

Temat

VI

PRAWA RUCHU

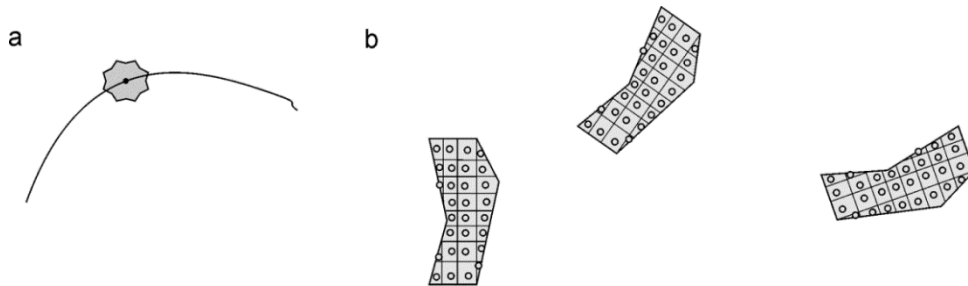
1. Prawa ruchu ♦/♣

Prawa ruchu, jak sama nazwa wskazuje, pozwalają na opis ruchu układów fizycznych. W najprostszym przypadku opisujemy ruch pojedynczej cząstki. Aby opisać ruch cząstki potrzebne są dwa elementy. Pierwszym z nich jest wyznaczenie toru cząstki. Możemy stwierdzić na przykład, że cząstka porusza się po okręgu. Wciąż jednak pozostaje pytanie czy jest to ruch jednostajny, jednostajnie przyspieszony, czy jakiś inny? Tak więc, oprócz kształtu toru prawa ruchu muszą pozwolić na określenie prędkości lub pędu cząstki w każdym punkcie jej toru.

Prób znalezienia praw ruchu możemy doszukać się w pracach filozofów starożytnej Grecji. Jednak cele i metody greckich filozofów były na tyle różne od tych, które mają miejsce we współczesnej nauce, że klasyfikowanie ich stwierdzeń na temat ruchu jako praw ruchu musi być czynione z dużą ostrożnością. Sami Grecy, podobnie jak i inne przednowożytnie ludy nie posługiwali się pojęciem ruchu w tym sensie, w którym czynimy to dziś. Dla nas ruch to zmiana położenia ciała w przestrzeni. Dla Greków ruch oznaczał szeroko pojmowane procesy zmiany. Ruchem był wzrost rośliny czy dziecka, choroba, śmierć, zamrażanie wody, spalanie drewna. Rozwój nauki i techniki w okresie arabskiego i europejskiego średniowiecza, stworzyły grunt pod ograniczenie pojęcia ruchu do procesu przemieszczania się ciał. To ograniczenie stało się faktem w klasycznej mechanice. Matematyczna forma opisu ruchu spowodowała, że podstawowym rodzajem ruchu stało się przemieszczenie punktu w przestrzeni. Nawet gdy rozważamy ciało rozciągnięte to mniej lub bardziej świadomie, sprowadzamy je do punktu i opisujemy ruch tego punktu (rys. 1.1). Takie podejście wymaga już daleko idącej abstrakcji. Musimy nie tylko rozumieć punkt jako matematycznego reprezentanta rozciągniętych ciał, ale mieć wysotrzane pojęcie przestrzeni jako sceny dla ruchu oraz matematyczną reprezentację tej przestrzeni. Pisząc równania ruchu piszemy je dla matematycznych punktów przemierzających matematyczną przestrzeń.

Punkt jest abstrakcyjnym tworem matematycznym. Z drugiej strony równania ruchu opisują ruch w abstrakcyjnej przestrzeni matematycznej, więc wszystko nawzajem do siebie pasuje. Pozostaje tylko problem, jak ten „matematyczny” ruch powiązać z ruchem rzeczywistym. Dzieje się to na różne sposoby. Przykładowo: gdy ciało, z punktu widzenia danego zagadnienia, możemy uznać za małe i sztywne (nie zmieniające kształtu), wybieramy punkt reprezentujący to ciało, który traktujemy jako punkt matematyczny (rys.1.1a) i nurkujemy w matematyczne przestrzenie. Obliczamy tor punktu materialnego o masie równej masie rzeczywistego

ciała i uznajemy, że tak obliczony tor dobrze oddaje ruch rozciągniętego sztywnego ciała. To, że możemy tak czynić wynika oczywiście z doświadczenia, które mówi, że uzyskane w ten sposób wyniki są dla wielu zagadnień sensowne. Taką metodę na dobre zaczął stosować Galileusz do opisu ruchu wahadła, ciała na równi pochyłej i swobodnego rzutu w polu grawitacyjnym.



Rysunek 1.1. Podstawowe prawa ruchu nowożytnej mechaniki odnoszą się do ruchu abstrakcyjnego tworu jakim jest punkt materialny. a) mówiąc o ruchu ciała w przestrzeni, zwykle skupiamy uwagę na jakimś jego reprezentatywnym punkcie i śledzimy ruch tego punktu. W części (a) rysunku linia przedstawia trajektorię wybranego punktu rozciągniętego ciała. Gdy musimy uwzględnić geometrię ciała to zwykle dzielimy je na kawałki (b), a następnie śledzimy tory punktów reprezentujących te kawałki.

Nieco inną metodę stosujemy gdy nie możemy zaniedbać rozmiarów ciała, gdyż na przykład podczas ruchu ciało się jeszcze obraca, a tego obrotu nie wolno nam zaniedbać (rys. 1.1b). Przykładem takiego zagadnienia jest lot rakiety, dla której ważne jest trzymanie właściwej orientacji. Rakieta, która w czasie lotu obróci się, zamiast na orbitę trafi z powrotem na Ziemię i się rozbije. Najgorzej opisuje się ruch układów, których rozkład masy znacząco zmienia się w czasie ruchu. Przykładem takiego układu jest płynąca ciecz. Przypomnę tu, że z problemem rakiety spotkaliśmy się w przy omawianiu zasady zachowania pędu. Wyraźnie zaznaczyłem tam, że nasz matematyczny model rakiety to punkt, którego masa maleje (rys. TIV 1.1.2). W tym ciągle prostym modelu nie uwzględnialiśmy tak podstawowego faktu, że rakieta może się niewłaściwie obrócić.

Choć w fizyce klasycznej prawa ruchu sprowadzają się do praw dynamiki newtonowskiej, to metod łączenia tej matematycznej teorii z praktyką jest wiele, a wybór konkretnej z nich jest często kwestią bardziej doświadczenia niż oparcia o ścisłe reguły postępowania, czyli czegoś co określiłem słowem meta-wiedzy (§TV 2).

1.1. Jest ruch czy go niema?

Wcześni Greccy filozofowie podjęli wyprawę po złote runo, czyli po prawdę wydedukowaną za pomocą rozumu. W ich świecie wyprawa ta miała sens. Dla Greckich filozofów świat powstał na bazie pierwotnej zasady. Tej pierwotnej zasadzie przypisywali, czasem milcząco, pierwotne cechy; a jedną z nich była zdolność do ruchu (ruchu rozumianego po Grecku, czyli jako przemiana i przemieszczenie). Istotną cechą tej pierwszej zasady był jej *logos*, który dziś moglibyśmy określić jako coś w rodzaju rozumnego słowa. Każdy element świata zawierał w sobie cechy pierwszej zasady w różnym natężeniu. W kamieniu było mniejsze natężenie ruchu niż w wodzie. Podobnie w kamieniu było mniejsze natężenie logosu niż w człowieku. Człowiek, a szczególnie filozof, zawierał w sobie wysokie stężenie logosu. Przejawiało się to jego zdolnością i skłonnością do rozumowania. W tym świetle rozumowanie było aktem samopoznania. Człowiek myśląc sięgał po zasoby logosu pierwszej zasady i nic nad to nie mogło go zbliżyć bardziej do prawdy. Percepcje zmysłową traktowali Greccy podejrzliwie. Uważali, że zmysły mają¹. Dlatego grecki filozof bardziej będzie ufał widzeniu rozumem, niż widzeniu okiem. Nasza koncepcja poznania i jego źródeł jest zupełnie inna, dlatego też greckie podejście do niektórych spraw może się nam zdać dziwaczne. Przykładem takiego „dziwactwa” jest filozofia Parmenidesa, który „oczami” rozumu postrzegł, że wszelki ruch i zmiana, podobnie jak wszelka różnorodność należą do świata zmysłowych ułud. Prawdziwy świat jest jednorodny i niezmienny (czyli nieruchomy). Grecy oskarżali Parmenidesa, że hołduje nie tyle mądrości co szaleństwu. Trudno jednak przyjąć jedność i bezruch Kosmosu, gdy weźmie się choćby pod uwagę, obecność na tym świecie każdego z nas. W odpowiedzi Zenon z Elei, uczeń Parmenidesa pokazał, że uznanie istnienia ruchu i różnorodności również prowadzi do absurdów. Ten grecki filozof bardzo zgrabnie dowodził, że ruchu nie ma. Chodziło mu oczywiście o ruch w szerokim sensie czyli o ruch jako przemieszczenie w przestrzeni i ruch jako przemianę. Przytoczę tu dwa argumenty Zenona dotyczące ruchu w przestrzeni.

1.1.1. Aporia Achillesa i żółwia

Zenon nazywał swoje wywody *aporiami*, czyli trudnościami. Dziś mówimy o paradoksach Zenona z Elei. Najbardziej znaną jest aporia Achillesa i żółwia. Powiedzmy, że Achilles i żółw stają do wyścigu. Ponieważ żółw ma opinię kiepskiego biegacza Achillesa daje mu fory; na starcie żółw ma sto metrów przewagi nad Achillesem. Niech Achilles biegnie sto razy szybciej od żółwia.

¹ Z wielkich filozofów starożytności wyjątkiem był Epikur, który uznał zmysły za całkowicie wiarygodne

W monecie gdy Achilles przebiegnie 100 metrów, docierając do punktu startu żółwia, żółw przebiegnie jeden metr. W momencie gdy Achilles przebiegnie jeden metr, żółw przebiegnie jeden centymetr. W momencie gdy Achilles przebiegnie ów dodatkowy jeden centymetr, żółw przebiegnie jedną dziesiątą milimetra i o tyle będzie wyprzedzał Achillesa. W momencie gdy Achilles przebiegnie ową dodatkową jedną dziesiątą milimetra, żółw przebiegnie jeden mikrometr i o tyle będzie wyprzedzał Achillesa. Czy Achilles ma szansę dogonić żółwia? Zenon wnioskował, że nigdy to nie nastąpi. Żółw zawsze choćby o bardzo, bardzo, bardzo niewiele, będzie wyprzedzał Achillesa. Z drugiej strony zmysły wyraźnie nam pokazują, że Achilles nie tylko może dogonić żółwia, ale go wyprzedzić. Ale Zenon był filozofem, więc świadectwo zmysłów uważała za zwodnicze. Rozum wyraźnie podpowiadał mu, że Achilles nie wyprzedzi żółwia i tego Zenon się trzymał. Inna aporia, aporia strzały również dowodzi, że ruchu nie ma. Wyobraźmy sobie oś czasu (Zenon nie posługiwał się osią czasu ale my to zrobić możemy). Na tej osi wybierzmy punkt – jeden moment czasu. Jaką odległość przeleci, w tym jednym momencie, strzała wystrzelona z łuku? Ponieważ moment jest tylko punktem niepodzielnym na drobniejsze punkty, to strzała w tym jednym momencie będzie po prostu stała. Mówiąc w naszym dzisiejszym języku, punkt ma rozciągłość $\Delta t = 0$. W czasie zero nie ma żadnego ruchu. Zatem w każdej wybranej pojedynczej chwili strzała stoi. Ale cały ruch składa się z takich pojedynczych chwil. Suma bezruchu daje bezruch. Zatem strzała się nie porusza. Widzimy co prawda, że strzała się porusza, ale wiemy, że Zenon nie ufał zmysłom. Skoro rozum mówi, że strzała nie porusza się, to się nie porusza, a cały ruch jest jednym wielkim zmysłowym złudzeniem.

Argumenty Zenona doprowadzały Greków do szału. Z jednej strony nie byli w stanie pogodzić się z konkluzjami wynikającymi z aporii Zenona z drugiej mieli ogromne kłopoty z kontrargumentacją. A prób podejmowali wiele. Jednym z rozwiązań był kompromis. Można było przyjąć, że świat składa się z kilku trwałych elementów, a jego różnorodność wynika z mieszania się tych elementów w różnych proporcjach. Tą drogą poszedł Empedokles, który uznał, że świat składa się z czterech elementów biernych: ognia, powietrza, wody i ziemi oraz dwóch aktywnych, które nazwał niezbyt dla współczesnego ucha przekonująco. Element odpowiadający za mieszanie to była miłość, a element odpowiadający za rozdzielanie to była nienawiść. Kosmos (czyli po grecku „porządek”) oscylował od stanu idealnego zmieszania po stan idealnego rozseparowania elementów. Innym rozwiązaniem było powołanie do życia wiecznych i niezmiennych atomów. W ten sposób atomy spełniały kryteria niezmiennego bytu Eleatów tworząc poprzez łączenie się bogactwo fizycznego świata. Chyba najbardziej spójną odpowiedzią na aporie Eleatów, był system zaproponowany przez Platona. Platon powołał do życia pozamaterialny i pozaczasowy, niezmienny świat

idei (wprowadził do filozofii metafizykę). W świecie idei istniały wzorce wszystkich bytów. Świat zmysłowy powstawał jako projekcja ze świata idei. Ale projekcje są zniekształconymi i ulotnymi obrazami wzorców, tak jak cień jest zniekształconym i ulotnym obrazem przedmiotu. Stąd naprzeciw niezmiennego świata idei stał przemijający świat cieni, który rzeczywiście był jak złudzenie.

