) mamy

$$ye^{at} - c = \int e^{at}g(t)dt \quad 1.1.5a$$

Stąd mamy

$$y = e^{-at} \int e^{at}g(t)dt + e^{-at}c \quad 1.1.5$$

I jesteśmy w domu, pod warunkiem, że jesteśmy w stanie obliczyć całkę po prawej stronie (1.1.5), a to już zależy od konkretnego przykładu. Zróbmy zatem konkretny przykład

Rozwiążemy następujące równanie różniczkowe

$$t \frac{dy}{dt} + 2y = 4t^2 \quad 1.1.6$$

Podzielimy obie strony przez t

$$\frac{dy}{dt} + 2\frac{y}{t} = 4t \quad 1.1.7$$

Mnożymy obie strony przez czynnik całkujący $\mu(t)$

$$\frac{dy}{dt}\mu(t) + 2\frac{y}{t}\mu(t) = 4t\mu(t) \quad 3.1.8$$

Patrząc na postać (1.1.2) widać, że

$$\frac{d}{dt}\mu(t) = \frac{2}{t}\mu(t) \quad 1.1.9$$

Stąd mamy

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{2}{t}dt \Rightarrow \mu(t) = ce^{2\ln(t)} = ct^2 \quad 1.1.9a$$

Gdzie c jest stałą, nieważne jakiej postaci, gdyż zaraz i tak się uprości. Wstawiając obliczoną postać czynnika całkującego do równania (1.1.8) mamy

$$\frac{dy}{dt}t^2 + 2\frac{y}{t}t^2 = 4t^3 \quad 1.1.10$$

Lewą stronę możemy zapisać w postaci pochodnej

$$\frac{d(yt^2)}{dt} = 4t^3 \Rightarrow d(yt^2) = 4t^3 dt \quad 1.1.11$$

Scałkowanie obu stron daje

$$yt^2 = t^4 + C \Rightarrow y(t) = t^2 + \frac{C}{t^2} \quad 1.1.12$$

Stała C zależy od warunku początkowego. Przejdę do bardziej systematycznego omówienia metod rozwiązywania równań różniczkowych.

1.2. Równania różniczkowe zwyczajne

Zdefiniuję klasę najprostszych równań różniczkowych

Definicja 1.2.1: Równania różniczkowe zwyczajne

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie w postaci

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad 1.2.1$$

gdzie niewiadomą jest funkcja $y(x)$.

Zauważ, że rząd równania równy jest rzędowi najwyższej pochodnej funkcji $y(x)$. Co rozumiemy przez rozwiązanie tego równania mówi nam następująca definicja.

Definicja 1.2.2: Rozwiązanie (całka) równania różniczkowego

Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego (3.2.1) na przedziale (a, b) nazywamy każdą funkcję y , która ma pochodną do rzędu n włącznie i spełnia to równanie

Definicja (1.2.1) określa co możemy uznać za rozwiązanie równania (1.2.1). Ale jak wiemy rozwiązaniem równania różniczkowego są rodziny funkcji. Mamy więc również definicję określającą rozwiązanie w ogólnej postaci, to jest takie, które obejmuje wszystkie możliwości.

Definicja 1.2.3: Rozwiązanie ogólne (całka ogólna) równania różniczkowego

Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania różniczkowego (1.2.1) w obszarze istnienia i jednoznaczności jego rozwiązań, nazywamy rozwiązanie tegoż równania w postaci

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad 1.2.2$$

Gdzie $C_1, C_2, \dots, C_n$ dowolne stałe, lub w postaci uwikłanej

$$h(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0 \quad 1.2.3$$

i takie, że podstawiając dowolne wartości stałych $C_1, C_2, \dots, C_n$, dostaniemy wszystkie krzywe całkowe w zadanym obszarze i tylko te krzywe.

Kiedy już określimy wartości stałych to mamy rozwiązanie szczególne, czyli jeszcze raz definicja (1.2.2) tylko w bardziej „poważnym” sformułowaniu

Definicja 1.2.4: Rozwiązanie szczególne (całka szczególna) równania różniczkowego zwyczajnego

Rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną) równania różniczkowego zwyczajnego (1.2.1) nazywamy każde rozwiązanie postaci (1.2.2) lub (1.2.3) dla szczególnych wartości stałych $C_1, C_2, \dots, C_n$

Kiedy najwyższą pochodną w równaniu różniczkowym zwyczajnym jest pierwsza pochodna, to mówimy o

Definicja 1.2.5: Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

Równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu nazywamy równanie

$$F(x, y, y') = 0 \quad 1.2.4$$

gdzie $y(x)$ jest funkcją zmiennej x ,

Rozwiązane wyżej równania (1.1, 1.5, 1.1.1) są równaniami zwyczajnymi pierwszego rzędu. Innym przykładem prostego równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu jest równanie

$$\frac{dy(x)}{dx} = x \Rightarrow dy(x) = x dx \quad 1.2.5$$

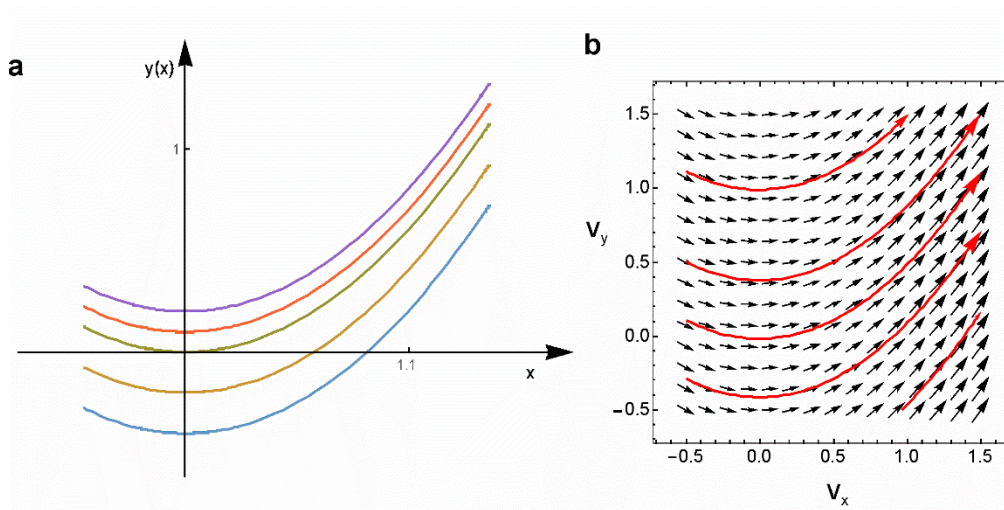
Całkując obie strony mamy

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 + C \quad 1.2.6$$

Rysunek przedstawia przykładowych członków rodziny krzywych będących rozwiązaniem równania (1.2.6). Krzywe (1.2.6) można przedstawić jako zbiór punktów płaszczyzny $(x, y(x))$. Co odpowiada parametrycznej reprezentacji krzywej, gdzie parametrem jest zmienna x . Wektorem stycznym $\mathbf{v}_s$ do tak zdefiniowanej krzywej jest

$$\mathbf{v}_s \left(\frac{dx}{dx} = 1, \frac{dy(x)}{dx} = y'(x) \right) \Rightarrow \mathbf{v}_s \left(\underbrace{1}_{v_x}, \underbrace{y'(x)}_{v_y} \right) \quad 1.2.7$$

Rysunek (1.1.b) przedstawia tak zdefiniowane pole wektorowe.



Rysunek 1.2.2. a) wykresy pięciu funkcji z rodziny funkcji (1.2.6) będących rozwiązaniem równania (1.2.5); b) pole wektorowe zdefiniowane wzorem (1.2.7). Czerwone linie pokazują przebieg linii sił pola (linii stycznych do wektorów pola). Linie te mają taki przebieg jak na wykresie w części (a).

Ważne jest zidentyfikowanie warunków, przy których, równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu, dla ustalonego warunku początkowego, mają jednoznacznie określone rozwiązanie.

Twierdzenie 1.2.1. O jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu

Niech $f(x,y)$ oraz $\partial f/\partial y$, są funkcjami rzeczywistymi, ograniczonymi i ciągłymi na pewnym otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$ oraz $y(x_0)=y_0$. Wtedy istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania $dy/dx=f(x,y)$ na przedziale leżącym wewnątrz tego otoczenia punktu P_0 .

