TEMAT

XV

ZASADA D'ALEMBERTA

1. Efekt żyroskopowy ♦/♣/♦

Ten temat ma dwóch bohaterów. Jednym z nich jest bryła sztywna. Musimy tu dopowiedzieć kilka istotnych spraw, a przy okazji podam interpretację geometryczną tensora symetrycznego. Drugi bohater to tytułowa zasada d'Alemeberta, która otworzy nam drogę do innego, pojemniejszego ujęcia mechaniki klasycznej. Zaczynamy od bryły sztywnej. W temacie (TXIII) zajmowałem się zagadnieniem obliczanie momentu bezwładności dla bryły sztywnej. Przy okazji omówiłem też kilka zagadnień związanych z jej dynamiką. Tu chcę wrócić do tego ważnego tematu. Przed nami spotkanie z ciekawym i nieintuicyjnym efektem żyroskopowym.

Wprowadzenie pojęcia momentu bezwładności zacząłem od analizy ruchu obręczy (§TXIII 1), od tego przykładu zacznę również obecną analizę. Powiedzmy, że mamy cienką obręcz o promieniu r, obracającą się wokół osi symetrii. W pewnym momencie, do jednego punktu obręczy, przykładamy, na krótko, siłę **F**, prostopadłą do płaszczyzny obręczy. Siła ta powoduje powstanie niezrównoważonego momentu sił **M** (rys. 1.1), prostopadłego do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory **r** i **F**. W efekcie moment pędu **K** zmieni się zgodnie ze wzorem



Działanie siły \mathbf{F} na obracającą się obręcz daje zaskakujący efekt. Obręcz obróci się względem osi prostopadłej do osi jakiej byśmy się mogli spodziewać. Zgodnie z równaniem (1.1) pod wpływem momentu sił \mathbf{M} moment pędu obręczy ulegnie zmianie zgodnie z kierunkiem działania tegoż momentu sił. W efekcie przechyleniu ulegnie oś symetrii obręczy i obręcz obróci się względem osi

prostopadłej do kierunku wektora momentu sił, a nie względem osi prostopadłej do kierunku ramienia działania siły **F**, jak można by oczekiwać.

Teraz możemy zrozumieć ruch dziecięcego bąka (rys. 1.2 i 1.3).



Rysunek 1.2. Rozkręcając bąka nie jesteśmy w stanie ustawić jego osi idealnie pionowo. Skutkiem tego środek masy baka nie leży na linii pionu przechodzącej przez punkt podparcia i siła grawitacji generuje niezerowy moment sił **M**. Oś obrotu baka odchyla się zgodnie z kierunkiem działania momentu sił (efekt żyroskopowy), co powoduje, że obraca sie ona wokół osi obrotu idealnie puszczonego w ruch idealnego baka. Bak idealny to taki, który jest idealnie symetryczny.

Siła "przewracająca" bąk działa stale, w efekcie oś obrotu bąka zaczyna krążyć wokół osi idealnie puszczonego bąka. Takich ruch osi nazywamy precesją.

Spróbujmy oszacować częstość precesji przedstawionego wyżej bąka. Moment sił wynosi

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g}$$
 1.2

Tutaj m jest masą bąka, a wektor **r** wskazuje środek masy bąka. Wartość tego momentu sił wyraża się wzorem

$$M = mgr\sin(\alpha)$$
 1.3

Częstość precesji, dla małych $\Delta \varphi$, wyraża się wzorem (rys. 1.3)

$$\omega \approx \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t K \sin(\alpha)}$$
 1.4

Gdzie ΔK jest wartością przyrostu wektora momentu pędu w czasie Δt . Jednocześnie wiemy, że d**K**/d*t*=**M**, stąd wzór (1.4), po przejściu do nieskończenie małych przyrostów czasu i z wykorzystaniem wzoru (1.3) możemy zapisać w postaci

$$\omega = \frac{m g r \sin(\alpha)}{K \sin(\alpha)} = \frac{m g r}{K}$$
1.5

Z powyższego wzoru wynika ciekawy wniosek – prędkość precesji jest niezależna od kąta odchylenia α .



Rysunek 1.3. Efekt żyroskopowy powoduje obrót osi obrotu i wektora momentu pędu bąka dziecięcego, tak że wektor momentu pędu porusza się po powierzchni stożka o kącie *α*.

Pięknie nam to wyszło, ale masz prawo do wątpliwości. Powiedzmy, że prędkość kątowa bąka i obręczy spada do zera. Jakie jest jego zachowanie? Bąk upada zgodnie z kierunkiem działania siły ciążenia, a obręcz, pod wpływem impulsu siły **F**, obraca się wokół osi, prostopadłej do rysunku (1.1). Niech teraz i bąk i obręcz kręcą się z prędkością kątową jednego obrotu na godzinę. Czy zobaczymy precesję osi obrotu bąka? Intuicja podpowiada, że takie kręcenie to prawie jak nie kręcenie więc zachowanie musi być bardzo podobne do tego jakie zaobserwujemy przy braku obrotu. Wniosek z tego jest taki, że precesja, aby była widoczna, potrzebuje prędkości kątowej ciała o odpowiednio dużej wartości. Spróbujmy sprawę zbadać dokładniej.

Spójrzmy na urządzenie, pokazane na rysunku (1.4 i 1.5), które jest prostym przykładem żyroskopu. Żyroskop to urządzenie wykorzystujące efekt żyroskopowy, czyli ten efekt, który powoduje precesję osi obrotu bąka. Czyli efektem żyroskopowym nazywamy zjawisko prowadzące do precesji osi obrotu. Niech \mathbf{K}_{T} oznacza wektor momentu pędu zrównoważonego żyroskopu. Wtedy wektor \mathbf{K}_{T} jest związany wyłącznie z obrotem tarczy. Załóżmy, że układ żyroskopu nie jest zrównoważony (rys. 1.6), na przykład na skutek dołożenia lub odjęcia ciężarków pokazanych na rysunku (1.5). Wtedy pojawi się wektor momentu sił, który będzie prostopadły do wektora momentu pędu \mathbf{K}_{T} . Taki prostopadły wektor momentu sił nie zmienia wartości momentu pędu tylko powoduje zmianę jego kierunku. Podobnie jak prostopadła do prędkości siła powoduje zmianę kierunku wektora prędkości a nie zmianę jego wartości. Skutkiem tego momentu sił będzie obrót względem pionowej osi (osi *z*) żyroskopu (efekt żyroskopowy). Jednakże ten dodatkowy obrót generuje dodatkowy moment pędu \mathbf{K}_{P} .



Rysunek 1.4. Schemat budowy prostego modelu jednoosiowego żyroskopu. Na jednym końcu żyroskopu jest wirująca tarcza o możliwie dużym momencie bezwładności. Z drugiej strony podczepiamy ciężarki. Zakładamy, że żyroskop może obracać się wokół osi *z* i *x*. Powiedzmy, że w chwili początkowej ciężarki równoważą ciężar tarczy. W pewnym momencie dokładamy kolejne ciężarki, tak, że przy braku ruchu wirowego tarczy ramię osi żyroskopu powinna obrócić się wokół osi *x*, przez co ciężarki przesuną się w dół, a tarcza w górę, lub na odwrót (przy braku ruchu wirowego mamy zwykłą wagę). Jeżeli tarcza wiruje to wystąpi efekt żyroskopowy i żyroskop zacznie poruszać się zgodnie z kierunkiem działania momentu sił, czyli wokół osi *z* (mamy precesję osi żyroskopu). Rysunek (1.5) pokazuje jak ten ruch będzie wyglądał przy różnych kierunkach obrotu tarczy i różnych kierunkach momentów sił.



Rysunek 1.5. Różne kombinacje sił i momentów sił działających na żyroskop; a i c) siła ciężkości przeważa po stronie haczyka (pomarańczowa strzałka to siła wypadkowa działająca na jeden lub drugi koniec żyroskopu); b i d) siła ciężkości przeważa po stronie wirującej tarczy. Różowe, ciągłe strzałki pokazuję wektor momentu pędu tarczy. Zielone to wektory momentu siły. Czarne łukowe strzałki pokazują kierunek obrotu żyroskopu. Różowe, przerywane strzałki pokazują zmianę wektora momentu pędu pod wpływem przyłożonego momentu sił.

Ponieważ indukowany moment sił zmienia tylko kierunek wektora momentu pędu jego całkowita wartość nie może ulec zmianie, co oznacza, że

$$\left|\mathbf{K}_{\mathbf{T}}\right| = \left|\mathbf{K} + \mathbf{K}_{\mathbf{P}}\right|$$
 1.6

Mamy nadto

$$\mathbf{K}_{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{P}} \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{P}}$$
 1.7

A z rysunku (1.6) dodatkowo

$$\tan(\alpha) = \frac{L_P}{L_T}$$
 1.8

Jeżeli moment pędu \mathbf{K}_T jest duży, to kąt α jest mały. Gdy ruch tarczy zwalnia, wartość momentu pędu K_T maleje i rośnie kąt α , słowem żyroskop (lub przykład bąk) przewraca się.



Rysunek 1.6. Obrót żyroskopu na skutek działania efektu żyroskopowego związany jest z momentem pędu o wektorze **K**_p. Wektor momentu siły grawitacji skierowany jest prostopadle do wektora momentu pędu **K**_T zrównoważonego żyroskopu. Dlatego zmienia kierunek tego momentu pędu a nie wartość. W efekcie suma wektora momentu pędu **K** niezrównoważonego żyroskopu i momentu związanego z niezrównoważoną siłą grawitacji **K**_p musi dać wektor o długości wektora **K**_T.

1.1. Żyroskop

Urządzenia mechaniczne, które wykorzystują efekt żyroskopowy nazywamy żyroskopami. Za prosty żyroskop może zostać uznany dziecięcy bączek. Rysunek (1.1.1) pokazuje modelowy żyroskop. Szybko obracająca się tarcza o możliwe dużym momencie bezwładności zawieszona jest tak aby mogła się swobodnie obracać we wszystkich osiach. Pomyślmy teraz, że umieszczamy żyroskop na pokładzie samolotu. Zasada zachowania momentu pędu podpowiada nam, że manewrujący samolot nie powinien wpłynąć na kierunek osi obrotu żyroskopu (rys. 1.1.2). Niestety nawet niewielkie tarcie powoduje, że pojawiają się niewielkie momenty sił, które zmieniają, zgodnie z opisanym efektem żyroskopowym, orientację osi obrotu żyroskopu. Dlatego położenie osi żyroskopu co jakiś czas musi być korygowane.





Rysunek 1.1.1. Z lewej - laboratoryjny model żyroskopu. Obracający się dysk może się swobodnie obracać w każdej z trzech osi; z prawej - żyroskop zaprojektowany przez Foucaulta i zbudowany przez Dumoulin-Fromenta w 1852r. Obecnie w muzeum sztuki i rzemiosła w Paryżu: źródło Wikipedia

Opisany tu efekt jest podstawą konstrukcji tzw. sztucznego horyzontu – urządzenia wskazującego pilotowi (lub automatycznemu pilotowi) położenie płaszczyzny prostopadłej do grawitacyjnego pionu (rys. 1.1.3).



Rysunek1.1.2.Napokładziesamolotuośobrotuidealnegożyroskopunieobracasię.



Rysunek 1.1.3. Panel sztucznego horyzontu. Niezależnie od orientacji samolotu linia graniczna między obszarem brązowym i niebieskim jest prostopadła do kierunku pionu (kierunku prostopadłego do pionu): źródło NASA/ Wikipedia

Przed startem samolotu żyroskop sztucznego horyzontu orientuje się wzdłuż linii pionu. Niestety, drobne siły tarcia, generują drobne momenty sił, które powodują zmianę orientacji sztucznego horyzontu. Można jednak do urządzenia podczepić niewielki ciężarek (rys. 1.1.4).



Rysunek 1.1.4. Przy obciążeniu żyroskopu ciężarkiem o masie *m* będzie miał on tendencję do samokorekcji orientacji osi obrotu w stosunku do ziemskiego pionu

Ciężarek ten ciągnie żyroskop do pierwotnego położenia. W czasie manewrów samolot zmienia swoją orientację w przestrzeni. W układzie samolotu odczuwane są siły pozorne (np. siła odśrodkowa), które dodają się do siły grawitacji, zmieniając lokalnie oś pionu (linię wzdłuż, której ciężarek naciąga nić). Reakcja żyroskopu na te zmiany jest mała, ze względu na stabilizujący wpływ dużego momentu pędu urządzenia; dysk typowego żyroskopu kręci się z prędkością rzędu dwustu obrotów na sekundę. Czas wykonania manewru, szczególnie gwałtownego, jest dużo mniejszy od czasu lotu samolotu w pozycji poziomej. Daje to czas ciężarkowi na skorygowanie drobnych odchyleń ustawienie żyroskopu względem ziemskiego pionu. Ponadto zmiany kierunku działania sił wypadkowych są takie, że średnia również wypada blisko linii ziemskiego pionu. Te czynniki korygujące wystarczają do automatycznej korekcji położenia żyroskopu, tak by sztuczny horyzont z wystarczającą dokładnością pokazywał

linię horyzontu. Oczywiście w dostępnych konstrukcjach układ korekcji położenia żyroskopu jest bardziej złożony i sprytny niż ten opisany przeze mnie¹.

1.2. Żyrokompas 🔺

Trudniej jest zrozumieć działanie żyrokompasu, czyli urządzenia, które swoją osią obrotu ustawia się równolegle do osi obrotu Ziemi. Zacznę od prostego przykładu pokazanego na rysunku (1.2.1). Rysunek (1.2.1a) pokazuje żyroskop widziany z bieguna północnego w pewnej chwili początkowej. Oś żyroskopu jest ustawiona równolegle do kierunku wschód- zachód. Zakładamy, że mocowanie żyroskopu pozwala na jego swobodny obrót we wszystkich osiach, czyli że nie z obrotem Ziemi. Działa oczywiście działają nań żadne siły związane dośrodkowa siła grawitacji. Jednak dośrodkowa siła grawitacji nie wywiera momentów na żyroskop. Po 6h godzinach żyroskop wraz Ziemią obróci się o kąt prosty. Ale na skutek działania zasady zachowania momentu pędu, wobec braku niezerowych momentów sił, oś żyroskopu nie powinna zmienić swojej orientacji względem układu inercjalnego. Rysunek (1.2.1b) pokazuje orientację osi żyroskopu dla obserwatora stojącego przy nim na równiku, w chwili początkowej. Rysunek (1.2.1c) pokazuje tą samą sytuację sześć godzin później. Z rysunku (1.2.1c) widać, że oś żyroskopu jest prostopadła do powierzchni Ziemi, co oznacza, że obserwator na równiku widzi ją jako skierowaną prostopadle do podłoża. Oznacza to, że dla obserwatora na równiku oś żyroskopu, po sześciu godzinach obróciła się o kat prosty. Aby opisać ten obrót we własnym układzie współrzędnych obserwator na równiku musi odwołać się to sił pozornych. Ten obrót obserwował Foucault przy użyciu swojego żyroskopu (rys. 1.1.1). Mikroskop pozwalał na dokładną obserwację niewielkiego odchylenia osi żyroskopu, co pozwalało wykazać istnienie tego efektu w czasie kilkunastu minut. Gdy umieścimy żyroskop na biegunie północnym (lub południowym) będziemy obserwować jego obrót wokół osi prostopadłej do jego osi (podobnie jak to było z obrotem płaszczyzny wahań wahadła Foucaulta (rys. TVII 5.1). Dla obserwatora na biegunie, po sześciu godzinach oś żyroskopu obróci się o kat prosty w poziomie. Co się stanie z żyroskopem umieszczonym między biegunem a równikiem? Jego ruch będzie złożeniem obrotu w płaszczyźnie poziomej (charakterystycznym dla położenia na biegunach) i w płaszczyźnie pionowej (charakterystycznej dla położenia na równiku).

¹ Dokładniejszy opis zasady konstrukcji żyroskopu mechanicznego możesz znaleźć w książce R. Feynmann, M. Gottlieb, R. Leighton, *Feynmann radzi*, PWN, Warszawa, 2007



Rysunek 1.2.1. a) obserwacja żyroskopu umiejscowionego na równiku z północnego bieguna Ziemi. W chwili początkowej oś żyroskopu ustawiona jest w kierunku wschód-zachód. Po sześciu godzinach żyroskop zachowuje swoją orientację; b) tak obserwator stojący na równiku widzi oś żyroskopu w chwili początkowej; c) a tak widzi ją po sześciu godzinach. Jak widać oś żyroskopu zachowała swoją orientację w przestrzeni, ale nie względem powierzchni Ziemi. Obaj obserwatorzy i ten na biegunie i ten na równiku stwierdzają, że oś stała się prostopadła do powierzchni Ziemi.

Aby otrzymać z żyroskopu żyrokompas musimy złamać symetrię urządzenia, przez dołożenie obciążenia (rys. 1.2.2). W efekcie, gdy oś, tak zbudowanego żyrokompasu stojacego na równiku, zaczyna obracać się do pionu względem powierzchni Ziemi (rys. 1.2.1), jeden ciężarek unosi się a drugi opada. Na żyrokompas zaczyna działać niezerowy moment sił, pod wpływem, którego zacznie on nieznacznie oscylować. Z drugiej strony możemy na niego popatrzeć jak na bak z rysunku (1.2). Dodatkowy niezerowy moment sił spowoduje obrót osi żyroskopu. Obserwator na równiku będzie widział dwa ruchy, lekkie oscylacje osi żyroskopu oraz jej obrót związany z precesją. Zauważ, że obciążenie żyroskopu na rysunku (1.2.2) jest umiejscowione pod krawędzią dysku, podczas gdy na rysunku (1.1.4) znajduje się ono pod płaszczyzną dysku (na linii osi obrotu). To przemieszczenie obciążenia zmienia działanie żyroskopu. Obserwator na biegunie będzie widział oś żyroskopu tak jak na rysunku (1.2.3). W wyniku obrotu na skutek precesji oś żyroskopu ustawi się, w pewnej chwili, w linii równoległej do osi obrotu Ziemi. Wtedy momenty sił wzajemnie się zrównoważa nie powodujac dalszego obrotu osi żyroskopu.



Rysunek 1.2.2. Do żyroskopu dokładamy dwa ciężarki, tak jak to pokazuje rysunek. W ten sposób łamiemy symetrię jego konstrukcji i otrzymujemy nowy przyrząd nazywany żyrokompasem; b) Przy obrocie Ziemi, umieszczony na równiku obciążony żyrokompas, o osi w linii wschód-zachód, zmienia orientację osi obrotu z równoległej do powierzchni Ziemi na prostopadłą (rys. 1.2.1). Przy obrocie osi obrotu jedne z ciężarków wędruje do góry a drugi do dołu, przez co pojawia się niezerowy moment sił, który prowadzi do precesji żyroskopu, tak jak to pokazuje niebieska kołowa strzałka. Ten dodatkowy niezerowy moment sił spowoduje, że żyroskop nie obrócić się do poziomu.



Rysunek 1.2.3. Widok na żyrokompas na równiku z bieguna północnego. Obrót osi żyroskopu (środkowy rysunek (1.2.2b)) powoduje, że żyroskop orientuje się zawsze wzdłuż kierunku promienia Ziemi.

Rysunek (1.2.4) na jeszcze jeden sposób ilustruje różnicę w działaniu żyrokompasu gdy jego oś ustawiona jest w kierunku wschód-zachód i północpołudnie. Wynika z tego, że oś żyrokompasu będzie się ustawiała na linii północpołudnie, a następnie będzie się tego kierunku trzymała. Tak zbudowany żyroskop będzie się zatem ustawiał osią obrotu na linii północ-południe.

Od strony technicznej żyrokompas jest bardziej złożonym instrumentem niż wynikałoby to z prostego schematu pokazanego na rysunku (1.2.2a). Musi być zapatrzony w system uzupełniania energii dysku, system tłumienia drgań, montaż musi dawać swobodę obrotu żyroskopu, trzeba go zaopatrzyć w tarczę pozwalającą odczytać kierunki (rys. 1.2.5). W efekcie żyrokompas jest złożonym urządzeniem mechaniki precyzyjnej. Dziś zastosowanie żyroskopów (żyrokompas traktujemy jako urządzenie wykorzystujące żyroskop) wyszły daleko poza żeglugę, lotnictwo i kosmonautykę, czy systemy wojskowe.



Rysunek 1.2.4. a) Oś żyrokompasu leży w różowej płaszczyźnie. Na rysunku ma orientację wschód-zachód. W chwili początkowej układ ciężarków jest symetryczny względem promienia ziemskiego (linia przerywana). W jakiś czas potem na skutek obrotu Ziemi, wirujący dysk będzie starał się utrzymać orientację w przestrzeni. Spowoduje to odchylenie różowej płaszczyzny w stosunku do powierzchni Ziemi (rys. 1.2.1). Ciężarki nie będą działać symetrycznie i wytworzy się moment sił, który na skutek efektu żyroskopowego, będzie obracał oś obrotu żyrokompasu (rys. 1.2.2-3); b) przy pionowej orientacji osi (równoległej do osi ziemskiej) złamanie symetrii położenia ciężarków względem promienia ziemskiego powoduje oscylacje osi żyroskopu góra-dół. Związane jest to z tym, że obrócona oś żyroskopu o kąt prosty, powoduje obrócenia osi precesji o kąt prosty. Teraz jednak precesja nie może powodować obrotu żyroskopu, bo oznacza to dodatkowe odchylenie ciężarków od pionu. Siła grawitacji przywraca je do położenia zgodnego z pionem.

Żyroskopy stosowane są smartfonach i tabletach, sterowanych radiem modelach samolotów i śmigłowców, w fotografii w obiektywach z tzw. stabilizacją obrazu. Nie wszystkie działają mechanicznie – mamy na przykład żyroskopy optyczne. Tak szerokie zastosowanie żyroskopów jest możliwe dzięki ich miniaturyzacji oraz masowej, taniej (taniej na jednostkę) produkcji. Miniaturowe żyroskopy mechaniczne (rys. 1.2.6) produkuje się metodami litografii, podobnie jak mikroprocesory². Liczba produkowanych żyroskopów sięga obecnie miliarda sztuk rocznie (2018r). Podstawy konstrukcji żyroskopu zostały opracowane przez francuskiego uczonego Jeana Foucaulta. Był to zwieńczenie jego prac nad ruchem ciał w układach obracających się (nieinercjalnych; wahadło Foucaulta (§TVII 5)) oraz nad obrotem bryły sztywnej.

² Technologię tę określa się często skrótem MEMS (micro-electro-mechanical systems).



Rysunek 1.2.5. Widok tarczy morskiego żyrokompasu kursowego; źródło Wikipedia, autor KenWalker, licencja: Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported

Naukowa droga Leona Foucaulta³ jest godna krótkiego przytoczenia. Urodził się w 1819 roku, w dobrze sytuowanej rodzinie. Ojciec był cenionym wydawcą, zmarł kiedy Leon miał dziesięć lat. Foucault nigdy się nie ożenił, całe życie spędził z matką w paryskim mieszkaniu. Był chłopcem watłej budowy, zezującym, słabego zdrowia, z pozoru niezbyt bystrym. W szkole spisywał się słabo, pomagały mu korepetycje. W wieku trzynastu lat daje o sobie znać jego ogromny talent do majsterkowania. Matka Foucaulta zdecydowała, że jego manualne zdolności predestynują go do zawodu chirurga. Idąc za jej głosem zapisał się w 1839 roku do szkoły medycznej w Paryżu. Okazało się jednak, że nie daje sobie rady z widokiem krwi i cierpienia pacjentów. Czasy studiów dały dwie cenne przyjaźnie Alferda Donnego (prowadzącego zajęcia mu z mikroskopii) i Armanda Hippolyte Fizeau (późniejszego znanego uczonego). Obaj wspierali Foucaulta w jego późniejszej działalności. Foucault i Fizeau wspólnie ulepszyli proces dagerotypii, co było pierwszym naukowym osiągnięciem młodych uczonych. W następnych latach Foucault współpracował z profesorem Donnem pomagając mu w badaniach mikroskopowych. W tym czasie usprawnił oświetlenie preparatów mikroskopowych. Po odejściu na emeryturę Donne przekazuje Foucaultowi redakcję prestiżowego dziennika naukowego "Journal de Debats". Mimo braku formalnego wykształcenia młody redaktor odnosi sukces. Prowadzenie prestiżowego periodyku oznacza kontakty z najlepszymi uczonymi Francji. Niestety brak wykształcenia utrudnia te kontakty od strony merytorycznej jak i czysto ludzkiej. Uczeni nie postrzegają Foucaulta jako "swojego"; a sprawę dodatkowo pogarsza brak istotnych osiągnieć młodego redaktora. Takie osiągnięcia przyjdą na początku lat 50-tych. W styczniu 1851r. W piwnicy swojego domu Foucault uruchomił pierwsze wahadło – zwane dziś wahadłem Foucaulta. Był to znamienity dowód na obrót Ziemi.

³ Więcej na ten temat znajdziecie w książce A. D. Aczel, Wahadło. Leon Foucault i tryumf nauki, Prószyński i S-ka, Warszawa 2003



Rysunek 1.2.6. Schemat żyroskopu MEMS. (ze względu na problem przetłumaczenia niektórych zwrotów opis podaję w języku angielskim); (1) outer frame, (2) inner frame, (3) driving comb electrodes, (4) parallel plate sense electrode, (5) double folded beams, (6) anchors, (7) linear beams and (8) self-rotation ring; źródło Wikipedia; autor Minh Ngoc Nguyen et al. Licencja Creative Commons Attribution 4.0 International

Warto zaznaczyć, że w możliwość przeprowadzenia takiego eksperymentu watpili najwięksi ówcześni uczeni. Foucault poprosił dyrektora Obserwatorium Paryskiego François Arago o pomoc w upowszechnieniu odkrycia. Ten oddał mu do dyspozycji największą (i najwyższą) salę obserwatorium. Jak wiemy z dyskusji w (§TVII 5) sercem konstrukcji wahadła był specjalny zaczep linii wahadła, którego mechanizm pozwalał mu na praktycznie swobodny ruch w każdej płaszczyźnie. O pomoc w wykonaniu możliwie idealnie symetrycznego wahadła (o długości 11m) Foucault poprosił najlepszego francuskiego ślusarza Paula Gustave'a Fromenta. Wahadło puszczano w ruch przez przepalenie wełnianej nici, tak by ręka ludzka bezwiednie nie nadała mu dodatkowego ruchu. Pokaz dla środowiska naukowego odbył się trzeciego lutego 1851 i zakończył się pełnym sukcesem. Człowiek spoza środowiska akademickiego przeprowadził eksperyment, który szybko został zaliczony do najpiękniejszych eksperymentów w fizyce. Foucault wyprowadził też wzór na okres wahadła w zależności od szerokości geograficznej (§TVII 5). Wyprowadzenie Foucaulta było na poły heurystyczne ale wynik był poprawny. Wcześniej wybitni fizycy i matematycy nie dopatrzyli się tego efektu w swoich równaniach ruchu, a część z nich wnioskowała, że efektu zaobserwowanego przez Foucaulta być nie może. Słowem klęska teoretyków profesjonalistów.

Gdy, po sukcesie wahadła, teoretycy szukali jego matematycznego opisu, ciągle podejrzliwie odnosząc się do osoby Foucaulta, osiągnięcia tego ostatniego docenił Napoleon III, który sam żywo interesował się nauką. Polecił on montaż wahadła w jednej z najważniejszych budowli Paryża - Panteonie. Długość nowego wahadła wynosiła 68m (funkcjonuje ono tam do dziś, oczywiście przez

lata przechodziło liczne modernizacje; zobacz rysunek (TVII 5.1). Publiczna demonstracja wahadła uczyniła Foucaulta bohaterem Paryżan.



Rysunek 1.2.7. Jean Bernard Léon Foucault (18.09.1819 - 11.02.1868) - fizyk francuski. Największą sławę mu odkrycie efektu przyniosło obrotu płaszczyzny wahań swobodnego wahadła na skutek obrotu Ziemi tzw. wahadło Foucaulta (§TVII 5) oraz odkrycie efektu żyroskopowego oraz prace nad Foucault żyroskopami. Ponadto odkrył prądy wirowe (tzw. prądy Foucaulta). Dokonał jednego z pierwszych pomiarów prędkości światła w powietrzu i w wodzie.