1.2. Małe co nieco oszeregach ♣

Współczesna matematyka lepiej radzi sobie z aporiami Zenona. Zawdzięczamy to badaczom nieskończoności i zera². Te dwa, zdawałoby się skrajnie odmienne matematyczne twory mają ze sobą wiele wspólnego, a ich wpływy na terenie matematyki przeplatają się. Do rozwiązania aporii Achillesa i żółwia potrzebujemy dobrej teorii nieskończonych szeregów. Przykładem nieskończonego szeregu jest takie wyrażenie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad 1.2.1$$

Przy pierwszym spojrzeniu na ten szereg pojawia się pokusa by się popukać w głowę: kto zdoła zsumować nieskończenie wiele wyrazów? Z drugiej strony szybka refleksja może podpowiedzieć wyniki: suma nieskończenie wielu dodatnich wyrazów musi się równać nieskończoności. Dla matematyków taka intuicja nie jest rozstrzygającym argumentem. Pomyśl, że sumujemy długości odcinków tworzonych w następujący sposób. Bierzymy najpierw odcinek o długości dwa i dzielimy go na pół. Niech długość lewej połowy będzie pierwszym wyrazem nowo tworzonego szeregu. Z prawą połową czynimy tak jak z odcinkiem – dzielimy ją na dwie części i długość lewej dodajemy do szeregu. Z prawą połową czynimy tak samo jak poprzednio i tak dalej bez końca. Otrzymamy szereg o postaci

$$\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} \quad 1.2.2$$

Z przedstawionej konstrukcji geometrycznej wynika, że suma tego szeregu jest równa długości dzielonego odcinka czyli 2. Gdybyśmy wzięli odcinek o długości L i zastosowali tą samą procedurę geometryczną to na jej podstawie możemy od razu napisać

² Zobacz na przykład książkę Seife Charles „Zero niebezpieczna idea. Koncepcja zera w historii nauki od filozofii do matematyki”, Amber (2002)

$$\frac{L}{2} + \frac{L}{4} + \frac{L}{8} + \frac{L}{16} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{2^n} = L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad 1.2.3$$

Jak z tego widać, nieskończona suma dodatnich wyrazów może dać jak najbardziej skończoną sumę. Dlaczego ten prosty fakt przeoczył Zenon z Elei? Otóż Zenon niekończenie go przeoczył. Jednak jego podejście do sprawy było na tyle różne od naszego, że rozumowanie z dzieleniem odcinków mogło być dla niego jeszcze jednym dowodem na absurdalność takich podziałów odcinków i asumptem do sformułowania aporii o niepodzielności odcinków. Gdzieś w historii to podejście uległo zmianie i matematycy wkroczyli na teren nieskończonych szeregów, budując ich spójną teorię. Dziś na problem Achillesa goniącego żółwia patrzymy tak. Niech pierwszy odcinek, o długości stu metrów, Achilles przebiegnie w sekundę. W tym czasie sto razy wolniejszy żółw oddali się o jedną setną drogi przebytej przez Achillesa, czyli oddali się od swojego punktu startu o jeden metr. Ten dodatkowy metr Achilles przebiegnie w jedną setną sekundy, i tak dalej i tak dalej. Suma wszystkich czasów dla kolejnych, coraz mniejszych odcinków, jest szeregiem postaci

$$\begin{aligned} \frac{100}{100} + \frac{1}{100} + \frac{0.01}{100} + \frac{0.01^2}{100} \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.01^{n-1}}{100} \\ = 1 + \frac{1}{100} \sum_{n=1}^{\infty} 0.01^{n-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100^n} \end{aligned} \quad 1.2.4$$

W liczniku mamy długość kolejnych odcinków a w mianowniku prędkość Achillesa, czyli sto metrów na sekundę. Ten szereg ma na pewną skończoną sumę, gdyż jego kolejne wyrazy są mniejsze od poszczególnych wyrazów szeregu (1.2.2) (za wyjątkiem pierwszego wyrazu). Zatem Achilles potrzebuje skończonego czasu na dogonienie żółwia, proces nie będzie trwał wiecznie jak to sugerował Zenon z Elei. Szeregi takie jak (1.2.2-1.2.4) nazywamy szeregami geometrycznymi. Szeregi geometryczne charakteryzujemy przez dwie liczby, pierwszy wyraz szeregu a_1 , oraz stałą liczbę q nazywaną *ilorazem*, gdyż jest równa ilorazowi sąsiednich wyrazów. Wyraz o numerze a_n otrzymujemy poprzez wzór

$$a_n = a_{n-1}q = a_1q^{n-1} \quad 1.2.5$$

Bez dowodzenia podam wzór na sumę S_N N pierwszych wyrazów szeregu geometrycznego

$$S_N = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \quad 1.2.6$$

W przypadku nieskończonej liczby elementów ciągu geometrycznego, suma jest skończona gdy $|q| < 1$. Suma nieskończonego szeregu geometrycznego wynosi wtedy

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - q} \quad 1.2.7$$

Policzymy ile wynosi suma we wzorze (1.2.4). Suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100^n} \quad 1.2.8$$

Jest sumą wyrazów szeregu geometrycznego dla którego: $a_1 = 1/100$; a $q = 1/100$. Korzystając ze wzoru (1.2.7) mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100^n} = \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{1}{100} \frac{100}{99} = \frac{1}{99} \quad 1.2.9$$

Zatem szereg (1.2.4) ma wartość

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100^n} = 1 + \frac{1}{99} \quad 1.2.10$$

Ze wzoru (1.2.10) wynika, że Achilles dogoni żółwia po czasie $1 + 1/99$ sekundy. W tym czasie Achilles przebiegnie $101 + 1/99$ metra a żółw zaledwie $1 + 1/99$ metra. Spróbuję to samo zadanie rozwiązać bez zastosowania szeregów. Mam dane: prędkość Achillesa v_A i żółwia v_z to jest odpowiednio 100m/s i 1m/s. Wiem, że Achilles jest sto metrów za żółwiem. Gdzie się spotkają? Niech t oznacza czas, w którym Achilles dogoni żółwia. W tym czasie Achilles przebiegnie odcinek L metrów, a żółw odcinek o długości $L - 100$ m. Mamy układ równań

$$\begin{cases} L = v_A t \\ L - 100 = v_z t \end{cases} \quad 1.2.11$$

Podzielę te równania stronami

$$\frac{L}{L - 100} = \frac{v_A}{v_z} \quad 1.2.12$$

W ten sposób otrzymałem równanie z jedną niewiadomą L , które mogę rozwiązać

$$L = 100 \frac{v_A}{v_A - v_z} = 100 \frac{100}{99} = \left(101 + \frac{1}{99}\right) \text{m} \quad 1.2.13$$

Mając L i prędkość Achillesa możemy policzyć czas, po którym Achilles dogoni żółwia. Wynosi on $L/v_A=1=1/99s$. Tą wartość czasu i dystansu jaki przebiegnie Achilles otrzymaliśmy również z analizy szeregu. Obie metody dały ten sam rezultat. Korzystając ze współczesnego pojęcia prędkości aporię żółwia i Achillesa jest łatwo rozstrzygnąć. Kłopot polega na tym, że Grecy i ogólnie starożytni nie mieli naszego pojęcia prędkości. Grecy nie używali wielkości będących iloczynem lub ilorazem dwóch różnych wielkości fizycznych, takich jak droga i czas. Grecy porównywali prędkości dwóch poruszających się ciał obliczając stosunek odcinków jakie te ciała przebywały w tym samym czasie. Do rozstrzygnięcia aporii żółwia i Achillesa zabrakło im odpowiednich narzędzi matematycznych i odpowiednich pojęć fizycznych, a przede wszystkim nowożytnego światopoglądu na całe zagadnienie.

Wróć jeszcze do nieskończonych szeregów. Przypomnę, że ciągłe funkcje możemy przedstawić w postaci rozwinięcia w szereg potęgowy (§DB 3). Te rozwinięcia dają nieskończone szeregi potęgowe o skończonych wartościach. Już z tego przykładu widać, że szeregi grają w matematyce stosowanej ważną rolę. Dlatego podam jeszcze kilka faktów i definicji związanych z szeregami. Zacznę od definicji ciągu

Definicja 1.2.1: Ciąg

Ciągiem określonym na dowolnym zbiorze X nazywa się dowolną funkcję $f:I \rightarrow X$, gdzie I jest dowolnym podzbiorem zbioru liczb naturalnych. Zbiór I nazywa się zbiorem indeksów, a jego elementy – indeksami. Jeśli zbiór wskaźników jest skończony, to sam ciąg również nazywa skończonym, jeśli zbiór I nie jest skończony, to ciąg nazywa się nieskończonym.

Mogłeś się w tym miejscu trochę pogubić. Miałem mówić o szeregach, a tu nagły zwrot w kierunku ciągów. Przyznaję, wprowadziłem trochę chaosu, ale nie prowadzę systematycznego wykładu z matematyki. A pojęcie ciągu jest bardzo użyteczne w teorii szeregów, stąd ten nagły zwrot.

Przykładem ciągu jest odwzorowanie

$$f: N \rightarrow N: f(n) = n^2 \quad 1.2.14$$

Ciąg ten jest odwzorowaniem zbioru liczb naturalnych w zbiór liczb naturalnych; słowem $X=N$ i $I=N$. Ciąg (1.2.14) jest ciągiem rozbieżnym. Co to oznacza? Wyobraź sobie tak dużą liczbę naturalną jaką tylko chcesz. Zawsze istnieje taka wartość indeksu $n_g \in N$, że wszystkie wyrazy ciągu mające indeks większy od n_g są większe od tej liczby. Gdy tak jest, to ciąg jest rozbieżny. Inny przykład ciągu

$$f: N \rightarrow N: f(n) = \frac{1}{n^2} \quad 1.2.15$$

Tym razem mamy ciąg zbieżny do zera.

Definicja 1.2.2: zbieżny ciąg liczbowy

Ciąg liczbowy $\{a_n\}$ jest zbieżny do liczby g , gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki indeks n_g , że dla $n > n_g$ mamy

$$|a_n - g| < \varepsilon \quad 1.2.16$$

Słowem dla odpowiednio dużych wartości indeksów wyrazy ciągu powinny być dowolnie blisko liczby g . Przez ciąg liczbowy rozumiem oczywiście ciąg zbudowany z liczb rzeczywistych lub zespolonych. W tym drugim przypadku nawias we wzorze (1.2.16) oznacza moduł z liczby zespolonej. Myślę, że jest jasne, że ciąg (1.2.15) jest zbieżny do zera.

Definicja 1.2.3: granica ciągu

Liczba g , do której zbieżny jest ciąg, zgodnie z definicją (1.2.2), nazywa się granicą ciągu.

Z pojęciem zbieżności spotkaliśmy się w przypadku definicji pochodnej (DB 1). Pochodna była tam definiowana jako granica ilorazów różnicowych. Korzystaliśmy już więc, intuicyjnie z pojęcia granicy, tyle że nie dla ciągów. Możemy teraz przejść od ciągów do szeregów

Definicja 1.2.3: Sumy częściowe szeregu

Sumami częściowymi szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad 1.2.17a$$

Nazywamy ciąg wyrazów

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n = \sum_{i=1}^n a_i, \quad \dots \quad 1.2.17$$

Nie ma chyba wątpliwości, że sumy częściowe tworzą ciąg. Obliczanie sum szeregów można więc sprowadzić do szukania granicy ciągów.