Twierdzenie to określa warunki, przy których równanie (1.2.4) ma na pewno jednoznaczne rozwiązanie. Nie każde równanie typu (1.2.4) spełnia warunki twierdzenia (1.2.1). Na przykład równanie

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}} \quad 1.2.8$$

Ma nieskończenie wiele rozwiązań dla warunku $y(0)=0$. Funkcja $f(x,y)$ w naszym przypadku jest prawą stroną (1.2.8). Nie zależy ona jawnie od x ale to nie ma znaczenia. Taki mamy szczególny przypadek. Pochodna cząstkowa tej funkcji po y - $\partial f/\partial y$ nie jest ciągła w punkcie $x=0$,

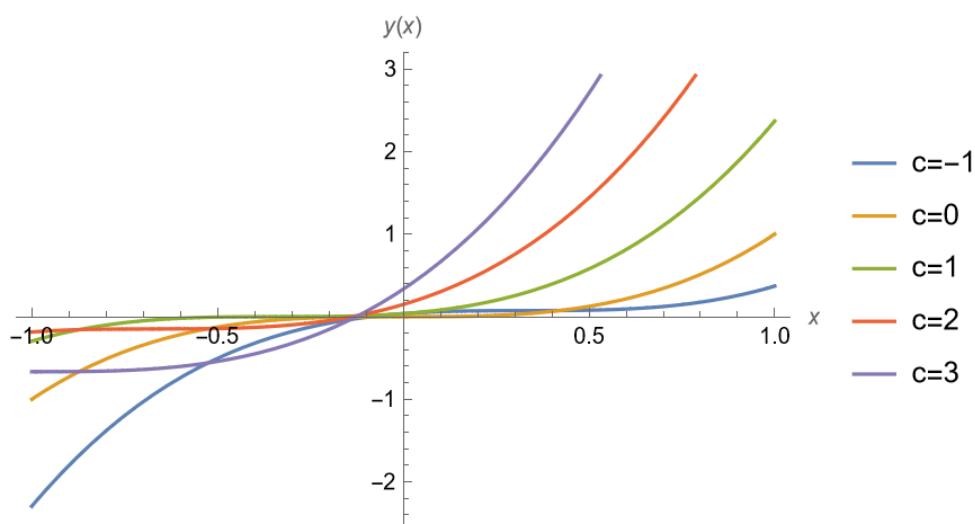
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \frac{1}{y^{\frac{1}{3}}} \quad 1.2.9$$

zatem nie są spełnione warunki twierdzenia (1.2.1). Oznacza to, że nasze równanie ma rozwiązanie (bo funkcja $f(x,y)$ jest ciągła) ale nie jest to rozwiązanie

jednoznaczne. Z pomocą programu Mathematica znalazłem ogólne rozwiązanie równania (1.2.8)

$$y(x) = x^3 + x^2c + \frac{1}{3}xc^2 + \frac{1}{27}c^3 \quad 1.2.10$$

Kilka przykładów rozwiązań, dla przykładowych wartości stałej c , pokazuje rysunek (1.2.2). Przyjmując warunek początkowy $y(0)=0$ dostajemy $c=0$. Ale stała c nie jest wyznaczona jednoznacznie.



Rysunek 1.2.2. Wykres rozwiązań równania (1.2.8), dla wybranych wartości parametru c .

Napiszę równanie (1.2.8), w punkcie $x=0$, posilując się rozwiązaniem (1.2.10)

$$\left. \frac{d}{dx} \left(x^3 + x^2c + \frac{1}{3}xc^2 + \frac{1}{27}c^3 \right) \right|_{x=0} = \frac{1}{3}c^2 \quad 1.2.11a$$

$$\left. 3 \left(x^3 + x^2c + \frac{1}{3}xc^2 + \frac{1}{27}c^3 \right)^{\frac{2}{3}} \right|_{x=0} = \frac{1}{3}c^2 \quad 1.2.11b$$

Równanie (1.2.11a) pokazuje wartość lewej strony równania (1.2.8) w punkcie $x=0$, a równanie (1.2.11b) wartość prawej strony tego równania. Obie strony są tożsamościowo sobie równe. To oznacza, że w punkcie $x=0$ każda wartość stałej c reprezentuje rozwiązanie równania różniczkowego (1.2.8). Zatem każda krzywa pokazana na rysunku (1.2.2) jest rozwiązaniem, w punkcie $x=0$, tego równania. Zobaczmy jeszcze jak sobie z problemem radzi Mathematica (M. 3.2.1)

<code>DSolve[{y'[x] == 3y[x]^{2/3}, y[0] == 0}, y[x], x]</code>	Instrukcja rozwiązania równania (3.2.8), przy warunku $y[0]=0$.
<code>DSolve::deqn: Equation or list of equations expected instead of True in the first argument {(y^[Prime])[x]==3 y[x]^(2/3),True}.</code>	Zgłoszenie błędu, które oznacza, że warunek $y[0]=0$, zawsze jest spełniony i brak jednoznacznego rozwiązania
M. 3.2.1. Reakcja program Mathematica, gdy zadanie równanie różniczkowe nie ma jednoznacznego rozwiązania	

Prostym typem równań zwyczajnych pierwszego rzędu jest równanie różniczkowe zupełne

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad 1.2.10$$

Lewa strona tego równania jest różniczką zupełną funkcji dwóch zmiennych $F(x, y)$. Gdy spełniony jest warunek równości drugich pochodnych

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \quad \left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \right) \quad 1.2.11$$

To wtedy rozwiązaniem równania (1.2.10) jest

$$F(x, y) = \int \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_M dx + g(y) = \int \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_N dy + h(x) \quad 1.2.12$$

Dla przykładu równanie

$$\underbrace{(2y + 2)}_M dx + \underbrace{2x}_N dy = 0 \quad 1.2.13$$

Spełnia warunek (1.2.11)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 = \frac{\partial N}{\partial x} \quad 1.2.14$$

Zatem rozwiązanie tego równania można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int M dx + g(y) = \int (2y + 2) dx + g(y) \\ &= 2yx + 2x + g(y) \end{aligned} \quad 1.2.15$$

Postać funkcji $g(y)$ uzyskujemy wykorzystując warunek

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = 2x \Rightarrow 2x + \frac{dg}{dy} = 2x \Rightarrow g(y) = \text{const} \quad 1.2.16$$

Rozwiązanie ma postać

$$F(x, y) = 2yx + 2x + c \quad 1.2.17$$

Gdzie c jest stałą.

Szczęśliwie mamy twierdzenie pozwalające na rozstrzygnięcie czy dane równanie różniczkowe jest dokładne.

Twierdzenie 1.2.2:

Jeżeli funkcje

$$M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} \quad 1.2.18$$

Są ciągłe w obszarze $\Delta x \Delta y$, wtedy równanie postaci (1.2.10) jest zupełne na tym obszarze, gdy spełniony jest warunek

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad 1.2.19$$

Warto tu wspomnieć, że metoda czynnika całkującego pozwala na przekształcenie równań nie spełniających warunków nałożonych przez twierdzenie (1.2.2) w równania zupełne.

2. Równania różniczkowe liniowe

Równania różniczkowe liniowe tworzą klasę równań najprostszych do rozwiązywania. Są one również najczęściej spotykane w zagadnieniach technicznych i naukowych. Nie dzieje się tak dlatego, że przyroda ma szczególną słabość do równań tego typu i zachowuje się tak abyśmy mogli je szeroko wykorzystywać. To zawsze idzie w drugą stronę, nie od przyrody do człowieka tylko od człowieka do przyrody. To znaczy, że to my głównie wybieramy te zagadnienia, które za pomocą równań liniowych dają się opisać. Może się to dziać na drodze takie uproszczenia modelu danego układu fizycznego, aby model ten dał się wyrazić przez liniowe równania różniczkowe.

Zacznę od zdefiniowania równań różniczkowych liniowych n -tego rzędu. Równania liniowe charakteryzują się tym, że kombinacja liniowa dwóch rozwiązań danego równania liniowego jest również rozwiązaniem równania liniowego. To cecha, która bardzo ułatwia pracę z tymi równaniami. Podam teraz ogólną definicję równania różniczkowego liniowego n -tego rzędu.

Definicja 2.1: Równanie różniczkowe liniowe n -tego rzędu

Równanie różniczkowe liniowe n -tego rzędu nazywamy równanie o postaci

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) = f(x) \quad 2.1$$

$$a_n(x) \neq 0 \text{ i } \frac{d^n y}{dx^n} \neq 0 \quad 2.1a$$

Warunek (2.1a) mówi, że wyraz z pochodną n -tego rzędu funkcji $y(x)$ nie może być równy zero, dlatego jest to równanie n -tego rzędu. Wszystkie inne pochodne i współczynniki mogą (ale nie muszą) być równe zero. W szczególności równanie

$$\frac{d^n y}{dx^n} = c \quad 2.2$$

Jest też równaniem różniczkowym liniowym n -tego rzędu.