Jeszcze tego samego roku 1851 Foucault zaczyna pracę nad nowym urządzeniem wspierającym jego dowód na ruch obrotowy Ziemi. To urządzenie to żyroskop. Sama nazwa wywodzi się z języka greckiego – jest zlepkiem dwóch wyrazów widzieć i obrót (gyro –to obrót, skop – to widzieć). Raz ustawiony żyroskop zachowywał swoją orientację w przestrzeni. Gdy Ziemia obracała się orientacja osi żyroskopu względem obserwatora na Ziemi zmieniała się. Żyroskop Foucaulta przedstawia rysunek (1.1.1). Dla nas żyroskop to przede wszystkim urządzenie nawigacyjne, ale na jego zastosowanie w nawigacji trzeba było czekać ponad 40 lat.

W ostatnim okresie życia Foucault doczekał się uznania ze strony Francuskiej Akademii Nauk. Po przewrocie, Napoleon III organizuje dla niego posadę fizyka przy Cesarskim Obserwatorium Astronomicznym i obsypuje zaszczytami. Foucault dalej prowadzi owocne badania naukowe i techniczne. Konstruuje między innymi napęd pozwalając teleskopom śledzić ruch gwiazd, odkrywa prądy wirowe. Jego życie kończy się w 1868 roku.

W relacjach między Foucaultem a najlepszymi francuskimi fizykami i matematykami mamy dwie składowe. Z jednej strony jest to ludzka zawiść i małostkowość elitarnego klubu, do którego niegodni wstępu nie mają. Ta część nas tu nie interesuje, nie dlatego, że interesująca nie jest, ale jest to w końcu wykład z fizyki a nie psychologii czy socjologii. Druga składowa dotyczy pytania: Dlaczego najlepsi uczeni nie dostrzegli efektów związanych z wahadłem Foucaulta czy żyroskopem? Czy ich równania tego nie zawierały? Otóż same równania to nie wszystko. Jak już pisałem opis matematyczny świata sprowadza się do niesamowitej kompresji informacji (§TI 1). Równania dynamiki zawierające opis ruchu takiego układu jak żyroskop mieszczą się na kawałku strony. Trzeba je jednak dobrze napisać, to znaczy oprzeć się na dobrym modelu, który nie uwzględnia zbyt dużo, ale też niczego istotnego nie pomija ((§TI 1). Potem trzeba te równania rozwiązać, co jest zwykle bardzo trudne i wymaga wiele pracy (chyba, że mamy komputer, który jeżeli tylko dysponuje odpowiednim oprogramowaniem, gro tej pracy może wykonać za nas). Złożony układ równań sam w sobie pozwala na uzyskanie dużej liczby rozwiązań, z których większość nie daje użytecznych informacji. Równania zatem nie tylko trzeba umieć napisać czy rozwiązać, ale jeszcze rozwiązywać je we właściwą stronę. Do tego wszystkiego potrzebna jest intuicja. Foucault pokazał, że fizyk słabo operujący matematyka, ale mający ogromną intuicję potrafi osiągnąć więcej niż profesjonalni matematycy i fizycy. Mniej więcej w tym samym czasie udowodnił to również Faraday. Oczywiście takie sukcesy samouka ze słabym przygotowaniem matematycznym nie są możliwe w każdym obszarze nauki. Ale przecież wystarczy jedno wielkie osiągnięcie aby wpisać się na karty historii. Świadczy to również o tym, jak trudna jest teoria mechaniki na obracającej się Ziemi. Mieliśmy już tego próbkę, w temacie (§TVII 2.3-5 i §TVII 4.2), w części poświeconej sile Coriolisa.

Kiedy żyroskop stał się istotnym przyrządem nawigacyjnym pojawiła się pilna potrzeba opracowania jego teorii, która jest bezcenna gdy chcemy projektować użyteczne urządzenia o wyśrubowanych parametrach pracy. W latach 1897-1910 Felix Klein i jego znamienity uczeń Arnold Sommerfeld opracowali czterotomowe dzieło poświęcone żyroskopom. Dwa pierwsze tomy omawiają matematyczną teorię żyroskopu, dwa kolejne poświęcone są jego zastosowaniom.

Trzeba tu jeszcze wspomnieć o Gustawie Coriolisie (rys. TVII 5.2.2), który wprowadził do fizyki terminy "praca" i "energia kinetyczne". Wiemy, że opublikował on w 1835 roku pierwszą teorię siły pozornej nazywanej dziś "siłą Coriolisa" ((§TVII 2.3). Dziś siłę Coriolisa często zaprzęga się do objaśnienia działania wahadła Foucaulta. Wszystko wskazuje jednak, że ani Foucault ani ówcześni członkowie Akademii nie wiedzieli o pracach Coriolisa, który wszak opracowywał podręczniki dla inżynierów, a nie fizyków. Zaprzęgnięcie siły Coriolisa do opisania wahadła Foucaulta przyszło później

1.3. Precesja osi Ziemi 🔶

Oś obrotu Ziemi jest nachylona względem ekliptyki (płaszczyzny zawierającej ziemską orbitę) pod kątem 23.5° (rys. 1.3.1). Ziemia nie jest kulą a raczej elipsoidą z osią symetrii zorientowaną wzdłuż osi obrotu. Kierunek do Słońca nie jest kierunkiem osi symetrii tej elipsoidy. W efekcie siła grawitacji próbuje obrócić oś obrotu Ziemi tak aby była ona ustawiona prostopadle do ekliptyki. Jednak w wyniku działania efektu żyroskopowego oś Ziemi zatacza okręgi; podobnie jak oś obrotu bąka. Ruch ten nazywamy precesją Ziemi. Pełny obieg osi trwa około 26000 lat. Jednym z efektów precesji osi Ziemi jest pozorny ruch gwiazd (rys. 1.3.2). Za 12000 lat w pobliżu bieguna północnego znajdzie się Wega (dziś jest tam Gwiazda Polarna). Precesja osi Ziemi została opisana przez

greckiego (hellenistycznego) uczonego Hipparcha ok. 130 roku p.n.e. Istnieją hipotezy, że znana była wcześniej astronomom Mezopotamii, ale nie są one właściwie udokumentowane. W układzie słonecznym precesja jest zjawiskiem powszechnym; mówimy o precesji planetarnej.



Rysunek 1.3.1. Oś obrotu Ziemi jest nachylona względem płaszczyzny ekliptyki pod kątem 23.5°. Oś Ziemi porusza się po małych kółkach zaznaczonych na obu jej końcach. Ruch ten nazywamy precesją Ziemi. Źródło Wikipedia, autor: NASA, licencja Creative Commons Attribution 3.0 Unported



Rysunek 1.3.2. Ruch osi Ziemi tle gwiazd okolicy na w północnego bieguna sferv niebieskiej. Żółte cyfry wskazują według na rok naszego kalendarza. Dziś obrotu 0Ś wskazuje na punkt bliski Gwiazdy Polarnej. Za 12000 lat znajdzie się w pobliżu Wegi (duże białe kółko pod liczbą 14000); źródło Wikipedia, autor Tau'olunga, licencia Creative Commons Attribution-Share Alike 2.5 Generic.

2. Równania Eulera i efekty geometryczne

Temat (TVII) poświęcony był dynamice punktu materialnego w nieinercjalnych układach odniesienia - NUO. W tym rozdziale zrobimy to samo dla bryły sztywnej.

Powiedzmy, że mamy obracającą się bryłę sztywną (rys. 2.1). Zaczepmy układ współrzędnych (x',y',z') w wybranym punkcie. Możemy określić dynamikę tego ciała rozwiązując równanie

$$\mathbf{M}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{K}'}{\mathrm{d}t}$$
 2.1

Kłopot polega na tym, że dostaniemy bardzo złożone wyrażenie. Dla bryły o osiach swobodnych wektor prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ porusza się względem stałego w przestrzeni wektora momentu pędu **K**. Ponieważ tensor momentu bezwładności zależy od orientacji wektora prędkości kątowej układu (czyli od orientacji osi obrotu), zależności robią się nieprzyjemnie skomplikowane. Możemy jednak zdefiniować nowy układ współrzędnych (*x*,*y*,*z*) wyznaczony przez osie główne bryły sztywnej. Teraz łatwo jest zapisać wzór na jej składowe momentu pędu.

$$K_r = I_{rr}\omega_r; K_v = I_{vv}\omega_v; K_z = I_{zz}\omega_z$$

Rvsunek 2.1. W wielu zagadnieniach ruch bryły sztywnej łatwiej jest analizować w układzie związanym z osiami głównymi bryły. Osie te jednak obracają się wraz z bryła, stanowią zatem nieinercjalny układ -NUO.

2.2

Niestety nowy układ współrzędnych nie jest układem inercjalnym i musimy do równań (2.2) dodać przyczynki wynikające z jego nieinercjalności. Równanie (2.1) jest analogiem, dla bryły sztywnej, drugiego prawa Newtona. Przechodząc do układów nieinercjalnych dodawaliśmy odpowiednie siły pozorne (§TVII 1). Możemy spodziewać się, że w przypadku zależności (2.1) trzeba będzie dodać pozorne momenty sił. Postąpimy analogicznie jak przy wyprowadzeniu wzoru na



siłę Coriolisa (§TVII 3.5). Przy przejściu z układu inercjalnego (primowanego) do układu obracającego się (nieprimowanego) z prędkością daną wektorem $\boldsymbol{\omega}$, nasze równanie ruchu transformuje zgodnie ze wzorem (TVII 3.5.8), tyle że teraz wektor **R** zamieniamy na wektor **K**.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{K}$$
 2.3

Zatem w układzie nieinercjalnym mamy równanie (po wstawieniu (2.3) do (2.1))

$$\mathbf{M} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{K}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{\omega} \times \mathbf{K}$$
 2.4

Wektor momentu sił **M** nie zależy od wyboru układu współrzędnych, ale jego współrzędne od tego wyboru zależą. W równaniu (2.4) zapisujemy te współrzędne w układzie nieprimowanym. Dalej będziemy przyjmować, że wektor momentu sił liczony jest względem początku układu nieprimowanego. Korzystając ze związków (2.4) równanie te możemy rozpisać we współrzędnych

$$M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z$$
2.5a

$$M_y = I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x$$
 2.5b

$$M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y$$
 2.5c

Powyższe równania noszą nazwę równań Eulera. Z ich pomocą rozwiążę przykładowe zadania

Zadanie 2.1.

Przeanalizować ruch bryły sztywnej w układzie związanym z jej osiami głównymi, przy założeniu, że $I_{xx}=I_{yy}$, oraz przy braku zewnętrznych momentów sił

W takim przypadku trzecie równanie Eulera daje warunek

$$0 = I_{zz}\dot{\omega}_z \to \omega_z = const$$
2.6

Dwa pierwsze równania (2.5) przekształcamy do postaci

$$\dot{\omega}_x = -\frac{\left(I_{zz} - I_{yy}\right)\omega_z}{I_{xx}}\omega_y = -\Omega\omega_y$$
 2.6a

$$\dot{\omega}_{y} = \frac{(I_{zz} - I_{xx})\omega_{z}}{I_{yy}}\omega_{x} = \Omega\omega_{x}$$
 2.6b

Otrzymaliśmy układ równań różniczkowych. Aby go rozwiązać zróżniczkuję obie strony równania (2.6a)

$$\ddot{\omega}_x = -\Omega \dot{\omega}_y \tag{2.7}$$

Podstawię teraz za pochodną $\dot{\omega}_{v}$ prawą stronę (2.6b).

$$\ddot{\omega}_x = -\Omega^2 \omega_x \tag{2.8}$$

Otrzymaliśmy postać równania ruchu harmonicznego (TVI 1.9b), stąd mamy rozwiązanie na ω_x .

$$\omega_x = a\cos(\Omega t + \delta) \tag{2.9}$$

W celu znalezienia rozwiązania dla składowej ω_y obliczmy pochodną wyrażenia (2.9)

$$\dot{\omega}_x = -a\Omega\sin(\Omega t + \delta) = -\Omega\omega_y \Longrightarrow \omega_y = a\sin(\Omega t + \delta)$$
 2.10

Gdzie skorzystałem z (2.6a). Stałe a i δ muszą być wyznaczone z warunku początkowego. Wektor prędkości kątowej ma postać

$$\boldsymbol{\omega}(a\cos(\Omega t + \delta), a\sin(\Omega t + \delta), \omega_z)$$
 2.11

Widać, że jego koniec zakreśla w płaszczyźnie z okrąg o promieniu *a*. Okres obiegu tego okręgu wynosi

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{I_{xx}}{I_{zz} - I_{xx}} \frac{2\pi}{\omega_z}$$
2.12

Zgodnie z wzorem (TXII 2.20) wyrażenie na wektor momentu pędu przyjmie postać

$$\mathbf{K}(a\cos(\Omega t + \delta) I_{xx}, a\sin(\Omega t + \delta) I_{xx}, \omega_z I_{zz})$$
2.13

Koniec wektora momentu pędu **K**, podobnie jak koniec wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ wiruje w płaszczyźnie prostopadłej do osi *z* po okręgu o promieniu *aI*_{xx}, z częstością Ω . Gdy przejdziemy do układu inercjalnego, gdzie wektor momentu pędu jest stały, mamy obrót wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ i osi *z* wokół wektora momentu pędu z prędkością kątową daną wzorem (rysunek 2.3)

$$\Omega_{\rm s} = \frac{K}{I_{xx}}$$

Wiemy już, że ruch ten nazywany jest precesją osi obrotu.



Rysunek 2.3. W układzie nieinercjalnym (z lewej) wektor prędkości kątowej ω i wektor momentu pędu **K** obracają się wokół nieruchomej osi *z* z częstością Ω . W układzie inercjalnym nieruchomy jest wektor momentu pędu **K**, a wektor prędkości kątowej ω i oś *z* obracają się wokół wektora **K** z prędkością kątową Ω_{s} .

2.1. Tensory i elipsoidy

Zanim powiem co elipsoida ma wspólnego z tensorami, poświęcę nieco czasu samej elipsoidzie. W dodatku (DF xx) omówiłem ogólne równanie powierzchni drugiego stopnia (kwadryki). Tu przytoczę jego prostszą postać, opisującą elipsoidę zaczepioną w początku układu odniesienia, ale o dowolnie zorientowanych osiach

$$ax^{2} + by^{2} + cz^{2} + 2dyz + 2exz + 2fxy = 1$$
2.1.1

W celu powiązania wzoru na elipsoidę (2.1.1) z tensorem bezwładności (§TXII 2) oznaczmy przez I_s moment bezwładności pewnego ciała (TXII 2.8), w wybranym układzie współrzędnych, względem osi *s* (rys. 2.1.1). Wykonam pewną konstrukcję geometryczną. Punkt P zostanie wybrany tak, że odcinek od początku układu współrzędnych do P, skierowany wzdłuż osi *s* ma długość daną wzorem

$$OP = \frac{1}{\sqrt{I_s}}$$
 2.1.2

Dygresja 2.1:

Możesz tutaj zapytać: gdzie umiejscowiony jest początek układu współrzędnych? Odpowiem, że nigdzie. Nasz układ współrzędnych żyje w abstrakcyjnej trójwymiarowej przestrzeni matematycznej, która nie potrzebuje do szczęścia przestrzeni fizycznej. To tak jakbyś szkicował samochód twojego kuzyna. Na pytanie, gdzie jest teraz ten samochód, nie musisz mieć odpowiedzi. Rysunek reprezentuje natomiast pewne cechy tego samochodu w układzie kartki. Podobnie i my chcemy naszkicować pewne cechy bryły sztywnej w abstrakcyjnej przestrzeni trójwymiarowej. W tym celu możemy wybrać sobie dowolny punkt i uznać go za początek układu współrzędnych. Następnie określamy osie układu współrzędnych i wybieramy oś obrotu s, na której zaznaczamy odcinek o długości OP dany wzorem (2.1.2). Współrzędne punktu P, przez cosinusy kierunkowe wektora jednostkowego skierowanego od punktu O do punktu P wynoszą (rys. 2.1.1)

$$x = OP \cos(\alpha_x) = \frac{1}{\sqrt{I_s}} \cos(\alpha_x) \Longrightarrow \cos(\alpha_x) = \sqrt{I_s} x$$
 2.1.3a

$$y = OP \cos(\alpha_y) = \frac{1}{\sqrt{I_s}} \cos(\alpha_y) \Longrightarrow \cos(\alpha_y) = \sqrt{I_s} y$$
 2.1.3b

$$z = OP \cos(\alpha_z) = \frac{1}{\sqrt{I_s}} \cos(\alpha_z) \Longrightarrow \cos(\alpha_z) = \sqrt{I_s} z$$
 2.1.3c

Wstawiając te równania do wyrażenia (TXII 2.8) na moment bezwładności względem wybranej osi obrotu mamy

$$I_{s} = (I_{xx}x^{2} + I_{yy}y^{2} + I_{zz}z^{2} - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{xz}xz)I_{s}$$
 2.1.4



Rysunek 2.1.1. Niech Is będzie wartościa momentu bezwładności pewnego ciała obliczonego dla osi obrotu s. Kąty α_x , α_y , α_z określają orientację osi s wybranym układzie w współrzędnych. Gdy odcinek OP dany jest wzorem (2.1.2), to dla różnych osi zbiór S, odpowiadających im punktów P wyznacza elipsoidę. Przykładowo dla zielonej osi s', punkt P' wypada na powierzchni elipsoidy.

Stąd mamy

$$I_{xx}x^{2} + I_{yy}y^{2} + I_{zz}z^{2} - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{xz}xz = 1$$
2.1.5

Jeżeli przyjmiemy, że

$$a = I_{xx}, b = I_{yy}, c = I_{zz}, d = -I_{yz}, e = -I_{xz}, f = -I_{zy}$$
 2.16

To równanie (2.1.5) przejdzie w równanie elipsoidy (2.1.1). Oznacza to, że punkt P leży na powierzchni elipsoidy. Oznacza to, że każdy punkt spełniający warunek (2.1.2) i leżący na kierunku wyznaczonym przez pewną oś obrotu leży na elipsoidzie danej równaniem (2.1.1), przy współczynnikach danych wzorami (2.1.6). Z drugiej strony układ warunków (2.1.6) zawiera wszystkie współczynniki I_{qq} i jednoznacznie określa punkt na elipsoidzie dając graficzną

interpretację zbioru tych współczynników. Zbiór tych współczynników stanowi jednocześnie współrzędne tensora – nazywanego tensorem bezwładności (TXII 2.9). Elipsoida (2.1.1) przy warunkach (2.1.6) reprezentuje zatem zbiór tensorów momentu bezwładności ciała dla zbioru osi obrotu o wszystkich możliwych orientacjach - nazywamy ją elipsoidą bezwładności.

Definicja 2.1.1: Elipsoida bezwładności

Elipsoida bezwładności jest graficzną reprezentacją tensora momentu bezwładności danej bryły sztywnej. Jej punkty reprezentują wartość momentu bezwładności zgodnie z relacją (2.1.2), dla osi obrotu skierowanej zgodnie z kierunkiem odcinka od środka elipsoidy do danego punktu.

Na odstawie (2.1.2) mamy również następujący

Fakt 2.1.1:

Odwrotność pierwiastka z momentu bezwładności dla danej osi obrotu wyznacza odległość między początkiem układu współrzędnych a punktem P odpowiadającym tej osi na elipsoidzie bezwładności.

Zwracam również uwagę na to, że elipsoida bezwładności jest zdefiniowana dla różnych osi przechodzących przez ten sam punkt. Gdy zmienimy punkt, przez które przechodzą osie obrotu, to zmieni się elipsoida bezwładności.

Jak wiemy tensor momentu bezwładności można zdiagonalizować (§TXII_2). Geometrycznie diagonalizacja oznacza przejście do takiego układu współrzędnych, którego osie pokrywają się z osiami elipsoidy bezwładności. Osie takie nazywamy osiami głównymi (def. TXII 2.3). Jeżeli współrzędne w tym nowym układzie oznaczymy primami to równanie elipsoidy bezwładności będzie miało najprostszą postać

$$I'_{xx}x'^{2} + I'_{yy}y'^{2} + I'_{zz}z'^{2} = 1$$
2.1.7

Przyjmując

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{I'_{xx}}}; \ \beta = \frac{1}{\sqrt{I'_{yy}}}; \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{I'_{zz}}}$$
2.1.8a

Otrzymamy najbardziej znaną postać równania elipsoidy we współrzędnych zgodnych z jej osiami

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} + \frac{z'^2}{\gamma^2} = 1$$
2.1.8

Prostota równania elipsoidy w układzie osi głównych wskazuje, że warto przedstawić procedurę znajdowania kierunków osi głównych i momentów bezwładności względem układu osi głównych. Potraktuję lewą stronę równania (2.1.5) jako definicję funkcji

$$\varphi(x, y, z,) = I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{xz}xz \qquad 2.1.9$$

Wtedy warunek (2.1.5) przyjmie postać $\varphi(x, y, z) = 1$

Jeżeli potraktujemy funkcję φ jako definicję pewnego pola skalarnego (def. TII 7.1), to (2.1.9a) wyznacza warunek na konkretną powierzchnię ekwiskalarną (def. TII 7.2). Wiemy, że gradient (def. TII 7.4) z pola φ wyznacza kierunek wektora **n** prostopadłego do tej powierzchni (rys. TII 7.5). Ponieważ powierzchnia ekwiskalarna (2.1.9a) jest jednocześnie powierzchnią elipsoidy bezwładności, wzory na składowe wektorów do niej normalnych mają postać

$$n_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2I_{xx}x - 2I_{xy}y - 2I_{xz}z \qquad 2.1.10a$$

$$n_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -2I_{yx}x + 2I_{yy}y - 2I_{yz}z$$
 2.1.10b

$$n_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -2I_{zx}x - 2I_{yz}y + 2I_{zz}z \qquad 2.1.10c$$

Gdzie ponadto uwzględniłem fakt, że tensor momentu bezwładności jest symetryczny (def. TXII 2.1).



Rysunek 2 .1.2. Wektor normalny do powierzchni elipsoidy, w punkcie przebicia obrotu. osia iest równoległy do tej osi obrotu, tylko wtedy, gdy oś obrotu jest osią Zielony główną. wektor jest normalny do powierzchni elipsy w punkcie przebicia osia -*X* i zarazem równoległy do tej osi. Dla innych osi (np. różowa) wektor normlany nie jest równoległy do osi obrotu.

2.1.9a

Wektor **n** jest równoległy do odcinka OP tylko wtedy, gdy P leży na jednej z osi główny (rys. 2.1.2). Pozwala nam to sformułować warunek na wyznaczenie osi głównych. Gdy wektor OP leży na jednej z osi głównych (czyli jest równoległy do wektora normalnego do elipsoidy w punkcie przebicia), to można zapisać go jako proporcjonalny do wektora normalnego **n**

$$n_x = 2\lambda x, \qquad n_y = 2\lambda y, \qquad n_z = 2\lambda z$$
 2.1.11

Gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Przy tym, dla każdej z trzech osi głównych współczynnik λ może mieć inną wartość. Gdy wszystkie są takie same elipsoida jest sferą.

Zwracam uwagę na to, że równania (2.1.11) wyznaczają współrzędne wektora OP leżącego na jednej z osi głównych. Jednak nasz układ współrzędnych w ogólnym przypadku nie pokrywa się z osiami głównymi. Gdyby doszło do takiego pokrycia, to tylko jedna ze współrzędnych wektora \mathbf{n} (2.1.11) byłaby niezerowa.

Aby wyznaczyć wartość parametru λ wybiorę oś obrotu *s* tak by pokrywała się z jedną z osi głównych (i z odcinkiem OP leżącym na tej osi). Ciągle jednak układ współrzędnych z osiami głównymi nie pokrywa się. Wtedy mogę korzystać z zależności (2.1.11). Wstawiając ją do wyrażeń (2.1.10) mam

$$2\lambda x = 2I_{xx}x - 2I_{xy}y - 2I_{xz}z$$
 2.1.12a

$$2\lambda y = -2I_{yx}x + 2I_{yy}y - 2I_{yz}z$$
 2.1.12b

$$2\lambda z = -2I_{zx}x - 2I_{yz}y + 2I_{zz}z 2.1.12c$$

Po przekształceniach mamy

$$(I_{xx} - \lambda)x - I_{xy}y - I_{xz}z = 0$$
 2.1.13a

$$-I_{yx}x + (I_{yy} - \lambda)y - I_{yz}z = 0$$
 2.1.13b

$$-I_{zx}x - I_{yz}y + (I_{zz} - \lambda)z = 0$$
 2.1.13c

Układ (2.1.13) jest układem równań liniowych (§DE 3). Jednorodny układ równań liniowych (2.13) ma rozwiązanie, gdy wyznacznik tego układu jest różny od zera (DE 4.9)

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & -I_{xy} & -I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
2.1.14

Wyznacznik ten daje równanie trzeciego stopnia ze względu na λ . Równanie to ma trzy rzeczywiste pierwiastki, gdyż macierz tensora momentu bezwładności jest symetryczna a jego współczynniki są rzeczywiste (fakt DE 5.2). Każdy z pierwiastków odpowiada za jedną z osi głównych. Gdy równanie (2.1.14) ma pierwiastek wielokrotny, to elipsoida bezwładności ma większą symetrię. Dla pierwiastka podwójnego (dwie wartości λ_i są sobie równe) jeden z przekrojów elipsy bezwładności jest kołowy. Dla pierwiastka potrójnego (wszystkie λ_i są sobie równe) elipsoida staje się sferą.

Zwracam uwagę, że wyrażenie (2.1.14) możemy również intepretować jako równanie na wartości własne operatora I (§DE 5).

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \lambda \boldsymbol{\omega}$$
 2.1.15

Tensor momentu bezwładności intepretujemy jako operator, który przekształca wektor prędkości obrotowej $\boldsymbol{\omega}$, w wektor momentu pędu zgodnie z równaniem (TXII 2.20), **K**=I $\boldsymbol{\omega}$. Gdy spełniony jest warunek (2.1.15), to

$$\mathbf{K} = \lambda \boldsymbol{\omega}$$

2.1.16

Co oznacza, że wektor momentu pędu **K** jest równoległy do wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$.

Zobaczmy jak to działa na prostym przykładzie. Wybiorę zbiór dwudziestu jeden punktów rozrzuconych losowo w obszarze o granicach {-5, 5} wzdłuż każdej osi. Zakładam, że każdy punkt reprezentuje jednostkową masę. Ponieważ jest dużo liczenia przy tylu punktach, to odwołam się do programu Mathematica.

set=RandomReal[{-5,5},{21,3}]	Instrukcja losowania współrzędnych 21 punktów znajdujących się w sześciennym pudełku o współrzędnych rogów (- 5,5}.
$ \{ \{4.17723, -3.35697, 4.68401\}, \{-2.50016, -0.647334, -2.15201\}, \{-0.502168, 0.276454, -3.49108\}, \{2.59033, -3.68861, 1.42748\}, \{2.44061, 4.12612, 1.16669\}, \{-0.355516, -4.58682, -1.56228\}, \{2.65886, -4.66533, 3.94198\}, \{-3.02239, 0.733827, 1.23266\}, \{1.48643, 3.01983, 4.71196\}, \{-3.44219, 2.73415, 1.1823\}, \{3.28596, -3.11031, -4.02583\}, \{-1.55642, -4.06806, -0.798287\}, \{4.20044, -2.90662, -0.935526\}, \{4.00563, 1.17172, -4.58836\}, \{-3.32867, -2.60537, -3.41406\}, \{-3.35281, -4.36771, -2.76892\}, \{2.11303, -3.86782, 0.619155\}, \{-3.53578, 3.02077, 2.10547\}, \{1.01885, 3.94455, -0.220967\}, \{0.772216, -2.85483, -1.57113\}, \{0.674885, -0.154824, -3.27332\} \} $	Współrzędne wylosowanych punktów

Następnie obliczę położenia środka masy tych punktów

center=Total[set]/Length[set]	Wzór na położenia środka masy punktów o masie jednostkowej
center={0.372778,-1.04063,-0.368097}	wynik

Math 2.1.2. Procedura obliczania środka masy układu punktów, w przypadku gdy wszystkie punkty mają jednostkową masę. Funkcja Total sumuje współrzędne punktów, funkcja Length oblicza ilość punktów

Teraz wyznaczę współrzędne moich punktów w układzie środka masy

setcent=Map[(#-center)&,set]	Instrukcja
$ \{\{3.80445, -2.31634, 5.05211\}, \{-2.87294, 0.393293, -1.78392\}, \{-0.874946, 1.31708, -3.12298\}, \{2.21755, -2.64798, 1.79558\}, \{2.06783, 5.16675, 1.53478\}, \{-0.728294, -3.54619, -1.19418\}, \{2.28608, -3.6247, 4.31008\}, \{-3.39517, 1.77445, 1.60076\}, \{1.11365, 4.06045, 5.08006\}, \{-3.81497, 3.77478, 1.5504\}, \{2.91318, -2.06968, -3.65773\}, \{-1.9292, -3.02743, -0.430191\}, \{3.82766, -1.86599, -0.567429\}, \{3.63285, 2.21235, -4.22026\}, \{-3.70145, -1.56474, -3.04596\}, \{-3.72559, -3.32709, -2.40082\}, \{1.74025, -2.82719, 0.987252\}, \{-3.90856, 4.0614, 2.47357\}, \{0.646069, 4.98517, 0.14713\}, \{0.399437, -1.8142, -1.20303\}, \{0.302106, 0.885803, -2.90523\}\} $	Współrzędne punktów w układzie środka masy
Math 2.1.3. Współrzędne punktów w układzie środka masy. Funkcja ta od współrzędnych każdego punktu odejmuje obliczone wcześniej współrzędne środka masy.	