Definicja 1.2.4: Zbieżność szeregu nieskończonego

Jeżeli ciąg sum częściowych szeregu nieskończonego ma skończoną granicę, to szereg ten nazywamy zbieżnym, w przeciwnym razie szereg nazywamy rozbieżnym

Ciekawym przykładem są szeregi naprzemienne

Definicja 1.2.5: Szereg naprzemienny

Szereg jest naprzemienny gdy kolejne wyrazy sumy zmieniają znak

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_i = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \quad 1.2.18$$

Poniżej podaję przykład zbieżnego szeregu naprzemiennego

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad 1.2.19$$

Szeregi naprzemienne zachowują się nieprzewidywalnie, oto przykład. Niech

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad 1.2.20$$

Zbudujmy nowy szereg mnożąc wyrazy poprzedniego przez $\frac{1}{2}$

$$s' = \frac{1}{2}s = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \quad 1.2.21$$

Dodajmy oba szeregi do siebie

$$s + s' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \quad 1.2.22$$

Szereg (1.2.22) składa się z takich samych wyrazów jak szereg (1.2.20), co by sugerowało, że jego suma jest również taka sama. Z drugiej strony spodziewamy się, że suma $s+s' > s$. Okazuje się, że przestawianie wyrazów szeregu naprzemiennego zmienia jego sumę! Może być nawet tak, że z szeregu zbieżnego, poprzez przestawienie wyrazów powstanie szereg rozbieżny. Stąd rozróżniamy szeregi zbieżne do tej samej liczby, niezależnie od kolejności wyrazów i szeregi, których sumy zależą od kolejności wyrazów

Definicja 1.2.6: szereg zbieżny bezwarunkowo

jeżeli dla każdej permutacji P zachodzi

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{P(i)} \quad 1.2.23$$

To szereg jest szeregiem bezwarunkowo zbieżnym, w przeciwnym razie szereg jest szeregiem warunkowo zbieżnym

Permutacja P jest operacją przestawienia wyrazów szeregu.

Z szeregami będziemy się jeszcze spotykali, dlatego przy okazji omawiania aporii Zenona pozwoliłem sobie uczynić krótki wstęp wprowadzający w tą tematykę. Na zakończenie dodam, że programy CAS liczą sumy szeregów nieskończonych. Przykłady zaczerpnę z programu Mathematica. Obliczę sumę szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^6} \quad 1.2.24$$

Zapis w programie Mathematica wygląda tak

<code>Sum[1/i^6, {i, 1, Infinity}]</code>	instrukcja
$\frac{\pi^6}{945}$	wynik
M.1.2.1. Przykład na obliczanie sumy szeregu nieskończonego	

Obliczę sumę ciągu podwójnych sum

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^2(i+1)^2} \quad 1.2.25$$

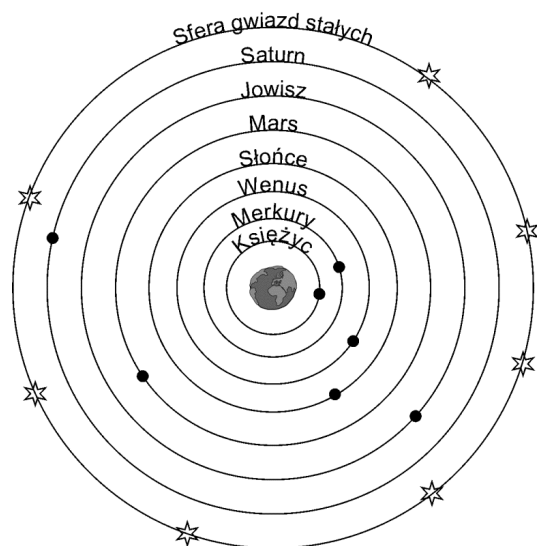
Zapis w programie Mathematica wygląda tak

<code>Sum[1/(j^2(i+1)^2), {i, 1, Infinity}, {j, 1, i}]</code>	instrukcja
$\frac{\pi^4}{120}$	wynik
M.1.2.2. Przykład na obliczanie sumy podwójnego szeregu nieskończonego	

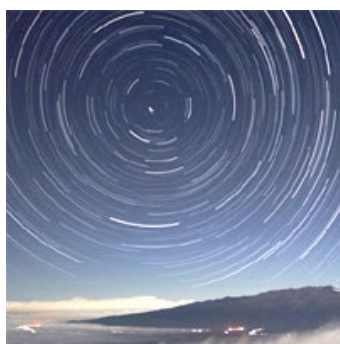
1.3. Astronomia ptolemejska ♣

Grecy stworzyli dwa systemy opisu Układu Słonecznego. Jeden z nich miał charakter kosmologiczny, a drugi astronomiczny. Jako pierwszy wykształcił się system kosmologiczny. Około V wieku p.n.e. Grecy zaczęli się posługiwać sferycznym modelem Kosmosu (rys. 1.3.1). Model ten był zbyt prosty by zadowalająco odwzorować ruchy planet. Natomiast dobrze radził sobie z ruchami gwiazd. Dla obserwatora znajdującego się na Ziemi gwiazdy poruszają się tak, jakby były przypięte do powierzchni olbrzymiej sfery

(rys. 1.3.2). Układ gwiazd widziany na niebie zdaje się być niezmienny. Dokładne obserwacje pokazują, że tak nie jest. Gwiazdy poruszają się względem siebie, ale są tak od nas odległe, że ich ruch dostrzegany jest dopiero przez teleskopy, lub jako efekt wielowiekowych obserwacji. Ruchy kilku obiektów na niebie wyraźnie odbiegały od karnego ruchu gwiazdnego zastępu. Dotyczyło to Słońca, Księżyca i planet; te ostatnie na pierwszy rzut oka nie wyróżniały się z tłumu gwiazd. Lecz cierpliwy obserwator mógł dostrzec, że coś jest z nimi nie tak. Pomyśl, co noc o tej samej porze oznaczasz położenie wybranej planety na tle sfery gwiazd. Wszystkie inne gwiazdy ustawiają się dokładnie w tym samym szyku, to znaczy co noc zachowują wzajemne położenie. Tylko kilka z nich Merkury, Wenus, Mars, Jowisz, Saturn no i oczywiście Słońce i Księżyc wędruje na swój sposób.



Rysunek 1.3.1. Sferyczny model Kosmosu. Znanym wówczas ciałom niebieskim przypisywano sfery niebieskie obracające się wokół Ziemi. Ostatnia sfera – sfera gwiazd stałych – unosiła gwiazdy.



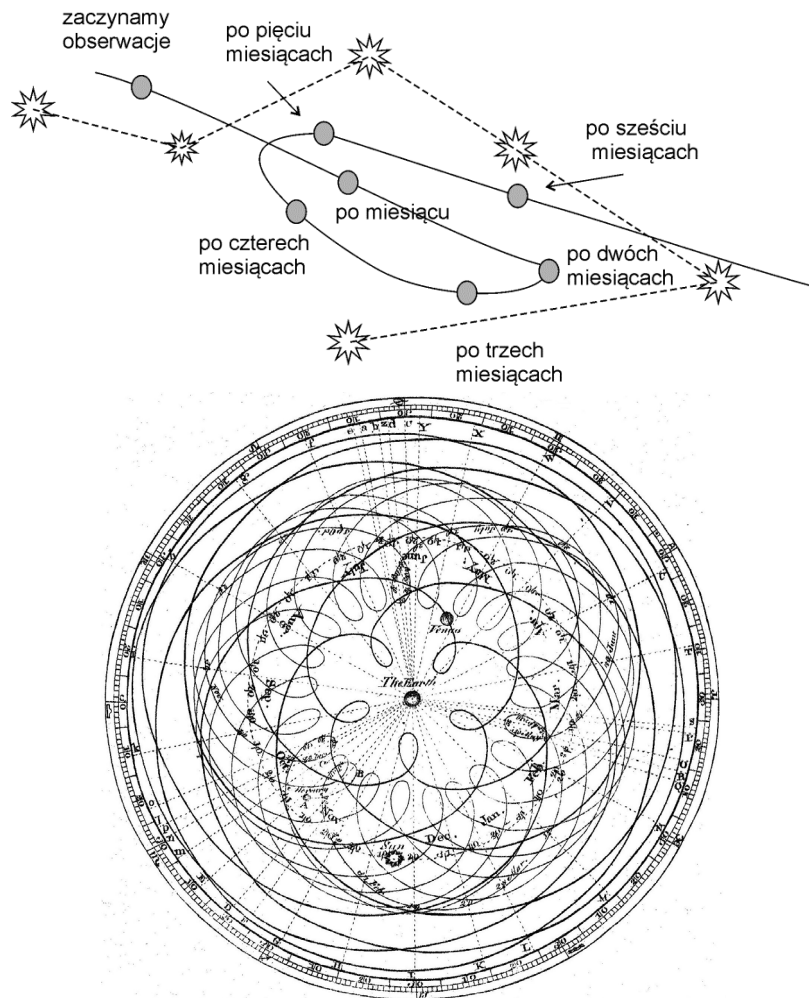
Rysunek 1.3.2. Robione przez dłuższy czas zdjęcie nocnego nieba pokazuje tory jakie przez noc zakreślają gwiazdy. Widać, że poruszają się jakby przyczepione do wielkiej obracającej się sfery. Po stronie półkuli północnej oś obrotu tej sfery przechodzi w pobliżu gwiazdy polarnej; Źródło Wikipedia

Patrząc na przykład jak zmienia swoje położenie Mars, na tle sfery gwiazd, zauważamy, że zwykle Mars porusza się zwykle szybciej niż gwiazdy, ale od czasu do czasu zdarza mu się zwalniać, aby potem znów przyspieszyć, efektem są pętle na jego torze wyrysowanym na tle sfery gwiazd (rys. 1.3.3). Model przedstawiony na rysunku (1.3.1) nie oddaje tych pętli. Wyjście z tego problemu wydaje się stosunkowo proste. Trzeba kręcić poszczególnymi

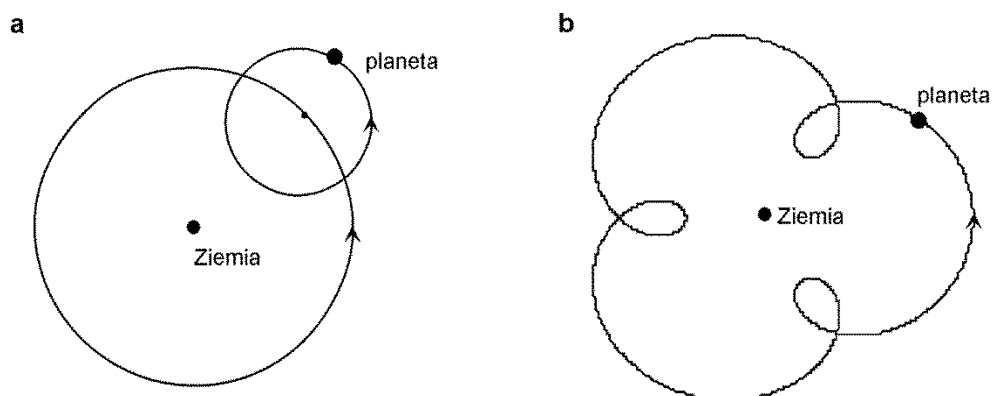
kołami z zmienną prędkością. Wtedy na tle ostatniego okręgu, to jest tego z gwiazdami, otrzymamy ruchy wsteczne. Z wykorzystaniem tego pomysłu było jednak gorzej. Grecy matematycy nie dawali sobie rady z ruchami zmiennymi, czyli technicznie pomysł był niewykonalny. Drugi problem był natury światopoglądowej. Model kosmologiczny miał opisywać naturę świata. Dla Greków niebo było miejscem boskiej doskonałości. Doskonałość ze swej natury (przynajmniej tak ją rozumieli Grecy) do niczego nie dąży. Dążenie oznacza brak czegoś, stan niezaspokojenia, co kłóci się z ówczesnym pojmowaniem doskonałości. Dla doskonałości właściwy był bezruch (czyli to co głosili Eleaci) lub ewentualnie doskonały ruch cykliczny, czyli ruch po okręgu. Stąd, z powodów filozoficznych i technicznych, ruchy „niebian” skazane były na okręgi lub stanie w miejscu, jak to miało miejsce w przypadku Ziemi. Jednak obserwacje nieba nie chciały wpisać się w model koncentrycznych okręgów, więc Grecy poszli na pewne ustępstwa. Każdej planecie przypisano nawet do czterech sfer, które sterowały ich ruchem. Sfery poruszały się ruchem jednostajnym obrotowym, ale każda z nich mogła obracać się z inną prędkością i wokół innej osi. Złożenie tych ruchów dawało pętle widoczne na rysunku (1.3.3). Oczywiście gwiazdy stałe miały tylko jedną sferę. Jednak nawet tak ulepszony model kosmologiczny nie był wystarczający. Znacznie lepiej spisywał się model astronomiczny. Model astronomiczny miał mniej ambitne cele. Nie objaśniał struktury Kosmosu, jego zasadniczym zadaniem był poprawny opis ruchów ciał niebieskich. Około roku 150 n.e. działający w Aleksandrii, Klaudiusz Ptolemeusz, w dziele znanym dziś jak *Almagest*³, opisał Grecki model astronomiczny nazywany dziś modelem ptolemejskim. Przez następne czternaście wieków model ten był bazą dla prac astronomów europejskich i arabskich. Pisząc *Almagest* Ptolemeusz korzystał z wcześniejszych osiągnięć Greckich astronomów. Jego dzieło jest więc syntezą tych osiągnięć z pewnym wkładem własnym⁴. Aby oddać ruchy planet Ptolemeusz korzystał z następujących konstrukcji geometrycznych. Planeta poruszała się po epicyklu, czyli małym kole, którego środek poruszał się po dużym kole zwanym deferentem (rys. 1.3.4).