Równanie (2.1) można też zapisać w prostszej postaci operatorowej

$$\mathcal{L} = a_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x) \quad 2.3$$

Równanie to przyjmuje postać

$$\mathcal{L}y = f(x) \quad 2.4$$

Ponieważ jak, zostało wspomniane kombinacja liniowa dwóch rozwiązań, równania liniowego jest również rozwiązaniem tego równania, to operator $\mathcal{L}$ jest operatorem liniowym. Podsumujmy tą ważną własności w postaci następującego twierdzenia

Twierdzenie 2.1.

Jeżeli funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ są rozwiązaniem danego jednorodnego liniowego równania różniczkowego rzędu n , to również kombinacja liniowa tych rozwiązań $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ jest rozwiązaniem tego równania.

Ważną podklasą równań różniczkowych liniowych n -tego rzędu są równania liniowe jednorodne n -tego rzędu

Definicja 2.2: Jednorodne równanie różniczkowe liniowe n -tego rzędu

Jednorodne równanie różniczkowe liniowe, n -tego rzędu nazywamy równanie o postaci

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y(x) = 0 \quad 2.5$$

Jak tego widać, żądamy aby funkcja $f(x)$ we definicji (2.1) była równa zero. Poza tym równanie (4.5) jest równaniem liniowym n -tego rzędu. W postaci operatorowej nasze równanie ma postać

$$\mathcal{L}y = 0 \quad 2.5a$$

I jeszcze jeden ważny bo prosty typ równania liniowego

Definicja 2.3: Równanie różniczkowe liniowe n -tego rzędu, o stałych współczynnikach

Jeżeli współczynniki $a_i(x)$, dla dowolnego i zmieniającego się od 0 do n , są stałe, to mówimy, że równanie różniczkowe liniowe n -tego rzędu jest równaniem o stałych współczynnikach

Przyglądnę się bliżej równaniu linowemu drugiego rzędu

2.1 Jednorodne równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach

Zacznę od równań jednorodnych o stałych współczynnikach. Popatrzmy na równanie

$$y'' - y = 0 \quad 2.1.1$$

Przez y oznaczam w skrócie funkcję $y(x)$ a znak bis oznacza drugą pochodną. Przekształcę to równanie do postaci

$$y'' = y \quad 2.1.1a$$

Równanie (2.1.1a) oznacza, że druga pochodna funkcji y po x jest równa y . Taki numer potrafi tylko funkcja e^x . Teraz możemy poszaleć wykorzystując fakt, że nasze równanie jest liniowe. Oznacza to, że funkcja ce^x jest też rozwiązaniem naszego równania, jak również suma takich składników

$$c_1e^x + \dots + c_ne^x = (c_1 + \dots + c_n)e^x \quad 2.1.2$$

Co jest dość trywialnym wnioskiem gdyż suma współczynników c_i daje znowu jedną liczbę. Mniej trywialne jest stwierdzenie, że funkcja e^{-x} jest też rozwiązaniem naszego równania, a co za tym idzie i taka kombinacja liniowa

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad 2.1.3$$

Przejdę do równania jednorodnego liniowego, drugiego rzędu w postaci ogólnej

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad 2.1.4$$

Mając na uwadze nasze rozważania nad równaniem (2.1.1) możemy przyjąć, że funkcja postaci e^{px} jest rozwiązaniem naszego równania. Stała p musi być wyznaczona z rachunku. Wstawiając funkcję e^{px} do równania (2.1.4) otrzymujemy

$$ap^2 + bp + c = 0 \quad 2.1.5$$

Stało się coś mile zaskakującego. Równania różniczkowe przekształciło się w równanie algebraiczne drugiego stopnia, które pozwala na wyznaczenie dozwolonych wartości parametru p . Równanie to nazywamy równaniem charakterystycznym dla równania (2.1.2). Rozwiązując to równanie ze względu na p , otrzymujemy jedno lub dwie wartości, tak więc ogólne rozwiązanie równania (4.1.2), będzie miało postać

$$y(x) = c_1 e^{p_1 x} + c_2 e^{p_2 x} \quad 2.1.6$$

Przy czym współczynnik c_1 albo współczynnik c_2 może być równy zeru. Nie należy również zapominać, że zespolone rozwiązania równania kwadratowego (2.1.3) są jak najbardziej prawomocne, a to oznacza, że równanie to ma zawsze rozwiązanie.

Czas na małe podsumowanie. Widać z dotychczasowych rozważań, że rozwiązanie równania różniczkowego drugiego stopnia, liniowego i jednorodnego sprowadza się do znalezienia dwóch rozwiązań postaci e^{px} różniących się parametrem p . Kombinacja liniowa tych dwóch rozwiązań jest również rozwiązaniem naszego równania. Zmieniając współczynnik c_1 i c_2 kombinacji liniowej (2.1.6) generujemy różne rozwiązania równania (2.1.4). Przypomina to konstrukcje przestrzeni wektorowej o wymiarze dwa. Jeżeli uznamy, że funkcje $\exp\{p_1 x\}$ i $\exp\{p_2 x\}$ to wektory bazy i oznaczmy je jako wektory bazy $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$, a funkcje $y(x)$ jako wektor $\mathbf{v}$ to wzór (2.1.4) przyjmie postać

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 \quad 2.1.7$$

Formalnie jest to dokładnie taka sama postać jaką spotykaliśmy w „normalnych” przestrzeniach wektorowych. Wiemy również, że funkcje mogą rzeczywiście tworzyć przestrzeń wektorową (§TVIII 3.3). Zatem to nie analogia a przykład przestrzeni wektorowych nad ciałem liczb zespolonych. Funkcje $\exp\{p_1 x\}$ i $\exp\{p_2 x\}$ dla $p_1 \neq p_2$ są przykładem dwóch funkcji liniowo niezależnych, które

rozpinają przestrzeń rozwiązań równania (2.1.2). Oznacza to, że do badania tegoż równania możemy wprząc bogatą w możliwości teorię przestrzenie wektorowych.

Jeszcze ważna uwaga dotycząca rozwiązywania równań (2.1.2). Znamy już ogólną postać rozwiązania naszego równania

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \quad 2.1.8$$

$$y_1(x) = e^{p_1 x}; \quad y_2(x) = e^{p_2 x} \quad 2.1.8a$$

Aby uzyskać konkretne rozwiązanie potrzebne są nam dwa warunki początkowe (mamy dwa współczynniki c_1 i c_2 do wyznaczenia).

$$y(x_0) = y_0 \quad 2.1.9a$$

$$y'(x_0) = y'_0 \quad 2.1.9b$$

Wykorzystując te warunki początkowe w równaniu (2.1.8) mamy

$$y_0 = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) \quad 2.1.10a$$

$$y'_0 = c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) \quad 2.1.10b$$

Jest to postać układu równań liniowych, który to układ możemy wyliczyć metodami macierzowymi. Korzystając z teorii z dodatku (DE 3) mamy

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x) \\ y'_0 & y'_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}} \quad 2.1.11a$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y'_1(x_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix}} \quad 2.1.11b$$

Wyznacznik w mianowniku wzorów musi być różny od zera. W teorii równań różniczkowych wyznacznik ten ma swoją własną nazwę Wrońskian.

W przypadku jednorodnych równań różniczkowych liniowych drugiego stopnia (bez stałych współczynników) nie istnieje ogólna metoda dochodzenia do rozwiązania. Nie może to zaskakiwać, jeżeli współczynnik $a_n(x)$ mogą być różnymi funkcjami, to trudno o jedną metodę rozwiązywania tej klasy równań. Istnieją co prawda pewne bardziej szczegółowe metody, takie jak metoda redukcji rzędu równania, ale nie będę się tu nad ich dyskusją zatrzymywał. Podam tylko ogólne twierdzenie (bez dowodu) uogólniające nasze dotychczasowe wnioski na równania niejednorodne.

Twierdzenie 2.1.1: Ogólne rozwiązanie liniowego i jednorodnego równania różniczkowego n -tego rzędu

Jeżeli zbiór funkcji liniowo niezależnych $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ jest zbiorem rozwiązań dla danego jednorodnego liniowego równania różniczkowego rzędu n , to kombinację liniową tych rozwiązań $c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ jest również rozwiązaniem tego równania

$$y(x) = \sum_{i=1}^N c_i y_i(x) \quad 2.1.12$$

Tym razem nie ograniczałem się do równania rzędu drugiego, tylko od razu sformułowałem twierdzenie dla dowolnego rzędu równania n .