Czas na obliczenie składowych tensora momentu bezwładności. Korzystam ze wzorów (TXII 2.18).

$tensorI[set_]:=Module[{r2}, r2=Norm/@set; \{ \{ Sum[r2[[i]]-(set[[i,1]])^2, \{ i,Length[set] \} \}, Sum[set[[i,1]]set[[i,2]], \{ i,Length[set] \}], Sum[-set[[i,2]]set[[i,3]], \{ i,Length[set] \}], Sum[r2[[i]]-(set[[i,2]])^2, \{ i,Length[set] \}], Sum[-set[[i,2]]set[[i,3]], \{ i,Length[set] \}], Sum[-set[[i,2]]set[[i,3]], \{ i,Length[set] \}], Sum[-set[[i,3]]set[[i,1]], \{ i,Length[set] \}], Sum[-set[[i,3]]set[[i,1]], \{ i,Length[set] \}], Sum[-set[[i,3]]set[[i,2]], \{ i,Length[set] \}], Sum[-set[[i,3]]set[[i,2]], \{ i,Length[set] \}], Sum[-set[[i,3]]set[[i,2]], \{ i,Length[set] \}], Sum[r2[[i]]-(set[[i,3]])^2, \{ i,Length[set] \}]\}]$	współrzędne tensora momentu bezwładności obliczone w zadanym układzie współrzędnych	
ten={{-53.3287,27.0272,-22.9408},{27.0272,-90.2728,- 25.5365},{-22.9408,-25.5365,-59.5087}}	wynik	
Math 2.1.4. Obliczanie współrzędnych tensora momentu bezwładności. Na żółto		

obliczanie kwadratu długości wektora wodzącego dla 21 punktów. Funkcja Sum sumuje składniki dla wszystkich 21 punktów. Na niebiesko oznaczona jest część obliczająca współrzędną *I*_{xx}, a na szaro współrzędną *I*_{xy}.

Obliczamy wartości własne i wektory własne tensora momentu bezwładności

eivel=Eigenvalues[ten]	obliczanie wartości własnych
eivel={-108.656,-79.516,-14.9379}	wynik
eivec=Eigenvectors[ten]	obliczanie wektorów własnych
eivec={{0.303403,-0.896094,- 0.323979},{0.678893,- 0.0352911,0.733389},{-0.668619,- 0.442459,0.597644}}	wynik

Math 2.1.5. Obliczanie wartości własnych i wektorów własnych tensora momentu bezwładności. Wektory własne są przez program normalizowane (są to wektory o jednostkowej długości).

Wektory własne wskazują na orientację osi głównych bryły utworzonej z naszych dwudziestu jeden punktów. Ponieważ Mathematica zwraca wektory unormowane ich współrzędne są równe cosinusom kierunkowym osi głównych. Na koniec rysunek przedstawiający rozkład punktów oraz osie główne



Rysunek 2.1.3. Z lewej – położenie wylosowanych dwudziestu jeden punktów, ich środek masy (czerwony punkt) oraz osie główne; z prawej – osie główne narysowane z inne perspektywy. Jak widać wektory osi głównych są do siebie prostopadłe (ortogonalne).

Przypomnę, że wartości własne operatora nie zależą od wyboru układu współrzędnych. W szczególności, w układzie osi głównych tensor momentu bezwładności przyjmuje postać diagonalną, a na diagonali leżą wartość własne (fakt TXII 2.1). Przejdźmy zatem do układu własnego, w którym tensor momentu bezwładności przyjmie postać

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$
 2.1.17

Niech układ obraza się wokół osi z. Wtedy mamy

$$\mathbf{K} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \Longrightarrow \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \lambda_3 \boldsymbol{\omega} \Longrightarrow \mathbf{K} = \lambda_3 \boldsymbol{\omega} \qquad 2.1.18$$

Wynika z tego, że wartość własna λ_3 jest równa wartość momentu bezwładności dla bryły sztywnej obracającej się wokół osi głównej oznaczonej tu jako z. Podobną interpretację mają wartość własne λ_1 i λ_2 tyle, że w odniesieniu do osi głównej x i y.

Fakt: 2.1.1:

Wartości własne tensora momentu bezwładności bryły sztywnej są równe momentom bezwładności tej bryły względem osi głównych.

Wracając do tensora momentu bezwładności. Moment bezwładności ciała obracającego się wokół danej osi obrotu można wyrazić wzorem

$$I = \langle \mathbf{n} | \mathbf{I} | \mathbf{n} \rangle \tag{2.1.19}$$

Gdzie \mathbf{n} jest jednostkowym wektorem normalnym w kierunku osi obrotu. Kto nie wierzy może wstawić za tensor bezwładności \mathbf{I} wyrażenie (TXII 2.9), a za

jednostkowy wektor normalny **n**, wektor o współrzędnych ($\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$ i wymnożyć całe wyrażenie, co da wynik (TXII 2.8). Pamiętaj przy tym, że tensor I jest symetryczny, oraz skorzystaj z (TXII 2.10). Ponieważ, zgodnie z umową, pracujemy w prawoskrętnych układach współrzędnych wektor **n** powinieneś zorientować zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej. Funkcję φ (2.1.9), w układzie współrzędnych zgodnych z osiami elipsoidy (osie główne) wyrazi się wzorem (wtedy wyrazy mieszane typy I_{xy} są równe zeru)

$$\varphi = \langle \mathbf{r} | \mathbf{I} | \mathbf{r} \rangle = I_{xx} r_x^2 + I_{yy} r_y^2 + I_{zz} r_z^2$$
 2.1.20

Normalna do powierzchnia stałej wartość funkcji φ wyraża się przez jej gradient, co biorac pod uwage (2.1.20), daje się zapisać w zwartej postaci 2.1.21

$$\nabla \phi = 2\mathbf{I}\mathbf{r}$$

Przez I oznaczyłem tensor momentu bezwładności, który jest w tym wypadku reprezentowany przez macierz diagonalną (jesteśmy w układzie osi głównych). Zgodnie z (2.1.9a) równanie $\varphi=1$, wyznacza powierzchnie elipsoidy. Wektor wodzacy **r** punktu na powierzchni tej elipsoidy można wyrazić przez wektor do niej normalny (w tym punkcie), co wynika z (2.1.2)

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{I}} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2E_k}}$$
 2.1.22

Ostatnia zależności wynika z faktu, że energia kinetyczna ruchu obrotowego wyraża się wzorem

$$E_{k} = \langle \boldsymbol{\omega} | \mathbf{I} | \boldsymbol{\omega} \rangle \qquad 2.1.23$$

Zapiszmy (2.1.19) w postaci

$$I = \left\langle \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}} \mid \mathbf{I} \mid \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}} \right\rangle = \frac{1}{\boldsymbol{\omega}} \left\langle \boldsymbol{\omega} \mid \mathbf{I} \mid \boldsymbol{\omega} \right\rangle = \frac{E_k}{\boldsymbol{\omega}}$$
 2.1.23a

Skorzystałem przy tym z faktu, że

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{n} \Longrightarrow \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{\omega}}$$
 2.1.23b

Wyrażenia (2.1.23) pozwalają nam na otrzymanie wzory (2.1.22). Podstawiając (2.1.22) do (2.1.21) mamy

$$\nabla \varphi = 2\mathbf{I} \frac{\omega}{\sqrt{2E_k}} = \sqrt{\frac{2}{E_k}} \mathbf{K}$$
 2.1.24

Widzimy, że wektor momentu pędu K jest równoległy do wektora gradientu dla elipsoidy reprezentującej tensor momentu bezwładności I. Wektor gradientu jest natomiast prostopadły do płaszczyzny stycznej do danej powierzchni w danym punkcie. Zatem wektor K jest również prostopadły do tej samej płaszczyzny. Wynika z tego prosta geometryczna konstrukcja wektora **K** na bazie elipsoidy bezwładności (rys. 2.1.4a)



Rysunek 2.1.4. a) Wektor momentu pędu **K** dla układu obracającego się wokół osi pokrywającej się z wektorem **r** i danej elipsoidzie bezwładności (czyli danym tensorze momentu bezwładności **I**) jest prostopadły do płaszczyzny stycznej do elipsoidy bezwładności w punkcie wskazanym przez wektor **r**; b) Dla swobodnie obracającej się bryły wektor momentu pędu **K** jest stały. Reorientując elipsoidę bezwładności z części (a) rysunku do pozycji przedstawionej w części (b) możemy uznać, że w czasie ruchu bryły sztywnej jej elipsoida bezwładności toczy się po płaszczyźnie nazywanej płaszczyzną niezmienną tak, że kierunek wektora **K** jest zachowany. Kierunek ten nazywany jest kierunkiem niezmiennym. Przemieszcza się natomiast punktu styku elipsoidy z płaszczyzną niezmienną.

Ze względu na zasadę zachowania momentu pędu swobodnie obracająca się bryła musi zachować kierunek wektora momentu pędu **K**. Oznacza to, że w czasie ruchu swobodnej bryły sztywnej musi być zachowana orientacja niebieskiej płaszczyzny z rysunku (2.1.3a), bo jest to płaszczyzna prostopadła do niezmienniczego wektora momentu pędu **K**. Płaszczyznę tą nazywamy płaszczyzną niezmienną. Odległość d (rys. 2.1.3b) między środkiem elipsoidy bezwładności a płaszczyzną niezmienną możemy wyliczyć jako rzut wektora **r** na kierunek wektora **K**. Do rzutów zatrudniamy iloczyn skalarny wektorów

$$d = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{K}}{|\mathbf{K}|} = \frac{\mathbf{\omega} \cdot \mathbf{K}}{K\sqrt{2E_k}} = \frac{\sqrt{2E_k}}{K}$$
2.1.25

Dzielenie wektora **K** przez jego długość daje jednostkowy wektor w kierunku **K**, czyli wektor pokazujący na kierunek **K**. W wyrażeniu (2.1.25) skorzystałem z (2.1.22) a następnie z zależności

$$\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{K} \Longrightarrow \langle \boldsymbol{\omega} | \mathbf{I} | \boldsymbol{\omega} \rangle = \langle \boldsymbol{\omega} | \mathbf{K} \rangle \Longrightarrow E_k = \langle \boldsymbol{\omega} | \mathbf{K} \rangle \qquad 2.1.25a$$

Gdzie skorzystałem z (2.1.23). Zwróć uwagę, że przejście od pierwszej do drugiej równość (2.1.25a) oznacza obustronne mnożenie skalarne pierwszej równość przez wektor $\boldsymbol{\omega}$, tyle że zapisane w języku braketów. Obliczona odległość *d* dla bryły swobodnej musi być stała. W czasie obrotu swobodnej bryły sztywnej

wędruje wektor prędkości obrotowej ω , a zatem również oś obrotu⁴. Niemniej cały czas elipsoida bezwładności musi być styczna do płaszczyzny niezmiennej, inaczej cała nasza konstrukcja się zawali, co wiązałoby się z naruszeniem zasady zachowania pędu. Ten punkt styczności jest punktem chwilowego obrotu elipsoidy bezwładności.

Elipsoida bezwładności jest konstruktem teoretycznym. Istnieje w abstrakcyjnym świecie matematyki i może się toczyć po matematycznej płaszczyźnie. Mówimy tu o takim właśnie toczeniu w świecie matematycznej abstrakcji. Oczywiście toczenie się elipsoidy bezwładności reprezentuje obrót realnej bryły sztywnej a odcinek od środka elipsoidy do punktu styczności wyznacza kierunek osi obrotu tej bryły.

Geometryczna interpretacja tensora bezwładności w względnie łatwy sposób pozwala na uchwycenie różnych związków. Można to samo zrobić (np. wykazać istnienie płaszczyzn niezmiennej) wyłącznie na wzorach, ale jest to wtedy trudniejsze zadanie.

Dygresja 2.1.1: O obrotach tworów matematycznych

Analizowane toczenie się elipsoidy bezwładności po płaszczyźnie niezmiennej przenosi nas w świat obrotów abstrakcyjnych tworów matematycznych. Oczywiście twory te reprezentują pewne cechy obiektów fizycznych. Mają przy tym własną dynamikę, która realizuje się w abstrakcyjnym świecie matematycznym. Można by tu rzec, że poszliśmy krok dalej w krainę abstrakcji. Analizujemy ruchy wyimaginowanych obiektów geometrycznych w wyimaginowanych przestrzeniach. Czy jednak rzeczywiście robimy coś niezwykłego. W końcu patrząc na piłkę widzimy jej reprezentację wizualną utworzoną przez mózg. Nie widzimy piłki jako takiej. piłka się toczy, to doświadczamy reprezentacji tego ruchu Kiedy widzimy, że w wygenerowanej przez mózg przestrzeni. W abstrakcyjnym świecie wizualnych ikon mamy abstrakcyjną reprezentację procesu, który nazywamy toczeniem. Elipsoida bezwładności jest tylko inną abstrakcją, przez którą reprezentujemy cechy fizycznego świata. Związek między ruchem elipsoidy bezwładności a ruchem bryły sztywnej może być dla nas trudny do "skonsumowania" bo nasz mózg nie tworzy jej w naturalny sposób, ale to nie znaczy że ten sposób postępowania jest inny od tego co robi mózg, w swej abstrakcyjnej istocie.

2.1.1. Praca w układzie obracającym się

W (§TVII 2.6) dyskutowaliśmy problem pracy w układzie nieinercjalnym, który poruszał się z przyspieszeniem **a** względem układu inercjalnego. Zobaczmy jak to będzie wyglądało w ogólnym przykładzie, to jest gdy układ nieinercjalny będzie miał liniową składową przyspieszenia i kątową. To drugie oznacza, że

⁴ Jest to przeciwna sytuacja do przypadku bryły na sztywnym zawieszeniu, kiedy wędruje wektor momentu pędu a oś obrotu jest stała (rys. TXII 2.1.3). Dokładniej przypadek bryły swobodnej będzie omówiony w (§TXV 1).

układ będzie się mógł obracać wokół danej osi ze zmienną prędkością kątową ω (rys. 2.1.5).



Rysunek 2.1.5. Układ inercjalny (nieprimowany) oraz nieinercjalny (primowany). Układ primowany porusza się względem nieprimowanego z przyspieszeniem liniowym i obraca się wokół osi z'.

Siły działające w układzie primowanym możemy rozłożyć na siły przyłożone i bezwładności. Skorzystamy tu ze wzoru (2.5.26)

$$m\frac{\mathrm{d}^{2}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t^{2}} = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} - m\dot{\mathbf{R}}$$
 2.1.26

We wzorze tym pojawił się jeszcze dodatkowy człon $-m\dot{\mathbf{R}}$ związany z składową liniową przyspieszenia układu primowanego względem nieprimowanego. Postępując podobnie jak w (§TVII 2.6), to jest mnożąc obie strony równania (2.1.26) przez d $\mathbf{r}' = \mathbf{v}'dt$ (\mathbf{v}' to wektor prędkości cząstki w układzie primowanym) otrzymujemy równość pomiędzy zmianą energii kinetycznej a wykonaną pracą, gdy obie wielkości obliczane są w układzie nieinercjalnym. Wynik, którego można się było spodziewać, gdyż nie ma powodu, by siły bezwładności związane z obrotem miały inny charakter niż te związane z ruchem liniowym. Nie wszystko jest jednak takie same. W (§TVII 2.6)pokazaliśmy, że gdy układ współrzędnych związany jest ze środkiem masy, to praca sił bezwładności jest równa zeru (fakt 2.6.1). Gdy dodamy obrót układu współrzędnych przestaje to być prawdą⁵.

⁵ Pełniejszą dyskusję poruszonych tu problemów znajdziesz w pracy D. A. Manjarŕes. J. Herrera, R. A. Díaz, *Work and Energy in rotating systems*, Am. J. Phys.,81, 597-602 (2013)

Całe nasze rozumowanie (i rysunek 2.1.5) dotyczy jednej cząstki układu. Gdy chcemy policzyć pracę w całym układzie musimy posumować wkłady od wszystkich cząstek tak jak to robiliśmy w (§TVII 2.6).

2.2. Obroty wokół osi głównych

Zastanówmy się jeszcze nad obrotami bryły swobodnej wokół osi głównych. Osie główne mają wyróżniony status. Z rysunku (TXII_2.1.2) widać, że gdy bryła obraca się wokół innej osi niż główna, to nie będzie to obrót stabilny. Hantle pokazane na tym rysunku obracają się stabilnie tylko dlatego, że oś jest sztywno zamocowana. Jednak siły dośrodkowe będą starały się obrócić oś obrotu do osi głównej. Widać to również z faktu, obrotu wektora momentu pędu. Wektor momentu pędu może zmieniać kierunek tylko wtedy gdy działa niezerowy moment sił. Gdy moment sił ustaje, bryła staje się swobodna moment pędu nie może się dalej kręcić, natomiast może kręcić się oś obrotu, co nazywamy zjawiskiem precesji (zadanie (2.1)). W przypadku obracającej się hantli, uwolnienie od wiązań, spowoduje ruch oś obrotu wokół wektora momentu pędu. Działa co prawda dalej siła dośrodkowa, ale poprzecznie do prędkości liniowej kulki sztangi, co jak wiemy nie zmienia wartości prędkości, tylko jej kierunek. Zastanowimy się teraz nad stabilnością obrotu bryły o osiach swobodnych, kręcącej się wokół osi głównej.

Niech w układzie osi głównych niezerowe składowe tensora momentu bezwładności spełniają warunek

$$I_{xx} > I_{yy} > I_{zz}$$
 2.2.1

W układzie osi własnych tensor momentu bezwładności ma postać diagonalną. Jednak dla danej bryły sztywnej układ osi własnych jest układem nieinercjalnym (obracającym się), stąd równania ruchu bryły będą równaniami Eulera (2.5). Przyjmijmy, że wektor prędkości kątowej ciała jest prawie równoległy do osi x, z małymi dodatkami dla osi y i z. Zatem wektor prędkości kątowej ma współrzędne

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}_{x},\boldsymbol{\varepsilon}_{y},\boldsymbol{\varepsilon}_{z}) \qquad 2.2.2$$

gdzie liczby ε_y i ε_z są małe w porównaniu z ω_x . Równania Eulera (2.5) przyjmą w naszym przypadku postać

$$0 = I_{xx}\dot{\omega}_{x} + (I_{zz} - I_{yy})\varepsilon_{y}\varepsilon_{z} \approx I_{xx}\dot{\omega}_{x} \Longrightarrow \omega_{x} = const$$
2.2.3a

$$0 = I_{yy}\dot{\varepsilon}_{y} + (I_{xx} - I_{zz})\omega_{x}\varepsilon_{x}$$
 2.2.3b

$$0 = I_{zz}\dot{\varepsilon}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\varepsilon_y$$
 2.2.3c

Przybliżenie w (2.2.3a) wynika z tego, że obie liczby ε_y i ε_z są małe, a ściślej rzecz biorąc ponieważ badamy małe odchylenia od obrotu wokół osi *z*, możemy je uczynić bardzo, bardzo małymi. Stałość składowej ω_x może sugerować, że obrót wokół tej osi może być stabilny. Musimy jeszcze sprawdzić co wynika z równań (2.2.3b i c). Widać, że

$$\dot{\varepsilon}_{y} = -\frac{\left(I_{xx} - I_{zz}\right)}{I_{yy}} \varepsilon_{z} \omega_{x}$$

$$\dot{\varepsilon}_{z} = -\frac{\left(I_{yy} - I_{xx}\right)}{I_{zz}} \varepsilon_{z} \omega_{x}$$
2.2.4a
2.2.4b

Podobny układ równań już rozwiązywaliśmy (2.6), tyle że wtedy dwie składowe tensora momentu bezwładności były sobie równe. Teraz mamy ogólniejszy przypadek. Postępować możemy jednak podobnie. Różniczkujemy obie strony równania (2.2.4a) po czasie, pamiętając, że zgodnie z (2.2.3a) ω_x jest stała

$$\ddot{\varepsilon}_{y} = -\frac{\left(I_{xx} - I_{zz}\right)}{I_{xx}} \dot{\varepsilon}_{z} \omega_{x}$$
2.2.5

Wstawiając (2.2.4b) do (2.2.5) mamy

$$\ddot{\varepsilon}_{y} = -\frac{\left(I_{xx} - I_{zz}\right)\left(I_{xx} - I_{yy}\right)}{I_{xx}}\varepsilon_{z}\omega_{x}^{2}$$
2.2.6

Jeżeli teraz czynnik

$$-\frac{(I_{xx} - I_{zz})(I_{xx} - I_{yy})}{I_{xx}I_{zz}}$$
2.2.7

Jest ujemny to otrzymamy równanie oscylatora harmonicznego. Ze względu na warunki (2.2.1) widać, czynnik ten będzie ujemny. Zatem współrzędna prędkości kątowej ε_y będzie oscylowała. W podobny sposób możemy pokazać, że oscylować będzie współrzędna ε_z . Co więcej częstości i amplitudy tych oscylacji będą takie same. Złożenie dwóch oscylacji harmonicznych wzajemnie prostopadłych o tych samych częstościach i amplitudach da nam ruch po elipsie (tab. TVIII 2.2.1).

Co żeśmy tutaj pokazali? Wyobraźmy sobie, że nasze ciało obraca się tylko wokół osi *x*. W pewnym momencie podziałaliśmy niewielkim zaburzeniem w kierunku prostopadły do tej osi tak, że na krótko pojawił się niezerowy moment siły. Wtedy zmieni się kierunek osi obrotu, tak że pojawią się niewielkie składowe wektora obrotu dla osi *y* i *z*. Te niewielkie składowe spowodują, że oś obrotu będzie poruszała się po okręgu wokół osi *x* (precesja osi obrotu). Mamy zatem stabilną sytuację. Podobnie jak kulka w dołku. Niewielkie zaburzenie, spowoduje, że kulka nieco się wychyli poza położenie równowagi i zacznie oscylować wokół tego położenia. Kiedy nie ma tarcia będzie tak oscylować w nieskończoność. Jednak nie opuści bliskiego sąsiedztwa punktu równowagi. Taki system jest w równowadze trwałej. Zatem układ obracający się wokół osi *x* jest w równowadze trwałej. Podobne rozumowanie pokazuje, że tak samo jest dla osi *z*. Ale sytuacja zmienia się, gdy układ obraca się wokół osi *y*, a następnie obrót ten jest lekko zaburzony. Wektor obrotu ma współrzędne

$$\omega(\varepsilon_x, \omega_y, \varepsilon_z)$$
 2.2.8

gdzie liczby ε_x i ε_z są małe w porównaniu z ω_y . Równania Eulera (2.5) przyjmą postać

$$0 = I_{xx}\dot{\varepsilon}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\varepsilon_z$$
 2.2.9a

$$0 = I_{yy}\dot{\omega}_{y} + (I_{xx} - I_{zz})\varepsilon_{x}\varepsilon_{z} \approx I_{yy}\dot{\omega}_{y} \Longrightarrow \omega_{y} = const$$
2.2.9b

$$0 = I_{zz}\dot{\varepsilon}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_y\varepsilon_x \qquad 2.2.9c$$

Z równań (2.2.9a i c) widać, że

$$\dot{\varepsilon}_{x} = -\frac{\left(I_{zz} - I_{yy}\right)}{I_{yy}}\omega_{y}\varepsilon_{z}$$
2.2.10a

$$\dot{\varepsilon}_{z} = -\frac{\left(I_{yy} - I_{xx}\right)}{I_{zz}}\omega_{y}\varepsilon_{x}$$
2.2.10b

Różniczkujemy obie strony równania (2.2.10a) po czasie, pamiętając, że zgodnie z (2.2.9b) składowa ω_y jest stała

$$\ddot{\varepsilon}_{x} = -\frac{\left(I_{zz} - I_{yy}\right)}{I_{xx}} \dot{\varepsilon}_{z} \omega_{y}$$
2.2.11

Wstawiając (2.2.10b) do (2.2.11) mamy

$$\ddot{\varepsilon}_{x} = \frac{\left(I_{zz} - I_{yy}\right)}{I_{xx}} \frac{\left(I_{yy} - I_{xx}\right)}{I_{zz}} \varepsilon_{x} \omega_{y}^{2}$$

$$2.2.12$$

Na mocy warunku (2.21) czynnik

$$\frac{\left(I_{zz} - I_{yy}\right)\left(I_{yy} - I_{xx}\right)}{I_{xx}} \frac{I_{zz}}{I_{zz}}$$
2.2.13

jest dodatni i otrzymane równanie ruchu (2.2.12) nie ma charakteru równania ruchu oscylatora harmonicznego. W takim przypadku ogólne rozwiązanie można zapisać w postaci

$$x = Ae^{\kappa t} + Be^{-\kappa t}$$
 2.2.14

$$\kappa = \sqrt{\frac{\left(I_{zz} - I_{yy}\right)\left(I_{yy} - I_{xx}\right)}{I_{xx}I_{zz}}}\omega_{y}$$
 2.2.14a
Czyli *x* (podobnie jak *z*) rośnie ekspotencjalnie i układ nie jest stabilny. Mamy tu podobieństwo do równań opisujących rezonator laserowy (TXIII 4.2). Rozwiązanie układu podzieliło się na dwie klasy: stabilne kiedy punkty przebicia promienia ze zwierciadłem w kolejnych cyklach przebiegu zależały od wyrazów typu e^{iωt} (ruch po kole), niestabilne kiedy zależności były ekspotencjalne.

Spróbujmy podejść do sprawy na drugi, bardziej geometryczny sposób. Ponownie będziemy analizowali ruch bryły sztywnej w układzie osi głównych. Energia kinetyczna takiego ciała wynosi (TXII 2.2.6)

$$E = \frac{1}{2}I_{xx}\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_{yy}\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_{zz}\omega_z^2$$
2.2.15

Kwadrat długości wektora momentu pędu wynosi

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 2.2.16$$

Co możemy zapisać w postaci

$$K^{2} = I_{xx}^{2} \omega_{x}^{2} + I_{yy}^{2} \omega_{y}^{2} + I_{zz}^{2} \omega_{z}^{2}$$
 2.2.17

Daje nam równanie elipsoidy we współrzędnych (ω_x , ω_y , ω_z). Korzystając ze związków

$$I_{xx} = \frac{K_x}{\omega_x}; \ I_{yy} = \frac{K_y}{\omega_y}; \ I_{zz} = \frac{K_z}{\omega_z}$$
2.2.18a

możemy wyrażenie na energię kinetyczną (2.2.15) przepisać w postaci

$$E = \frac{K_x^2}{2I_{xx}} + \frac{K_y^2}{2I_{yy}} + \frac{K_z^2}{2I_{zz}}$$
 2.2.18

Co jest równaniem elipsoidy. Mamy równanie dwóch elipsoid, jedna reprezentuje energię ruchu obrotowego w układzie współrzędnych (ω_x , ω_y , ω_z), a druga moment pędu w tych samych współrzędnych. Przy braku sił zewnętrznych ciało może się obracać, przyjmując takie wartości (ω_x , ω_y , ω_z), które leżą na przecięciu obu elipsoid. Możemy tu mówić o ruchu punktu we współrzędnych uogólnionych (ω_x , ω_y , ω_z). Punkt reprezentuje aktualne wartości współrzędnych wektora prędkości. Na rysunku (2.2.1) przedstawione są trzy szczególne przypadki obrotu ciała, dla którego tensor momentu bezwładności w układzie trzech osi głównych ma współrzędne spełniające relacje (2.2.1).