³ *Almagest* to nazwa arabska, a raczej skrót utworzony z tytułu arabskiego: *Kitab al-Midżisti*. Nie znalazłem jednoznacznej informacji dotyczącej tytułu greckiego oryginału. Przytaczam dla przykładu dwie propozycje: *Mathematike Syntaxis*, oraz *Megále Síntaxis*.

⁴ Oczywiście synteza, szczególnie tak szeroka jak *Almagest* jest sama w sobie wielkim osiągnięciem. Mówiąc jednak o władze własnym mam na myśli własne obliczenia czy przemyślenia autora.

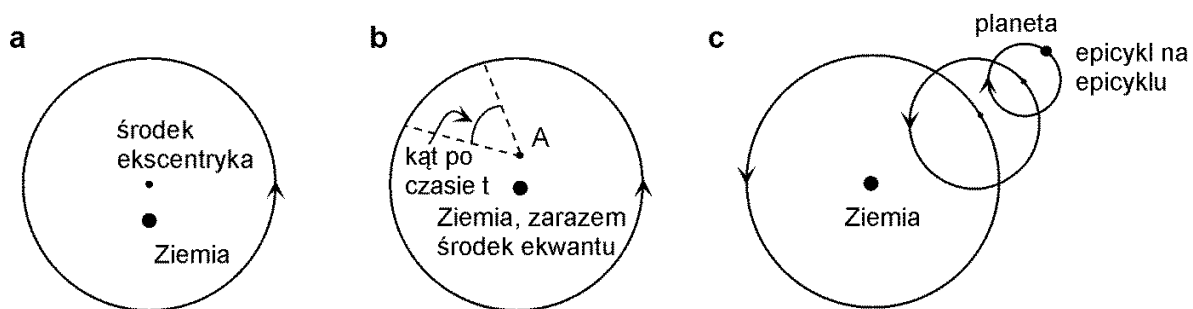


Rysunek 1.3.3. U góry - kłopotliwe pętle obserwowane w ruchu Marsa na tle sfery gwiazd. U dołu - obserwowane z Ziemi ruchy ciał niebieskich na tle sfery gwiazd według rysunku Cassiniego. Rysunek przedstawia ruchy Merkurego w okresie lat siedmiu i Wenus w okresie lat ośmiu. Z encyklopedii Britannica z 1777r.; Źródło Wikipedia



Rysunek 1.3.4. Planeta na epicyklu umieszczonym na deferencie; b) Kształt toru planety opisanej przez układ epicykl deferent.

Ruchy te były oczywiście jednostajne. Ruch po epicyklu pozwalał modelować wsteczne ruchy planet na tle sfery gwiazd (rys. 1.3.3). Niestety to nie wystarczyło by osiągnąć wymaganą dokładność opisu. Planety nie tylko wykonywały, na tle sfery gwiazd, ruchy niejednostajne, ale również zmieniały odległości w stosunku do Ziemi. Uwidoczniało się to poprzez zmianę ich jasności. Te dodatkowe cechy ruchu planet wymusiły na Ptolemeusz wprowadzenie do modelu, przez kuchenne drzwi, ruchów niejednostajnych. Służył temu ekscentryk i ekwant (rys. 1.3.5a-b). W średniowieczu arabscy uczeni dodali jeszcze do tego epicykl na epicyklu (rys. 1.3.5c)



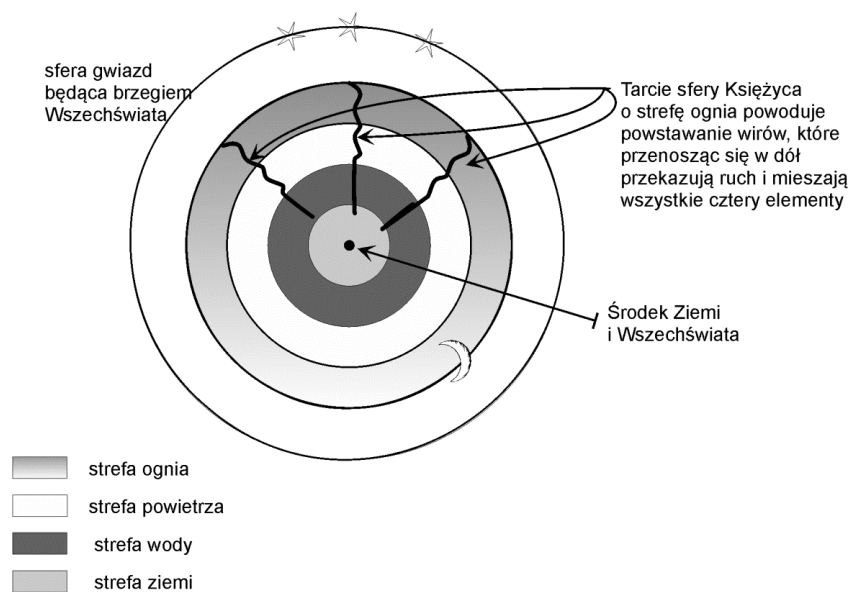
Rysunek 1.3.5. a) ekscentryk, środek ekscentryku nie pokrywa się ze środkiem Wszechświata, czyli ze środkiem Ziemi. Oś obrotu ekscentryka przechodzi przez jego środek. b) ekwant obraca się tak, że promień łączący punkt A i planetę (lub środek epicyklu na którym jest planeta) w jednakowych odstępach czasu zakreśla jednakowe kąty; c) epicykl na epicyklu

Model Ptolemeusza był rozwijany aż do czasu przyjęcia się heliocentrycznego modelu Kopernika. Dokładność modelu Ptolemejskiego była bardzo wysoka. Nie mniej z biegiem wieków przewidywania modelu zaczęły odbiegać od danych uzyskanych z obserwacji. Model zawsze można było puścić od nowa, dostosowując jego stan do bieżących obserwacji, niemniej dla astronomów było oczywiste, że model wymaga poprawek. Sporo wnieśli tu średniowieczni uczeni arabscy. Pod koniec wieku XIII twórczo do pracy przystąpili astronomowie europejscy. W XVI wieku astronomowie w Europie zdawali sobie sprawę z tego, że kolejne poprawki coraz bardziej komplikują model nie gwarantując jego poprawności. Coraz trudniej było wierzyć w to, że Bóg uczynił świat według modelu Ptolemeusza. Sytuacja dojrzała do reformy. Wśród reformatorów był również Mikołaj Kopernik. Należy zaznaczyć, że Kopernik nie działał z pozycji rewolucjonisty, który kwestionuje uznaną naukę. W swoim odczuciu był raczej naprawczym, który usuwając źródła problemów starych modeli postawi zastaną naukę na solidniejszym fundamencie.

Model heliocentryczny Kopernika operował tymi samymi prawami ruchu co model geocentryczny Ptolemeusza. Kopernik miał nadzieję, że

model heliocentryczny przybliży się do kosmologicznego ideału, to znaczy, że tory planet wokół Słońca da się opisać jako pojedyncze ruchy jednostajne po kole. W szczególności drażniła go obecność ekwantu, który, jak wyżej wspomniałem, kuchennymi drzwiami wprowadzał do modelu astronomicznego ruchy niejednostajne. A niebu zmienność zwyczajnie nie przystoi. Rzeczywistość okazała się bardziej złożona. Dane obserwacyjne zmusiły Kopernika do ponownego użycia epicykli, na czym ucierpiała prostota jego modelu.

Na domiar złego wypchnięcie Ziemi z centrum Wszechświata zachwiało ogólnie przyjętym wówczas gmachem fizyki. Fizyka Arystotelesa opierała się na pojęciu czterech żywiołów (elementów), które wymieniam według rosnącej ciężkości: ziemia, woda, powietrze i ogień. Żywioły te miały naturalną tendencję do układania się w warstwy według ciężaru. Najbliżej środka Kosmosu znajdowało się naturalne miejsce dla ziemi (jako elementu), w następnej warstwie odkładała się woda, potem powietrze, a na końcu ogień (rys. 1.3.6).



Rysunek 1.3.6. Model Kosmosu według Arystotelesa.

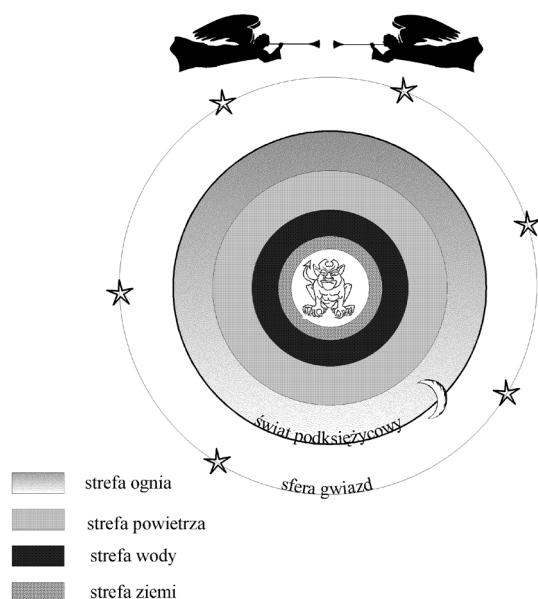
Warstwa ognia rozciągała się do sfery Księżyca, powyżej której zaczynało się niebo. A niebo wypełnione było piątym elementem – eterem (łac. kwintesencja). W idealnie nieruchomym Kosmosie, na skutek ruchów naturalnych wszystkie elementy poukładałyby się według tego schematu. Jednak obracająca się sfera Księżyca wprowadzała w ruch warstwę ognia, a pośrednio również inne żywioły, które mieszały się ze sobą. Dodatkowo cztery elementy strefy podksiężycowej miały zgubny dla idealnego porządku obyczaj transformacji między sobą. Tworzyło to ich mieszaninę, czego efektem było bogactwo form podksiężycowego świata. Kosmos Arystotelesa posłużył średniowiecznym teologom do budowy wizji własnego świata

(rys. 1.3.7). Ciężkie od grzechów dusze, zgodnie z fizyką Arystotelesa, opadały ku środkowi Ziemi w piekielny ogień, a dusze lekkie unosiły się do nieba. Ludzie Średniowiecza żyli przez kilka wieków w wysoce uporządkowanym świecie. Nieliczni wówczas uczeni, dobrze znający filozofię grecką i arabską, oraz krytyczne komentarze jakie pojawiły się na średniowiecznym uniwersytecie europejskim mogli dostrzegać rysy na tym gmachu. Gmach był tak potężny, że nawet oni, woleli raczej szukać metod łatania tych rys niż postulować zburzenie zastanej konstrukcji i zastąpienie jej nową.

Usunięcie Ziemi ze środka Kosmosu w oczywisty sposób naruszało ten schemat. W gruzy legł podział na ruchy naturalne elementów ciężkich do środka Kosmosu i elementów lekkich do góry. Wyrzucenie Ziemi z centrum Kosmosu był nie tylko kwestią zmiany porządku w Układzie Słonecznym ale pociągało za sobą zmianę teorii dotyczących ruchów, a w efekcie destrukcję całej fizyki Arystotelesa. Dalekosiężne skutki były nawet większe. Do czasów nowożytnych, Kosmologia była zespolona z teologią. Dotyczy to nie tylko średniowiecza europejskiego, ale praktycznie wszystkich epok i wszystkich kultur. Teologowie Kościoła Katolickiego, działając w tym duchu, dokonali zespolenia teologii i kosmologii⁵. Chrześcijaństwo samo w sobie takiego zespolenia nie wymagało, ale ówczesny światopogląd pchał ludzi w tym kierunku. Załamanie kosmologii i fizyki Arystotelesa oznaczało załamanie schematu pokazanego na rysunku (1.3.7) i uderzało w nauczanie Kościoła Katolickiego. Kopernik wierzył jeszcze, że jego Kosmos da się zespolić z fizyką Arystotelesa. Sugerował, że Ziemia dalej może pełnić rolę środka opadania ciał ciężkich, tyle że środka lokalnego. Jednak dla następnego pokolenia uczonych stało się jasne, że choć pomysł traktowania Ziemi jako lokalnego środka spadania ciał jest sensowny, to nie jest możliwe jego sensowne zespolenie z fizyką Arystotelesa. Wbrew obiegowej opinii Kopernik nie bał się negatywnej reakcji papieża czy kościelnej hierarchii na swoją pracę. W dziele *Commentariolus* (*Komentarzyk*) z 1513 roku, Kopernik ujawnił założenia systemu heliocentrycznego, więc trudno mówić o zaskoczeniu treścią jego głównego dzieła. Mimo „niecnych” zamiarów Kopernik mógł liczyć na wsparcie ze strony najwyższych hierarchów Kościoła. Jego obawy wiązały się z reakcją zawodowych astronomów i nie były to obawy bezpodstawne. Zalety modelu Kopernika były zbyt wątpliwe, aby zapłacić za nie cenę przewrócenia do góry nogami całej obowiązującej fizyki i kosmologii. Mimo to, z czasem liczba zwolenników modelu Kopernika rosła. Wynikało to przynajmniej z trzech czynników. Po pierwsze była to epoka

⁵ Zwieńczenie tego procesu znajdziemy w dziele Tomasz z Akwinu *Suma Teologii* (*Summa theologiae*), ukończonej w 1273 roku.

upadku autorytetów, zarówno Kościoła Katolickiego (okres reformacji) i jego doktryny jak również autorytetu starożytnej nauki.