Możesz teraz poczuć bogatą strukturę współczesnej matematyki. Zajmujemy się pewną klasą równań różniczkowych. Poszukiwanie metody rozwiązywania tych równań zawiodło nas do teorii liniowych przestrzeni funkcyjnych i macierzowych metod rozwiązywania układów równań liniowych. A to oznacza dwie rzeczy – po pierwsze znając teorię liniowych przestrzeni funkcyjnych mamy automatycznie wiedzę na temat zachowania się rozwiązań liniowych jednorodnych równań różniczkowych, a po drugie, mamy również w pełni opracowane metody ich rozwiązywania. Zauważyłeś może, że przed chwilą „zapomniałem” użyć słowa „drugiego rzędu”. Wiadomo co się stanie. Równania liniowe jednorodne n -tego rzędu, o stałych współczynnikach, to znaczy o niezerowym wyrazie zawierającym n -tą pochodną funkcji $y(x)$, będzie rozpinane przez n niezależnych liniowo funkcji e^{px} , czyli będzie wektorem w n -wymiarowej przestrzeni funkcyjnej. Do jego rozwiązywania (przy określeniu n warunków początkowych) będziemy używali n wymiarowego wronskiana. Nic ponadto się nie zmieni.

2.2. Równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach

Przejdę do analizy ogólniejszego przypadku, to jest równania drugiego rzędu nie jednorodnego, ale o stałych współczynnikach

$$y'' - y' - 2y = e^{3x} \quad 2.2.1$$

Rozwiązanie tego równania zaczynamy od jego rozwiązania w postaci jednorodnej

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad 2.2.1a$$

Równanie charakterystyczne dla naszego równania ma postać

$$p^2 - p - 2 = 0 \Rightarrow (p+1)(p-2) = 0 \quad 2.2.3$$

Stąd widać, że $p_1 = -1$ i $p_2 = 2$. Stąd mamy ogólne rozwiązanie równania (2.2.1a) w postaci

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \quad 2.2.4$$

Przyjmujemy, że rozwiązanie równania niejednorodnego (2.2.1) jest postaci

$$y_s = b e^{3x} \quad 2.2.5$$

Gdzie b jest pewnym współczynnikiem

Wstawiając postulowane rozwiązanie (2.2.5) do (2.2.1) mamy

$$9b e^{3x} - 3b e^{3x} - 2b e^{3x} = e^{3x} \quad 2.2.6a$$

Równanie to daje się zredukować do postaci

$$9b - 3b - 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{4} \quad 2.2.6a$$

Postulowane rozwiązanie (2.2.5) przyjmie postać

$$y_s = \frac{e^{3x}}{4} \quad 2.2.7$$

A teraz czary mary. Ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego jest równe sumie rozwiązania odpowiadającego mu równania jednorodnego (2.2.4) oraz pewnego szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego (2.2.7).

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{e^{3x}}{4} \quad 2.2.8$$

Ale uwaga, rozwiązanie szczególne nie zawsze jest postaci (2.2.7). Wszystko zależy od postaci równania. W szczególności gdy

$$g(x) = e^{px} \quad 2.2.9$$

Rozwiązanie szczególne jest postaci

$$y_s = b e^{px} \quad 2.2.9a$$

W przypadku innych form funkcji $g(x)$ mamy inne rozwiązania szczególne i wiele przepisów na ich znajdowanie. Słowem nie jest łatwo. Niemniej jak dopadniemy takie szczególne rozwiązanie, to metoda dalszego rozwiązywania wygląda jak w przykładzie. Czyli znajdujemy rozwiązanie odpowiadające równania jednorodnego, a potem to rozwiązanie dodajemy do rozwiązania szczególnego. Mamy więc

Twierdzenie 2.2.1: Ogólne rozwiązanie liniowego równania różniczkowego n -tego rzędu

Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego liniowego rzędu n

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x)y = g(x) \quad 2.2.10a$$

Ma postać

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_s(x) \quad 2.2.10b$$

gdzie

$$c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \quad 2.2.10c$$

Jest ogólnym rozwiązaniem odpowiedniego równania jednorodnego

$$y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x)y = 0 \quad 2.2.10d$$

2.3. Równanie ruchu oscylatora harmonicznego

Mając na uwadze przedstawioną wyżej teorię bez trudu może rozwiązać równanie ruchu oscylatora harmonicznego (§TVII 1.9b)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad 2.3.1$$

Przy warunkach początkowych

$$x(0) = \bar{A}, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad 2.3.2$$

Od strony matematycznej jest to proste jednorodne liniowe równanie różniczkowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach. Równanie charakterystyczne dla tego równania ma postać

$$p^2 + \omega^2 = 0 \quad 2.3.3$$

Równanie to nie ma rozwiązania w dziedzinie liczb rzeczywistych. Gdy poszerzymy dziedzinę jego rozwiązań na liczby zespolone to wtedy

$$\lambda = \pm i\omega \quad 2.3.4$$

Rozwiązanie ogólne jest kombinacją liniową rozwiązań szczególnych, tak że mamy

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t} \\ &\Rightarrow (a_1 + a_2)\cos(\omega t) + i(a_1 - a_2)\sin(\omega t) \end{aligned} \quad 2.3.5$$

Niech teraz

$$B = a_1 + a_2 \quad 2.3.6a$$

$$A = i(a_1 - a_2) \quad 2.3.6b$$

Rozwiązanie (2.3.6) przyjmie postać

$$x(t) = B\cos(\omega t) + A\sin(\omega t) \quad 2.3.7$$

Postać ta jest taka jak rozwiązania (TVII 1.15), z tym zastrzeżeniem, że liczby A i B mogą być zespolone. Jest to efektem tego, że równanie drgań harmonicznym potraktowaliśmy czysto matematycznie, rozszerzając jego dziedzinę na zbiór liczb zespolonych. Powinniśmy teraz zawęzić uzyskane ogólne rozwiązanie do

dziedziny liczb rzeczywistych. Zażądam by (2.3.7) było rzeczywiste. Przyjmując, że współczynniki a_1 i a_2 mają postać:

$$a_1 = \alpha_1 + i\alpha_2 \quad 2.3.8a$$

$$a_2 = \beta_1 + i\beta_2 \quad 2.3.8b$$

(2.3.7) możemy zapisać w postaci

$$x(t) = (\alpha_1 + \beta_1 + i(\alpha_2 + \beta_2))\cos(\omega t) + (\beta_2 - \alpha_2 + i(\alpha_1 - \beta_1))\sin(\omega t) \quad 2.3.9$$

Aby współczynniki przy funkcjach cosinus i sinus były rzeczywiste ich część urojona musi być równa zero, stąd mamy

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \quad 2.3.10a$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -\beta_2 \quad 2.3.10b$$

Korzystając z tych wyrażeń, związki (2.3.8) możemy zapisać w postaci

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_1 + i\alpha_2 \\ a_2 = \alpha_1 - i\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \overline{a_2} \quad 2.3.11$$

Wynika z tego, że rozwiązanie (2.3.9) jest rzeczywiste, gdy współczynniki a_1 i a_2 są wzajemnie sprzężone. Zatem przy spełnieniu warunku (2.3.11) rozwiązanie (2.3.7) jest rozwiązaniem rzeczywistym. Z punktu widzenia opisu drgań harmonicznym interesuje nas tylko ten zakres parametrów.

Z warunków początkowych (2.3.2) mamy

$$\dot{x}(0) = -B\omega\sin(0) + A\omega\cos(0) = A\omega = 0 \Rightarrow A = 0 \quad 2.3.12a$$

$$x(0) = B\cos(0) + A\sin(0) = B = \bar{A} \quad 2.3.12b$$

Dla tych warunków początkowych rozwiązanie szczególne ma postać

$$x(t) = \bar{A}\cos(\omega t) \quad 2.3.13$$

Gdzie A z kreską jest amplitudą drgań.