Rysunek (2.2.1a) pokazuje obrót wokół osi z, czyli współrzędne wektora obrotu są równe (0, 0, ω). Do momentu pędu wkład daje tylko jedna współrzędna tensora bezwładności I_{zz} , przy czym zgodnie z (2.2.1) jest to współrzędna o najmniejszej wartości. Obie elipsoidy mają tylko dwa punktu wspólne na przeciwnych biegunach osi z. Oznacza to stabilny obrót wokół osi z. Podobnie jest w sytuacji na rysunku (2.2.1b), gdzie mamy przypadek obrotu wokół osi x,

której odpowiada największa (w układzie osi głównych) wartość współczynnika tensora bezwładności I_{xx} . Tym razem obie elipsoidy mają po jednym punkcie wspólnym na biegunach wyznaczonych przez oś x. Ponownie oznacza to stabilny obrót ciała. Inaczej sprawa wygląda na rysunku (2.2.1c), gdzie mamy reprezentowany obrót wokół osi y.



Rysunek 2.2.1. Trzy przypadki geometrii elipsoid energii (2.2.18) i momentu pędu (2.2.17), przy spełnieniu warunków (2.2.1); a) obrót wokół osi *z*, $\omega(0,0,4\pi)$ rad/s. Wkład do momentu pędu ma składowa *I*_{zz} o najmniejszej wartości. Obie elipsoidy mają punkt wspólny dla punktów biegunowych wyznaczonych przez oś *z*; b) obrót wokół osi *x*, $\omega(4\pi,0,0)$ rad/s. Wkład do momentu pędu ma składowa *I*_{xx} o największej wartości. Obie elipsoidy mają punkt wspólny dla punktów biegunowych wyznaczonych przez oś *x*; c) obrót wokół osi *y*, $\omega(0,4\pi,0)$ rad/s. Wkład do momentu pędu ma składowa *I*_{xx} o największej wartości. Obie elipsoidy mają punkt wspólny dla punktów biegunowych wyznaczonych przez oś *x*; c) obrót wokół osi *y*, $\omega(0,4\pi,0)$ rad/s. Wkład do momentu pędu ma składowa *I*_{yy} o pośredniej wartości. Obie elipsoidy przecinają się wzdłuż krzywej narysowanej na czarno. Wartości współczynnika momentu bezwładności wynoszą *I*_{xx}=1.5kg·m², *I*_{yy}=1kg·m²; *I*_{zz}=0.5kg·m²

Dla tego obrotu wkład w moment pędu wnosi współrzędna I_{yy} tensora momentu bezwładności, która ma wartość pośrednią między składową największą I_{xx} i składową najmniejszą I_{zz} . Teraz przecięcie obu elipsoid tworzy dość złożoną w swym przebiegu linię, co oznacza, że podczas obrotu wektor prędkości kątowej może się kiwać, tak by jego koniec ślizgał się po tej linii. Linia to nie trzyma się bliskiego sąsiedztwa biegunów wyznaczonych przez oś y. Taki obrót niestabilny. Oś obrotu sama z siebie (bez zewnętrznego zaburzenia) zacznie odchylać się od kierunku wyznaczonego przez oś y. Widać z tego, że jeżeli oś obrotu ułożona jest równolegle do kierunku osi głównej o maksymalnej lub minimalnej wartości składowej tensora momentu bezwładności, to obrót jest stabilny. Przy osi obrotu równoległej do osi o pośredniej wartości składowej tensora momentu bezwładności obrót jest niestabilny, czyli wektor prędkości obrotowej wędruje.

Rysunek (2.2.2a) pokazuje co się dzieje, gdy do dominującej składowej wektora prędkości obrotowej ω_z dodamy małe zaburzenie, tak że pojawi się niewielka składowa ω_y . Wektor prędkości obrotowej krąży wokół osi *z*.



Rysunek 2.2.2. Dwa przypadki geometrii elipsoid energii (2.2.18) i momentu pędu (2.2.17) dla lekko zaburzonego obrotu wokół osi *z* (a) i wokół *y* (b). Parametry układu takie jak na rysunku (2.2.1), za wyjątkiem wektora prędkości obrotowej. Dla przypadku (a) mamy $\omega(0,0,4\pi)$ rad/s, a dla przypadku (b) $\omega(0,0,4\pi)$ rad/s. W przypadku (a) część wspólna elipsoid jest niewielkim okręgiem wokół punktu biegunowego (rysunek pokazuje okolice górnego bieguna podobnie jest przy dolnym biegunie. W przypadku (b) dwie gałęzie trajektorii przecinające się na biegunach wyznaczonych przez osie *y* (rys. 2.2.1c) rozszczepiły się na dwie niezależne trajektorie.

Dla niewielkich zaburzeń nie oddala się zbytnio od osi głównej *z*, co charakteryzuje układu stabilne, które wytrącone z punktu równowagi, pod wpływem niewielkiego zaburzenia, pozostają blisko tego punktu. Można się spodziewać, że niewielkie hamowanie obrotu wokół osi *y* spowoduje, że układ

wróci do obrotu wokół osi *z*, tak jak kulka w dołku, lekko wytrącona z równowagi (tak by nie wypaść z dołka) przy rozpraszaniu energii powraca na jego dno, czyli do punktu równowagi.

Rysunek (2.2.2b) ilustruje przykład, w którym w początkowej chwili dominuje składowa ω_y . Niewielkie zaburzenie powoduje pojawienie się niewielkiej składowej ω_z . Krzywa z rysunku (2.2.1c) rozszczepia się na dwie niezależne trajektorie. Układ był już niestabilny przy braku tej dodatkowej składowej, więc nie ma co liczyć na jego powrót do punktu równowagi przy hamowaniu obrotu wokół osi *z*.

2.3. Tensory w opisie stanu polaryzacji światła

W celu ułatwienia analizy biegu światła w ośrodkach dwójłomnych wykorzystuje się kilka reprezentacji graficznych. Jedną z takich reprezentacji przedstawia rysunek (TXIII 2.3), na którym mamy przykład powierzchni wyrysowanych dla ośrodka dwójłomnego jednoosiowego. Powierzchnia ta wyznaczona została jako zbiór punktów, do których, w ustalonym czasie dotarły promienie z danego punktu źródłowego. Przy czym wykreślamy dwa zbiory promieni o wzajemnie ortogonalnych polaryzacjach. Nadto kierunki polaryzacji wybrane są tak, że jeden ze zbiorów rozchodzi się symetrycznie we wszystkie strony (fala zwyczajna). Mamy tu do czynienia z reprezentacją dwupowłokową. Te dwie powierzchnie są powierzchniami falowymi fali zwyczajnej i nadzwyczajnej. Ta dwupowłokowa nazywana jest też powierzchnią prędkości.

Oprócz powierzchni dwupowłokowych ośrodki dwójłomne jednoosiowe możemy reprezentować przez powierzchnie jednopowłokowe. Zacznę od powierzchni nazywanej indykatrysą, która zdefiniowana jest wzorem

$$\frac{x^2 + y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1$$
2.2.1

Jest to równanie elipsoidy obrotowej, przy czym oś optyczna kryształu jest zgodna z osią z. Przykład indykatrys pokazuje rysunek (2.2.1). Z rysunku i wzoru (2.2.1) widać, że w płaszczyźnie xy elipsoida ma przekrój kołowy opromienieniu n_o . Przekrój płaszczyzną xz i yz daje elipsę o osiach n_o i n_e . Zauważ, że indykatrysa jest rozciągnięta przeciwnie do elipsoidalnej części powierzchni prędkości (rys. TXIII 2.3). Bierze się to stąd, że współczynnik załamania jest odwrotnie proporcjonalny do prędkości fali v=c/n. Zatem oś wzdłuż której fala nadzwyczajna rozchodzi się najszybciej jest zarazem osią, dla której współczynnik załamania jest najmniejszy.



Rysunek 2.2.1. Indykatrysa dla kryształu dodatniego (a) i ujemnego (b). Oś z jest osią optyczną kryształu.

Powiedzmy, że fala świetlna rozchodzi się w kierunku osi optycznej kryształu dwójłomnego dodatniego (ujemnego). Zróbmy cięcie przez elipsoidę płaszczyzną prostopadłą do kierunku propagacji tej fali i przechodzącą przez środek elipsoidy (rys. 2.2.1). W tym przypadku cięcie będzie kołem o promieniu równym współczynnikowi załamania fali zwyczajnej (nadzwyczajnej). Gdy skierujemy falę prostopadle do osi optycznej kryształu, to cięcie płaszczyzną prostopadłą do kierunku biegu tej fali będzie elipsą, a osie tej elipsy wyznaczą wartości współczynników załamania dla fali zwyczajnej i nadzwyczajnej (rys. 2.2.1). Pytanie brzmi: czy dla dowolnego kierunku możemy wyznaczyć wartość współczynnika załamania w taki sam sposób. Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Rysujący przekrój prostopadły do danego kierunku OP rozchodzenia się fali dostajemy elipsę (rys. 2.2.2), które osie wyznaczają współczynniki załamania fali zwyczajnej.

Konstrukcję tą nazywamy konstrukcją Fresnela a jej uzasadnienie pozostawię do tematów związanych z elektrodynamiką.

Fakt 2.2.

Miarą współczynników załamania dwóch fal biegnących w danym kierunku OP są półosie elipsy otrzymanej jako przekrój indykatrysy płaszczyzną prostopadłą do linii OP. Półosie tej elipsy określają jednocześnie kierunki drgań wektora pola elektrycznego. Dla promienia nadzwyczajnego drgania zachodzą w przekroju głównym (zawierającym oś optyczną).

Symetryczny tensor bezwładności, ma elegancką interpretację geometryczną w postaci elipsoidy. Rozumując w drugą stronę, to znaczy biorąc pod uwagę eliptyczność indykatrysy i fakt, że za jej pomocą możemy wyznaczyć współczynniki załamania, dochodzimy do wniosku, że współczynnik załamania musi mieć jakiś związek z tensorami symetrycznymi. Ów tensor musi łączyć ze sobą dwie, zwykle nierównoległe wielkości wektorowe, bo to właśnie jest działanie takich tensorów. Aby zdefiniować tensor związany z polaryzacją musimy nieco wybiec naprzód.



Rysunek 2.2.2. Dla ośrodka dwójłomnego jednoosiowego, dla dowolnego kierunku rozchodzenia się światła (na rysunku wzdłuż osi OP), współczynniki załamania zwyczajny i nadzwyczajny możemy wyznaczyć z konstrukcji Fresnela. Konstrukcja Fresnela Rysujemy indykatrysę, wyglada tak: z zaznaczoną osią optyczną (u nas jest to oś z) i kierunkiem rozchodzenia sie światła (kierunek OP). Rysujemy następnie płaszczyzne prostopadła do odcinka OP i przechodzącą przez środek indykatrysy. Przekrój jaki otrzymamy będzie elipsą (narysowana na niebiesko). Osie tej elipsy wyznaczą wartości obu współczynników załamania; przy czym oś leżąca w przekroju głównym (zawierającym oś optyczną) wyznaczy współczynnik nadzwyczajny a oś prostopadła wyznaczy współczynnik zwyczajny.

Szkolna edukacja obejmuje temat fal elektromagnetycznych. W falach elektromagnetycznych oscyluja dwa wektory, wektor nateżenia pola elektrycznego E i prostopadły do niego wektor natężenia pola magnetycznego H. Kiedy pole elektryczne działa w ośrodku materialnym, ośrodek ten ulega elektrycznej, zmienia działajace polaryzacji która pole elektryczne. Wprowadzamy tu wektor indukcji elektrycznej **D**, który wiąże się z wektorem pola elektrycznego wzorem

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

2.2.2

Liczba ε reprezentuje przenikalność elektryczną materiału. Wzór (2.2.2) jest zależnością między dwoma wektorami o tym samym kierunku. Wiesz już co się teraz stanie. W ogólnym przypadku te dwa wektory nie są do siebie równoległe i domagają się tensora oznaczanego przez ε .

$$\mathbf{D} = \mathbf{\varepsilon} \mathbf{E}$$

2.2.3

Ponieważ tensor przenikalności elektrycznej jest tensorem symetrycznym możemy go zapisać w układzie współrzędnych, w którym ma formę diagonalną.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$
 2.2.4

Co więcej tensor przenikalności elektrycznej w prosty sposób wiąże się z tensorem współczynnika załamania

$$\mathbf{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{vmatrix} n_{xx}^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_{yy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_{zz}^2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$
2.2.5

Związek ten uzasadnię przy tematach poświęconych elektrodynamice. Dla ośrodka dwójłomnego jednoosiowego układ osi głównych określa orientację osi elipsoidy reprezentującej indykatrysę (rys. 2.1.1). Widać z tego, że elipsoida związana z indykatrysą rzeczywiście odpowiada pewnemu tensorowi. Tensor ten w postaci (2.2.4), w układzie osi głównych wiąże ze sobą dwa wektory, **D** i **E**, które w ośrodka anizotropowych nie są równoległe. Ów tensor możemy wyrazić poprzez współczynniki załamania w ośrodku anizotropowym (2.2.5), co daje bliski związek z naszymi rozważaniami dotyczącymi biegu światła.

3. Faza geometryczna 🔺

Faza geometryczna (faza Berry'ego) to modny temat w fizyce przełomu XX i XXI wieku. W swej mechanicznej wersji ma związek z obrotami brył, ale jest również bardzo dobrym pretekstem do pierwszego spotkania z ważnymi dla fizyki pojęciami geometrycznymi. Jej wprowadzenie zacznę od prostej ilustracji. Powiedzmy, że po jednym kole o promieniu r_1 toczy się bez poślizgu drugie koło o promieniu r_2 (rys. 3.1).



Rysunek 3.1. a) małe koło toczy się po obwodzie dużego koła zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Stosunek promieni tych kół wynosi 1.6. Niech czerwona kreska na małym kole w chwili t_0 wyznacza kąt zerowy. W chwili t_1 małe koło przeszło połowę obwodu dużego. Nie oznacza to, że kąt jaki zakreśliła kreska wynosi π . Jest on równy 1.6· π ; b) w chwili t_2 małe koło wróciło do punktu wyjścia, jednak czerwona kreska nie wróciła na pierwotne miejsce. Wykonała ona obrót o wartości 1.6·2 π

Na toczącym się kole mamy narysowaną kreskę. Pod jakim kątem będziemy wiedzieli tą kreskę po wykonaniu pełnego obrotu? Wszystko oczywiście zależy od stosunku promieni obu kół, czyli od geometrii problemu. Nasze koła nie działają na siebie siłą, więc ich wzajemny ruch nie jest pochodną oddziaływań dynamicznych a wpływów geometrycznych. Postaram się teraz pokazać, że w podobny sposób możemy podejść do zagadnienie ruchu wahadła Foucaulta. W przypadku wahadła uznajemy, że może zmieniać ono swobodnie płaszczyznę wahań. Zatem obrót tej płaszczyzny, dla obserwatora na Ziemi nie jest związany z działaniem sił. Wahadło staramy się zamontować tak, aby nie od strony montażu nie działały nań żadne siły mogące zmienić płaszczyznę jego wahań. Zatem i dla ziemskiego obserwatora powinno dać się sprowadzić problem do zagadnienia geometrycznego.

Zacznę od następującego problemu. Powiedzmy, że mamy idealnie kulistą planetę pokrytą idealnie śliskim lodem. Jak będzie się po powierzchni tej planety przesuwał krążek hokejowy mający pewną niezerową prędkość v styczną do powierzchni planety? Siła grawitacji (prostopadła do powierzchni planety) jest siłą dośrodkową więc będzie zmieniała kierunek wektora prędkości, tak że będzie on ciągle styczny do powierzchni planety. Na płaskim lodowisku krążek, zgodnie z zasadą bezwładności powinien poruszać się po linii prostej, co związanej jest z geometrią płaszczyzny. Na sferze krążek nie może poruszać się po prostej. Co jest odpowiednikiem linii prostej na sferze? Ponieważ siła grawitacji działa prostopadle do powierzchni planety, w kierunku jej środka, krążek nie może opuścić płaszczyzny zawierającej w sobie wektor prędkości krążka i środek sfery. Taka płaszczyzna wycina ze sfery wielkie koło, co oznacza, że odpowiednikiem ruchu swobodnego po linii prostej na płaszczyźnie euklidesowej jest na sferze z grawitacją ruch po wycinku wielkiego koła (rys. 3.2).



Rysunek 3.2. Swobodnie ślizgający się krążek (niebieski dysk) będzie poruszał się po powierzchni sfery po wielkim kole. Związane jest to z tym, że siła ciążenia skierowana jest do środka Ziemi a płaszczyzna, w której zawierają się środek Ziemi i wektor siły ciążenia wycina z kuli wielkie koło. Nie ma więc składowej siły, która mogłaby zepchnąć krążek z toru po wielkim kole

Powiedzmy, że po powierzchni lodowej sfery ślizga się krążek z narysowaną przez środek strzałką. Najpierw z punktu A pierwszy hokeista pcha go kierunku punktu B. W punkcie B drugi hokeista zatrzymuje krążek a następnie pcha go w kierunku punktu C, ale tak, że podczas pchnięcia nie obraca krażkiem (rys. 3.3). Słowem samo pchnięcie nie zmienia orientacji strzałki narysowanej na krążku. Trzeci hokeista pcha krążek z punktu C do punktu A, nie zmieniając przy tym orientacji strzałki. W efekcie krążek wraca do punktu A. Ponieważ siła działa momencie uderzenia w krażek, krótko W krażek pomiędzy bardzo poszczególnymi punktami porusza się po wycinkach wielkich kół. Mimo, że hokeiści nie zmieniali orientacji strzałki to po przejściu całego trójkąta strzałka będzie obrócona pod pewnym kątem, w stosunku do pozycji wyjściowej. Możemy teraz zwolnić hokeistów i pomyśleć o przesuwaniu wektora tak by kat między tym wektorem a styczną do koła wielkiego był w każdym punkcie toru taki sam. Takie przesunięcie nazywamy przesunięciem równoległym, ponieważ

jest ono odpowiednikiem przesuwania równoległego (to jest bez zmiany kierunku) wektorów po płaszczyźnie, czy ogólnie w przestrzeni euklidesowej.

Zróbmy krótkie podsumowanie. Korzystając z efektu bezwładności uogólniliśmy pojęcie prostej na powierzchnię sferyczną. Taka uogólniona prosta wyznaczona jest przez ruch swobodnego ciała, gdy działa na nie tylko siła centralna. Linie proste okazały się być kołami wielkimi na sferze. Wprowadziliśmy pojęcie przesunięcia równoległego na takiej powierzchni, jako przesunięcie, które zachowuje kąt między wektorem a styczną do koła wielkiego, wzdłuż którego przesuwamy wektor.



Rysunek 3.3. Zamknięty tor na sferze utworzony z łuków trzech wielkich kół. Czarna reprezentuje strzałka strzałkę narysowaną na krażku. Gdy przesuwamy krążek po takim torze, kąt początkowy strzałki iest różny od kata jaki ma ona po wykonaniu pełnego obiegu.

Widać, że przesunięcie równoległe wektora po powierzchni sfery, po zamkniętym torze zmienia kąt tego wektora. Jest to zachowanie inne niż w przypadku gdyby hokeiści przesuwali krążek po trójkącie na płaszczyźnie (rysunek 3.4), zachowując kierunek kreski na krążku przy każdym jego odbiciu. Po przejściu całego trójkąta wektor ma ten sam kąt co na początku drogi.



Rvsunek 3.4. Przesuwamy równolegle czerwony wektor wzdłuż odcinka AB. Następnie wzdłuż linii BC, ale bez (w punkcie zmiany B) kierunku wektora, a na koniec wzdłuż odcinka CA, również bez zmiany (w punkcie C) kierunku wektora. Po przejściu trójkąta ABC wektor nie zmieni swojego kąta.

Dygresja 3.1: Przesunięcie równoległe

Powiedzmy, że mamy płaszczyznę (rys. 3.5). Dwóm punktom P_1 i P_2 tej płaszczyzny przyporządkowujemy dwa wektory v_1 i v_2 , reprezentujące na przykład prędkość środka masy dwóch ciał. Jaki jest kąt pomiędzy tymi wektorami? Pytanie wydaje się trywialne. Ot co robimy – przesuwamy wzdłuż linii prostej jeden wektor do drugiego, tak aby ich początki spotkały się w jednym punkcie. Przy czym przez cały czas dbamy o to, by kąt między prostą a wektorem był taki sam. Po przesunięciu wektora v_2 do punktu P_1 wyznaczamy kąt pomiędzy tymi wektorami. Matematycy w tym przypadku przyporządkowują kążdemu punktowi przestrzeni dwuwymiarową przestrzeń wektorów stycznych do płaszczyzny w danym punkcie. Oba wektory v_1 i v_2 są wybierane z przestrzeni przypisanych punktom P_1 i P_2 . Ta konstrukcja przypomina nam, że wektory nie są mieszkańcami płaszczyzny. Mogą być natomiast do punktów płaszczyzny przypisane. Porównanie kątów oznacza, że odnajdujemy powiedzmy w przestrzeni wektorowej V_1 przypisanej do punktu P_1 odpowiednik wektora v_2 przypisanego w punkcie P_2 z przestrzeni wektorowej V_2 . Operacja przeniesienia wzdłuż prostej jest techniką znajdowania takiego odpowiedniką. Zauważ, że dopóki nie potrafimy w sensowny sposób definiować odpowiedniości wektorów z przestrzeni wektorowych zaczepionych w różnych punktach dopóty nie możemy mówić o kącie między wektorami zaczepionymi w tych punktach. Sensowny sposób oznacza, sposób który pozwalana na odnajdywanie w obu przestrzeniach wektorowych V_1 i V_2 przypisanych dwóm różnym punktom P_1 i P_2 wektorów, które możemy uznać za równoległe. Ten sposób to przeniesienie równoległe.



Rysunek 3.5. W dwóch punktach płaszczyzny mamy przyporządkowane dwie dwuwymiarowe przestrzenie wektorów stycznych V₁ i V₂. Z tych przestrzeni zostały wybrane po jednym wektorze (zielony i różowy). Jaki jest kąt między tymi wektorami? Aby znaleźć ten kąt przesuwamy wektor z punktu P₁ do punktu P₂ (lub na odwrót), wzdłuż linii łączącej punkty P₁ i P₂, tak aby kąt między wektorem przesuwanym a linią był cały czas taki sam. Następnie w punkcie P₂ odnajdujemy wektor z przestrzeni V₂ odpowiadający wektorowi przesuwanemu. Mamy w tym momencie dwa wektory w tej samej przestrzeni V₂ dzięki czemu możemy łatwo obliczyć kąt między nimi.

Konstrukcja przesunięcia równoległego (czasem nazywana transportem równoległym) zdaje się być trywialna, a matematycy jak to matematycy w swym dążeniu do precyzji przykrywają oczywiste konstrukcje złożoną teorią. Gdybyśmy poruszali się tylko po przestrzeniach euklidesowych przyznałbym tej opinii rację. Kłopot pojawia się w momencie gdy przestrzeń przestaje być euklidesowa tak jak na przykład powierzchnia sfery czy torusa. Każdemu punktowi tych powierzchni możemy przyporządkować przestrzeń wektorów stycznych. Jakie dwa wektory z dwóch różnych przestrzeni w dwóch różnych punktach są równoległe? Możemy oczywiście zanurzyć sferę czy torus w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej i przenieść wektory równolegle w tej wyżej wymiarowej przestrzeni. Ale każda przestrzeń ma swoje właściwości. Gdy odrywamy wektor z powierzchni sfery i przenosimy go równolegle poprzez przestrzeń euklidesową trójwymiarową do innego punktu sfery to w sumie lekceważmy właściwości przestrzeni sferycznej. To nie da nam satysfakcjonujących wyników. Zaprezentowana wyżej konstrukcja przesunięcia równoległego na powierzchni sfery nie wymaga odrywania od niej wektorów. W każdej chwili przesuwany wektor czuje właściwości przestrzeni sferycznej. Z drugiej strony pomysł zaczerpnęliśmy z przestrzeni euklidesowej. Przesunięcia równoległe odbywa się po torze swobodnego ruchu cząstki. W przestrzeni euklidesowej są to linie proste, a w sferycznej odcinkį wielkich kół. Nie jest to całkjem precyzyjna konstrukcja ale daje dobre wynikį i na obecne potrzeby zupełnie nam wystarczy.

Wróćmy do przesunięcia równoległego na sferze. O jaki kąt zmieni się orientacja wektora przy przesunięciu równoległym wzdłuż trójkąta sferycznego ABC, złożonego z wycinków wielkich kół? Zacznijmy od przesunięcia wzdłuż odcinka AB. Oczywiście, wektor jest cały czas styczny do odcinka toru wzdłuż, którego jest przesuwany. Przesunięcie równoległe zachowuje kąt między wektorem a kołem wielkim. Kąt α_1 jaki tworzy ten wektor z wektorem stycznym do odcinka AB jest równy zeru, przy czym przyjąłem że kąt zero mierzony jest dala linii stycznej skierowanej od A do B, czyli zgodnie z kierunkiem ruchu. Gdy dojdziemy do odcinka BC wektor zacznie przesuwać się wzdłuż niego, zachowując kąt. Ale oba wycinki wielkiego koła przecinają się pod kątem prostym (rys. 3.3), co spowoduje, że do odcinka BC kąt wektora będzie wynosił $\alpha_2 = -\pi/2$. Zmiana kąta wynosi

$$\delta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 - \pi$$

3.1a

Możesz się tu zapytać: w jaki sposób mierzymy kąty między wektorem a daną linią, w danym punkcie (na przykład B) na sferze? Korzystamy z tego, że w nieskończenie małym otoczeniu danego punktu sfera jest podobna do płaszczyzny stycznej. Wtedy nasza linia może należeć do sfery i do tej płaszczyzny stycznej a pomiar. Pomiar kąta zostaje sprowadzony do pomiaru kąta między wektorem zaczepionym w danym punkcie płaszczyzny a prostą przechodzącą przez ten punkt. Prosta ta jest oczywiście styczna do linii, która nas interesuje.

Gdy dojdziemy do punktu C, to zmieniamy kierunek ruchu na odcinek CA. Wektor jest styczny do tego wycinka ale skierowany przeciwnie do kierunku ruchu, stąd α_3 =- π . Przyrost kąta przy przejściu z odcinka BC na odcinek CA wyraża się podobnie jak poprzednio

$$\delta_2 = \alpha_3 - \alpha_2 = -\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \gamma_2 - \pi$$
 3.1b

W punkcie A przechodzimy ponownie na kierunek AB i pętla się zamyka. Zmiana kąta wynosi: Podobnie przy przejściu z odcinka CA na AB mamy

$$\delta_3 = \alpha'_1 - \alpha_3 = \gamma_3 - \pi \tag{3.1c}$$

Dzieje się tak dlatego, że teraz kąt między styczną do kierunku AB (w punkcie A) a wektorem wynosi $\alpha'_1 = \gamma_3$. Sumaryczna zmiana wyniesie

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - 3\pi = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \pi$$
^{3.2}

W ostatnim przejściu skorzystałem z faktu, że obrót o 2π oznacza powrót do wyjściowego kąta. Możemy więc odjąć każdą wielokrotność 2π . Na płaszczyźnie suma kątów γ_1 , γ_2 , γ_3 w trójkącie jest równa π , stąd wynika, że δ jest równe zeru. Spróbujmy obliczyć wyrażenie (3.2), pamiętając o tym, że na sferze suma kątów w trójkącie jest większa od π . Rysunek (3.6) pokazuje figurę utworzoną z przedłużenia dwóch boków trójkąta sferycznego. Taka figura określana jest w języku angielskim jako "luna" – od jej księżycowego wyglądu.