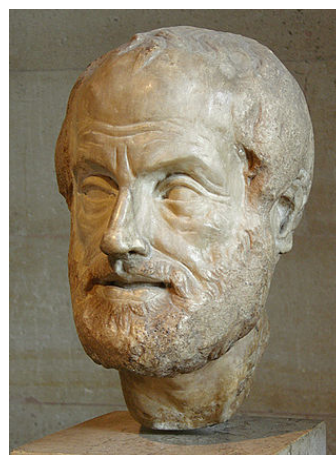


Rysunek 1.3.7. Średniowieczna teologia katolicka zespoliła swoje nauczanie ze zmodyfikowaną fizyką i kosmologią Arystotelesa. W efekcie powstał bardzo spójny obraz świata. Ponad sferą gwiazd znajdowało się Królestwo Niebieskie, wewnątrz Ziemi miało swoje miejsce piekło. Dusze ciężkie od grzechów w naturalny sposób spadały do piekła, a te lekkie unosiły się do nieba. To oczywiście bardzo zgrubny rys całej konstrukcji.

Po drugie wąska grupa zwolenników modelu Kopernika powoli go dopracowywała. Po trzecie inna grupa uczonych, której sztandarową postacią jest Galileusz, skutecznie demontowała inne części gmachu fizyki Arystotelesa. Siedemdziesiąt lat po śmierci Kopernika Kościół Katolicki, na skutek walk z reformacją, zaostrzył liberalny kurs wobec nauki. W efekcie w 1816 roku Kościół zakazał nauczania teorii Kopernika jako prawdy kosmologicznej, dopuszczając jednak jego nauczanie jako modelu astronomicznego. W tamtej sytuacji nie było to nic nadzwyczajnego. Wszak od wieków kosmologiczny model Arystotelesa współistniał z astronomicznym modelem Ptolemeusza. Niedługo potem liczba zwolenników modelu heliocentrycznego, wśród astronomów, wyraźnie przewyższyła liczbę zwolenników starej kosmologii. Wśród zwolenników modelu heliocentrycznego największą postacią był Johannes Kepler, który doprowadził go do dojrzałej postaci. Jednak do sukcesu modelu heliocentrycznego istotnie przyczynili się również uczeni, którzy nie byli jego zwolennikami. Wśród nich najważniejszą postacią był Tycho Brache. O tym będzie w następnym rozdziale.

Dyskusja 1.3.1: O naturalnych skłonnościach rzeczy

Omawiając cztery elementy Arystotelesa, stwierdziłem, że ziemia jako najcięższy element ma wpisany w swoją naturę ruch do środka Kosmosu. Dla współczesnych uszu może to brzmieć nieco dziwnie. Jest sobie taki kawałek ziemi i żywi ochotę do ruchu w kierunku środka Kosmosu, co więcej z bliżej nieokreślonych powodów sam z siebie ten ruch realizuje. Kiedy jednak Izaak Newton ogłosił prawo powszechnego ciążenia, w którym postulował, że dwa ciała materialne przyciągają się siłą proporcjonalną do ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości, nie wyjaśnił dlaczego tak się dzieje. Prawo to wydedukował na bazie zastanej wiedzy o ruchach planet i własnej intuicji. Prawo to nie mówi dlaczego ciała się przyciągają, tylko stwierdza sam fakt przyciągania. Podobnie Arystoteles nie tłumaczy dlaczego ciała ciężkie spadają ku środkowi Kosmosu. Stwierdza tylko, że taką mają naturalną skłonność. Wszystkie współczesne prawa fizyki coś u swej podstawy stwierdzają, nie tłumacząc skąd się to coś bierze.

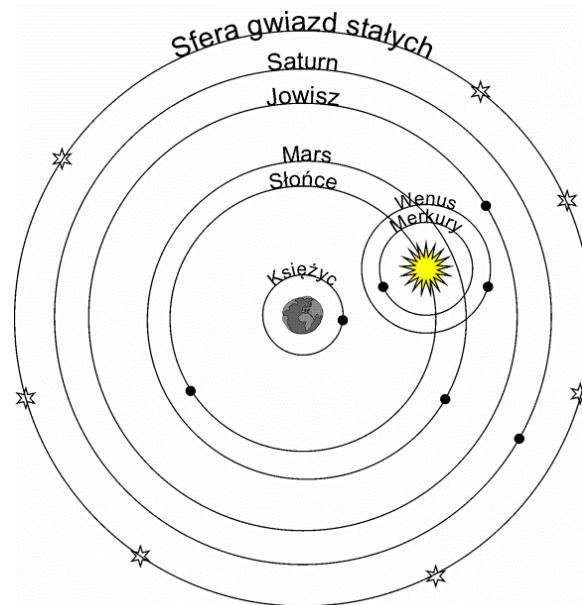


Rysunek 1.3.8. Z lewej: Klaudiusz Ptolemeusz według wyobrażenia z XVI wiecznej ryciny. Ptolemeusz (ur. ok. 100 zm ok. 168) był astronomem, matematykiem, optykiem i geografem greckiego pochodzenia. Urodził się w Tebaidzie, a kształcił i działał w Aleksandrii, która wówczas była częścią Imperium Rzymskiego. Autor *Mathematike Syntaxis*, dzieła obecnie znanego jako *Almagest* (tytuł arabskiego tłumaczenia); z prawej: rzeźba przedstawiająca Arystotelesa autorstwa Lizypa, obecnie muzeum Luwr. Arystoteles (ur. 384 p.n.e., zm. 322 p.n.e.) należy, obok Sokratesa i Platona do trójki najbardziej znanych greckich filozofów. Urodził się w jońskiej kolonii Stagira. W wieku lat siedemnastu przybył do Aten i wstąpił do Akademii Platońskiej, w której spędził dwadzieścia lat. W 342 roku Filip Macedoński powierzył mu wychowanie syna, Aleksandra III Macedońskiego, późniejszego twórcy imperium Hellenów. Po powrocie do Aten otworzył własną szkołę filozoficzną Liceum, w której nauczał własnego obszernego systemu filozoficznego. System ten stał się bazą dla nauczania na fakultecie sztuk wyzwolonych na średniowiecznym uniwersytecie. Na jego bazie rozwijała się również średniowieczna nauka arabska i europejska.

2. Prawa Keplera ♦

Przełom w historii modelu heliocentrycznego dokonał się dzięki pracy dwóch uczonych Tycho Brache i Johanna Keplera. Nie chcę przez to powiedzieć, że był to efekt li tylko ich wysiłków. Oni to jednak wykonali najbardziej istotną część pracy. Tycho Brache i Johannes Kepler stanowią podręcznikowy przykład pary doświadczalnik - teoretyk. Asymetria w ich położeniu, Tycho był szefem, a Kepler pracownikiem, pozwalała na w miarę gładką współpracę.

W 1601 roku Tycho Brache zatrudnił Johannes Keplera jako swojego asystenta. W tym czasie Kepler dał się już poznać jako wzięty matematyk. Tycho miał nadzieję, że Kepler pomoże mu opracować wyniki obserwacji ruchu planet będących efektem ponad dwudziestoletniej mrówczej pracy. Do śmierci Tychona Kepler próbował powiązać wyniki obserwacji z zaproponowanym przez Tychona modelem Układu Słonecznego (rys. 2.1).



Rysunek 2.1. Brak akceptacji dla modelu z ruchomą Ziemią z jednej strony oraz świadomości konieczności reformy modelu Układu Słonecznego z drugiej strony zainspirowały Tychona do przywrócenia znanego już w starożytności modelu pośredniego. W tym modelu Słońce stanowi centrum ruchu dla planet dolnych (Merkury i Wenus). Ten mini układ obiega nieruchomą Ziemię. Ruch pozostałych ciał niebieskich pozostał taki jak w modelu geocentrycznym. Ze względu na przecinanie się orbit planet dolnych i Marsa trzeba było zrezygnować z fizycznego wyobrażenia sfer sterujących ruchem ciał niebieskich. Inną nowością były komety, które Tycho umieścił powyżej sfery Księżyca. Wcześniej traktowano je jako zjawiska atmosferyczne.

Po śmierci Tychona, Kepler przejął po nim funkcję nadwornego matematyka i astronoma cesarza Rudolfa II Habsburga i nadzór nad wynikami pomiarów zgromadzonych przez Tychona i jego zespół. Od tego momenty Kepler koncentruje się na wpisaniu wyników Tychona w model heliocentryczny.

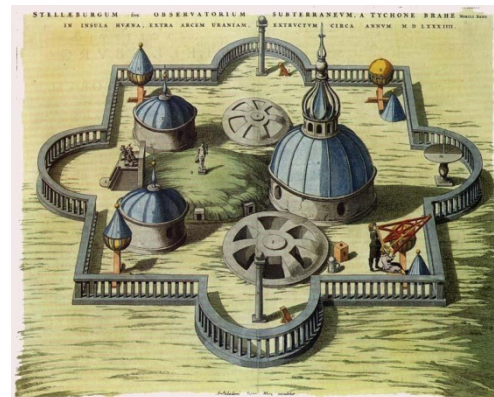
Niebo w XVII wieku sprzyjało rewolucjonistom. W listopadzie 1572 roku Tycho i jemu współcześni mieli okazję obserwować nową, bardzo jasną gwiazdę. Nowa gwiazda była tak jasna, że można ją było dostrzec nawet w dzień. Widoczna była przez osiemnaście miesięcy, powoli gasnąc. Z punktu widzenia ówczesnej kosmologii było to zjawisko zdumiewające. Zgodnie z fizyką Arystotelesa niebo jest niezmiennie i nowa gwiazda była postrzegana tak jak dziś postrzegane byłoby, zjawisko łamiące, na oczach wszystkich, zasadę zachowania energii. Z tego powodu część obserwatorów uważała nową gwiazdę za zjawisko atmosferyczne. Podobnie, idąc za starożytnymi, uważano, że komety są zjawiskiem atmosferycznym. Tycho zajął się pomiarem ruchu nowego obiekt. Jego pomiary wykazały, że nowy obiekt nie wykazuje żadnego przesunięcia względem gwiazd stałych, podczas gdy wszystkie obserwowane komety wyraźnie przesuwają się na tle sfery gwiazd stałych. Oznaczało to, że nowy obiekt porusza się dokładnie tak jak gwiazda. Wyniki te utwierdziły Tycho w przekonaniu, że nowy obiekt jest gwiazdą. Publikacje pomiarów ruchów nowej gwiazdy przynoszą Tychonowi sławę i otwierają drogę do dalszej kariery. Prócz nowej gwiazdy siedemnastowieczne niebo zafundowało astronom kilka jasnych komet. Pomiary paralaksy dobowej komet utwierdzają Tychona w przekonaniu, że komety poruszają się poza sferą Księżyca. Zapewne pod wpływem tych sukcesów Tycho skoncentrował się na doskonaleniu technik obserwacyjnych i na długoletnim, systematycznym ich prowadzeniu. Na tym polu znacznie prześcignął wszystkich swoich poprzedników.

Na sukces Tychona złożyły się jego zdolności naukowe i organizacyjne, upór oraz fakt, że jako szlachcic miał szansę na uzyskanie wsparcia finansowego ze strony króla Danii Fryderyka II. A wsparcie jakie uzyskał Tycho było, jak na ówczesne warunki, bezprecedensowe. W 1576 roku Tycho dostał od króla wyspę Hven oraz środki na budowę najnowocześniejszego na świecie obserwatorium astronomicznego. Pierwsze obserwatorium nazwał Uraniborg (pałac Uranii, czyli astronomii). W obszernym budynku (rys. 2.2) mieściły się starannie zaprojektowane i wykonane, wielkie przyrządy astronomiczne, pokoje dla pracowników, pokoje gościnne, piarnia i drukarnia, a nawet więzienie. Doświadczenia z użytkowania Uraniborga skłoniły Tychona do budowy drugiego obserwatorium, nazwanego Stjerneborg (rys. 2.2) (Pałac Gwiazd). Obserwatorium zostało wyposażone w największe i najbardziej precyzyjne instrumenty obserwacyjne ówczesnego świata (rys. 2.3.). Tycho był prekursorem metod korekcji błędów pomiarowych. Rozumiał, że próba konstrukcji idealnego przyrządu

skazana jest na niepowodzenie. Budował więc przyrządy tak dokładnie jak to było możliwe, a następnie mierzył ich charakterystyki. Dzięki temu Tycho wiedział na ile jego przyrządy odbiegają od założeń projektowych. To pozwoliło mu na wprowadzenie poprawek do prowadzonych pomiarów i zwiększyło dokładność tych pomiarów.



Uraniborg main building. Copper etching from Blaeu's Atlas Major, 1663.