W następnym kroku rozwiążę równanie ruchu oscylatora tłumionego (§TVIII 4)

2.3.1. Równanie ruchu oscylatora harmonicznego tłumionego

Równanie ruchu oscylatora harmonicznego tłumionego (§TVIII 4.4) ma postać

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad 2.3.14$$

Jest to zatem również równanie liniowe drugiego rzędu, jednorodne o stałych współczynnikach. Równanie charakterystyczne tego równania ma postać

$$\lambda^2 + \frac{1}{\tau}\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad 2.3.15$$

Rozwiązania równania charakterystycznego to

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau\omega_0}\right)^2 - 1} \quad 2.3.16$$

Jeżeli

$$\left(\frac{1}{2\tau\omega_0}\right)^2 - 1 < 0 \quad 2.3.17$$

to pierwiastki równania charakterystycznego są zespolone i możemy je zapisać w postaci

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\tau\omega_0}\right)^2} \quad 2.3.18$$

Niech

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\tau\omega_0}\right)^2} \quad 2.3.19$$

Zgodnie z przedstawionym schematem ogólne rozwiązanie równania (2.3.14) przyjmie postać

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_+ t} + c_2 e^{\lambda_- t} \quad 2.3.20$$

Po wstawieniu (2.3.18) i (2.3.20) mamy

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2\tau}t} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) \quad 2.3.21$$

Niech

$$b_1 = e^{-\frac{1}{2\tau}t} c_1 \quad 2.3.22a$$

$$b_2 = e^{-\frac{1}{2\tau}t} c_2 \quad 2.3.22b$$

Wtedy (4.3.21) przyjmie postać

$$x(t) = b_1 e^{i\omega t} + b_2 e^{-i\omega t} \quad 2.3.23$$

Równanie to ma taką samą postać jak rozwiązanie dla równania drgań harmoniczych (2.3.5). Podobnie jak (2.3.5) jest ono za ogólne i musimy je ograniczyć do wartości rzeczywistych. Rozumując podobnie jak w przypadku równania harmonicznego otrzymujemy

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2\tau}}(\bar{B}\cos(\omega t) + \bar{A}\sin(\omega t)) \quad 2.3.24$$

Zauważ, że (2.3.24) ma podobną postać do rozwiązania równania ruchu oscylatora harmonicznego (TVIII 1.15). Znając warunki początkowe możemy ustalić wartości współczynników $\bar{A}$ i $\bar{B}$. Stosując wzory (TVIII 1.18) i (TVIII 1.19) rozwiązanie (2.3.24) możemy zapisać w znanej postaci (TVIII 4.16)

$$x(t) = Ae^{-\frac{1}{2\tau}}\sin(\omega t + \varphi) \quad 2.3.25$$

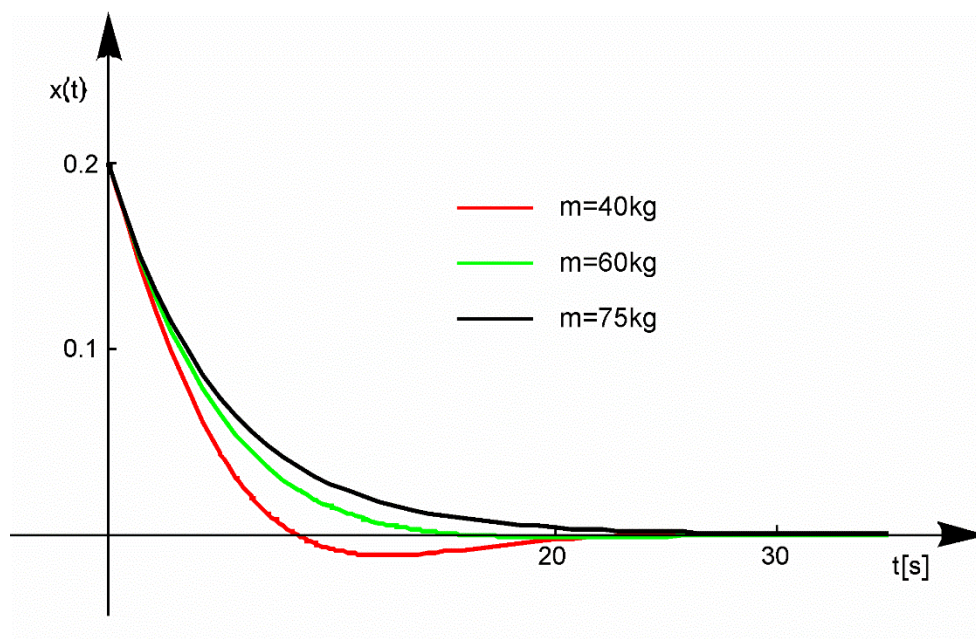
We wzorze (TVIII 4.16) nie ma początkowego przesunięcia fazowego φ . Wiąże się to z tym, że wyrażenie (TVIII 4.16) nie jest ogólne; jest ono prawdziwe dla warunków początkowych

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = A\omega \quad 2.3.26$$

Zauważ, że w zależności od znaku wyrażenia (2.3.19) mamy do czynienia z różnym zachowaniem układu tłumionego. Do tej pory analizowałem przypadek, gdy wyrażenie to jest ujemne. Wtedy funkcje eksponentialne mają urojony wykładnik i mogą zostać wyrażone przez funkcje trygonometryczne. Mamy do czynienia z oscylatorem harmonicznym tłumionym. Zobaczmy co się stanie gdy

$$\left(\frac{1}{2\tau\omega_0}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \omega = 0 \quad 2.3.27$$

Częstość drgań spada do zera i układ nie wykonuje drgań (rys. 2.3.1). Z rysunku widać, że przy warunku (2.3.27) układ osiąga najszybciej położenie równowagi. Dla krzywej czerwonej układ przechodzi przez położenie równowagi szybciej, ale mija to położenie równowagi i ponownie musi do niego dochodzić. Tłumienie przy warunku (2.3.14) nazywamy krytycznym.

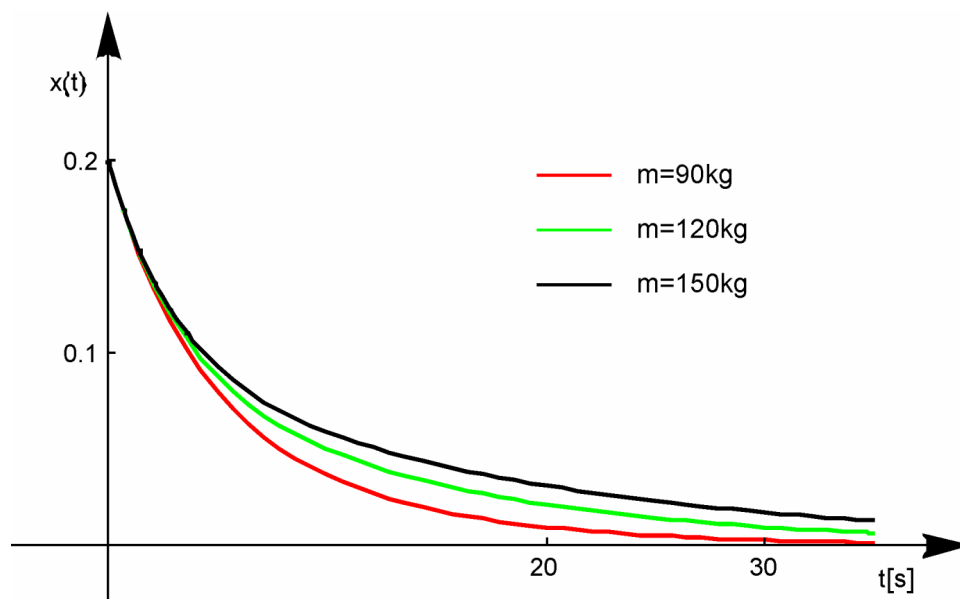


Rysunek 2.3.1. Przykładowe wykresy ruchu dla przypadku pokazanego na rysunku (TVIII 4.1) z tym, że teraz masa jest zdecydowanie większa. Dla $m=75\text{kg}$ częstość drgań $\omega=0$ (spełniony jest warunek (2.3.27)). Dla mniejszych mas wykres drgań schodzi lekko poniżej punktu położenia równowagi. Na rysunku (TVIII 4.1) faza początkowa jest $\varphi=0$ (startujemy z położenia równowagi). Przy silnym tłumieniu masa m nie ruszyłaby z położenia równowagi. Dlatego na tym rysunku jest $\varphi=\pi/2$ (startujemy z położenia maksymalnego wychylenia)

Gdy

$$\left(\frac{1}{2\tau\omega_0}\right)^2 - 1 > 0 \quad 2.3.28$$

Wykładniki w rozwiązaniu (2.3.8) stają się rzeczywiste. Układ dąży monotonicznie do położenia równowagi (rys. 2.3.2), ale wolniej niż przy tłumieniu krytycznym. Taki układ nazywamy przetłumionym.



Rysunek 2.3.2. Układ jest przetłumiony. Nie ma drgań, tylko monotoniczny powrót do położenia równowagi. Zauważ, że im większa jest masa tym wolniejszy powrót (większa bezwładności masy i mniejsze jej przyspieszenie pod wpływem tej samej siły). Parametry układu (za wyjątkiem masy) jak na rysunku (TVIII 4.1).