Rysunek 3.6. Jeżeli punkt przecięcia dwóch boków trójkąta sferycznego uznamy za biegun, to po przedłużeniu tych boków otrzymamy drugi punkt przecięcia na drugim biegunie. Tak uzyskaną figurę nazywamy luną

Zauważ, że linie tworzące lunę przetną się po przeciwnych stronach sfery (tzw. punkty antypodalne). Jak tego nie dostrzegasz to przyjrzyj się liniom wyrysowanym na globusie. Ze względu na swą symetrię względem osi sfery łączącej dwa antypodalne punkty wyznaczone przez lunę zajmie ona $\gamma_3/2\pi$ powierzchni całej sfery. Powierzchnia luny wynosi więc

$$L_1 = 4\pi r^2 \frac{\gamma_3}{2\pi} = 2\gamma_3 r^2$$
 3.3

Podobnie obliczymy wzór na pole powierzchni dwóch innych lun (różowej i niebieskiej) pokazanych na rysunku (3.7). Powierzchnia figury utworzonej z wszystkich trzech lun wynosi

$$L = L_1 + L_2 + L_3 - 2s = 2r^2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) - 2s$$
3.4

Kąty γ_1 , γ_2 , γ_3 zaznaczone są na rysunku (3.3). Przez *s* oznaczyłem pole powierzchni pomarańczowego trójkąta sferycznego, czyli połowę pomarańczowej luny z rysunku (3.6). Zauważ (rys. 3.7), że luna niebieska i różowa pokrywają pole tego trójkąta sferycznego, czyli wpływ tych dwóch lun należy odjąć, co daje czynnik -2*s*. Pozostaje nam dostrzec, że figura złożona z trzech lun pokrywa połowę sfery (rys. 3.7). Wynika z tego, że jej powierzchnia to $2\pi r^2$, zatem z (3.4) mamy

$$2r^{2}(\gamma_{1} + \gamma_{2} + \gamma_{3}) - 2s = 2\pi r^{2}$$
5.5

stąd

$$s = r^2 \left(\underbrace{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 - \pi}_{\delta} \right)$$
3.6

oraz



Rysunek 3.7. a) przedłużając boki CB i CA trójkąta ABC (rys. 3.3) otrzymujemy lunę zaznaczoną na różowo; b) przedłużając boki BC i BA otrzymujemy lunę zaznaczoną na niebiesko. Między obiema lunami jest wolna powierzchnia, którą można uzupełnić częścią znajdującą się pod bokiem BC luny pomarańczowej. Wszystkie trzy luny pokrywają zatem połowę sfery.

Widać, że zmiana kąta δ wektora, przy przejściu trójkąta sferycznego, którego boki są wycinkami wielkich kół jest równa polu powierzchni tego trójkąta podzielonemu przez kwadrat promienia sfery. Wzór (3.7) nazywany jest wzorem Gaussa-Bonneta.

Iloraz s/r^2 jest wielkością bezwymiarową i jest równy kątowi bryłowemu opartemu o trójkąt sferyczny. Możemy zatem powiedzieć, że przesunięcie fazy

(kąta) wektora przy przesunięciu równoległym wzdłuż trójkąta utworzonego z wielkich kół jest równe kątowi bryłowemu opartemu na tym trójkącie.

Wróćmy do wzoru (3.2). Pojawił się tam kąt 3π zredukowany następnie o 2π do wartości π . Po drodze gubimy więc pełny obrót, bo doprowadza nas on do kąta początkowego. Jest to podobna sytuacja do tej przedstawionej na rysunku (3.1). Kreska na małym kole wykonały pełny obrót plus jeszcze coś. Ten pełny obrót odrzucamy, interesuje nas tylko to jeszcze coś. Przy niedopasowaniu geometrycznym obwodów kół to jeszcze coś jest różne od zera. Na płaszczyźnie suma kątów γ jest równa π , więc całe wyrażenie (3.2) redukuje się do zera. Na sferze własności trójkątów są inne, co wynika z geometrii sfery (stąd mówimy o efektach geometrycznych) i wyrażenie (3.2) jest różne od zera. Zobaczmy jeszcze czy powtórzenie przeliczeń (3.1, 3.2) na płaszczyźnie da spodziewany wynik. Posłużę się rysunkiem (3.4). Podobnie jak poprzedni przy zmianie trajektorii z odcinka AB na BC mamy zamianę kąta

$$\delta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 - \pi \tag{3.8a}$$

W punkcie C skręcamy w kierunku B, zmiana kąta wyniesie

$$\delta_2 = \alpha_3 - \alpha_2 = \gamma_1 + \gamma_2 - (\gamma_1 - \pi) = \gamma_2 - \pi$$
 3.8b

Gdzie skorzystałem z faktu, że

$$\alpha_3 = \gamma_1 + \gamma_2 \tag{3.8c}$$

Otrzymaliśmy taki sam wzór jak (3.1.b). Przejście od trasy CA na trasę AB, w punkcie A oznacza zmianę kąta

$$\delta_3 = \alpha'_1 - \alpha_3 = 0 - \gamma_1 - \gamma_2 \tag{3.8d}$$

Sumaryczna zmiana, modulo 2π wyniesie

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -2\pi \tag{3.9}$$

Zatem przy przesunięciu równoległym zmiana kąta względem danego kierunku przy przejściu całego trójkąta wynosi zero.

Chcielibyśmy uwzględnić fakt, że możemy obiegać trójkąt czy inną krzywą zamkniętą zgodnie lub przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Ma to istotne znacznie. Zmiana kierunku obiegu nie zmieni wartości kąta przesunięcia fazowego wektora, ale zmieni jego znak. Dla płaszczyzny nie ma to znaczenia, gdyż zerowa zmiana jest nieczuła na zmianę znaku. Jednak dla sfery sprawa jest już istotna. Możemy się umówić, że gdy ruch jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara to kąty są dodatnie, w przeciwnym razie są ujemne.

Uzyskany wzór dla trójkąta sferycznego można uogólnić dla innych kształtów zamkniętych trajektorii. Rysunek (3.8) pokazuje narysowany na sferze wielokąt.



Rysunek 3.8. Wędrówka wokół wielokata sferycznego ABCDE może być rozbita na pięć części: i) Po trójkącie sferycznym AEDA (zgodnie z czarnymi strzałkami), ii) po trójkącie ADBA (zgodnie z fioletowymi strzałkami), iii) po odcinku wielkiego koła AB iv) po trójkącie sferycznym BDCB (zgodnie z niebieskimi strzałkami) iz powrotem do punktu A po odcinku BA. W trakcie tej podróży wszystkie trójkaty obiegane są w tą samą stronę, więc przesunięcia fazowe sumują się. Przejście po odcinku AB i z powrotem może być uznane za obejście trójkąta o zerowym polu powierzchni.

Przechodząc przez kolejne trójkąty składowe kumulujemy przesunięcia fazowe. Całkowite przesunięcie fazowe będzie zatem wyrażone wzorem Gaussa-Bonneta (3.7) przy czym pole *s* jest równe polu wielokąta. W przypadku ciągłych torów zamkniętych twierdzenie udowadniamy aproksymując powstałą figurę wielokątami i przechodząc z ilością boków do nieskończoności.

Przedstawione tu rozumowanie nie ma wartości dowodu matematycznego. Ale nie o dowód chodziło a o elementarną intuicję. Kiedy wędrujemy po nie płaskich powierzchniach, to przesunięcie równoległe wektora nie koniecznie, po powrocie do początku drogi, ustawia ten wektor pod tym samym kątem co kąt wyjściowy. Fakt ten ma swoje konsekwencje fizyczne o czym jeszcze nie raz się przekonamy. Teraz przekonamy się o tym po raz pierwszy.

3.1. I znów wahadło Foucaulta

Zastosujemy wprowadzoną tu teorią do wyliczenia kąta obrotu wahadła Foucaulta. Wzór na ten kąt już podałem (TVII 4.2), ale teraz chciałbym go wyprowadzić. Dla przypomnienia sobie sytuacji zacznijmy analizę od bieguna. Rysunek (3.1.1) pokazuje jak wygląda obrót płaszczyzny wahań wahadła w chwili gdy przekracza ono punkt na biegunie o danej porze i 6h później. Skupmy się na kierunku wektora prędkości przy przejściu przez punkt równowagi wahadła. Kierunek ten pokazuje również czerwona kreska. Jak widać z punktu widzenia obserwatora inercjalnego kierunek prędkości wahadła nie zmienia się, ale dla obserwatora nieinercjalnego (stojącego na biegunie) kierunek ten obrócił się o kąt prosty. Przy każdym kolejnym wahnięciu wahadło przelatuje nad biegunem wzdłuż innego południka, na obracającej się Ziemi. Kierunek prędkości w chwili początkowej jest prostopadły do zielonego południka, a sześć godzin później jest prostopadły do niebieskiego południka.



Rysunek 3.1.1. a) na Ziemi, przy biegunie stoi obserwator (pomarańczowa elipsa), który jest obserwatorem nieinercjalnym. Nad biegunem, w kosmosie, wisi obserwator inercjalny (zielona elipsa). Obaj obserwują wahadło Foucaulta. Linia czerwona wyznacza kierunek wektora prędkości wahadła, przy przejściu przez punkt równowagi; b) w wyniku obrotu Ziemi, po 6h, obserwator nieinercjalny zmienił swoje położenie, względem obserwatora inercjalnego. Dla obserwatora inercjalnego kierunek wektora prędkości pozostał stały, a obróciła się Ziemia wraz z obserwatorem nieinercjalnym. Obserwator nieinercjalny powie, że on jest nieruchomy a obróciła się kierunek wektora prędkości wahadła.

Na równiku płaszczyzna wahań prędkości wahadła jest wszędzie prostopadła do linii równika (zakładamy, wahadło zostało pchnięte w kierunku prostopadłym do linii równika) (rys. 3.1.2). Ale ruch po równiku jest ruchem wzdłuż koła wielkiego, który to odpowiada ruchowi po prostej w przestrzeni euklidesowej, zatem nie powinno się nic zmieniać. Rysunek (3.1.3) przedstawia sytuację między równikiem a biegunem. Rysunek przedstawia z pomocą różowej kreski kierunek płaszczyzny wahań w dwóch różnych punktach.

Można tu sobie ponownie wyobrazić krążek z narysowaną kreską. Gdy krążek ślizga się po równoleżniku kreska obraca się tak aby zachować swoją orientację w przestrzeni. Oznacza to, że jeżeli w chwili początkowej była prostopadła do równoleżnika, to po przejściu pewnego łuku przestaje być do niego prostopadła.

Rysunek (3.1.4) daje jeszcze jedną ilustrację. Krążek z kreską ślizga się po płaskiej wstędze papieru. Tyle, że to ślizganie się krążka spowodowane jest ruchem wstęgi. Kąt między trajektorią krążka na wstędze, a kierunkiem kreski jest cały czas taki sam (rys. 3.1.4a). Jeżeli wstęgę będziemy przesuwać ruchem "oscylującym" (rys. 3.1.4b) to kąt między kreską na krążku a jego trajektorią na wstędze będzie się zmieniał. Ruch krążka po kole wielkim na obracającej się sferze jest analogiem do ruchu po prostej na przesuwającej się wstędze. Ruch po innym kole jest analogiem ruchu po wstędze poruszającej się po zakrzywionym torze. W obu tych przypadkach zmienia się kąt pomiędzy trajektorią krążka a kartką przyczepioną do tego krążka.



Rysunek 3.1.2. Orientacja płaszczyzny wahań wahadła umieszczonego na równiku zmienia się ale tak, że kierunek wektora prędkości wahadła przechodzącego przez punkt równowagi jest taki sam i dal obserwatora związanego z Ziemią i dla obserwatora inercjalnego.

Rysunek 3.1.3. Wahadło Foucaulta na równoleżniku pomiędzy biegunem a równikiem. Przy obrocie Ziemi kierunek wektora prędkości wahadła (różowy odcinek) musi być stały, kiedy mierzymy go z inercjalnego układu współrzędnych. Oznacza to, że dla obserwatora na Ziemi kierunek ten ulega zmianie. W chwili *t*¹ wahadło waha się wzdłuż południka. W chwili *t*² wahadło utrzymuje swój kierunek, ale południk go zmienia. Zmienia się również kat między wahadłem a równoleżnikiem.

Możemy się spodziewać, że do opisu zmiany kąta płaszczyzny wahań wahadła Foucaulta stosuje się wzór Boneta-Gaussa. Oczywiście spodziewać się to nie to samo co wykazać, że tak jest. Nie będę tu wykazywał, ściśle, że obrót płaszczyzny wahań daje się opisać przez pojęcie transportu równoległego. Główny problem polega na tym, że płaszczyzna wahań (rozumiana jako kreska) nie porusza się po kole wielkim, tylko po równoleżniku. Ale z drugiej strony porusza się tak jak kreska na krążku hokejowym. Wyobraź sobie, że na idealnie beztarciowej sferze leży taki krążek.



Rysunek 3.1.4. a) krążek z linią (na rysunku jest tylko linia narysowana zieloną kręską) leży bez tarciowo na wstędze papieru z narysowaną linią prostą, która przesuwa się ruchem prostoliniowym w prawo, w kierunku narysowanej na niej linii. Krążek znajduje się w IUO, a co za tym idzie również układ związany ze wstęgą znajduje się w IUO. Kąt między linią na krążku a linią rysowaną na wstędze jest stały; b) gdy wstęga porusza się zmieniając kierunek ruchu kąt między linią na krążku a linią na wstędze zmienia się. Za zmiany odpowiedzialny jest krzywoliniowy ruch wstęgi - układ związany ze wstęga jest nieinercjalny.

Siła grawitacyjna trzyma go przy powierzchni, ale brak tarcia powoduje, że krążek stara się zachować orientację względem osi układy inercjalnego. Obserwator na biegunie widziałby, że kreska na krążku obraca się raz na dwadzieścia cztery godziny. Między biegunem a równikiem kreska obracałaby się tak jak to pokazane jest na rysunku (3.1.1). Słowem kreska na krążku zachowuje się jak płaszczyzna wahań wahadła Foucaulta. Wiemy, że trajektoria krążka nie biegnąca wzdłuż koła wielkiego da się rozłożyć na sumę trajektorii po wielkich kołach (rys. 3.1.8). W naszym przypadku będą to nieskończenie małe odcinki styczne do kolejnych wielkich kół. Nie mniej efekt sumowania takich nieskończenie małych kawałków będzie taki sam jak kawałków skończonych. Taki zlepiony z kawałków tor pozwala nam dalej korzystać ze wzory Gaussa-Boneta (rys. 3.1.7), co też teraz uczynimy.

Trajektoria płaszczyzny wahań wahadła wycina na sferze czaszę (rys. 3.1.5). Pole obszaru wyciętego przez tą trajektorię jest równe

$$s = 2\pi r^2 \big(1 - \sin(\varphi) \big) \tag{3.1.1}$$

Zgodnie ze wzorem Gaussa-Bonneta zmiana kąta płaszczyzny wahań przy przejściu tego toru jest równe

$$\delta \alpha = 2\pi (1 - \sin(\varphi)) = 2\pi - 2\pi \sin(\varphi) = -2\pi \sin(\varphi) \qquad \qquad 3.1.2$$

Skorzystałem tu z faktu, że zmianę kąta liczmy modulo 2π . Obliczę teraz częstość dla obrotu płaszczyzny wahań wahadła Foucaulta. W czasie jednej doby t_D punkt na Ziemi zakreśla kąt 2π , mamy zatem

$$2\pi = \omega_Z t_D \tag{3.1.3a}$$



Rysunek 3.1.5. Wahadło umieszczone szerokości na geograficznej ϕ porusza się po okręgu o promieniu $r=R\cos(\varphi)$. Tor po którym się porusza zamyka powierzchnię zaznaczoną na różowo.

W tym samym czasie płaszczyzna wahań wahadła Foucaulta, znajdującego się na szerokości geograficznej φ , obróci się o kąt o wartości $2\pi \sin(\varphi)$ (3.1.2), stąd

 $2\pi \sin(\varphi) = \omega_F t_D$

Porównując wzory (3.1.3) mamy

$$\omega_F = \omega_Z \sin(\varphi)$$

Wzór (3.1.3) jest taki jak wzór (TVII 4.2), który jest przybliżeniem wzoru (TVII 4.1). Oznacza to, że metoda geometryczna daje wyrażenie dla wahadeł, dla których stosunek długości l wahadła do amplitudy A jego wychyleń jest mały. Należało się spodziewać, że metoda geometryczna nie jest całkiem dokładna. W końcu, poruszające się zmiennym ruchem wahadło zastąpiliśmy sztywnym wektorem reprezentującym płaszczyznę wahań. Wzór (3.1.3) jest wtedy bardzo dobrymi przybliżeniami.

Przy okazji obliczeń z użyciem metody geometrycznej wprowadziłem kilka ważnych pojęć geometrycznych, do których będę się jeszcze odwoływał. Mamy również za sobą pierwsze spotkanie z ważnym we współczesnej fizyce pojęciem fazy geometrycznej. Myślę, że dla lepszego zrozumienia geometrii układu warto do problemu wahadła podejść jeszcze nieco inaczej. Przy czym nie chodzi mi o znęcanie się nad samym wahadłem, ale na zobrazowanie metod jakie stosujemy na zakrzywionych powierzchniach. Takie wczesne wprawki przydadzą się bardzo gdy przyjdzie nam się spotkać z ogólną teorią względności. Zaczynamy

Zaczniemy od prostego faktu, że odpowiednikiem ruchu po prostej na płaszczyźnie jest na sferze ruch po kole wielkim. Możemy sobie wyobrazić wahadło jako prosty kij przybity do powierzchnie Ziemi, tak że może się on swobodnie obracać wokół osi. Słowem zakładamy, że mocowanie działa tylko i wyłącznie w kierunku normalnym do powierzchni Ziemi; co oznacza w naszym

3.1.3

3.1.3b

modelu do powierzchni sfery, która jest modelem powierzchni Ziemi. Wiesz przecież, że tak czy inaczej nasze rozważania o układach fizycznych przenosimy do abstrakcyjnych konstruktów matematycznych. Rysunek (3.1.6) przedstawia sferę z wyróżnionym równoleżnikiem gdzieś pomiędzy biegunem i równikiem. Na równoleżniku wyróżnione są dwa bliskie sobie punkty P_1 i P_2 .



Rysunek 3.1.6. Sfera z układem południków i równoleżników. Jeden z równoleżników wyróżniony jest czerwoną linię. Przez dwa bliskie punkty (zielony to P₁, niebieski to P₂) przechodzą dwa wielkie koła. Koła te są inaczej zorientowane co wskazuje na sposób zmiany orientacji płaszczyzny wahań wahadła Foucaulta

Przez punkty te przebiegają dwa koła wielkie. Przy ruchu w nieskończenie małym otoczeniu punktu P_1 i P_2 po równoleżniku, możemy uważać, że ruch odbywa się po stycznych kołach wielkich. Przy przejściu między dwoma punktami P_1 i P_2 następuje zmiana stycznego koła wielkiego. Skoro ruch swobodnie puszczonego wahadła jest zgodny z lokalnie narysowanym kołem wielkim, to płaszczyzna wahań musi się obracać przy przejściu od punktu P_1 do punktu P_2 . Oznacza to obrót kija, który pokazuje kierunek płaszczyzny wahań. Jest to efekt geometryczny, więc spróbujemy wyznaczyć go czysto geometrycznie.

Rysunek (3.1.7) pokazuje wektor \mathbf{r}_1 prostopadły do wielkiego koła stycznego do danego równoleżnika.



Rysunek 3.1.7. Rysunek przedstawia wielkie koło styczne do zaznaczonego na czerwono równoleżnika. Prostopadły do koła promień, zaczepiony w jego środku wskazuje na ten sam równoleżnik, tylko po drugiej strony sfery

Jeżeli przesuniemy się do innego punktu jak to pokazuje rysunek (3.1.6) dla punktu zielonego i niebieskiego, to zmieni się orientacja wielkiego koła tak, że promień *r* przesunie się również do innego punktu na tym samym równoleżniku. Przy czym łuk po którym przesunie się koniec wektora **r** jest równy co do długości łukowi łaczącego punkty zielony i niebieski. Dlaczego? Po pierwsze jeżeli punkty niebieski przejdzie na drugą stronę sfery (połowę długości równoleżnika) to z symetrii widać, że koniec promienia też przejdzie na drugą stronę łuku. Po drugie, ruch końca wektora powinien być proporcjonalny do ruchu punktu styczności. Ζ pierwszego punktu można wynika, że współczynnik proporcionalności jest równy jeden. Oznacza to również, że kat $\Delta \alpha$ o jaki obróci się wektor **r** jest równy kątowi $\Delta \varphi$ o jaki przesunie się koniec wektora **r** po równoleżniku. Rysunek (3.1.8) pomaga w obliczeniu długości łuku po której wędruje koniec wektora r.

Mamy relację

$$r\Delta\alpha \approx r\sin(\varphi)\Delta\theta \Longrightarrow \Delta\alpha \approx \sin(\varphi)\Delta\theta \qquad 3.1.4a$$

Gdy przejdziemy do relacji nieskończenie małych to otrzymamy

$$d\alpha = \sin(\varphi)d\theta \qquad 3.1.4$$

Przypomnę, że kąt α jest kątem między wektorami r pokazującymi dwa bliskie punktu na danym równoleżniku a kąt φ mierzymy wzdłuż tego równoleżnika.



Rysunek 3.1.8. Relacja między kątem $\Delta \alpha$ między dowoma wektorami **r** pokazującym dwa bliskie sobie punkty na danym równoleżniku, a kątem θ mierzonym na tym równoleżniku, między tymi punktami.

Jednocześnie jeżeli wyrysujemy kąt między dwoma wielkimi kołami dla dwóch bliskich sobie punktów na danym równoleżniku, jak punkt zielony i niebieski na rysunku (3.1.6) to okaże się on równy $\Delta \alpha$. Kąt między kołami wielkimi definiujemy tu jako kąt między stycznymi do tych kół w punktach leżących na danym równoleżniku (rys. 3.1.9)



Rysunek 3.1.9. Kąt między dwoma kołami wielkimi stycznymi do tego samego równoleżnika (kolor czerwony)

Jednocześnie styczne te wyznaczają kierunek płaszczyzny wahań wahadła Foucaluta. Zróżniczkujemy obie strony (3.1.4) po czasie

$$\omega_F = \sin(\varphi)\omega_Z$$

3.1.5

Z lewej strony otrzymamy prędkość zmiany kąta α , czyli również prędkość zmian kąta orientacji płaszczyzny drgań wahadła Foucaulta. Z prawej strony mamy prędkość kątową obiegu wybranego punktu na równoleżniku, czyli prędkości kątową ruchu obrotowego Ziemi. W ten sposób na drodze czysto geometrycznych rozważań otrzymaliśmy wzór (3.1.3)

4. Zasada d'Alemberta 🌲 / 🔶

W (§TVII 1) wprowadziłem pojęcie sił bezwładności (pozornych) jako sił potrzebnych przy stosowaniu drugiego prawa dynamiki w nieinercjalnych układach odniesienia. Rysunek (4.1) pokazuje kabinę poruszającą w przestrzeni kosmicznej, ruchem jednostajnym po łuku koła. Wiemy, że na taką kabinę działa siła dośrodkowa, której źródłem jest grawitacja jakiejś planety. Ta siła dośrodkowa ciągnie kabinę w kierunku środka łuku. Obserwator w kabinie czuje się zaniepokojony, gdyż nie odczuwa działania żadnej siły. Stwierdza również, że kulka wisi w jego kabinie swobodnie. Wie jednak, że będąc w układzie nieinercjalnym powinien dodać do sił przyłożonych siły bezwładności, w tym wypadku będzie to siła odśrodkowa, która zrównoważy działanie siły grawitacji.



Rysunek 4.1. Kabina porusza się w przestrzeni po łuku. Inercjalny obserwator (niebieski) przypisuje ten fakt, istnieniu siły przyłożonej (siły grawitacji) normalnej do toru kabiny (niebieska strzałka). Aby wyjaśnić zachowanie kulki w układzie kabiny obserwator związany z kabiną (dla niego kabina spoczywa) wprowadza siłę bezwładności – siłę odśrodkową (zielona strzałka), która jest równa sile dośrodkowej, ale jest przeciwnie skierowana. Zauważ, że gdy obserwator niebieski (inercjalny) wprowadzi siłę odśrodkową, to w jego układzie zrównoważy ona siłę dośrodkową.

Wróćmy do obserwatora inercjalnego. Gdy i w jego przypadku wprowadzimy siłę odśrodkową stanie się coś interesującego. Obie siły dośrodkowe i odśrodkowa zniosą się.

Gdy punkt materialny porusza się z przyspieszeniem własnym **a**, to możemy owo przyspieszenie rozłożyć na część styczną i normalną (§TVI 5). Odpowiednio na punkt działają siły: styczna do toru (powodująca zmianę wartości prędkości) i normalna do toru (powodująca zmianę kierunku prędkości)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_s} + \mathbf{F_n}$$

Odpowiadają im dwie składowe siły bezwładności

$$\mathbf{F}_{\mathbf{B}} = \underbrace{\mathbf{F}_{\mathbf{B}s}}_{-\mathbf{F}_{\mathbf{S}}} + \underbrace{\mathbf{F}_{\mathbf{B}n}}_{-\mathbf{F}_{\mathbf{n}}}$$

$$4.2$$

4.1

Całość ponownie sumuje się do zera

$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$

Możemy w tym momencie sformułować wniosek

Postulat 4.1. O zerowaniu się sił przyłożonych i bezwładności

W czasie ruchu dowolnej bryły sztywnej siły przyłożone działające na tą bryłę równoważą się, w każdej chwili, z odpowiednimi siłami bezwładności, przy czym wyznaczając siły bezwładności układ współrzędnych wiążemy ze środkiem masy danej bryły.

Uwaga 4.1:

W niektórych publikacjach postulat (4.1) nazywane jest już zasadą d'Alemberta. Ja jednak chcę sformułować ją w bardziej ogólny sposób, to jest z użyciem przesunięć wirtualnych. Żeby nie wprowadzać zamieszania w nazwach, wolałem określić powyższe jako postulat o zerowaniu sił rzeczywisty i bezwładności.

Jak wynika z powyższego sformułowania siły bezwładności wyrażamy w układzie związanym ze środkiem masy bryły sztywnej, to jest w układzie własnym. Gdy bryła nie jest sztywna sprawy się komplikują i nie ma tak prostej metody zdefiniowania układu z nią związanego.

Postulat (4.1) wygląda na dość oczywisty wniosek z drugiego dynamiki Newtona. Nie jest to jednak prawda. Chociaż można go wydedukować z drugiego prawa dynamiki, to prowadzi do ogólniejszej w swej naturze zasady d'Alemberta.

Zgodnie z przytoczonym stwierdzeniem, na ciało w ruchu przyspieszonym działają siły, które się równoważą (uwzględniając siły bezwładności). Gdy siły się równoważą skłonni jesteśmy uznać, że ciało jest w równowadze. Tyle, że teraz jest to równowaga dynamiczna. Ciało, na które działa siła rzeczywista stawia jej opór - "nie poddaje się bez walki" (rys. 4.2). Opór ten nazwę oporem dynamicznym. Przy braku oporu dynamicznego, nawet najdrobniejsza siła powodowałaby nieskończone przyspieszenie ciała. Miarą oporu dynamicznego jest masa. Większa masa oznacza większy opór dynamiczny i mniejsze przyspieszenie przy danej sile. Gdy próbujemy rozpędzić ciało jego opór dynamiczny czujemy fizycznie. Ciało jakby broniło się przed próbą zmiany jego prędkości. Pojawienie się oporu zwykle kojarzymy z pojawienie się siły. Stąd w potocznym języku mamy pojęcie sił bezwładności. Twierdzenie (4.1) "konsumuje" te nasze odczucia nadając siłom bezwładności status równoprawny z siłami przyłożonymi. Jak zobaczymy później prowadzi to do rozmycia rozróżnienia pomiędzy siłami przyłożonymi a siłami bezwładności, które nazywaliśmy też siłami pozornymi (§TVII 2). Dlatego od tego momentu nie będę używał określenia siły pozorne pozostając przy określeniu siły bezwładności.