Rysunek 2.2. Z lewej Uraniborg, z prawej Stjerneborg. Rysunki z książki Atlas Major Johan Blaeu, Amsterdam 1662, vol. 1; Źródło Wikipedia

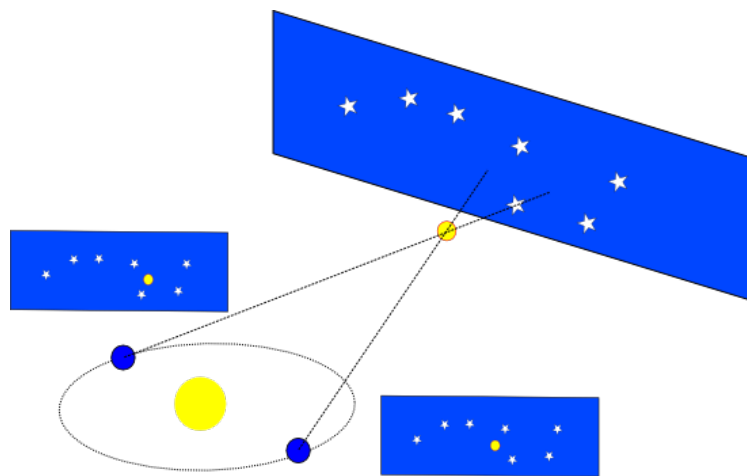
Wszystkie te czynniki dały nawet do dziesięciu razy większą precyzję prowadzonych pomiarów położenia ciał niebieskich w porównaniu z poprzednikami⁶. Tycho zostawił Keplerowi zapiski z ponad dwudziestoletnich, dobrze zaplanowanych i konsekwentnie prowadzonych pomiarów, przy ich rekordowej precyzji. Taki bezprecedensowy materiał musiał zawierać zarzewie istotnych zmian w astronomii.



Rysunek 2.3. Wielki kwadrant ścienny, z publikacji Tychona z 1598 roku; źródło Wikipedia

⁶ Średnio było to 4-5 razy, ale położenie obiektów takich jak Mars, na których Tycho szczególnie się skupił dały pomiary dziesięciokrotnie dokładniejsze

Tycho Brache odrzucił model Kopernika w dużej mierze przez wzgląd na uzyskane wyniki obserwacji. Istotnym argumentem przeciw był fakt, że nie był w stanie zmierzyć rocznej paralaksy gwiazd (rys. 2.4). Tycho Brache ciągle mieszkał w Kosmosie ukazanym na rysunku (1.3.6). Kosmos ten miał swojego architekta – Boga. Bóg działał racjonalnie, a boską racjonalność zbyt często sprowadzano do ludzkiego wymiaru. Problem paralaksy rocznej gwiazd dręczył również Kopernika, który bezskutecznie usiłował ją zmierzyć. W Kosmosie o rozmiarach oszacowanych przez starożytnych powinno to być możliwe. Brak mierzalnej paralaksy rocznej oznaczał, że albo Ziemia jest nieruchoma, albo sfera gwiazd stałych jest dużo dalej niż wynikałoby to z powszechnie przyjętych wielkości.



Rysunek 2.4. Gdy Ziemia krąży wokół Słońca zmienia się kąt pod jakim widzimy daną bliską gwiazdę, na tle odległych gwiazd, podczas obserwacji prowadzonych w odstępach półrocznych. Połowę zmiany tego kąta nazywamy kątem paralaksy rocznej; źródło rysunku Wikipedia.

Dużo większy Kosmos oznaczał, że pomiędzy Saturnem a sferą gwiazd pojawia się rozległa przestrzeń wypełniona eterem. Ówczesnym trudno było zaakceptować taką rozrzutność racjonalnego boskiego architekta. Pomyśl - ktoś zbudował dom, do normalnego użytkowania przez rodzinę, którego pomieszczenia mają 190 metrów wysokości. Jakie marnotrawstwo materiałów na budowę i energii na ogrzewanie! Jakie koszty malowania ścian! Negatywne próby pomiaru paralaksy rocznej przez Tychona wymagały przyjęcia, że Kosmos jest jeszcze większy niż wynikało to z oszacowań Kopernika. Choć dla dzisiejszych standardów był on ciągle bardzo, bardzo mały, to dla Tychona i jemu współczesnych rozmiary te były trudne do zaakceptowania. Pomiar Tychona wypchnął sferę gwiazd siedemset razy dalej od Ziemi niż przyjmowano to w modelu Ptolemeusza.



Rysunek 2.5. Tycho Brache (Tyge Ottesen Brahe ur. 14 grudnia 1546, zm. 24 października 1601), duński astronom; Urodzony w rodzinie duńskiego szlachcica. W wieku dwóch lat został uprowadzony przez zamożnego, nie mającego własnych dzieci wuja. Rodzina gładko doszła do porozumienia i Tycho został u wuja, który zadbał o jego edukację. Wbrew woli wuja Tycho miast studiować prawo zajął się astronomią, która stała się pasją jego życia i uczyniła z niego największego obserwatora przed epoką teleskopu. Długie serie niezwykle jak na owe czasy dokładnych obserwacji walczyły przyczyniły się do sukcesu modelu heliocentrycznego. Obserwacje gwiazdy nowej jak również komet dostarczyły mocnych dowodów istotnych słabości starożytnych modeli kosmologicznych. Przy całym nowatorskim ładunku zawartym w obserwacjach Tychona i jego zespołu, sam Tycho był w swych poglądach umiarkowanie konserwatywny. Co ciekawe, jego konserwatyzm wynikał w części z wyników jego własnych obserwacji ruchu ciał niebieskich; Źródło zdjęcia Wikipedia

Po śmierci Tychona Kepler zaczął opracowywać pozostawione przez niego obserwacje w duchu modelu heliocentrycznego. Kilkanaście długich lat zmagania z cyframi i z sobą pozwoliły mu dojść do wniosku, że planety nie poruszają się po kołach tylko po nieznacznie spłaszczonych elipsach. Było to posunięcie rewolucyjne. Po raz pierwszy został zastosowany model, który jawnie wprowadzał ruchy po orbitach innych niż kołowe (lub złożone z kołowych) i w jawny sposób wprowadzał ruchy niejednostajne. Szybko okazało się, że model Keplera ma wielką zaletę. Nie wymaga żadnych epicykli ani innych uzupełniających sztuczek geometrycznych i jest bardzo dokładny. Ideał, do którego dążył Kopernik spełnił się w pracy Keplera. Z drugiej strony ten spełniony ideał okazał się obcy w swym duchu dla starożytnej spuścizny naukowej.

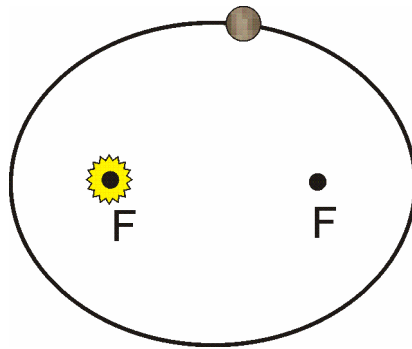


Rysunek 2.6. Johannes Kepler (ur. 27 grudnia 1571 r., zm. 15 listopada 1630 r.), niemiecki astronom, fizyk i matematyk. Kepler, który został bliskim współpracownikiem Tychona był pod wieloma względami jego przeciwieństwem. Urodzony w rodzinie żołnierza (zbankrutowanego handlarza i szynkarza), którego przez większość czasu nie było w domu, od najwcześniejszych lat borykał się z biedą. Kepler był dzieckiem słabego zdrowia i słabego wzroku (być może był to skutek ospy, którą zaraził się w wieku lat czterech). Mimo ciężkich warunków zdołał zdobyć przyzwoite wykształcenie. Astronomek został z konieczności – zwolniła się pozycja nauczyciela matematyki i astronomii w Grazu (Kepler chciał zostać pastorem). Praca rozbudziła na dobre jego pasję do astronomii. Życie Keplera najeżone było trudnościami. Żył w czasach wojen religijnych, przez co jego los był niepewny. Wiecznie borykał się z kłopotami finansowymi. Przez pewien czas angażował się w obronę matki przed oskarżeniem o czary. Względą stabilizację dała mu praca u Tychona. Największym osiągnięciem Keplera są trzy prawa dotyczące ruchu planet. Prawa te nadały systemowi heliocentrycznemu dojrzały kształt w pełni ukazując jego zalety. Stały się również punktem wyjścia dla Newtona przy formułowaniu prawa powszechnego ciążenia. Autor tego portretu jest nieznany; źródło zdjęcia Wikipedia

Pierwsze prawo Keplera opisuje geometrię toru po którym poruszają się planety wokół Słońca (rys. 2.7).

Określenie 2.1: Pierwsze prawo Keplera

Każda planeta krąży po elipsie ze Słońcem w jednym z jej ognisk



Rysunek 2.7. Przedstawia eliptyczną orbitę planety z zaznaczonymi dwoma ogniskami F . Zgodnie z pierwszym prawem Keplera w jednym z ognisk jest Słońce.

Uwagi 2.1.1:

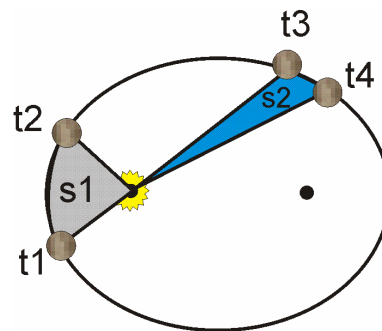
- Wyznaczenie toru planety sprowadzało się do wyznaczenia odpowiedniej elipsy – na przykład poprzez podanie długości jej dużej i małej osi, oraz tzw. kąta azymutu.
- Chociaż Kepler opracowywał swoje prawa dla planet poruszających się wokół Słońca, to dobrze opisują one ruch dowolnego małego ciała wokół ciała masywniejszego – na przykład ruch księżyców wokół planet, czy sztucznych satelitów wokół Ziemi.
- Pierwsze prawo Keplera opisuje ruchy orbitalne w przypadku oddziaływania dwóch ciał. Gdy, tak jak w Układzie Słonecznym ciał jest więcej, prawa tracą na swej dokładności. Jednak wpływy innych planet na ruch planety obserwowanej są małe i w czasach Keplera trudno je było zaobserwować.

Opis toru planety nie daje pełnego obrazu jej dynamiki. Nie wystarczy wiedzieć po jakim torze biegnie planeta, trzeba jeszcze znać prędkość jej ruchu. Problem ten rozwiązuje drugie prawo Keplera.

Zgodnie z prawami Keplera, aby opisać ruch planety należy: wyznaczyć elipsę, po której się ta planeta porusza, oraz w jakiej chwili czasu – nazywaną chwilą początkową - wyznaczyć położenie planety i jej prędkość orbitalną. Wtedy na podstawie drugiego prawa Keplera można obliczyć gdzie dana planeta znajdzie się w wybranej chwili czasu w przyszłości, lub gdzie była w wybranej chwili w przeszłości. Przy czym przeszłość i przyszłość mierzy się względem chwili początkowej. Oczywiście obliczenia będą tym dokładniejsze im dokładniej wyznaczymy elipsę po której porusza się planeta, oraz położenie i prędkość planety w chwili początkowej. Z drugiej strony bardzo duża dokładność wyznaczenia tych parametrów nie prowadzi do bardzo dużej dokładności wyznaczenia położenia planety, gdyż pierwsze i drugie prawo Keplera określa orbity planet w sposób przybliżony (ale dokładniejszy od poprzednich modeli).

Określenie 2.2.1a: Drugie prawo Keplera

Promień wodzący każdej planety zakreśla równe pola w równych czasach (rys. 2.8)



$$t4 - t3 = t2 - t1 \Rightarrow s1=s2$$

Rysunek 2.8. Ilustracja do drugiego prawa Keplera. Promień wodzący łączy ognisko elipsy (to, w którym jest Słońce) z planetą. Tu mamy zaznaczone dwa pola zakreślone przez promień wodzący. Pierwsze pole oparte jest o położenie planety w chwilach $t1$ i $t2$, a drugie pole oparte jest o położenie w chwilach $t3$ i $t4$. Jeżeli odstęp czasu od $t1$ do $t2$ jest taki sam jak od $t3$ do $t4$, to oba pola są takie same.