2.3.2. Równanie ruchu oscylatora harmonicznego wymuszonego

Rozwiążemy teraz równanie ruchu dla oscylatora harmonicznego wymuszonego. Ogólnie równanie to możemy zapisać w postaci:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad 2.3.29$$

Gdzie $f(t)$ jest funkcją czasu. Zgodnie z przedstawionym schematem rozwiązanie równania (2.3.29) jest sumą rozwiązania tego równania w postaci jednorodnej i rozwiązania szczególnego. Równanie (2.3.29) w postaci jednorodnej jest równaniem oscylatora harmonicznego tłumionego (2.3.14), które ma rozwiązanie postaci (2.3.24). Oczywiście ta część rozwiązania nie jest zależna od postaci funkcji $f(t)$. Szczególne rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego wymuszonego (2.3.29) wymaga jednak podania konkretnej postaci funkcji $f(t)$. Przyjmijmy, że siła wymuszająca jest harmoniczna

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t) \quad 2.3.30$$

Wiemy, że pod wpływem harmonicznego siły wymuszającej oscylator harmoniczny będzie wykonywał drgania postaci harmonicznego z częstotliwością równą częstotliwości siły wymuszającej. W ogólnej postaci takie równania zapisujemy tak

$$y(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad 2.3.31$$

Teraz musimy postąpić dokładnie tak jak w (§TVIII 5), to jest wstawić (4.3.31) do równania (2.3.30) i zobaczyć dla jakich parametrów a i b równanie to jest spełnione. Ponieważ zapisujemy nasze rozwiązanie w postaci ogólniejszej niż w (§TVIII 5) obliczeń będzie więcej. Po ich przeprowadzeniu mamy

$$y(t) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cos(\omega t) + \frac{\frac{1}{\tau} \omega}{\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin(\omega t) \quad 2.3.32$$

Rozwiązanie to możemy zapisać w postaci

$$y(t) = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \left((\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \frac{\omega}{\tau} \sin(\omega t) \right) \quad 2.3.33$$

Dla $\omega_0^2 - \omega^2 \neq 0$ możemy na mocy wzorów (TVIII 2.3.14 – 2.3.20) napisać

$$y(t) = \frac{1}{D} \cos(\omega t - \varphi) \quad 2.3.34$$

$$D = \frac{|\omega_0^2 - \omega^2|}{\omega_0^2 - \omega^2} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad 2.3.34a$$

$$D^2 = \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \quad 2.3.34b$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{1}{\tau} \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad 2.3.34c$$

Ogólne rozwiązanie wymaga dodania do rozwiązania (2.3.33) rozwiązania równania jednorodnego (2.3.24).

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2\tau}} \left(\bar{B} \cos(\omega t) + \bar{A} \sin(\omega t) \right) + \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \left((\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \frac{\omega}{\tau} \sin(\omega t) \right) \quad 2.3.35$$

Współczynnik A z kreską i B z kreską musimy znaleźć z analizy warunku początkowego.

3. Macierze i równania różniczkowe

W trakcie omawiania równań różniczkowych w sekcji (3) natrafiliśmy już na macierze, lub układ równań, które wskazywały na możliwość zapisu macierzowego. Sugeruje to dość jednoznacznie, że przynajmniej w części przypadków możemy skorzystać, przy rozwiązywaniu równań różniczkowych z zalet rachunku macierzowego. Tym bardziej, że w przypadku równań liniowych zagadnienie rozwiązywania równań różniczkowych sprowadzają się do rozwiązywania układu równań algebraicznych. Rozważmy następujący układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1N}(x)y_N \\ \vdots \\ y_N' = a_{N1}(x)y_1 + \dots + a_{NN}(x)y_N \end{cases} \quad 3.1$$

Możemy mu nadać postać macierzową

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \quad 3.2$$

$$\mathbf{y}' = \begin{cases} y_1' \\ \vdots \\ y_N' \end{cases} \quad 3.2a$$

$$\mathbf{y} = \begin{cases} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{cases} \quad 3.2b$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}(x) & \dots & a_{NN}(x) \end{bmatrix} \quad 3.2c$$

Równanie (3.2) jest oczywiście liniowe, wobec tego jeżeli macierz $\mathbf{A}$ nie jest osobliwa (jej wyznacznik jest różny od zera) to ma ono N liniowo niezależnych rozwiązań, z których przez kombinację liniową można skonstruować dowolne inne rozwiązanie (zobacz (**Dxxx**)).

$$y(x) = \sum_{i=1}^N a_i y_i(x) \quad 3.3$$

Przejdźmy do przypadku układu równań liniowych ze stałymi współczynnikami, to znaczy współczynnik $a(x)$ w równaniu (3.1) są liczbami, macierz $\mathbf{A}$ nie jest zależna od x . Wiemy, że w takim wypadku, dla pojedynczego równania różniczkowego mamy jedno równanie charakterystyczne. Dla układu równań liniowych równanie charakterystyczne stanie się układem równań liniowych, a macierz $\mathbf{A}$ tego równania będzie macierzą złożoną ze współczynników a_{ij} . Z drugiej strony dla układu równań liniowych spodziewamy się rozwiązania postaci

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{v}e^{\lambda x} \quad 3.4$$

Wstawiając to równanie do (5.2) mamy

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad 3.5$$

Rozwiązanie naszego równania (przy stałych współczynnikach) sprowadza się zatem do rozwiązania zagadnienia własnego dla macierzy współczynników $\mathbf{A}$. Rozważmy dla przykładu układ równań

$$y_1'(x) = 3y_1(x) + 2y_2(x) \quad 3.6a$$

$$y_2'(x) = -3y_1(x) + y_2(x) \quad 3.6b$$

Macierz $\mathbf{A}$ tego układu ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad 3.7$$

Jej wyznacznik jest równy 9, więc macierz jest nieosobliwa. Postępując zgodnie ze schematem omówionym w dodatku (DE), znajdziemy wartości własne i wektory własne tej macierzy. Wartości własne wynoszą

$$\lambda_1 = 2 + i\sqrt{5} \quad 3.8a$$

$$\lambda_1 = 2 - i\sqrt{5} \quad 3.8b$$

Są to wartości zespolone, co nie powinno nas ani dziwić ani przerażać. Odpowiednie wektory własne mają współrzędne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(1+i\sqrt{5}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad 3.9a$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(-1+i\sqrt{5}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad 3.9b$$

Zgodnie z (5.4) rozwiązanie naszego układu równań ma postać

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}(1+i\sqrt{5}) \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} e^{i\sqrt{5}x} \quad 3.10a$$

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(-1+i\sqrt{5}) \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x} e^{-i\sqrt{5}x} \quad 3.10b$$

Mamy dwa rozwiązania na funkcje y_1 i y_2 . Dla przykładu rozpiszę pierwsze rozwiązanie (3.10a)

$$y_1(x) = -\frac{1}{3}c_1(1+i\sqrt{5})e^{2x}e^{i\sqrt{5}x} \quad 3.11a$$

$$y_2(x) = c_2e^{2x}e^{i\sqrt{5}x} \quad 3.11b$$

Warto zauważyć, że druga para rozwiązania jest równa sprzężeniu zespolonemu pierwszej pary. Tak będzie wtedy gdy mamy układ liniowych równań

różniczkowych o stałych i rzeczywistych współczynnikach. Co więcej okazuje się, że w takiej sytuacji część rzeczywista i urojona każdego z rozwiązań jest (każda z osobna) również rozwiązaniem danego układu równań różniczkowych, i są to rozwiązania liniowo niezależne. Ogólne rozwiązanie możemy zapisać jako sumę część rzeczywistej i urojonej, do czego możemy wykorzystać każde z dwóch rozwiązań (3.10). Wykorzystując (3.10a) oraz wzór Eulera mamy

$$\mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{2x} \cos(\sqrt{5}x) \\ e^{2x} \cos(\sqrt{5}x) \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}e^{2x} \sin(\sqrt{5}x) \\ e^{2x} \sin(\sqrt{5}x) \end{bmatrix} \quad 3.12$$