Rysunek 4.2. Na pochyłości stoi wózek z paletą cegieł, tak że siła ściągająca (równoległa do powierzchni równi składowa siły grawitacji) praktycznie równoważy siły tarcia. Mimo to rozpędzenie wózka wymaga wysiłku, tym większego im więcej na nim położymy cegieł. Zwyczajowo uważamy, że rozpędzając wózek walczymy z siłami bezwładności, które pojmujemy jako naturalną skłonność ciał do stawiania oporu siłą zewnętrznym. W każdej chwili mamy stan równowagi między siłami przyłożonymi a siłami bezwładności.

Zasada d'Alemberta wykorzystuje siły bezwładności tak jak siły przyłożone, stwierdzając, że ciała poruszające się z niezerowym przyspieszeniem własnym są stanie równowagi dynamicznej. W dwóch różnych sformułowaniach mechaniki: Newtona i d'Alemberta mamy dwa podejścia do kwestii sił bezwładności. Nie jest to szczególnie dziwne. To czy dana siła jest siłą bezwładności, przyłożoną, skośną czy piegowatą zależy od ram teorii, w której istnieje podział sił na różne rodzaje. W teorii Newtona podział ten jest bardzo wyraźnie zarysowany, przez wyraźne wyróżnienie klasy układów inercjalnych. W przypadku ujęcia d'Alemberta sprawy ulegają rozmyciu. Używając określenia "siła bezwładności" musimy zdawać sobie sprawę z ram, w których to pojęcie istnieje. Ale uwaga: moje stwierdzenie, że klasyfikacja sił zależy od ram teorii nie może być intepretowane w ten sposób - w sumie możemy sobie stworzyć jaką teorię chcemy z jakimi siłami chcemy. Teoria musi sensownie opisywać duża klasę zjawisk fizyczny. A to jest bardzo silny warunek, który szybko wykluczy teorie tworzone z powietrza. Nie mniej jeżeli dwie sensowne teorie dają inne klasyfikacje sił czy czegokolwiek innego, to należy pamiętać, że posługiwanie się daną klasyfikacją musi być opatrzone dopiskiem: "w ramach danej teorii".

Ponieważ postulat (4.1) określa warunek równowagi sił możemy uogólnić warunki na równowagę statyczną zdefiniowane w (def. TV 1.2.2). Odpowiednikiem równowagi sił przyłożonych będzie równowaga sił przyłożonych i bezwładności. Niech w układzie działa *N* sił przyłożonych i *M* sił bezwładności, wtedy

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{i} + \sum_{i=1}^{M} \mathbf{F}_{Bi} = \mathbf{0}$$

$$4.4$$

Podobnie uogólnimy warunek równowagi dla momentu sił. Niech w układzie działa *K* momentów przyłożonych sił i *L* momentów sił bezwładności, wtedy

$$\sum_{i=1}^{K} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{i} + \sum_{i=1}^{L} \mathbf{r}_{i} \times \mathbf{F}_{Bi} = \mathbf{0}$$

$$4.5$$

Widzimy z tego, że postulat (4.1) pozwala przenieść relacje dynamiczne na obszar statyki. Mówimy tu o układzie będącym w równowadze dynamicznej. Trzeba pamiętać, że tego typu analogie mają zawsze swoje ograniczenia. Przykładowo statyka daje nam przez warunki równowagi sił i momentów sił równania algebraiczne. Twierdzenie (4.1) skutkuje w równaniach różniczkowych. Tutaj więc analogii już nie ma. Mimo to dalej możemy używać zasady prac wirtualnych (§TIII 5 i §TV 5), to znaczy, że praca sił przyłożonych i bezwładności na drodze wirtualnego przesunięcia powinna być równa zeru. To właśnie daje nam zasadę d'Alemberta

Określnie 4.1: zasada d'Alemberta

W układzie N punktów materialnych praca zsumowanych sił przyłożonych i sił bezwładności na drodze będącej przesunięciem wirtualnym jest równa zeru.

$$\left(\sum_{i=1}^{3N} F_i + \sum_{i=1}^{3N} F_{Bi}\right) \delta x_i = 0$$
 4.6

Widać również, że zasada d'Alemberta jest rozszerzeniem zasady prac wirtualnych z układów statycznych na układy dynamiczne. Możemy równanie (4.14) przepisać w jeszcze ogólniejszej postaci

$$\left(\sum_{i=1}^{3N} F_i - \sum_{i=1}^{3N} \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}\right) \cdot \delta x_i = 0$$

$$4.7a$$

Dla układu o zmiennej masie mamy

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{i} - \sum_{i=1}^{N} m_{i} \mathbf{a}_{i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}m_{i}}{\mathrm{d}t} \mathbf{v}_{i}\right) \cdot \delta \mathbf{r}_{i} = 0$$

$$4.7$$

Tutaj skorzystałem z zapisu wektorowego, co pozwoliło uniknąć bałaganu z indeksami (na każdą masę przypadają trzy wartości współrzędnych kolejno siły, pędu, przyspieszenia i przesunięcia wirtualnego).

Mogłoby się zdawać, że w równaniu (4.4) liczba sił bezwładności powinna być równa liczbie sił przyłożonych, ale nie jest to prawda, gdyż nie każda siła przyłożona powoduje ruch przyspieszony układu, co obrazuje rysunek (4.3). Z twierdzenia (TIV 2.1) wiemy, że w układzie izolowanym prędkość środka masy v_s układu ciał, mierzona w układzie inercjalnym, jest stała, co wynika z zasady zachowania pędu. W danym układzie współrzędnych mamy

$$m\mathbf{v}_{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^{K} m_i \mathbf{v}_{\mathbf{i}}$$

$$4.8$$

Gdzie *m* jest masą całego układu a *K* liczbą punktów materialnych. Różniczkując obie strony mamy

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathbf{s}}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{K} m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\mathbf{i}}}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow m\mathbf{a}_{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^{K} m_i \mathbf{a}_{\mathbf{i}} \Longrightarrow m\mathbf{a}_{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{F}_{\mathbf{w}i} \qquad 4.9$$

Gdzie \mathbf{F}_{wi} jest wypadkową siłą działającą na *i*-ty punkt. Musi przy tym być

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{j} = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{F}_{mi} = -\sum_{i=1}^{K} \mathbf{F}_{Bi} \quad \text{oraz } \mathbf{F}_{wi} = -\mathbf{F}_{Bi}$$
 4.10

N jest liczbą wszystkich sił działających w układzie, przy czym $N \ge K$, \mathbf{F}_{bi} jest *i*-tą siłą bezwładności działającą na *i*-ty punkt. Ogólnie rzecz biorąc sił rzeczywistych w układzie jest więcej niż bezwładności i więcej niż punktów materialnych. Wiele sił przyłożonych wzajemnie się równoważy (rys. 4.3). mówimy wtedy, że są to siły wewnętrzne. Mówiliśmy sporo o tych siła w temacie tensory analizując siły spójności wewnątrz sześcianu ((rys. TXII 3.6) działające wzdłuż powierzchni przekroju) lub w temacie (§TIII 2.3) mówiąc o siłach spójności między dwoma połówkami bańki mydlanej.

Definicja 4.1: Siły wewnętrzne

Siły który wzajemnie się równoważą w ramach danego układu fizycznego, na mocy zasady akcji i reakcji, nazywamy siłami wewnętrznymi

Fakt 4.1:

Sił wewnętrznych nie wliczamy do warunków równowagi (4.4 i 4.5)



Rysunek 4.3. Na ramie przymocowana jest sprężyna, o którą opiera się sześcienny blok o masie *m*. Całość leży na wózku, który porusza się z przyspieszeniem **a**, pod wpływem siły **F**. W efekcie sześcienny blok również porusza się z przyspieszeniem **a** pod wpływem składowej poziomej siły (równej *m***a**) wywieranej przez sprężynę (niebieska pozioma strzałka). Siłę tę równoważy siła bezwładności równa –*m***a** (zielona strzałka). Składową pionową grawitacji (pomarańczowa pionowa strzałka) równoważy siła sprężystości podłogi wózka (różowa strzałka). Zatem siła grawitacji i sprężystości podłogo wózka nie mają odpowiadających im sił bezwładności.

Te równoważące się siły nie zmieniają dynamiki układu. Zależność (4.10) mówi tylko, że dla każdego punktu suma wszystkich sił przyłożonych musi być równa sumie sił bezwładności. Łącząc (4.9) i (4.8) mamy

$$m\mathbf{a}_{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^{K} \mathbf{F}_{\mathbf{w}i} = -\sum_{i=1}^{K} \mathbf{F}_{\mathbf{B}i} = \mathbf{F}_{\mathbf{B}} = -m\mathbf{a}_{\mathbf{B}s}$$
 4.11

Gdzie \mathbf{F}_{Bi} , jest siłą bezwładności działającą na *i*-ty punkt, a \mathbf{F}_{B} jest siłą wypadkową. Wracając do (4.4) otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F_i} + \mathbf{F_B} = \mathbf{0}$$
 4.12

Zatem siły bezwładności możemy zastąpić wypadkową siłą bezwładności działającą na środek masy układu. Niestety dla momentów sił takie uproszczenie nie jest możliwe.

Wszystkie napisane powyżej zależności można rozpisać również dla ciągłych rozkładów mas. Odpowiednie sumy zamieniamy na całki, a masy na nieskończenie małe masy dm, tak jak to już nieraz czyniliśmy. Zastosuję twierdzenie (4.1) do rozwiązania zadania.



Rysunek 4.4. Jean Le Rond d'Alembert (ur. 16.11.1717 w Paryżu, zm. 29.10.1783 w Paryżu). Francuski filozof, fizyk i matematyk. Był nieślubnym synem pisarki i kurtyzany Caludine Guerin de Tencin, prowadzącej niezależny salon literacki w Paryżu i generała artylerii Louisa-Camusa Destouchesa. Matka pozostawiła niemowlę na schodach kościoła St. Jean-le-Rond a mały Jean znalazł się w sierocińcu. Niedługo potem został adoptowany przez Madame Rousseau, żonę szklarza. Biologiczny ojciec potajemnie łożył na wykształcenie syna, a w testamencie zapisał mu 1200 liwrów rocznej renty. W szkole Czterech Narodów prowadzonej przez jansenistów Alembert odebrał solidne wykształcenie w zakresie filozofii, prawa i sztuki. Po ukończeniu szkoły studiował prawo i medycynę. Od 1772 roku pełnił funkcję sekretarza Akademii Francuskiej. Był współtwórcą Wielkiej Encyklopedii. Wniósł istotny wkład w rozwój mechaniki (zasada d'Alemberta) i równań różniczkowych (wprowadził rachunek pochodnych cząstkowych). Portret pędzla Maurice Quentin de La Tour z 1753; źródło Wikipedia.

Zadanie 4.1.

Wyznaczyć maksymalną wartość przyspieszenia *a*, jakie może osiągnąć samochód przy starcie, jeżeli napęd jest na tylne koła. Odległość między osiami kół przednich i tylnych wynosi *L*. Współczynnik tarcia między oponami a jezdnią jest równy *f*. Współrzędne środka masy samochodu $\mathbf{r}_s(x_s, y_s)$, w układzie tak jak na rysunku (4.5). Pomiń opór toczenie się kół przednich oraz wpływ ich ruchu obrotowego.

Rysunek (4.5) pokazuje działające na samochód siły



Rysunek 4.5. Siły działające na samochód: F_T – siła tarcia, N_1 i N_2 siły reakcji jezdni. F_B jest wypadkową siłą bezwładności przyłożoną do środka masy samochodu (czerwony punkt). Na rysunku nie zaznaczono przyłożonej do środka masy siły grawitacji.

W osi pionowej siły rzeczywiste równoważą się, co oznacza, że możemy zadanie traktować jako jednowymiarowe. Zgodnie z twierdzeniem (4.1) siły przyłożone muszą równoważyć się z siłami bezwładności. Możemy zastąpić zbiór sił bezwładności (działający na każdą cząstkę samochodu) siłą wypadkową F_B =-ma zaczepioną w środku masy samochodu. Stąd mamy

$$F_T - ma = 0 \tag{4.13a}$$

Skorzystam również z warunku równowagi momentów sił (4.5). Względem punktu B.

$$N_2 L - mgx_s + may_s = 0 4.13b$$

Ostatni wyraz odpowiada za siłę bezwładności: $\mathbf{F}_{\mathbf{B}}=-m\mathbf{a}$. Wielkość y_s jest ramieniem dla siły $\mathbf{F}_{\mathbf{B}}$ względem punktu A (oraz B). Względem punktu A mamy

$$-N_1 L + mg(L - x_s) + may_s = 0 4.13c$$

Ponadto mamy związek

$$F_T = f N_1 \tag{4.13d}$$

Z równań (4.11a) i (4.11d) mamy

$$fN_1 - ma = 0 \tag{4.14a}$$

Równanie to mówi, że przy danym współczynniku tarcia, przyspieszenie jakie uzyskamy dane jest poprzez a. Nie temu przyspieszeniu odpowiada prędkość kątowa kół ω . Większe przyspieszenie oznaczałoby brak równowagi dynamicznej, co na mocy zasady d'Alemberta jest niemożliwe. Ale koła mogłyby

1 1 2 1

się kręcić z prędkością większą niż ω , tyle że oznaczałoby to toczenie się z poślizgiem. Równanie (4.13c) daje

$$N_1 = mg \frac{(L - x_s)}{L} + ma \frac{y_s}{L}$$

$$4.14b$$

Po podstawieniu do (4.12a) mamy

$$fmg\frac{(L-x_s)}{L} + fma\frac{y_s}{L} - ma = 0$$

$$4.14c$$

Stąd obliczamy a

$$a = fg \frac{L - x_s}{L - fy_s} \tag{4.15}$$

Wróćmy do dynamiki ciała sztywnego. Z (§TVII 2) wiemy, że w układzie środka masy tego ciała pojawią się siły bezwładności związane z obrotem bryły. Są to siła dośrodkowa, Coriolisa i siły bezwładności Eulera. Gdy układ współrzędnych wiążemy ze środkiem masy bryły to suma sił odśrodkowych jest równa zeru (spróbuj to pokazać). Podobnie będzie z sumą sił bezwładności Eulera. Siła Coriolisa będzie również równa zeru, gdyż w układzie własnym bryła ma zerową prędkość. Z tego samego powodu zniknie siła bezwładności związana z ruchem liniowym bryły. Wynika z tego, że na polu gry zostały tylko siły przyłożone i siły bezwładności związane z własnym przyspieszeniem układu odniesienia. Zgodnie z zasadą d'Alemberta mamy

$$\mathbf{F} - \mathbf{a}_{\mathbf{K}} \sum_{i} m_{i} = 0 \Longrightarrow \mathbf{F} - \mathbf{a}_{\mathbf{K}} M = 0 \Longrightarrow \mathbf{F} = \mathbf{a}_{\mathbf{K}} M$$

$$4.16$$

Gdzie M jest masą bryły. Otrzymaliśmy znany już fakt.

Fakt 4.1:

Środek masy bryły sztywnej porusza się jak punktowa cząstka, do której przyłożona jest siła wypadkowa będąca sumą sił przyłożonych.

Załóżmy teraz, że układ współrzędnych jest zaczepiony w środku masy bryły sztywnej, a jego osie są zgodne z osiami głównymi bryły sztywnej. Wtedy pozadiagonalne współrzędne tensora momentu bezwładności (fakt TXII 2.1) są równe zeru. Współrzędne momentu siły odśrodkowej wyrażą się wzorami

$$(I_{yy} - I_{zz})\omega_{y}\omega_{z}; (I_{zz} - I_{xx})\omega_{xx}\omega_{zz}; (I_{xx} - I_{yy})\omega_{xx}\omega_{yy}$$

$$4.17$$

Podobnie możemy wyrazić moment sił bezwładności związany z przyspieszeniem układ K'.

$$-I_{xx}\dot{\omega}_{x}; -I_{yy}\dot{\omega}_{y}; -I_{zz}\dot{\omega}_{z}$$

$$4.18$$

Zgodnie z zasadą d'Alemberta mamy

$$I_{xx}\dot{\omega}_{x} - (I_{yy} - I_{zz})\omega_{y}\omega_{z} = M_{x}$$

$$4.19a$$

$$I_{yy}\dot{\omega}_{y} - (I_{zz} - I_{xx})\omega_{x}\omega_{z} = M_{y}$$

$$4.19b$$

$$I_{zz}\dot{\omega}_{z} - (I_{xx} - I_{yy})\omega_{x}\omega_{y} = M_{z}$$

$$4.19c$$

Otrzymaliśmy znane nam równania Eulera (2.5). Zatem równania Eulera, które opisują dynamikę bryły sztywnej w układzie związanym z osiami głównymi tej bryły, z punktu widzenia zasady d'Alemberta mogą być interpretowane jako warunek równowagi związany ze wzajemnym kompensowaniem się trzech momentów sił: momentu związanego z siłą odśrodkową, momentu związanego z siłami bezwładności wynikającymi z przyspieszenia własnego układu odniesienia oraz z momentu wypadkowej siły przyłożonej.

W ogólnym przypadku równania ruchu wynikające z zasady d'Alemberta są niecałkowalne. Oznacza to, że nie możemy przyjąć, że stan układu zależy tylko od parametrów opisujących ten układ w danym punkcie. Liczy się również historia. Jeżeli przykładowo chcemy obliczyć pracę przyłożonej siły **F**, przy przesunięciu układu, od punktu A do punktu B, z uwzględnieniem sił tarcia, to praca ta będzie zależna od drogi. W szczególnych przypadkach, gdy wszystkie działające siły są siłami potencjalnymi równania ruchu stają się całkowalne. Teraz przyjrzymy się tej szczególnej sytuacji. Dla siły potencjalnej równej δV , gdzie V to potencjał pola sił, z zasady d'Alemberta mamy równanie

$$\sum_{i} m_{i} \delta \mathbf{V} + \sum_{i} m_{i} \mathbf{a}_{i} \cdot \delta \mathbf{r}_{i} = 0$$

$$4.20$$

Przyjmijmy teraz, że przesunięcie wirtualne $\delta \mathbf{r}_i$ jest równoważne przesunięciu rzeczywistemu

$$\delta \mathbf{r}_{i} \rightarrow d\mathbf{r}_{i}$$
 4.21a

Jednocześnie zmiana energii potencjalnej przy przesunięciu wirtualnym $\delta \mathbf{r}_i$ stanie się zmianą energii potencjalnej dV przy przesunięciu rzeczywistym. Drugie człon (4.20) można teraz zapisać w postaci

$$\sum_{i} m_{i} \ddot{\mathbf{r}}_{i} \cdot d\mathbf{r}_{i} = \sum_{i} m_{i} \ddot{\mathbf{r}}_{i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{i} dt = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i} m_{i} \dot{\mathbf{r}}_{i}^{2} \right) dt = dT$$

$$4.22$$

Przez T oznaczyłem energię kinetyczną układu. Równanie (4.23) przyjmie postać

$$d(U+T) = 0 4.23$$

$$\mathrm{d}U = \sum_{i} m_i \mathrm{d}\mathrm{V} \tag{4.23a}$$

Tutaj U oznacza energię potencjalną układu. Równanie (4.23) jest całkowalne, po obliczeniu całki mamy

$$T + U = E = const \tag{4.26}$$

Przez *E* oznaczyłem energię układu rozumianą jako suma jego energii kinetycznej i potencjalnej. Równanie (4.26) to nic innego jak prawo zachowania energii, które jak z tego widać wynika z zasady d'Alemberta w układzie, w którym działające siły przyłożone są siłami potencjalnymi.

Dyskusja 4.1: Całka pierwsza

Równanie (4.20) jest równaniem różniczkowym. Przyspieszenie i-tej cząstki, to druga pochodna jej położenia po czasie. Widać, że wyrażenie określające energię kinetyczną jest stałe dla układu opisanego równaniem (4.20). To znaczy, że funkcja określająca energię układu ma stałą wartość na wszystkich fizycznych trajektoriach układu. Taką funkcję nazywamy całką pierwszą układu równań różniczkowych. Jest to pojęcie z zakresy teorii równań różniczkowych, a więc wychodzące poza zakres mechaniki klasycznej. Jeżeli mamy układ równań różniczkowych i istnieje funkcja, która przyjmuje stałą wartość dla dowolnego rozwiązania tego układu, to funkcja ta nazywana jest całką pierwszą tego układu równań. Ta krótka dyskusja prowadzi nas do

Definicja 4.2: Całka pierwsza układu równań różniczkowych

Dla układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_{1} = f_{1}(t, x_{1}, \dots, x_{n}) \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_{n} = f_{n}(t, x_{1}, \dots, x_{n}) \end{cases}$$

$$4.27$$

funkcja g jest całką pierwszą, jeżeli dla dowolnego rozwiązania tego układu

$$x_1 = x_1(t), \dots x_n = x_n(t)$$
 4.27a

mamy

$$g(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = \text{const}$$

$$4.27b$$

Założenie, że siły przyłożone są siłami potencjalnymi nie oznacza, że to samo można powiedzieć o siłach bezwładności. Często siły bezwładności potencjale nie są. Przykładem potencjalnej siły bezwładności jest siła odśrodkowa (§TVII 2.2).

$$\mathbf{F}_{od} = m\omega^2 \mathbf{r} \tag{4.28a}$$

Dla siły odśrodkowej możemy zdefiniować potencjał postaci

$$V_{od} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$
 4.28b

Przykładem siły bezwładności dla której nie możemy zdefiniować potencjału jest siła Coriolisa. Siła Coriolisa jest zawsze prostopadła do kierunku przesunięcia.

Zatem nigdy nie wykonuje pracy. Różnica potencjałów w dwóch różnych punktach musi być miarą pracy wykonanej nad przeniesieniem jednostkowego ładunku pomiędzy tymi punktami. W przypadku siły Coriolisa ta różnica musi być zawsze równa zero. Oznacza to, że potencjał dla tej siły powinien być wszędzie stały. Drugim warunkiem na potencjał jest to by jego gradient wzięty ze znakiem minus był równy sile na działające na jednostkę masy. Ale gradient z funkcji stałej jest równy zeru, stąd nie ma możliwości sensowej definicji potencjału dla siły Coriolisa.

Musimy na nowo uporządkować kwestie sił przyłożonych i bezwładności. Rozważmy cząstkę o masie m (rys. 4.6). Jej ruch będziemy analizowali z układu inercjalnego K i nieinercjalnego K'. Początek układu K' porusza się wzdłuż toru C niekoniecznie ze stałą prędkością. Wektor **T** jest wektorem wodzącym pokazującym położenie początku układu nieinercjalnego względem początku układu inercjalnego. Wektory **R** i **R'** są wektorami wodzącymi cząstki mzaczepionym w układzie inercjalnym i nieinercjalnym. Mamy przy tym $\mathbf{R} = \mathbf{T} + \mathbf{R'}$ 4.29

Różniczkując dwukrotnie obie strony tego równania mamy

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{T}} + \ddot{\mathbf{R}}' \Longrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}_{\mathbf{K}} + \mathbf{a}' \tag{4.30}$$

Literkami "a" oznaczyłem odpowiednie przyspieszenia. Prawa strona ostatniego równania wyznacza nam siłę bezwładności jaka działa w układzie K' z punktu widzenia układu K.

$$\mathbf{F}_{\mathbf{B}}' = -m\mathbf{a}_{\mathbf{K}} - m\mathbf{a}' \tag{4.31}$$

Pierwszy składnik tego wyrażenia wyraża siłę bezwładności jaką byśmy dodali analizując ruch cząstki z układu inercjalnego. Drugi składnik to siła bezwładności jaką przypisze cząstce obserwator w układzie K'. Przypomnę, że w swoim układzie K' obserwator widzi, że cząstka porusza się z przyspieszeniem **a**. Jest to zarazem składowa siły bezwładności wyznaczonej w układzie inercjalnym K.



Rysunek 4.6. Ruch cząstki o masie *m* opisujemy z nieinercjalnego układu współrzędnych K'.

Pamiętać jednak należy, że dla danego obserwatora rozróżnienie na siły bezwładności i rzeczywiste niekoniecznie jest oczywiste. Powiedzmy, że w odległej przyszłości, kiedy podróże w Kosmos spowszednieja, pan Abacki, po ostro zakrapianej imprezie, budzi się w zamkniętym pomieszczeniu. Na stole znajduje kartkę z komunikatem: Uwolnimy cię jak prawidłowo odgadniesz czy jesteś w kabinie statku kosmicznego czy na Ziemi. Pan Abacki wie, że kapitanowie statku rozpędzają się z przyspieszeniem o wartości g, tak by pasażerowie czuli się jak na Ziemi (rys. 4.7). W tej sytuacji zupełnie nie wie jak znaleźć odpowiedź. Przyspieszenie g kabiny oznacza, że wszystko w niej dzieje się tak jakby kabina stała na Ziemi. Te dwie sytuacje są fizycznie nierozróżnialne. Abacki wykonuje prosty eksperyment. Obserwuje w kabinie ruch swobodnie puszczonej kulki. Nachodzi go fantazja aby ruch kulki opisać w układzie związanym z kulką. We własnym układzie współrzędnych kulka spoczywa, to oznacza, że działające siły wyznaczone w tym układzie muszą dodawać się do zera. Ponieważ, w układzie Abackiego kulka spada z przyspieszeniem -g (niech oś z układu Abackiego wskazuje od podłogi do sufitu kabiny), to do działającej siły dodaje siłę bezwładności mg. Siła działająca to siła, której działanie odczuwa Abacki jako siłę ciążenia. Tylko jaki jest status siły działającej? Gdy Abacki wie, że kabina stoi na Ziemi to stwierdzi, że jest to siła pochodząca od pola grawitacyjnego, czyli siła przyłożona równa -mg. Gdy Abacki wie, że jest w kabinie poruszającej się z przyspieszeniem **g**, to w zasadzie niewiele zmienia. We własnym układzie (związanym z kabiną) widzi, że kulka spada z przyspieszeniem -g. Ruch ten przypisze sile -mg, a żeby napisać równanie na równowagę dynamiczną doda siłę bezwładności mg. Może jednak swoją wiedzę wykorzystać przenoszac swoje rozważania do układu inercjalnego.



Rysunek 4.7. W kabinie statku kosmicznego (a) jak i na powierzchni Ziemi (b) pan Abacki czułby tą samą siłę trzymającą go przy podłodze. Wszystkie przedmioty upuszczone w obu kabinach spadałby tak samo. Lokalnie Abacki nie miałby możliwości odpowiedzi na pytanie: czy obserwowane efekty pochodzą od siły ciężkości czy od siły bezwładności. Nie mógłby zatem rozróżnić sił bezwładności od sił przyłożonych.
Z tego układu inercjalnego przygląda się ruchowi kabiny. Widzi, że kulka w układzie inercjalnym porusza się ruchem jednostajnym (dopóki nie upadnie na podłogę kabiny). Więc działające na nią siły przyłożone i bezwładności są równe zeru. Widać, że z punktu widzenia układu inercjalnego, Abacki w swoim układzie posłużył się dwiema siłami bezwładności. Pierwsza wynika z ruchu przyspieszonego kabiny (układu Abackiego), jest to siła skierowana do podłogi kabiny. Druga wynika z przyspieszonego ruchu kulki w kierunku podłogi kabiny. Jest to ruch obserwowany przez Abackiego. Dodaje on zatem siłę bezwładności skierowaną przeciwnie. Wszystko to zgodnie z równaniem (4.12)

Wróćmy do bardziej wydumanej sytuacji. Abacki to osierocone dziecko podróżników kosmicznych, które nie wie skad pochodzi siła działająca w jego kabinie, ale ją wyraźnie czuje, jako siłę trzymającą go przy podłodze. Wychowane przez elektroniczną mamkę, zostało przez nią również wyedukowane. Ale mamka nie wiedziała, że jest na statku kosmicznym. Abacki przyjmuje więc, że w przyrodzie działa siła ciążenia (o której nieco się uczył), która każe spadać kulce w kierunku podłogi jego kabiny. Może uznać, że taka jest właściwość ciał "ciężkich" (ludzie przez długi czas tak przecież myśleli), lub stwierdzić, że to podłoga ma zdolność działania siłą na ciała (prawo ciążenia). Wtedy siła powodująca spadek kulki staje się siłą rzeczywistą. Do prawidłowego napisania równań wynikających z zasady d'Alemberta Abacki nie musi obiektywnie rozróżnić charakteru sił. Sprawę można potraktować tak: Obserwator może podzielić siły na takie, dla których może określić źródło i siły te nazywa siłami przyłożonymi. Aby przejść do równań d'Alemberta, musi zrównoważyć siły działające przez odpowiednie siły bezwładności. Wobec tego rozróżnienie na siły przyłożone i bezwładności w ramach zasady d'Alemberta staje się subiektywne.