Możemy łatwo uogólnić pojęcie prędkości na inne procesy niż tylko przebywanie odcinków drogi w czasie. Możemy na przykład mierzyć prędkość parowania cieczy zdefiniowaną jako ilość odparowanej masy w jednostce czasu, albo prędkość nagrzewania się powietrza w pokoju mierząc wzrost temperatury tego powietrza na jednostkę czasu. Ogólnie możemy zapisać, że prędkość jakiegoś procesu, to przyrost wartości pewnego parametru X w czasie (zobacz dyskusje współrzędnych uogólnionych (§TV 4.2))

$$V = \dot{X} = \frac{dX}{dt} \quad 2.1$$

Prędkość polowa V_{pol} to przyrost w czasie pola zakreślonego przez dany wektor wodzący:

$$V_{pol} = \dot{S} = \frac{dS}{dt} \quad 2.2$$

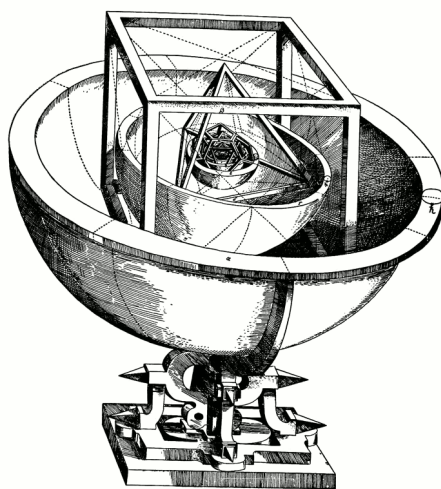
Teraz drugie prawo Keplera przybiera bardziej zwarte brzmienie:

Określenie 2.2.1b: Drugie prawo Keplera

Prędkość polowa planety, mierzona względem układu zaczepionego w Słońcu jest stała

Trzecie prawo Keplera było przez niego najbardziej cenione, gdyż powstało na bazie mistycznych rozważań związków pomiędzy wielościanami foremными (platońskimi), a parametrami ruchu planet wokół

Słońca (rys. 2.9). Kepler był neoplatońskim mistykiem. Plan boskiego stworzenia był dla niego oparty o doskonałość określoną na gruncie greckiej geometrii. Wielościanów platońskich mamy ledwie pięć i tak się akurat składa, że tyle potrzebował ich Kepler do opisu ruchu sześciu znanych planet: Merkurego, Wenus, Ziemi, Marsa, Jowisza i Saturna. Dziś wiemy, że geometryczne korelacje dostrzeżone przez Keplera były przypadkowe i Kepler w końcu z nich zrezygnował. Nie mniej rozważania tych kwestii naprowadziły go na poprawne prawo. Jest to jeden z tych zadziwiających przykładów z historii nauki, kiedy ciąg złych przesłanek doprowadza do poprawnych wniosków.



Rysunek 2.9. Model Układu Słonecznego stworzony przez Keplera, w oparciu o pięć platońskich wielościanów; Źródło obrazu Wikipedia

Mimo braku kolejnych brył platońskich, trzecie prawo Keplera stosuje się również do Urana, Neptuna i Plutona oraz do drobnych ciał (komety, planetoidy) krążących po eliptycznych orbitach wokół Słońca. Trzecie prawo możemy zapisać wzorem

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const} \quad 2.3$$

Tutaj *const* symbolizuje liczbę taką samą dla wszystkich planet Układu Słonecznego.

Określenie 2.2.2: Trzecie prawo Keplera

Stosunek kwadratu okresu T obiegu każdej planety wokół Słońca do sześciannu wielkiej półosi elipsy a , która wyznacza orbitę tej planety jest dla wszystkich planet taki sam.

Chociaż trzecie prawo Keplera zostało sformułowane dla planet obiegających Słońce, to stosuje się również do innych układów typu: ciało główne – satelity. Przykładem takiego układu jest Jowisz i jego ponad 60

księżyców, lub Ziemia i jej sztuczne satelity oraz Księżyc. Dla wszystkich tych układów wielkość T^2/a^3 jest taka sama. Jednak wartość tej stałej jest różna dla różnych układów. Inna będzie dla księżycy Jowisza inna dla planet Układu Słonecznego, a jeszcze inna dla sztucznych satelitów Ziemi. Należy również pamiętać, że trzecie prawo Keplera nie jest prawem ruchu. Czas na przykładowe zadanie

Zadanie 2.2.1

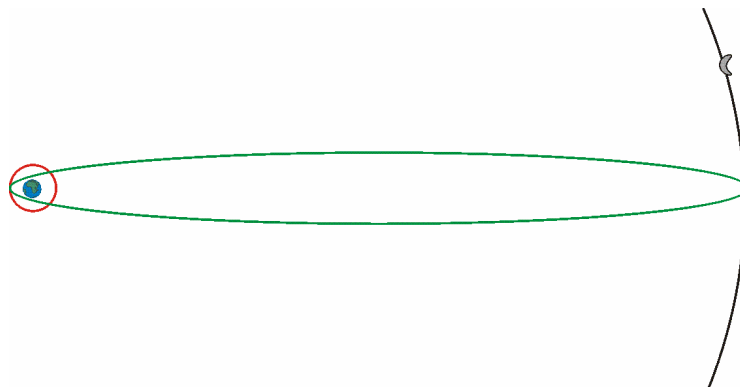
Oszacuj minimalny czas swobodnego lotu na Księżyc rakiety wysłanej z Ziemi. Długość miesiąca księżycowego wynosi około 27.32 dni.

Lot swobodny oznacza, że po osiągnięciu założonej trajektorii i prędkości rakietą gasi silnik i dalej leci bez pomocy napędu. Z punktu widzenia zapotrzebowania na paliwo jest to najoszczędniejszy tryb dotarcia do Księżyca. Rozpędzamy statek do minimalnej niezbędnej prędkości, a dalej jego tor kształtuje siła grawitacji.

Założmy, że nadajemy rakiecie taką prędkość, że wznosi się ona po linii prostej na taką wysokość, że osiąga orbitę Księżyca (rys. 2.10). W praktyce nie możemy wykonać tego z powierzchni Ziemi. Wykorzystujemy więc tak zwaną orbitę parkingową. Gdy statek rusza na Księżyc włącza silniki, opuszcza orbitę parkingową, rozpędza się do zadanej prędkości i po bardzo wyciągniętej elipsie (mimośród $\varepsilon \rightarrow 1$), takiej, że przecina orbitę Księżyca, zaczyna krążyć wokół Ziemi. W tej sytuacji i Księżyc i statek kosmiczny są satelitami Ziemi i stosuje się do nich trzecie prawo Keplera

$$\frac{T_K^2}{a_K^3} = \frac{T_s^2}{a_s^3} \quad 2.4$$

Tutaj: T_K , T_s , oznaczają okresy obiegu Księżyca i statku, a_K , a_s , to długości wielkich półosi orbity Księżyca i statku.



Rysunek 2.10. Czerwone koło na rysunku to orbita parkingowa wokół Ziemi. Wydłużona elipsa to hipotetyczny tor statku lecącego na Księżyc.

Przyjmijmy za jednostkę długości wielką półość orbity Księżyca – $a_K=1$. Wówczas wielka półość orbity statku kosmicznego wynosi $a_s=a_K/2=1/2$. Ze wzoru (2.4) mamy:

$$T_s = \frac{T_K}{\sqrt{8}} \approx 9.66 \text{ dni} \quad 2.5$$

Czas dotarcia do Księżyca to połowa wyliczonego okresu czyli około 4.83 dni (ok. 116 godzin). Apollo 11 leciał na Księżyc prawie 76 godzin, co dowodzi, że z punktu widzenia ekonomii zużycia paliwa nie był to lot optymalny i wymagał korekt z użyciem silników.

2.1. Powrót do symetrii

Dziś stwierdzenie, że orbity planet są eliptyczne nie budzi sprzeciwu. W czasach Keplera powszechnie wierzono, że ciała niebieskie poruszają się ruchem jednostajnym, po torach będących okręgiem lub złożeniem ruchów po okręgu. Stała za tym wielka tradycja nauki greckiej, oraz przekonania natury religijnej i filozoficznej. Pierwsze prawo Keplera szło naprzeciw zasadzie poruszania się po okręgach. Drugie prawo Keplera wprowadzało do astronomii niejednostajne ruchy planet. Co prawda prędkość połowa planety była stała, ale jej prędkości liniowa na orbicie eliptycznej musiała zmieniać się w czasie. Fakty te były dla teorii Keplera niewygodne i osłabiały jej pozycję. Również Kepler nie był entuzjastą odstępstw od założeń tradycyjnej astronomii. Jego skłonności do matematyczno-mistycznego spojrzenia na świat ciężko komponowały się z eliptycznymi orbitami i niejednostajnymi ruchami planet. Jednak presja faktów, prostota i dokładność modelu eliptycznego były dla Keplera wystarczająco silną motywacją do odstąpienia od liczącej sobie ponad 1500 lat tradycji. Mimo odejścia od klasycznie pojmowanych symetrii zamiłowanie do symetrii nie zniknęło z fizyki. Po około dwóch stuleciach zmniejszenia roli symetrii, pojęcie symetrii zaczęło odzyskiwać swą dawną pozycję. W XX wieku stało się centralnym pojęciem fizyki. Można nawet stwierdzić, że współczesna fizyka wręcz opiera się o pojęcie symetrii, co niewątpliwie ucieszyłoby Keplera i wielu jego kolegów. Co więcej drugie prawo Keplera jest jedną z konsekwencji tych współczesnych symetrii.

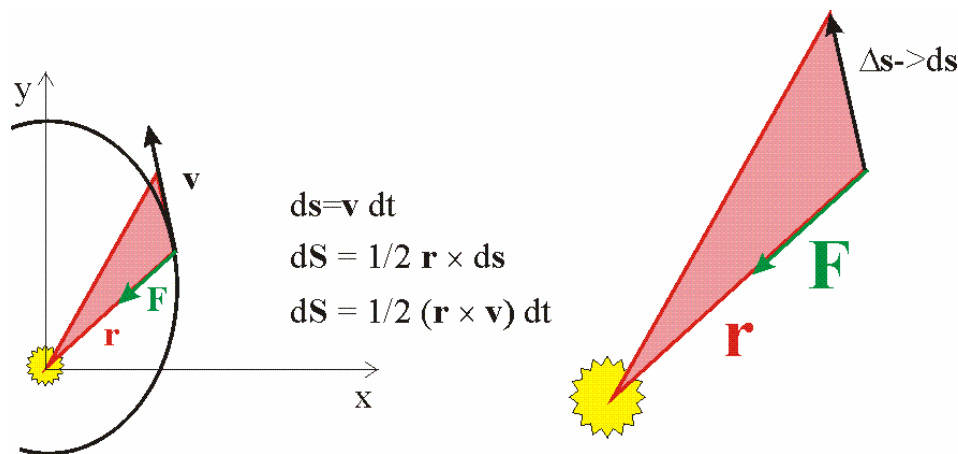
Stare zamiłowanie do symetrii wiązało się z geometrią brył. Ideałem była kula, o najwyższej symetrii ze wszystkich brył. Wysoko w tej hierarchii znajdowały się wielościany foremne, których Kepler użył do wyprowadzenia trzeciego prawa. Symetrie współczesnej fizyki to symetrie przekształceń. Na przykład: jeżeli jakieś równanie reprezentujące prawo fizyki nie zmienia się przy obrocie układu współrzędnych, to mamy do czynienia ze współczesną symetrią fizyczną. Symetrie związane z obrotem są zresztą bliskie symetriom

kuli, ale to nieco inna historia. Okazało się, że symetrie równań reprezentujących prawa fizyki związane są ściśle z zasadami zachowania wielkości fizycznych. Na przykład wspomniana już symetria obrotu wiąże się z zasadą zachowania momentu pędu. Inaczej mówiąc, jeżeli równania fizyki nie zmieniają się przy obrotach układu współrzędnych to obowiązuje zasada zachowania momentu pędu i na odwrót, o tym jeszcze będzie dokładniej. Pokażę teraz, że drugie prawo Keplera wynika z zasady zachowania momentu pędu, a zatem jest ściśle związane z symetrią obrotu.

Cząstka o masie m porusza się z prędkością $\mathbf{v}$ po orbicie eliptycznej pod wpływem siły grawitacji $\mathbf{F}$. Wektor $\mathbf{r}$ jest wektorem wodzącym poruszającego się ciała. W czasie dt ciało przebywa drogę $d\mathbf{s}=\mathbf{v}dt$ (rys. 2.2.1). Gdy operujemy wielkościami nieskończenie małymi możemy zaniedbać krzywiznę toru ciała. Pole różowego trójkąta (rys. 2.2.1) można wyrazić jako długość iloczynu wektorowego dwóch wektorów (fakt DA 2.5.3).

$$\Delta \mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{s} \quad 2.2.1$$

Kąt θ jest kątem między wektorem $\mathbf{r}$, a wektorem przesunięcia $\Delta \mathbf{s}$. Co prawda wynikiem iloczynu wektorowego jest wektor; mamy pole jako wektor. Ale czemu nie. Możemy uznać, że wektor $\mathbf{S}$ poprzez swoją wartość reprezentuje pole. W następnych tematach okaże się, że takie wektory pola są bardzo użyteczne.



Rysunek 2.2.1. a) przyrost pola w ruchu orbitalnym obliczamy jako pole różowego trójkąta rozwiniętego w bardzo krótkim czasie; b) w granicy w nieskończenie krótkim czasie.

Przy przejściu do wielkości nieskończenie małych mamy

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{s} \quad 2.2.2$$

Wektor przesunięcia $d\mathbf{s}$ jest równoległy do wektora prędkości planety $\mathbf{v}$. Wstawiając za $d\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{v} dt$ otrzymujemy

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dt \quad 2.2.3$$

Policzmy prędkość polową

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{K}}{m} \quad 2.2.4$$

Tutaj $\mathbf{K}$ jest wektorem momentu pędu cząstki. Jeżeli układ jest izolowany to jego moment pędu jest stały, a zatem stała jest wartość prędkości polowej. Widać stąd, że drugie prawo Keplera wynika z zasady zachowania momentu pędu, które jest związane z symetriami obrotu.