Część rzeczywista i urojona stanowią dwa niezależnie liniowo rozwiązania naszego układu równań, stąd ogólne rozwiązanie ma postać

$$y_1(x) = -\frac{1}{3}c_1 e^{2x} \cos(\sqrt{5}x) - c_2 \frac{1}{3} e^{2x} \sin(\sqrt{5}x) \quad 3.13a$$

$$y_2(x) = c_1 e^{2x} \cos(\sqrt{5}x) + c_2 e^{2x} \sin(\sqrt{5}x) \quad 3.13b$$

Mamy tu ponownie przykład przenikania się różnych działów matematyki, teorii równań różniczkowych, macierzy, układów równań liniowych. Pozostaje pytanie do jakiego stopnia rozwiązywanie układów równań różniczkowych jest przydatne w fizyce. Pytanie może być zasadne gdyż, w fizyce często mamy równania zawierające drugie pochodne, tak jak na przykład drugie prawo Newtona. Ale nawet w przypadku drugiego prawa Newtona możemy poszukiwać wartości pędu, a nie położenia, wtedy mamy równanie z pierwszą pochodną. Kiedy mamy obliczone pędy (lub prędkości przy danych masach) możemy obliczyć też położenia, również z równań z pierwszymi pochodnymi. Całą procedurę możemy przejść jednym pociągnięciem pisząc układ równań liniowych pierwszego rzędu. Przedstawię to na przykładzie

Zajmiemy się nieśmiertelnym równaniem na oscylator harmoniczny; takie życie 😊.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad 3.14$$

Równanie to możemy przepisać w postaci układ równań liniowych pierwszego rzędu o stałych współczynnikach

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} \quad 3.15a$$

$$\dot{p} = m \frac{dx}{dt} = m\dot{x} \quad 3.15b$$

Układ równań od razu zapisałem w postaci macierzowej. Wartości i wektory własne macierzy równania (3.14a) to

$$\lambda = \pm i\omega_0; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad 3.16a$$

$$\mathbf{v} \begin{pmatrix} \pm i \frac{k}{\omega_0} \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3.16b$$

Rozwiązania mają więc postać

$$u_+ = \begin{pmatrix} i \frac{k}{\omega_0} \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} \quad 3.16a$$

$$u_- = \begin{pmatrix} -i \frac{k}{\omega_0} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} \quad 3.16b$$

Jak się można było spodziewać oba rozwiązania są sprzężone. Możemy więc zająć się tylko pierwszym z nich. Korzystając ze wzoru Eulera mamy

$$u_+ = \begin{pmatrix} -\frac{k}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{k}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix} \quad 3.17$$

Część rzeczywista i urojona stanowią dwa liniowo niezależne rozwiązania, stąd ogólna postać rozwiązania

$$\begin{pmatrix} p \\ x \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{k}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{k}{\omega_0} \cos(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix} \quad 3.18$$

Postać taką, jawnie na x , otrzymaliśmy również w (§TVII wzór (1.15)), tam też znajduje się analiza uzyskanego rozwiązania.

4. Równania różniczkowe i Mathematica

Z tego krótkiego wprowadzenia do równań różniczkowych jasno wynika, że ich rozwiązywanie nie należy do prostych zadań. A póki co ograniczyłem się do równań liniowych zwyczajnych. Pozostaje jeszcze szerokie morze zagadnień związanych z równaniami różniczkowymi nieliniowymi czy równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Wobec obszerności tematu warto wspomóc się systemami CAS, a tam, gdzie uzyskanie rozwiązania analitycznego przestaje być możliwe lub sensowne możemy odwołać się do metod numerycznych. Aby zilustrować tą ścieżkę posłużę się pakietem Mathematica (będę się opierał na przykładach z „helpa” pakietu)

Podstawową instrukcją dla symbolicznego rozwiązywania równań różniczkowych jest DSolve[]. Wypróbujmy jej działanie na prostym przykładzie równania liniowego jednorodnego postaci

$$y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 0 \quad 4.1$$

<code>sol = DSolve[y''[x] + 3 * y'[x] - 4y[x] == 0, y, x]</code>	Instrukcja
<code>{{y -> Function[{x}, e^{-4x}c₁ + e^xc₂]}}</code>	Wynik
M. 4.1. Rozwiązanie równania (4.1)	

Zapis `y -> Function[{x}, .....]` oznacza tyle, że za `y` program ma wstawić funkcję argumentu `{x}` podaną za tym argumentem. Uzyskane rozwiązanie jest postaci (2.1.3), czyli dokładnie takiej jakiej się spodziewaliśmy. Widać również, że zależy od stałych c_1 i c_2 , których określenie wymaga warunków brzegowych. Możemy również od razu podać jeden lub dwa warunki brzegowe. Zacznijmy od jednego warunku brzegowego postaci $y(0)=x$

<code>sol = DSolve[{y''[x] + 3 * y'[x] - 4y[x] == 0, y[0] == x}, y, x]</code>	Instrukcja
<code>{{y -> Function[{x}, e^{-4x}(e^{5x}x + c₁ - e^{5x}c₁)]}}</code>	Wynik
M. 4.2. Rozwiązanie równania (4.1), z warunkiem brzegowym $y(0)=x$	

Mamy teraz do określenia jedną stałą c_1 . Możemy ją określić podając warunek brzegowy dla pochodnej funkcji y . Przykład poniżej zawiera oba warunki brzegowe.

$\text{sol} = \text{DSolve}\{y''[x] + 3 * y'[x] - 4y[x] == 0, y[0] = x, y'[1] == 3\}, y, x\}$	Instrukcja
$\{y \rightarrow \text{Function}\{x, \frac{e^{-4x}(-3e^4 + 3e^{4+5x} + e^5x + 4e^{5x}x)}{4 + e^5}\}\}$	Wynik
M. 4.3. Rozwiązanie równania (4.1) z dwoma warunkami brzegowym $y(0)=x$ i $y'(1)=3$	

Co wybiera konkretną funkcję z całej rodziny rozwiązań naszego równania różniczkowego. Równie łatwo możemy sobie poradzić z równaniem niejednorodnym. Dla przykładu rozwiążemy równania

$$x^2 y''(x) + y(x) = x^2 \quad 4.2$$

$\text{sol} = \text{DSolve}[x^2 y''[x] + y[x] == x^2, y[x], x]$	Instrukcja
$\{y[x] \rightarrow \sqrt{x}c_1 \cos[\frac{1}{2}\sqrt{3}\text{Log}[x]] + \sqrt{x}c_2 \sin[\frac{1}{2}\sqrt{3}\text{Log}[x]] + \frac{1}{3}x^2(\cos[\frac{1}{2}\sqrt{3}\text{Log}[x]]^2 + \sin[\frac{1}{2}\sqrt{3}\text{Log}[x]]^2)\}$	Wynik
Math 4.4. Rozwiązanie równania (4.2)	

Możemy rozwiązać w ten sposób równania rzędu wyższego niż dwa. Jako przykład rozwiążemy równanie piątego rzędu

$$y''''(x) - 17y'''(x) + 108y''(x) - 330y'(x) + 488y(x) = 0 \quad 4.3$$

$\text{DSolve}[y''''[x] - 17 * y'''[x] + 108 * y''[x] - 330 * y'[x] + 488 * y[x] == 0, y[x], x]$	
$\{y[x] \rightarrow e^{2x}c_3 + e^{2x}xc_4 + e^{7x}c_5 + e^{3x}c_2 \cos[x] + e^{3x}c_1 \sin[x]\}$	
Math 4.5. Rozwiązania równania (4.3)	

Równanie to wymaga określenia wartości dla pięciu warunków brzegowy, stąd w rozwiązaniu pięć stałych $c_1, \dots, c_5$.