Oczywiście jeżeli Abacki przyjmie, że podłoga przyciąga ciała materialne i zbuduje poprawnie działającą teorię przyciągania ciał przez podłogę, to ciągle możemy mu zarzucić, że się myli. Po prostu nie wie, że jest w przyspieszającym statku. Jeżeli posiądzie szerszą wiedzę o swojej sytuacji, to wtedy zrozumie, że był w błędzie. Niewatpliwie taka szersza wiedza pozwoli Abackiemu spojrzeć na swoją sytuację z innej perspektywy. Ale na jotę nie zmieni skuteczności równań ruchu, które do tej pory pisał. Będzie miał teraz większy wybór skutecznych równań ruchu. Zrozumie też głębiej pochodzenie siły ciężkości. I tu niespodzianka. Mając klasyczną teorię grawitacji jesteśmy trochę w sytuacji Abackiego. Za horyzontem czeka ogólna teoria względności, która postawi problem grawitacji oraz sił przyłożonych i bezwładności w nowym świetle. Nie oznacza to jednak, że klasyczna teoria grawitacji się z tego powodu załamie i przestanie działać. Dalej skutecznie pozwala na rozwiązywanie wielu problemów z mechaniki nieba. Choć gdy pole grawitacyjne staje się naprawdę silne klasyczna teoria przestaje dostarczać satysfakcjonujących rozwiązań. Możemy więc powiedzieć, że z naszej perspektywy fizycy XIX wieku byli w pozycji pana Abackiego. Dopracowali się bardzo skutecznych narzędzi opisu mechaniki nieba, ale czekało na nich znacznie szersze i pojemniejsze spojrzenie na te zagadnienia.

Zasada d'Alemeberta jest podstawową zasadą mechaniki klasycznej, podobnie jak zasada Fermata jest podstawową zasadą optyki geometrycznej. Wszystkie inne prawa i zasady mechaniki klasycznej możemy wyprowadzić z zasady d'Alemberta. Przykład znajdziecie w temacie (XVII), w którym zajmiemy się zasadami wariacyjnymi mechaniki. Zasady wariacyjne wymagają by układ był całkowalny ze względu na czas. Warunek ten ogranicza ich zastosowanie do więzów holonomicznych, które zdefiniuję nieco niżej (def. 5.1).

4.2. Ciut historii i filozofii 🔶

Bezwładność ciała była problemem dla dawnej dynamiki. W dynamice Arystotelesa jej nie mamy i w efekcie nie ma naszego pojęcia masy, choć wprowadził on w swojej filozofii pojęcie materii⁶. Co ciekawe, Arystoteles użył słowa oznaczające "drzewo" (greckie "hyle"). Słowo "drzewo" zaczęło zatem oznaczać ogólniejsze pojęcie "materia". Materia dla Arystotelesa nie była odrębnym bytem a raczej tym co pozostaje niezmienne podczas przemian jednych form w inne. Materia była bierną stroną rzeczywistość, w której realizowała się aktywna strona nazywana formą. Można tu przytoczyć przykład rzeźbiarza, który kawałkowi marmuru nadaje nową formę – czyli kształt rzeźby. Marmur w tym wypadku przyjmuje formę w postaci rzeźby. Przykład ten jest o tyle mylący, że marmur istnieje niezależnie od tego czy zrobimy z niego rzeźbę, czy blat stołu. I z rzeźby i ze blatu możemy odrabać kawałek czegoś co będzie marmurem. W filozofii Arystotelesa takie wydzielenie materii nie było możliwe. Materia zawsze występowała w jakiejś formie a ponieważ sama formy nie miała, nie mogła występować samodzielnie. Nic dziwnego, że dla Arystotelesa materia nie miała specyficznych cech, takich jak masa. Dlatego przyjmie on, że w próżni ciało pod działaniem najmniejszej siły osiągnie nieskończoną prędkość. W fizyce Arystotelesa wymuszony przez siłę ruch ciała jest efektem balansu pomiędzy siłą wymuszającą a siłą oporów ośrodka. To był jeden z ważniejszych powodów dla których Arystoteles wykluczył istnienie próżni. W próżni ciała pod byle dotknięciem osiągałby nieskończoną prędkość. Z drugiej strony gdy siła wymuszająca nie działa, ciało nie porusza się (chyba że ruchem naturalnym, spadając na przykład na Ziemię). Brak bezwładności (masy) z jednej strony powoduje, że przyłożenie niewielkiej siły nadaje ciału nieskończoną prędkość (w próżni) z drugiej strony, brak siły przyłożonej powoduje natychmiastowe zatrzymanie ciała. Ruch strzały po wystrzeleniu z łuku (kiedy strzała nie ma kontaktu z cięciwą) Arystoteles tłumaczył popychającym działaniem powietrza, które wypełniało puste miejsce za strzałą. Zdawał sobie jednak sprawę, że jest to

⁶ W wcześniejszej jońskiej filozofii przyrody istniało pojęcie pierwszej zasady, któremu jednak bardziej odpowiadałoby pojęcie współczesnej substancji. Jednak i ta odpowiedniość nie jest całkiem satysfakcjonująca.

tłumaczenie wątpliwe. Kolejne pokolenia uczonych teoria ruchu Arystotelesa również uwierała. Mamy podstawy by przyjąć, że w okresie hellenistycznym greccy uczeni posługiwali się jakąś formą zasady bezwładności. Niestety ich nauki były zbyt wyrafinowane dla rzymskich głów i ogromna część ich dorobku przepadła. Rzym cofnął fizykę do czasów Arystotelesa, która została również uznana za podstawę nauczania w Średniowieczu arabskim i europejskim. W czasach europejskiego średniowiecza pojawiły się prace krytyczne wobec spuścizny greckiej, dotyczące dynamiki. Średniowieczni uczeni rozwinęli koncepcję impetu, która została zaproponowana przez Jana Filopona (zwanego również Janem Gramatykiem), filozofa, teologa, matematyka i filologa bizantyńskiego. Dokładny czas narodzin i śmierci Jana nie jest znany. Urodziła się pomiędzy rokiem 475 a 490 a zmarł pomiędzy 567 a 580. Filipon zanegował teorie ruchu Arystotelesa. Według niego za ruch obiektów nie odpowiada wyłącznie siła generowana przez środowisko (w przypadku strzały środowisko to cięciwa łuku, lub powietrze zapełniające przestrzeń za poruszającą się strzałą). Za zasadniczą przyczynę ruchu uznał masę ciała (ilość materii), wskazując że w przypadku spadania w dół za przyczynę wystarczy sama masa (nie było wówczas pojęcia siły grawitacji). Zaproponował teorię impetu, jako wewnętrznej siły odpowiedzialnej za ruch. Cięciwa przekazuje strzale siłę ruchu, a strzała przez to, że ją akumuluje porusza się również po oderwaniu od cięciwy. Powietrze w tym ujęciu dalej jest dla strzały oporem, czyli siłą, z którą musi walczyć impet strzały. W efekcie impet strzały spada (spada jej prędkość). W teorii impetu ciała materialne potrafia więc "ładować się" siła pochodząca od przyczyny ruchu. Opory ruchu powodują, że ciała tracą tą wewnętrzną siłę ruchu. Teoria impetu zyskała popularność w Średniowieczu. Rozwinał ją Jan Buridian (ok. 1300 -1358) francuski filozof działający na Uniwersytecie Paryskim. Buridian stwierdził, że poziom impetu w ciele jest proporcjonalny do jego ciężaru i prędkości, czyli wielkości, zbliżonej do naszego pędu. Doprowadziło go to do daleko idących wniosków. Stwierdził między innymi, że ponieważ w niebie nie ma oporów ruchu, sfery niebieskie raz puszczone w ruch mogą się wiecznie poruszać. Słowem Buridian zwolnił aniołki z obowiązku ciągłego kręcenia sferami (rys. TVI 1.3.6), upodabniając konstrukcję nieba do konstrukcji mechanizmu zegarowego. A mechanizm to coś czego działanie, człowiek może na podstawie badań zrozumieć. Nasza siła bezwładności jest bezpośrednim potomkiem teorii impetu. Galileusz pójdzie krok dalej. Stwierdzi między innymi, że

"Ciało ruchome, poza naturalną skłonnością do odwrotnego kierunku, ma jeszcze przyrodzoną mu właściwość, wywołując opór przeciw ruchowi"

Widzimy tu już myśl prowadzącą do pojęcia bezwładności (ów opór przeciw ruchowi). Jednak w swych rozważaniach nad bezwładnością (nad tym co my dziś tak nazywamy) Galileusz wykazuje jeszcze sporo niezdecydowania i robi błędy. Dla niego naturalnym ruchem ciała, na które nie działają siły jest ruch po okręgu

(przynajmniej w niebie), a nie ruch po prostej. Brakowało mu naszej teorii ruchu po okręgu, wraz z niezbędną do tego siłą dośrodkową. Johannes Kepler stwierdza, że dwa ciała znajdujące się blisko siebie, ale daleko od innych ciał wzajemnie by się przyciągały a siłą tego przyciągania byłaby tym większa im większy byłby ciężar (nie masa) tych ciał. Za przyciąganie według Keplera odpowiedzialne były siły magnetyczne, co było pokłosiem prac Gilberta na magnetyzmem Ziemi.

W newtonowskiej dynamice bezwładność nie jest siłą ale tą cechą materii, która powoduje, że zmiana wartości lub kierunku prędkości ciała wymaga użycia siły. Ale sam Newton ciągle posługiwał się pojęciem siły bezwładności, jako realnie działającej siły, co można uznać za echo teorii impetu. Jednak w dynamice Newtonowskiej siła jest wymagana do zmiany stanu ruchu a nie do jego podtrzymania. Wkrótce po Newtonie bezwładności stała się jednym z wyróżników materii, a masa ciała jej miarą. To znaczy im większą siłę trzeba było przyłożyć do ciała by nadać mu jednostkowe przyspieszenie, tym większą bezwładność (czyli) masę miało to ciało.

Ta bardzo krótka notka pokazuje jedno, dochodzenie do współczesnych pojęć fizycznych było drogą długą i uciążliwą. Trwało to pokolenia i angażowało najtęższe umysły kolejnych wieków. Oznacza to, że pojęcie bezwładności, pędu, momentu pędu, energii, a nawet prędkości rozumianej jako stosunek drogi do czasu nie są dla człowieka oczywiste tylko należą do arsenału pojęć wypracowanych na drodze wysublimowanych abstrakcji. Można się tylko dziwić, że są tak powszechnie używane. Ale każdy nauczyciel podstaw fizyki wie, że na początku nie jest łatwo.

5. Więzy raz jeszcze ▲/♣

Kiedy przesuwałem swobodny krążek po powierzchni sfery (rys. 3.2), to zakładałem, że działa na niego dośrodkowa siła grawitacji. Ale to założenie nie jest konieczne. Wyobraźmy sobie dwuwymiarową istotę (płaszczaka) mieszkającą na powierzchni sfery. Istota ta nie odczuwa sił działających prostopadle do powierzchni swojej przestrzeni, gdyż nie może czuć nic co działa w trzecim wymiarze, czyli wychodzi poza powierzchnię sfery. Dla niej ruch krążka po kole wielkim byłby ruchem cząstki swobodnej. Co na ten temat rzekłaby istota żyjąca w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, w której zanurzona jest sfera płaszczaka. Dla niej ruchy swobodne to ruchy po linii prostej. Wobec postuluje, że krążek powinien być związany z powierzchnią sfery przez siły prostopadłe do tej powierzchni. Nie musimy mówić o siłach grawitacji. Wystarczy, że ograniczymy się do pojęcia więzów. Z więzami już spotkaliśmy się w (§TV 4.3), gdzie było to związane z pojęciem przesunięcia wirtualnego i zasadą prac przygotowanych. Mówiliśmy o tym, że przesunięcie wirtualne musi być zgodne z więzami, to znaczy nie zmieniać, w otoczeniu danego punktu, wartość sił generowanych przez wiezy. Przesuniecia wirtualne pojawiły się również podczas omawiania zasady d'Alemberta (§4). Jest to dobre miejsce by uporządkować kwestie związane z przesunięciami wirtualnymi i więzami.

Więzy, z którymi mieliśmy już do czynienia to tzw. więzy skleronomiczne (def. TV 4.3.1), czyli takie, które nie zależą od czasu. Do tej pory więzy definiowaliśmy równaniem f(x,y,z,...,)=0; (TV 4.3.4), które określa tą część przestrzeni, po której może się poruszać układ. Przykładowo kulka wahadła, o długości *L*, może poruszać się tylko po okręgu o promieniu *L*. Jej ruch jest ograniczony przez siły jakie wywiera na nią pręt (rys. TV 4.3.1). W układzie biegunowym $\{r, \phi\}$ o początku w punkcie zaczepienia wahadła równanie więzów jest bardzo proste: *r*=*L*.

Bardziej ogólnym rodzajem więzów są więzy holonomiczne, to jest więzy zależne od czasu

Definicja 5.1: Więzy holonomiczne

Więzy holonomiczne ograniczają tylko położenie punktu (układu) do powierzchni. W N-wymiarowej przestrzeni wyrażone są przez układ równań (i=1,...M; M<N)

 $\mathbf{f}_i(x_1,\ldots,x_N,t)=0$

5.1

Gdy jest M niezależnych warunków (5.1), to układ porusza się po N-M wymiarowej przestrzeni. Zakładamy, oczywiście, że równanie (5.1), lub układ takich równań ma rozwiązanie, w przeciwnym razie układ byłby od strony fizycznej bezsensowny. Wymiar N może być oczywiście większy od 3. Jest to liczba niezależnych parametrów, która charakteryzuje nasz układ.

Na przykład dla dziecięcego bąka puszczonego na powierzchni stołu (rys. 5.1) *N*=5. Oczywiście, gdy traktujemy bąka jak bryłę sztywną. Policzmy: położenie na stole możemy określić śledząc punkt P podparcia bąka ze stołem. Ruch tego punktu po płaszczyźnie stołu oznacza, że mamy dwa stopnie swobody. Powędrujmy na szczyt bąka do punkty Q na jego osi obrotu. Ruch tego punktu ma miejsce po czaszy sfery. Pomyśl o pręcie PQ, którego punkt P tkwi w jednym miejscu stołu, ale który może się kiwać w dowolną stronę. Jego drugi punkt Q będzie się poruszał po czaszy sfery o promieniu PQ. Położenie na powierzchni sfery określamy dwoma kątami, czyli mamy już cztery współrzędne. Wybierzmy jeszcze punkt R na powierzchni bąka. Będzie on poruszał się po okręgu wokół osi PQ. Jego położenie kątowe wyznaczy jedna współrzędna. Ponieważ bryła jest sztywna, te pięć liczb całkowicie określą jej położenie w przestrzeni.



Rysunek 5.1. Obracający się bąk traktowany jako bryła sztywna ma pięć stopni swobody. Dwa z nich wiążemy ze swobodą ruchu punktu podparcia P po płaszczyźnie, na której obraca się bąk. Dwa z nich wiążemy z ruchem punktu Q na osi. Przy danym punkcie podparcia P koniec odcinka PQ porusza się po sferze, co daje dwa kolejnej stopnie swobody. Jeden stopień określa kąt obrotu bąka wokół własnej osi. Możemy go wiązać z położeniem kątowym punktu R.

Dramat się zaczyna dla płynu (czyli cieczy lub gazu). Wtedy należałoby określić osobno położenie każdej cząsteczki cieczy, lub każdego jej małego elementu i liczba stopni swobody dramatycznie rośnie. Jeżeli możemy przyjąć pewne dodatkowe założenia, to jakoś sobie z opisem takiej sytuacji radzimy albo z użyciem równań różniczkowych (TXIV 3.3.2), albo metod statystycznych (§TXIX).

Wróćmy do więzów. W definicji (5.1) znalazło się ważne słowo tylko. Równania więzów holonomicznych mogą zależeć tylko od współrzędnych i czasu. Gdy pojawi się dodatkowo jawna zależność od prędkości, czyli pochodnych po położeniu, więzy przestają być holonomiczne. Takie więzy nazywamy nieholonomicznymi lub kinematycznymi.

Definicja 5.2: Więzy nieholonomiczne (kinematyczne)

Więzy nieholonomiczne ograniczają zarówno położenie jak i prędkość punktu (układu)

Zauważ, że równanie (5.1) dopuszcza zmianę więzów w czasie. Na przykład pręt w wahadle możemy zastąpić linką gumową, która w czasie ruchu wydłuża się lub skraca. Jeżeli więzy nie są zależne od czasu, wtedy mamy szczególny przypadek więzów holonomiczych, czyli więzy skleronomiczne (def. TV 4.3.1). Zatem więzy holonomiczne rozpadają się na więzy skleronomiczne i pozostałe, czyli te, które zależą jawnie od czasu. Więzy zależne jawnie od czasu nazywamy więzami reonomicznymi

Definicja 5.2: Więzy reonomiczne

Więzy reonomiczne są więzami, które są jawnie zależne od czasu.

Więzy reonomiczne mogą być holonomiczne i nieholonomiczne. Prostym przykładem więzów holonomicznych i reonomicznych jest wahadło z ruchomym zamocowaniem. Wahadło z nieruchomym zamocowaniem będzie się poruszać po powierzchni okręgu danego równaniem

$$\sqrt{x^2 + y^2} - L = 0 \tag{5.1.2}$$

Gdzie L jest długością pręta wahadła. Załóżmy teraz, że punkt zaczepienia wahadła wykonuje drgania harmoniczne opisane wzorem (rys. 5.2)

$$x_p = A\cos(\omega t)$$
 5.3a

Równanie więzów przyjmie postać

$$\sqrt{\left(x - A\cos(\omega t)\right) + y^2} - L = 0$$
5.3

Ruch wahadła jest w każdej chwili ograniczony do okręgu o promieniu *L*, jednak środek tego okręgu przesuwa się w czasie. Mamy zatem równanie więzów reonomicznych i holonomicznych.



Rysunek. 5.2. Punkt zaczepienia wahadła porusza się wzdłuż belki. Przy czarnej poziomej każdym położeniu belki możliwe położenia kulki wahadła ograniczają okregu się do o promieniu równym długości preta wahadła. Więzy zależą w tym wypadku od czasu.

Przyjrzę się bliżej więzom holonomiczym. W (§TV 4) stwierdziłem, że siły reakcji więzów są prostopadłe (normlane) do powierzchni tych więzów. Oznacza to, że iloczyn skalarny siły reakcji więzów i przesunięcia wirtualnego zgodnego z więzami musi być równy zeru, gdyż przesunięcie wirtualne zgodne z więzami jest wektorem stycznym do powierzchni więzów. Zatem praca sił reakcji więzów przez przesunięciu wirtualnym zgodnym z więzami jest równa zeru. Siły sumowane w zasadzie d'Alemberta sumują się do zera, stąd siły przyłożone wymagają sił bezwładności. Siły reakcji więzów, jako, że nie wykonują pracy przy przesunięciu wirtualnym sił bezwładności nie potrzebują.

Rozważmy teraz układ więzów holonomicznych i skleronomicznych danych układem równań.

$$\mathbf{g}_{\mathrm{i}}(x_{\mathrm{l}},\ldots,x_{\mathrm{N}}) = 0 \tag{5.4}$$

Indeks *i* numeruje kolejne równania, których jest i=1,...M, przy czym M < N. Równanie (5.4) wyznacza powierzchnię równej wartości dla funkcji g; konkretnie jest to wartość zero. Jeżeli zatem obliczymy gradient z funkcji g, to otrzymamy wektor prostopadły do tej powierzchni. Zatem siła reakcji od więzów o indeksie *i*, względem zmiennej o indeksie *k* może być zapisana jako

$$\mathbf{F}_{\mathbf{k}\mathbf{i}} = \lambda_i \frac{\partial g_{\mathbf{i}} \left(x_1, \dots x_N \right)}{\partial x_k}$$
5.5

Całkowita siła reakcji wszystkich więzów względem zmiennej o indeksie k jest sumą składowych i od poszczególnych więzów

$$\mathbf{F}_{\mathbf{k}} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_{i} \frac{\partial \mathbf{g}_{i} \left(x_{1}, \dots x_{N} \right)}{\partial x_{k}}$$
5.6

Możemy również zsumować składowe po indeksie k, dla ustalonego indeksu i.

$$\mathbf{F}_{i} = \lambda_{i} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \mathbf{g}_{i}(x_{1}, \dots, x_{N})}{\partial x_{k}} = \lambda_{i} \nabla \mathbf{g}_{i}(x_{1}, \dots, x_{N})$$
5.7

Wyrażenie (5.7) daje nam siłę reakcji od *i*-tych więzów opisanych funkcją g_i . Gdy więzy holonomiczne zależą od czasu, to wtedy możemy również obliczyć wyrażenie (5.7), ale w ustalonej chwili czasu, czyli podczas obliczania pochodnych traktujemy czas jak stałą.

Całe to gadanie o sile reakcji więzów o indeksie *i*, względem zmiennej o indeksie *k* może zdać się nieco mętne. Aby rzecz wyklarować odwołam się do rysunku (5.3). Powiedzmy, że mamy dwa równania więzów. Równanie g_1 jako powierzchnię $g_1=0$ daje płaszczyznę, a drugie $g_2=0$ odpowiada sferze. Zbiór wspólnych punktów tworzy okrąg. Płaszczyzna ma równanie

$$z = 0 \Longrightarrow g_1(x, y, z) = z$$
 5.8a

Równanie sfery o promieniu ρ ma postać

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho \Longrightarrow g_2(z, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \rho$$
 5.8b

Możemy łatwo policzyć pochodną cząstkową funkcji g₁ po zmiennej *z*.

$$\frac{\partial g_1}{\partial z} = 1$$
5.9a



Rysunek 5.3. Równanie więzów g₁ i g₂ wyznacza dwie powierzchnie – płaszczyznę i sferę. Ich przecięcie tworzy okrąg, tu narysowany na niebiesko. Wektor zielony jest wektorem siły reakcji więzów od płaszczyzny. Jest on wektorem normlanym do powierzchni (płaszczyzny) więzów g₁ i zarazem do okręgu. Wektor niebieski jest wektorem siły reakcji więzów g₂ powierzchni (sfery). Jest on normlanym do sfery (powierzchni więzów g₁) i zarazem do okręgu. Wektor czarny jest wektorem wypadkowym, czyli sumą obu wektorów reakcji więzów g₁ i g₂. Jest on normlany tylko do okręgu.

Do gradientu potrzebujemy jeszcze pochodnych po zmiennych x i y. Te jednak nie występują w funkcji g_1 więc trudno po nich liczyć pochodne. Musimy tu się posłużyć dodatkowym rozumowaniem. Wektor gradientu musi być prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez równanie więzów $g_1=0$. Ta płaszczyzna to płaszczyzna prostopadła do osi z, w naszym przypadku jest to z=0. Zatem składowe x i y wektora normalnego do płaszczyzny z=0 muszą być równe zeru. Wektor gradientu funkcji g_1 ma postać

$$\nabla \mathbf{g}_1 = (0, 0, 1) \tag{5.9}$$

Gradient funkcji g2 ma postać

$$\nabla g_2 = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) \quad 5.10$$

Współrzędne wektora gradientu są zatem cosinusami kierunkowymi wektora promienia sfery **r** (§DA 2.6), czyli są prostopadłe do powierzchni sfery. Zatem wektor siły reakcji dla więzów g_1 i g_2 będzie miał postać (5.7)

$$\mathbf{F}_1 = \lambda_1(0, 0, 1) \tag{5.11a}$$

$$\mathbf{F}_2 = \lambda_2 \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$
 5.11b

Składowe siły reakcji więzów dane są wzorami (5.6) i w naszym przykładzie przyjmą postać

$$\mathbf{F}_{\mathbf{x}} = \left(\lambda_1 0 + \lambda_2 \frac{x}{r}\right) \mathbf{e}_{\mathbf{x}} = \lambda_2 \frac{x}{r} \mathbf{e}_{\mathbf{x}}$$
 5.12a

$$\mathbf{F}_{\mathbf{y}} = \left(\lambda_1 0 + \lambda_2 \frac{y}{r}\right) \mathbf{e}_y = \lambda_2 \frac{y}{r} \mathbf{e}_y$$
 5.12b

$$\mathbf{F}_{\mathbf{z}} = \left(\lambda_1 1 + \lambda_2 \frac{z}{r}\right) \mathbf{e}_z = \left(\lambda_1 + \lambda_2 \frac{z}{r}\right) \mathbf{e}_z$$
 5.12c

Jako indeksu "k" użyłem liter x, yz. Jak widać opisują one składowe całkowitego wektora sił reakcji więzów, który jest sumą wyrazów (5.11) i ma składowe

$$\mathbf{F}_{\mathbf{w}} = \mathbf{F}_{1} + \mathbf{F}_{2} = \left(\lambda_{2} \frac{x}{r}, \lambda_{2} \frac{y}{r}, \lambda_{1} + \lambda_{2} \frac{z}{r}\right)$$
5.13

Wektor wypadkowy sił reakcji więzów $\mathbf{F}_{\mathbf{w}}$ nie jest prostopadły ani do powierzchni więzów g_1 ani do powierzchni więzów g_2 , jest natomiast prostopadły do okręgu leżącego na przecięciu się tych powierzchni. Ten okrąg wyznacza więzy działające na cząstkę.

Ładnie się to ułożyło dla więzów holonomicznych ale co się stanie gdy więzy będę nieholonomiczne? Zanim odpowiem na to pytanie podam jeszcze jedno spostrzeżenie dotyczące więzów holonomicznych.

$$g_i(x_1, \dots x_N, t) = 0$$
 5.14

Możemy łatwo obliczyć różniczkę z wyrażenia (5.14)

$$dg_{i} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial g_{i}}{\partial q_{k}} dq_{k} + \frac{\partial g_{i}}{\partial t} dt$$
5.15

Oczywiście całkując obie strony (5.15) w zadanych granicach otrzymamy wyrażenie zależne od punktu początkowego i końcowego, ale nie od trajektorii

łączącej te punkty – słowem wyrażenie ma tą samą wartość niezależnie od historii jaką układ miał przechodząc od punktu początkowego do końcowego. Takie wyrażenia określamy mianem całkowalnych. Więzy holonomiczne muszą być całkowalne. Inaczej mówiąc układ po przejściu drogi zamkniętej powinien wrócić do stanu początkowego. Bardzo to przypomina zagadnienie przesunięcia wektora po sferze (faza geometryczna), kiedy wektor nie wracał do swojego pierwotnego stanu po przejściu na sferze drogi zamkniętej. Ewidentnie winna temu była geometria powierzchni po której się poruszał. Faza geometryczna wiąże się z pojęciem holonomii w matematyce. Holonomia jest tu miarą braku powrotu przykładowo wektora (lub innego obiektu geometrycznego) do stanu początkowego po przejściu zamkniętej ścieżki. W fizyce jest to brak powrotu układu fizycznego do wyjściowego stanu po przebyciu zamkniętej drogi. Wahadło Foucaulta jest przykładem układu nieholonomicznego. Do więzów nieholonomicznych będę wracał. Tutaj podam jeszcze, że równanie więzów nieholonomicznych jest zależne prędkości.

$$g_i(x_1,...,x_N,\dot{x}_1,...,\dot{x}_N,t) = 0$$

5.16

Choć nie zawsze zależności równania więzów od prędkości prowadzi do więzów nieholonomicznych.