Możemy również rozwiązać równania niejednorodne. Na przykład równanie

$$xy'''(x) + 2y'(x) - xy(x) = x^2 \sin(x) \quad 6.4$$

DSolve[xy''[x] + 2y'[x] - xy[x] == x^2Sin[x], y, x]	Instrukcja
$\{\{y \rightarrow \text{Function}[\{x\}, \frac{e^{-x}c_1}{x} + \frac{e^x c_2}{2x} + \frac{-2x\text{Cos}[x] + \text{Sin}[x] - x^2\text{Sin}[x]}{2x}]\}\}$	Wynik
M. 4.6. Rozwiązanie równanie (4.4)	

Układy liniowych równań różniczkowych też nie są nam straszne. Poniżej przykład układu dwóch równań niejednorodnych

$$\begin{cases} y'(x) = \cos(\varphi)y(x) - \sin(\varphi)z(x) + 1 \\ z'(x) = \sin(\varphi)y(x) - \cos(\varphi)z(x) \end{cases} \quad 4.5$$

With[{θ = Pi/3}, DSolve[{y'[x] = Cos[θ]y[x] - Sin[θ]z[x] + 1, z'[x] = Sin[θ]y[x] + Cos[θ]z[x]}, {y, z}, x]]	
$\{\{y \rightarrow \text{Function}[\{x\}, e^{x/2}c_1 \text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] - e^{x/2}c_2 \text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] - \frac{1}{2} \text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}](\sqrt{3} \text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] + \text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}]) + \frac{1}{2} \text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}](-\text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] + \sqrt{3} \text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}])],$ $z \rightarrow \text{Function}[\{x\}, e^{x/2}c_2 \text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] + e^{x/2}c_1 \text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] + \frac{1}{2} \text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}](\sqrt{3} \text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] + \text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}]) + \frac{1}{2} \text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}](-\text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] + \sqrt{3} \text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}])]\}\}$	
Math 4.7. Rozwiązanie układu równań różniczkowych (4.5)	

Możemy również od razu określić warunki początkowe

$\text{With}[\{\theta = \text{Pi}/3\}, \text{DSolve}[\{y'[x] = \\ = \text{Cos}[\theta]y[x] - \text{Sin}[\theta]z[x] + 1, z'[x] = \\ = \text{Sin}[\theta]y[x] + \text{Cos}[\theta]z[x], y[0] = \\ = 1, z[0] == 1\}, \{y, z\}, x]]$	
$\{\{y \rightarrow \text{Function}[\{x\}, \frac{1}{2}(3e^{x/2}\text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] - \text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}]^2 \\ - 2e^{x/2}\text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] + \sqrt{3}e^{x/2}\text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] \\ - \text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}]^2)], z \\ \rightarrow \text{Function}[\{x\}, \frac{1}{2}(2e^{x/2}\text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] \\ - \sqrt{3}e^{x/2}\text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] + \sqrt{3}\text{Cos}[\frac{\sqrt{3}x}{2}]^2 \\ + 3e^{x/2}\text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}] + \sqrt{3}\text{Sin}[\frac{\sqrt{3}x}{2}]^2)]\}\}$	
Math 4.8. Rozwiązanie układu równań różniczkowych (6.5), z warunkami brzegowymi: $y(0)=1$ i $z(0)=1$.	

Choć do tej pory ograniczałem się do równań liniowych Mathematica potrafi rozwiązać również szereg równań różniczkowych nieliniowych. Jak przykład rozwiążemy równanie Riccatiego

$$y'(x) + x(y'(x))^2 = 1 \quad 4.6$$

$\text{DSolve}[y'[x] + xy'[x]^2 == 1, y, x]$	
$\{\{y \rightarrow \text{Function}[\{x\}, c_1 + \frac{1}{2}(2\sqrt{1+4x} \\ - 2\text{ArcTanh}[\sqrt{1+4x}] - \text{Log}[x])]\}, \\ \{y \rightarrow \text{Function}[\{x\}, c_1 + \frac{1}{2}(-2\sqrt{1+4x} \\ + 2\text{ArcTanh}[\sqrt{1+4x}] - \text{Log}[x])]\}\}$	
M. 4.9. Rozwiązania równania różniczkowego (4.6)	

Jako, że pochodna funkcji $y(x)$ jest tu w stopniu drugim (podniesiona jest do drugiej potęgi), można to równanie uważać za analogiczne do równania algebraicznego drugiego stopnia. Tak jak dla równania algebraicznego drugiego

stopnia mamy dwa rozwiązania, tak tutaj jako rozwiązanie otrzymujemy dwie rodziny funkcji.

4.1. Metody numeryczne

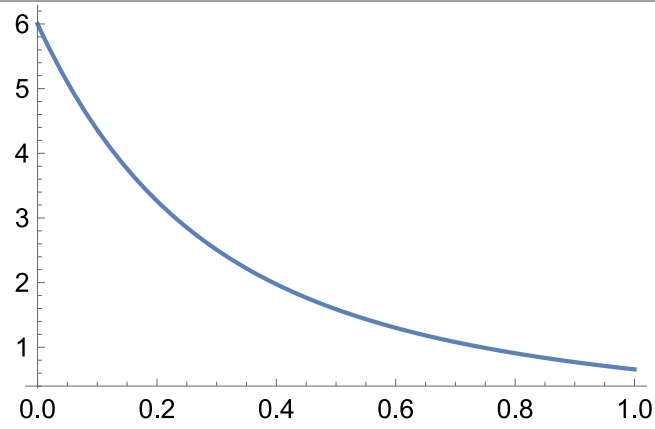
Wiele układów równań różniczkowych nie da się sensownie rozwiązać za pomocą metod analitycznych. Pozostaje wtedy opcja numeryczna. Obecnie metody numeryczne są ogromnie rozbudowane i istnieje wiele różnych programów pozwalających na ich zastosowanie w danym obszarze nauki lub dla danej klasy równań. Takie możliwości ma również Mathematica, która pozwala na rozwiązywanie szerokiego zakresu układów równań różniczkowych metodami numerycznymi. Wadą metody numerycznej jest jej mała ogólność. Metoda numeryczna rozwiązuje konkretny przypadek. Metoda analityczna daje wzory na całą klasę możliwych rozwiązań. Analizując wyniki analityczne widzimy niejako cały pejzaż możliwych rozwiązań. Mając wynik obliczeń numerycznych widzimy tylko to co znajduje się na ścieżce wyznaczonej przez jedno konkretne rozwiązanie. Metody numeryczne mają jeszcze jedną wadę. Są obciążone błędami numerycznymi, które mogą skutkować fałszywym rozwiązaniem. Z wrażliwością na błędy numeryczne spotykamy się w zagadnieniach, w których układ jest w stanie chaosu deterministycznego (§TVI 7). Jak wiemy, w takiej sytuacji, mała zmiana wartości liczbowej może prowadzić do bardzo dużych błędów obliczeniowych. Oznacza to, że nie można stosować metod numerycznych bezmyślnie. Uwaga ta nie dotyczy tylko równań różniczkowych ale metod numerycznych w ogóle.

Dla przykładu rozwiążemy z użyciem pakietu Mathematica równanie, z zadanymi warunkami początkowymi. W przypadku metod numerycznych, warunek początkowy musi mieć konkretną formę, inaczej nie ma możliwości wykonania obliczeń. Jak już wspominałem metody numeryczne operują zawsze na konkretnym przypadku. Ponieważ nasze równanie jest równaniem liniowym, jednorodnym trzeciego stopnia musimy określić trzy warunki początkowe, na warto drugiej, pierwszej samej funkcji $y(x)$ w zadanym punkcie x .

$$y'''(x) + 8y'(x) + 17y'(x) + 10y(x) = 0 \quad 4.1.1.$$

$\text{NDSolve}\{y'''[x] + 8y''[x] + 17y'[x] + 10y[x] = 0, y[0] == 6, y'[0] == -20, y''[0] = 84\}, y, \{x, 0, 1\}$	Instrukcja
$y \rightarrow \text{InterpolatingFunction}$  Domain: $\{0., 1.\}$ Output: scalar	Wynik
M. 4.1.1. Rozwiązanie numeryczne określone jest na zadanym zbiorze punktów, w naszym wypadku, od wartości $x=0$, do wartości $x=1$. Zapisane jest w postaci tablicy punktów x oraz wartości $y(x)$. Wszystko opatrzone jest instrukcją <code>InterpolatingFunction</code>. W momencie wywołania funkcji $y(x)$, dla danego x, funkcja <code>InterpolatingFunction</code> dokonuje interpolacji określając w ten sposób szukaną wartość w punkcie x. Na przykład, jeżeli program obliczył wartości rozwiązania dla $x=0.55$ i dla $x=0.57$, a my chcemy znać wartość $x=0.56$ interpolacja pozwala określić tą wartość na podstawie wartości funkcji dla punktów $x=0.55$ i $x=0.57$.	

Możemy oczywiście wykreślić tak uzyskane rozwiązanie

$\text{Plot}[\text{Evaluate}[y[x]/. \%], \{x, 0, 1\}]$	Instrukcja
	Wynik
M. 4.2. Wykres funkcji $y(x)$, będącej rozwiązaniem równania różniczkowego (4.1.1) w zakresie od $x=0$ do $x=1$. Znak <code>%</code> oznacza użyj poprzedniego wyrażenie. Poprzednim wyrażeniem było rozwiązanie <code>y->InterpolatingFunction[]</code>. Instrukcja <code>/.</code> Oznacza zastąp to co po lewej tym co po prawej. W naszym przypadku $y[x]$ ma zostać zastąpione funkcją interpolującą. Następnie funkcja <code>Plot</code> wykreśla wykres funkcji interpolującej w przedziale od $x=0$ do $x=1$	