Stałe λ_i , których użyłem przy analizie więzów (5.11) są częścią szerszej teorii matematycznej i mają swoją własną nazwę – mnożniki Lagrange'a. Jest to bardzo użyteczna teoria i dlatego muszę coś o niej powiedzieć.

5.1. Metoda mnożników Lagrange'a 🐥

Nasze dalsze rozważania wymagają wprowadzenia nowych metod matematycznych. W (§TV 4.6) wprowadziłem pojęcie pochodnej z funkcji wielu zmiennych. W (§DB 2) opisałem metody wyznaczanie ekstremów lokalnych funkcji jednej zmiennej. Tu powrócę do tego zagadnienia, ale w kontekście funkcji wielu zmiennych i więzów.

Mamy znaleźć ekstrema funkcji f($x_1,...,x_N$). W wielu wymiarach zasada jest taka sama jak w jednym wymiarze. Rysunek (5.1.1) pokazuje przykładowy wykres funkcji dwóch zmiennych f(x_1,x_2). Aby znaleźć ekstrema takiej funkcji szukamy miejsc, gdzie jej pochodna jest równa zeru, czyli płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny współrzędnych x_1 i x_2 . W takim przypadku wektor styczny liczony wzdłuż osi x_1 , jak również wektor styczny liczony wzdłuż osi x_2 muszą być równoległe do osi, odpowiednio x_1 i x_2 . Ponieważ są to wektory niewspółliniowe, to rozpinają (jednoznacznie definiują) płaszczyznę styczną do naszej funkcji. Kąt nachylenia obu wektorów do odpowiednich osi wyznaczony jest przez pochodne cząstkowe (§TV 4.6).

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_2) = 0$$
 5.1.1

Dla trzech i większej liczby wymiarów nic się w tej metodzie nie zmienia, rośnie tylko ilość równań typu (5.2.1). Wiemy jednak, że samo zerowanie się pochodnej, dla funkcji jednej zmiennej, nie wystarcza do określenia ekstremów tej funkcji. Konieczne jest również badanie pochodnych wyższych rzędów (§DB 2.2). W przypadku większej liczby zmiennych powinniśmy również zbadać pochodną wyższych rzędów. Tyle, że sprawy są bardziej skomplikowane niż w jednym wymiarze. Dodatkowe wymiary, to dodatkowe stopnie swobody, które otwierają przestrzeń do bogatszych struktur. Tak też jest w przypadku punktów spełniających warunek (5.1.1). Spróbujmy przeprowadzić testy na prostych funkcjach.



Rysunek 5.1.1. Powierzchnia opisana wzorem $f(x,y) = \sin(x)$ cos(x). W punktach x=1 i y=1 oraz $x=\pi$ i $y=3/2\pi$ wyrysowane sa kawałki płaszczyzn stycznych, odpowiednio kolorem czerwonym zielonym. i Płaszczyzna zielona jest styczna w punkcie lokalnego maksimum i widać jest jednocześnie iak równoległa do płaszczyzny xy.

Weźmy dla przykładu funkcję x^2+y^2 (rys. 5.1.2a). W obu przekrojach (x i y) otrzymujemy parabolę, która w punkcie zerowym ma minimum. Obie drugie pochodne cząstkowe po x i y są dodatnie. A pochodne mieszane są równe

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = 0$$
5.1.2

Do badania ekstremów funkcji wielu zmiennych przydatny jest tzw. Hessian, który definiujemy jako wyznacznik z macierzy jej drugich pochodnych.

Definicja 5.1.1: Hessian

Macierz kwadratowa utworzona z drugich pochodnych cząstkowych funkcji wielu zmiennych, zgodnie ze wzorem

$$\det(\mathbf{H}) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$
5.1.3



Rysunek 5.1.2. a) wykres funkcji $f(x, y)=x^2+y^2$; b) wykres funkcji $f(x, y)=x^2-y^2$

W przypadku funkcji dwóch zmiennych otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) & \frac{\partial^2}{\partial^2 y} f(x, y) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(x, y) \frac{\partial^2}{\partial^2 y} f(x, y) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y)\right)^2$$
5.1.4

Skorzystałem tu z faktu, że pochodne mieszane są sobie równe. Możesz obliczyć, że Hessian naszej funkcji parabolicznej jest równy 4, czyli jest dodatni.

Funkcja $-x^2-y^2$ ma w punkcie zerowym maksimum. Jej drugie pochodne cząstkowe po x i po y są w tym punkcie ujemne, a drugie pochodne cząstkowe mieszane są równe zeru. Hessian tej funkcji jest również równy 4, czyli dodatni. A co w przypadku funkcji x^2-y^2 (rys. 5.1.2b). Widać, że idąc wzdłuż osi x mamy minimum a idąc wzdłuż osi y mamy maksimum. My jednak chcemy aby przejście po dowolnie zorientowanej linii przechodzącej przez punkt ekstremalny zachowywało się jak minimum lub maksimum a nie w sposób mieszany. Drugie pochodne cząstkowe są równe 2 dla zmiennej x i -2 dla zmiennej y. Pochodne cząstkowe mieszane są uparcie równe zeru, a Hessian jest ujemny. W tym przypadku w punkcie zerowym nie mamy ekstremum, tylko tak zwany punkt siodłowy, który wygląda jak górska przełęcz.

Dla funkcji x^3+y^3 (rys. 5.1.3a) obie drugie pochodne cząstkowe są w punkcie zerowym równe zeru. Dla linii biegnących wzdłuż osi x i y mamy punkt przegięcia. Pochodne mieszane są równe zeru, a Hessian jest równy 36xy. Popatrzmy na funkcję x^2+y (rys. 5.1.3b). Dla zmiennej x druga pochodna cząstkowa jest równa 2, a dla zmiennej y wartość wynosi zero. Pochodne mieszane są równe zeru, a Hessian jest równy zeru, a w punkcie zerowym nie ma ekstremum.



Rysunek 5.1.3. a) wykres funkcji $f(x, y)=x^3+y^3$; b) wykres funkcji $f(x, y)=x^2+y$

Kolejna funkcja to xy (rys. 5.1.4). Jej drugie pochodne cząstkowe po x i y są równe zeru, a pochodne mieszane mają wartość jeden, Hessian jest równy -1, a w punkcie zerowym mamy punkt siodłowy.



Rysunek 5.1.3. wykres funkcji f(*x*, *y*)=*xy*

Uogólnię dotychczasowe wyniki. Gdy w punkcie x=a i y=b, dla którego obie pochodne cząstkowe są równe zeru, zachodzi:

$$f_{xx}(a,b) > 0 \quad \text{oraz det}[H(f(a,b))] > 0 \qquad 5.1.5a$$

to w tym punkcie mamy lokalne minimum. Gdy zachodzi

$$f_{xx}(a,b) < 0 \text{ oraz det}[H(f(a,b))] > 0$$
 5.1.5b

To mamy lokalne maksimum. Gdy

det[H(f(a, b))] < 0

To mamy punkt siodłowy. W pozostałych przypadkach badanie drugiej pochodnej nie rozstrzyga sprawy. Przykładem takiego przypadku jest funkcja x^2y^2 , dla której mamy ewidentne minimum w punkcie zerowym, ale drugie pochodne jak i Hessian są równe zeru. W tym wypadku musimy badać pochodne wyższych rzędów (podobnie jak to ma miejsce w przypadku jednowymiarowym (xxxxx)).

Czy wolno nam na podstawie kilku przebadanych przypadków wyciągać tak ogólne wnioski? Wolno, pod warunkiem, że jest to tylko ilustracja udowodnionych już twierdzeń. Tak też właśnie jest; w podręcznikach do analizy matematycznej możesz odnaleźć ścisłe dowody przedstawionych wniosków. Ja dowodów przeprowadzać nie będę, dam ci jednak jeszcze jedną intuicję. Zajmujemy się tu funkcjami, które mają rozkład w szereg Taylora (DB 3). Pierwsze wyrazy tego rozkładu mają, z dokładnością do stałych mnożących, postać funkcji, które przebadaliśmy. Oznacza to, że lokalnie rzecz biorąc interesujące nas funkcje (to jest takie, które mają rozkład w szereg Taylora) są podobne do tych, które tu analizowaliśmy. Wynika z tego, że nasze uogólnienie powinno być prawdziwe.

W przypadku funkcji zależnej od trzech i większej liczby zmiennych sprawy się jeszcze bardziej komplikują. Warunek konieczny na zaistnienie ekstremum funkcji wielu zmiennych $f(x_1, ..., x_N)$ jest ciągle prosty. W punkcie ekstremalnym wszystkie pochodne cząstkowe muszą być równe zeru

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} = 0$$
5.1.6

Jednak nie każdy punkt, w którym pochodne cząstkowe się zerują jest punktem ekstremalnym. Nie ma równie prostego warunku dostatecznego, tak jak to ma miejsce dla funkcji zależnych od jednej lub dwóch zmiennych. Ponieważ jednak problem jest ważny, gdyż jest związany z zagadnieniem optymalizacji procesów (np. produkcyjnych), które zwykle zależą od wielu zmiennych, opracowano wiele metod pozwalających na rozstrzyganie kształtu ekstremów funkcji wielu zmiennych. Nie będziemy się tym tutaj zajmowali odsyłając zainteresowanych do literatury poświęconej zagadnieniom optymalizacji. Spraw znajdowania ekstremów jednak jeszcze nie odpuszczę. Zajmę się ważnym zagadnieniem szukania ekstremów związanych (warunkowych).

Często spotykamy się z zadaniem szukania ekstremów funkcji przy nałożonych dodatkowych warunkach (więzach). Powiedzmy, że dzieci ścigają się od punktu startu S do brzegu rzeki a następnie do punktu mety M (rys. 5.1.5). Jak jest najkrótsza możliwa droga? Załóżmy, że teren jest płaski.



Rysunek 5.1.5. Należy przebiec od punktu S do punktu M w jak najkrótszym czasie. Zadanie obarczone jest jednak dodatkowym warunkiem. Po drodze należy dotknąć brzegu rzeki. Długość przebiegniętej drogi, a zatem również potrzebny na to czas, zależy od wyboru punktu P, w którym dotkniemy brzegu rzeki.

Musimy znaleźć taki punkt P, na brzegu rzeki, dla którego suma odcinków SP+PM jest najmniejsza. Niech brzeg rzeki opisany będzie równaniem

$$g(x, y) = 0$$
 5.1.7a

Wtedy nasze zadanie brzmi tak: znaleźć minimum funkcji

$$f(x, y) = d(S, P) + d(P, M)$$
 5.1.7b

Przy czym współrzędne punktu P muszą spełniać warunek (5.1.7a) a funkcja d daje odległość między dwoma punktami. Mówimy, że jest to zagadnie szukania ekstremum warunkowego funkcji f. Warunek jest wyrażony związkiem (5.1.7a).

Nie będę dowodził metod, które pozwalają na rozwiązywanie problemów szukania warunkowych ekstremów, a ograniczę się do zilustrowania samej idei. Gdyby zadanie brzmiało: Znajdź najkrótszą drogę od punktu S do rzeki, to można by je rozwiązać rysując okręgi o środku w punkcie S i coraz większym promieniu, aż do momentu, gdy któryś z okręgów dotknąłby brzegu rzeki (rys. 5.1.6a). Punkt ten wskazywałby najkrótszą drogę od S do rzeki. W szukanym punkcie P okrąg byłby styczny do brzegu rzeki. Jednocześnie każdy taki okrąg o promieniu ρ wyznaczałby poziomicę funkcji drogi, spełniającej warunek

$$d(S,P) = \rho \tag{5.1.8}$$

Styczności okręgu do brzegu rzeki, który jest zerową poziomicą funkcji g (5.1.7a), oznacza, że wektor gradientu (§TXIV 1.1)

$\nabla g(x,y)$	5.1.9a
Jak również wektor gradientu	
$\nabla d(S, P)$	5.1.9b

Mają ten sam kierunek (ale niekoniecznie zwrot); czyli są albo równoległe albo antyrównoległe. Dzieje się tak dlatego, że wektory gradientu są prostopadłe do poziomic funkcji (fakt TXIV 1.1.1), w tym wypadku d i g. Obie poziomice są w szukanym punkcie styczne, stąd kierunki do nich prostopadłe są równoległe.

Wróćmy do zagadnienia dwóch punktów. Narysujemy rodzinę poziomic funkcji f(S,M,P) danej wzorem (5.1.7b). Zależy ona od dwóch współrzędnych opisujących położenie punktu P(x,y) na brzegu rzeki. W tym przypadku mamy prawo spodziewać się, że poziomice funkcji f będą miały geometrię elipsy o ogniskach w punkcie S i M (rys. 5.1.6b). Elipsa styczna do brzegu rzeki (brzeg rzeki to zerowa poziomicy funkcji g) wskaże nam szukany punkt. W ogólnym przypadku poziomice funkcji g mogą być złożonymi krzywymi (teren może być pagórkowaty), ale w punktach ekstremum lokalnego wektory gradientu (5.1.9a) i (5.1.9b) muszą być równoległe lub antyrównoległe, a poziomica wyznaczająca ekstremum musi być styczna do poziomicy zerowej funkcji g. Te spostrzeżenia legły u podstaw metody nazywanej metodą mnożników Lagrange'a, która pozwala znajdować ekstrema związane.



Rysunek 5.1.6. a) Okręgi wyznaczają izolinie funkcji opisującej odległość między punktem S a punktami płaszczyzny. Okrąg, który jest styczny do linii rzeki (izolinii g=0) wyznacza punkt styczności P, dla którego czas biegu od punktu S do brzegu rzeki jest najmniejszy; b) dla dwóch punktów poziomice mają kształt elips o ogniskach w tych punktach. Wynika to z tego że suma długości odcinków od ognisk do dowolnego punktu elipsy jest taka sama. Elipsa styczna do rzeki (izolinii g=0) wyznacza punkt styczności P, dla którego czas biegu na trasie SPM jest najmniejszy.

Przechodząc do ogólnych rozważań dla funkcji wielowymiarowych f($x_1,..., x_N$), z tego, że w punkcie styczności wektory gradientu funkcji f i funkcji więzów g muszą mieć ten sam kierunek wnioskujemy, że

$$\lambda \, \nabla \mathbf{g}(x_1, \cdots x_N) = \nabla \mathbf{f}(x_1, \cdots x_N) \tag{5.1.10}$$

Symbol λ oznacza niezerową liczbę. W rozbiciu na składowe mamy *N* równań i *N*+1 niewiadomych x_1, \ldots, x_N oraz λ . Na szczęście (5.1.7a) daje dodatkowe *N*+1 równanie i cały układ jest rozwiązywalny. Aby ułatwić sobie pracę z równaniem (5.1.10) wprowadzamy nową funkcję *N*+1 zmiennych

$$L(x_1, \cdots x_N, \lambda) = f(x_1, \cdots x_N) - \lambda g(x_1, \cdots x_N)$$
5.1.11

Następnie, na mocy (5.1.10) żądamy aby

$$\nabla L = 0 \tag{5.1.12}$$

Dla przykładu, dla trzech zmiennych mamy

$$\nabla \mathbf{L} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_1}\right) \mathbf{d}x_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_2}\right) \mathbf{d}x_2 + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_3} - \lambda \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_3}\right) \mathbf{d}x_3$$
5.1.13

Stąd

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \end{pmatrix} dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) dx_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_3} \right) dx_3$$

$$= 0$$

$$5.1.14$$

Dla funkcji dwóch zmiennych f(x,y) jej pochodne cząstkowe definiują w danym punkcie płaszczyznę styczną (rys. 5.1.1). W ramach tej płaszczyzny stycznej możemy wybrać wektor o dowolnej orientacji. Gdy są więzy, wektor styczny jest dodatkowo związany i musi być zorientowany zgodnie z więzami. Gdy rozpatrujemy funkcję f(x,y,z), jej wykres "potrzebuje" przestrzeni 4-wymiarowej. Pochodne cząstkowe wyznaczają, w każdym punkcie tego wykresu, trójwymiarową przestrzeń styczną. W przypadku braku więzów kierunek wektora stycznego do krzywej f(x,y,z) w punkcie ekstremalnym może być, w przestrzeni stycznej, zorientowany dowolnie. To znaczy, że dx_1 , dx_2 i dx_3 mogą być dowolne. Potraktujmy równanie (5.1.14) jako równanie na trzy różniczki $dx_1,..., dx_3$. Z tego równania możemy wyrazić jedną różniczkę rzez pozostałe dwie. Wyznaczymy różniczkę dx_3 . Wybierzemy mnożnik λ , tak aby

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_3} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_3}\right) dx_3 = 0$$
5.1.15a

Ponieważ pozostałe różniczki w (5.2.14) są od siebie niezależne, to pozostałe dwa składniki sumy (5.1.14) muszą mieć niezależnie od siebie wartość zero, stąd mamy dwa dodatkowe warunki

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) dx_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) dx_2 = 0$$
5.1.15c

Powyższe rozumowanie możemy łatwo uogólnić na N zmiennych x_1, \ldots, x_N .

Wiemy, że więzy mogą być zdefiniowane przez układ równań

$$g_1(x_1,...,x_n) = 0,...,g_k(x_1,...,x_n) = 0$$
5.1.16

W takiej sytuacji przedstawione wyżej rozumowanie niewiele się zmienia. Dla przykładu powiedzmy, że poruszamy się w przestrzeni od punktu S do punktu M poprzez punkt P, który należy do zadanej linii zdefiniowanej w trójwymiarowej przestrzeni przez układ warunków

$$g_1(x, y, z) = 0, g_2(x, y, z) = 0$$
 5.1.17

Funkcja g₁ może definiować płaszczyznę, a funkcja g₂ sferę. Układ warunków (5.1.17) definiuje wtedy okrąg będący częścią wspólną sfery i płaszczyzny (rys. 5.3). Do obu tych powierzchni, w każdym punkcie wspólnego okręgu możemy wyrysować normalne. Podobnie jak poprzednio optymalną drogę wyznaczy nam najmniejsza elipsoida o ogniskach w punkcie S i P, taka która jest styczna do jakiegoś punktu na zadanej linii. Jednak nie możemy oczekiwać, że normalna do tej elipsoidy ma ten sam kierunek, co normalne do sfery i płaszczyzny (wyznaczone wzdłuż koła). Wektor normalny do powierzchni elipsoidy (w punkcie styczności) możemy przedstawić jako kombinację liniową wektorów normalnych do płaszczyzny i sfery. Kombinację liniową tych wektorów wyrazimy z pomocą dwóch mnożników Lagrange'a λ_1 i λ_2 . Równania (5.1.15) przyjmują postać

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} - \lambda_1 \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial x_i} - \lambda_2 \frac{\partial \mathbf{g}_2}{\partial x_i} = 0$$
5.1.18

Przy większej liczbie funkcji g_i określającej więzy w równaniach (5.1.18) pojawia się odpowiednio więcej czynników ze współczynnikami Lagrange'a λ_i . Rysunek (5.1.7) pokazuje jeszcze jeden przykład ilustrujący działanie metody mnożników Lagrange'a. Czas na prosty przykład ilustrujący zastosowanie opisanych metod.



Rysunek 5.1.7. Ilustracja do metody mnożników Lagrange'a. Niebieska część pokazuje izolinie funkcji $f(x,y)=(x^2-xy2+3y)/2$. Barwna linia pokazuje trajektorie wyznaczoną przez warunek g(x,y)=0, gdzie funkcja więzów g dana jest wzorem $g(x)=(1/12)(x^2+y^2)^2-12xy$. Wektor niebieski jest wektorem gradientu funkcji f a wektor czerwony wektorem gradientu funkcji g. Wektor pomarańczowy jest rzutem wektora niebieskiego na kierunek styczny do linii więzów. Pokazuje kierunek wzrostu wartości funkcji f wzdłuż linii więzów. Rysunek z lewej strony pokazuje sytuację poza punktem ekstremalnym. Wektory niebieski i czerwony ułożone są w różnych kierunkach. Wektor pomarańczowy jest różny od zera. Rysunek z prawej strony pokazuje sytuację w punkcie, w którym mamy lokalne minimum. Wektory niebieski i czerwony ułożone są w tym samym kierunku. Wektor pomarańczowy jest równy zeru; Na podstawie xxxxx.

Zadanie 5.1.1:

Równanie x+y+z=1 opisuje płaszczyznę (DE 2.1.1), pokazaną na rysunku (5.1.8). Znajdź punkt na tej płaszczyźnie, ograniczonej do dodatniej części układu xyz, który znajduje się najbliżej początku układu współrzędnych

Szukamy minimum funkcji określającej odległość punktu P(x, y, z) od początku układu współrzędnych. Funkcja ta ma postać

$$f(x, y, z) = x^{2} + y^{2} + z^{2}$$
5.1.19

Ściślej rzecz biorąc jest to kwadrat odległości, ale postać z kwadratem jest wygodniejsza w obliczeniach, a znalezione minimum dla funkcji kwadratu odległości będzie w tym samym miejscu, co dla odległości. Równanie więzów ma postać

$$g(x, y, z) = x + y + z = 1$$
 5.1.20



Rysunek 5.1.8. Płat płaszczyzny określonej równaniem *x*+*y*+*z*=1 i ograniczony do dodatniej części układu xyz

Wyrażenia (5.1.15) przyjmą postać

 ∂y

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \Longrightarrow 2x - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Longrightarrow 2y - \lambda = 0$$
5.1.21a
5.1.21b

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} - \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \Longrightarrow 2z - \lambda = 0$$
5.1.21c

Z równań (5.1.21) wynika, że x=y=z. Wobec tego równanie (5.1.20) prowadzi do rozwiązania

$$x = y = z = \frac{1}{3}$$
 5.1.22

Oznacza to, że najmniejsza odległość od początku układu współrzędnych do punktu na naszym płacie płaszczyzny wynosi $1/\sqrt{3}$.

Po macoszemu potraktowałem zagadnienie określenia czy znalezione ekstremum to minimum czy maksimum. Niestety jest to bardziej złożony problem, dla którego nie można określić tak prostych i ogólnych kryteriów jak dla funkcji jednej zmiennej czy dwóch zmiennych. Czasem o rodzaju ekstremum możemy wnioskować na gruncie kontekstu fizycznego (geometrycznego) zagadnienia, tak też jest w naszym przypadku. Można też zastosować test na wprost. Obliczyć wartość wyrażenia dla sąsiednich punktów (ale leżących na powierzchni więzów) i zobaczyć czy wartości te są większe czy mniejsze od tej znalezionej w ekstremum. Punkty próbne muszą być bardzo blisko punktu podejrzanego o ekstremum, chyba że mamy pewność, że odnośne funkcje szybko nie oscylują.

5.2. Prawo załamania w ogólnej formie

W temacie (§TXI 1.1) wprowadziłem prawo załamania w dwóch wymiarach. Prawo załamania dotyczy propagacji fal. Jednak w ośrodku optycznie izotropowym, w którym promienie są prostopadłe do powierzchni falowych, możemy je sformułować w odniesieniu do promieni. Skorzystam z zasady Fermata aby wyprowadzić wzór na prawo załamania dla pełnego trójwymiarowego przypadku. Rozważmy promień padający na płaską granicę między dwoma ośrodkami (rys. 5.2.1)



Rysunek 5.2.1. Promień (czerwona linia) z punktu A przechodzi, w punkcie P, przez granicę ośrodków o współczynnikach załamania n_A , n_B i trafia do punktu B. Niebieskie wektory to jednostkowe wektory w kierunku biegu promienia padającego i załamanego. Kąt α_{Ax} jest kątem pomiędzy osią *x*-ów a kierunkiem biegu promienia (lub wektorem jednostkowym w kierunku biegu promienia).

Droga optyczna od punktu A(x_A , y_A , z_A) poprzez punkt P(x,y,z=0) do punktu B(x_B , y_B , z_B) wynosi

$$f(x, y, z) = n_A \sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 + z_A^2} + n_B \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + z_B^2}$$
5.2.1

Równanie więzów jest bardzo proste

Równanie to wiąże punkt, w którym następuje załamanie z płaszczyzną z=0. Aby napisać równanie (5.2.1) musimy znać wektor gradientu z funkcji z=0. Postępując tak jak w przypadku wzoru (5.1.9) otrzymujemy jego współrzędne (0,0,1). Pochodne cząstkowe z funkcji f wynoszą

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -n_A \frac{x}{\sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 + z_A^2}} + n_B \frac{x}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + z_B^2}} 5.2.2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -n_A \frac{y}{\sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 + z_A^2}} + n_B \frac{y}{\sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + z_B^2}} 5.2.2b$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$5.2.2c$$

Wzory (5.2.2) wyrażają współrzędne wektora gradientu funkcji f. Wyrażenia ułamkowe wyrażają cosinusy kierunkowe wektorów promieni, zatem wzory (6.3.2) możemy przepisać w postaci

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -n_A \cos(\alpha_{Ax}) + n_B \cos(\alpha_{Bx})$$
 5.2.3a

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = -n_A \cos(\alpha_{Bx}) + n_B \cos(\alpha_{By})$$
 5.2.3b

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = 0 \tag{5.2.3c}$$

Możemy teraz napisać równanie (5.2.1) dla naszego problemu z rozbiciem na współrzędne

$$-n_A \cos(\alpha_{Ax}) + n_B \cos(\alpha_{Bx}) = 0$$
 5.2.4a

$$-n_A \cos(\alpha_{Ay}) + n_B \cos(\alpha_{By}) = 0$$
 5.3.4b

$$\lambda_3 = 0 \tag{5.3.4c}$$

Jeżeli skierujemy wektor jednostkowy $\hat{\mathbf{r}}_{A}$, $\hat{\mathbf{r}}_{B}$ zgodnie z kierunkiem biegu promienia AP i PB, współrzędne tych wektorów wyrażają się przez ich cosinusy kierunkowe (§DA 2.6).

$$\mathbf{r}_{\mathbf{A}}(\cos(\alpha_{Ax}),\cos(\alpha_{Ay}),\cos(\alpha_{Az}))$$
5.2.5a

$$\mathbf{r}_{\mathbf{B}}(\cos(\alpha_x), \cos(\alpha_{By}), \cos(\alpha_{Bz}))$$
 5.2.5b

Jednocześnie są to cosinusy, które są składowymi wyrażeń (5.2.4), które można zapisać w postaci jednego równania wektorowego

$$n_A \,\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_{\mathbf{A}} = n_B \,\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_{\mathbf{B}} \tag{5.2.5}$$

Gdzie $\hat{\mathbf{n}}$ jest wektorem normalnym do powierzchni i ma współrzędne

$$\hat{\mathbf{n}}(0,0,1)$$
 5.2.5a

I rzeczywiście, rozpisując iloczyny wektorowe (5.2.5) we współrzędnych mamy

$$n_A \,\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_A = n_A \Big(-\cos(\alpha_{Ay}), -\cos(\alpha_{Ax}), 0 \Big)$$
 5.2.6a

$$n_B \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}_B = n_B \left(-\cos(\alpha_{By}), -\cos(\alpha_{Bx}), 0 \right)$$
 5.2.6b

Po porównaniu współrzędnych *x*-owych i *y*-owych wyrażeń (5.2.6) otrzymujemy układ równań (5.2.4). Oznacza to, że (5.2.5) jest poprawną wektorową formą tych równań.

Choć prawo załamanie wyprowadziłem dla płaskiej granicy między obszarem o współczynniku załamania n_A , a obszarem o współczynniku załamania n_B , to wiesz już zapewne jak to wyprowadzenie uogólnić. Dla każdej gładkiej granicy między obszarami o różnych współczynnikach załamania możemy narysować płaszczyznę styczną w danym punkcie (rys. 5.2.2)



Rysunek 5.2.2. Gdy powierzchnia odgradzająca dwa obszary o różnym współczynniku załamania nie jest płaska, to w każdym punkcie tej powierzchni wyznaczamy płaszczyznę Wektor styczną. normalny **n** we wzorze (5.2.5) jest wektorem normlanym do tej powierzchni stycznej, w danym punkcie powierzchni granicznej.

W bardzo bliskim otoczeniu wybranego punktu zagadnienie obliczania przejścia promienia sprowadza się do przypadku granicy płaskiej. Tyle, że teraz od punktu do punktu normalne do tych stycznych płaszczyzn są różnie zorientowane.