Ale skąd wiemy, że w ruchu orbitalnym planety moment pędu jest zachowany? No dobrze: przypominam że moment pędu to (def. TV 2.1)

$$\mathbf{K} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad 2.2.5$$

Zmiana momentu pędu w czasie wyraża się wzorem

$$\dot{\mathbf{K}} = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}) + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) = (\dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}}) + (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}) = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad 2.2.6$$

Ale, zgodnie z drugim prawem Niutona

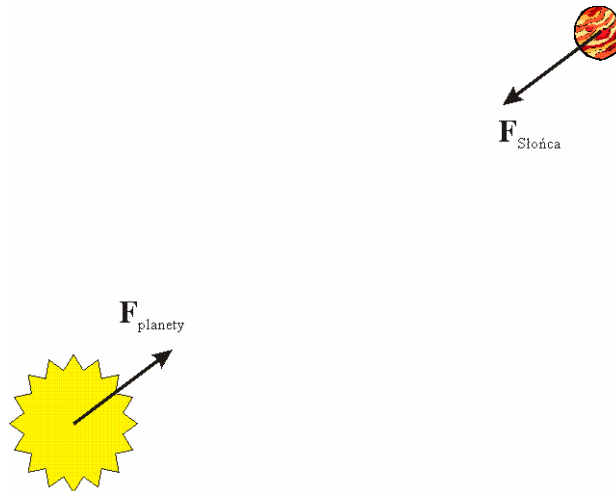
$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M} \quad 2.2.7$$

Ostatecznie

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M} \quad 2.2.8$$

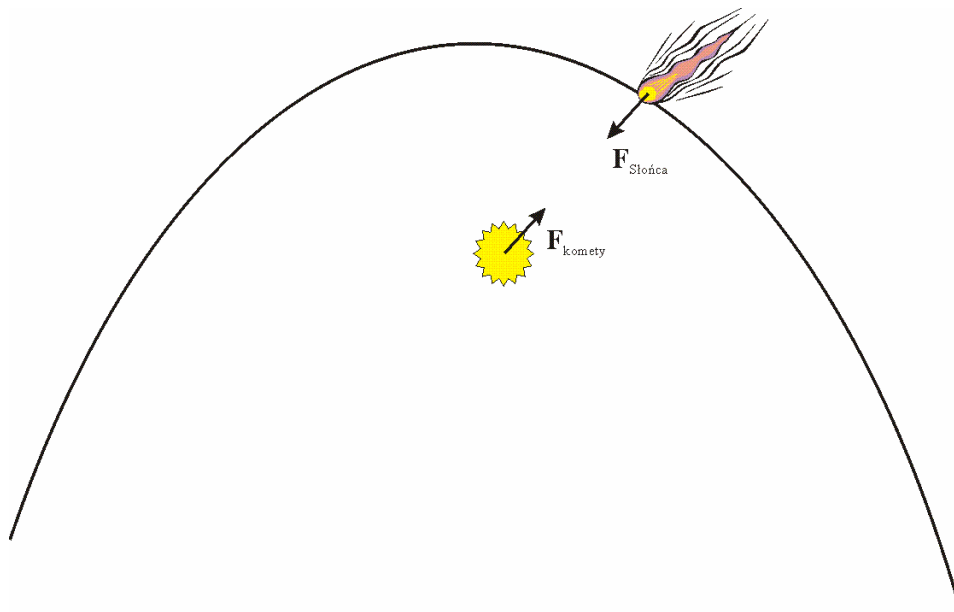
Zatem zmiana momentu pędu jest równa działającemu momentowi sił. Siła przyciągania grawitacyjnego działa wzdłuż promieni łączących dwa przyciągające się obiekty (taką siłę nazywamy centralną), przy czym zgodnie z trzecim prawem Newtona, o którym więcej będzie za chwilę, siła z jaką ciało A przyciąga grawitacyjnie ciało B jest taka sama tyle, że przeciwnie skierowana jak siła z jaką ciało B przyciąga ciało A . Zatem suma tych sił jest równa zeru. Zgodnie z tym co powiedziałem przy omawianiu statyki (fakt TV 2.2), w takim przypadku, suma momentów tych sił nie zależy od wyboru punktu odniesienia. Niech zatem punkt odniesienia leży w środku jednego z ciał (kiedy analizujemy ruch planety niech tym ciałem będzie Słońce). Wtedy suma momentów pędu w układzie jest równa zeru, gdyż jak pokazane jest na rysunku (2.2.2) siła jest równoległa do promienia wodzącego planety.

Oznacza to, że moment sił działający na planetę jest równy zeru. A skoro moment sił działający na planetę jest równy zeru, to zgodnie ze wzorem (2.2.8) zmiana momentu pędu też jest równa zeru. Wniosek moment pędu jest stały i w konsekwencji prędkość polowa planety jest stała.



Rysunek 2.2.2. Jeżeli układ odniesienia zaczepimy w środku Słońca to promień wodzący planety będzie równoległy do kierunku siły przyciągania grawitacyjnego tejże planety przez Słońce.

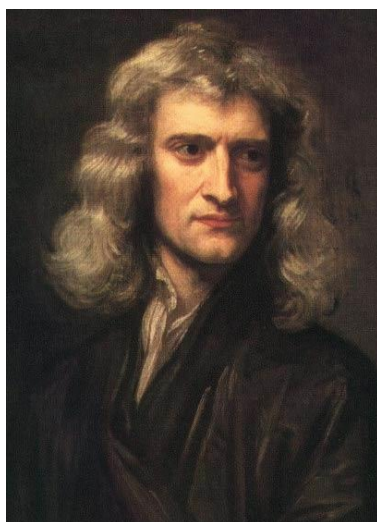
Nasze rozumowanie da się powtórzyć dla każdego kształtu toru ciała pod warunkiem, że tor ten wynika z działania sił centralnych. Przykładem ciał poruszających się pod wpływem sił centralnych po orbitach nie mających kształtu elipsy są komety nieokresowe (rys. 2.2.3). Ciała takie odwiedzają Słońce tylko raz i po jego obiegnięciu znikają w głębi kosmosu. W pobliżu Słońca tor takiej komety może mieć kształt hiperboli. Ciągłe jednak prędkość kątowna komety jest stała.



Rysunek 2.2.3. Choć komety nieokresowe poruszają się po torach hiperbolicznych między Słońcem a kometą działa centralna siła przyciągająca. Moment pędu w tym układzie również pozostaje stały.

3. Prawa Newtona ♦/♣

Kontynuatorem zmagających Keplera był Isaac Newton, uczony który w rankingach fizyków wszechczasów zwykle lokuje się w pierwszej trójce, często na pierwszej pozycji. Z praw Keplera Newton wyprowadził prawo powszechnego ciążenia, o którym będzie mowa w temacie (TXVI)⁷.



Rysunek 3.1. Isaac Newton (ur. 25 grudnia 1642/4 stycznia 1643 zm. 20 marca 1726/31 marca 1727) angielski fizyk, matematyk, alchemik i badacz Biblii. Zaliczany do największych uczonych w historii. Dzieło *Philosophiae naturalis principia mathematica* (wydane w 1687r.), zawiera jego największe osiągnięcia (efekt kilkunastu lat pracy), czyli prawo powszechnego ciążenia i prawa dynamiki klasycznej oraz podstawy rachunku różniczkowego i całkowego. Ponadto Newton miał wybitne osiągnięcia z zakresu optyki. Był osobą zamkniętą w sobie i nieufną wobec otoczenia. Drażliwie reagował na krytykę. Jako dziecko był chorowity. Po śmierci ojca Newtona matka powtórnie, bogato wyszła za mąż. Newtona wychowywała babcia. Mimo bogatej rodziny Newton, podczas studiów w Cambridge, musiał żyć skromnie; rodzina słabo wspierała jego naukowe ambicje. Czasy, w których żył były niespokojne ze względu na konflikty religijne i Newton w najgorętszym okresie angażował się w potencjalnie niebezpieczne działania polityczne. W czasie swego życia znaczenie więcej czasu i energii poświęcił studiowaniu zagadnień biblijnych i pisaniu komentarzy na ten temat niż nauce, co stało się później kłopotliwym rysem na jego życiorysie, dla jego naturalistycznie nastawionych hagiografów.

Dwa pierwsze prawa Newtona mają charakter praw ruchu. Choć Newton sformułował je na użytek mechaniki ciał niebieskich, to zasięg zastosowań tych praw okazał się znacznie szerszy. Prawa te legły u podstaw pierwszej współczesnej teorii fizycznej, nazywanej dzisiaj mechaniką klasyczną lub

⁷ O tym jak Newton z praw Keplera wydedukował prawo powszechnego ciążenia można przeczytać w książce: *Zaginiony wykład Feynmana* Prószyński i S-ka, Warszawa 1997, seria: Klasycy Nauki

mechaniką newtonowską. Na kursach zwykle mówi się o trzech prawach Newtona. Ja również poniżej podaję treść tych trzech praw, podkreślając raz jeszcze, że tylko dwa pierwsze to prawa ruchu.

Określenie 3.1a: Pierwsze prawo - wersja niezbyt jasna

Jeżeli na ciało nie działa siła lub działające siły równoważą się, to ciało to porusza się ruchem jednostajnie prostoliniowym.

Określenie 3.1b: Pierwsze prawo - wersja lepsza

Istnieje inercjalny układ odniesienia

Określenie 3.2a: Drugie prawo – wersja niedopowiedziana

Siła działająca na ciało punktowe jest proporcjonalna do jego masy i przyspieszenia

Określenie 3.2b: Drugie prawo – wersja dopowiedziana

W inercjalnym układzie odniesienia siła działająca na ciało punktowe jest proporcjonalna do jego masy i przyspieszenia

Określenie 3.3: Trzecie prawo:

Siła z jaką ciało A działa na ciało B jest równa co do wartości sile z jaką ciało B działa na ciało A. Obie te siły są równoległe i przeciwnie skierowane.

Dlaczego pierwsze i drugie prawo jest wyżej podane w dwóch postaciach? Z pierwszą postacią można się spotkać w szkolnej edukacji. Jej wadą są niedopowiedzenia mogące prowadzić do nieporozumień. Druga postać takich niedopowiedzeń nie zawiera.

Drugie prawo możemy zapisać formalnie za pomocą wzoru

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad 3.1$$

Siła $\mathbf{F}$ i przyspieszenie $\mathbf{a}$ to wielkości wektorowe; masa m jest wielkością skalarną. Drugie prawo Newtona rozpisane we współrzędnych ma postać:

$$F_x = ma_x; \quad F_y = ma_y; \quad F_z = ma_z \quad 3.2$$

Zapis bardziej precyzyjny ma postać

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \ddot{\mathbf{r}} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \dot{\mathbf{v}} \quad 3.3$$

Kropka oznacza pierwszą pochodną kropkowanej wielkości po czasie, dwie kropki oznaczają drugą pochodną. Pamiętamy, że

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \quad 3.4$$

We współrzędnych mamy trzy równania

$$F_x = m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = m \frac{dv_x}{dt} = m\dot{v}_x \quad 3.5a$$

$$F_y = m \frac{d^2y}{dt^2} = m\ddot{y} = m \frac{dv_y}{dt} = m\dot{v}_y \quad 3.5b$$

$$F_z = m \frac{d^2z}{dt^2} = m\ddot{z} = m \frac{dv_z}{dt} = m\dot{v}_z \quad 3.5c$$

Powyższy zapis ciągle nie jest ogólny, gdyż zakłada, że poruszające się ciało ma stałą masę, co nie zawsze jest prawdą. Przykładem na to jest ruch rakiety (TIV 1.1). W postaci najbardziej ogólnej drugie prawo ma postać:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} \quad 3.6$$

Ponieważ pęd zdefiniowany jest jako $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, powyższe równanie możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{m}\mathbf{v} + m\dot{\mathbf{v}} \quad 3.7$$

Gdy masa poruszającego się ciała nie zmienia się podczas ruchu, to

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad 3.8$$

i powracamy do poprzedniej wersji drugiego prawa. We współrzędnych równanie (3.6) ma postać

$$F_x = \frac{dp_x}{dt} = \dot{p}_x; \quad F_y = \frac{dp_y}{dt} = \dot{p}_y; \quad F_z = \frac{dp_z}{dt} = \dot{p}_z \quad 3.9$$

Równanie (3.6) można zapisać w postaci

$$\mathbf{F} dt = d\mathbf{p} \quad 3.10a$$

lub dla skończonych przedziałów czasu

$$\mathbf{F} \Delta t = \Delta \mathbf{p} \quad 3.10b$$

Zatem przyrost pędu jest równy iloczynowi siły i czasu działania tej siły. Iloczyn siły i czasu jej działania nazywany jest popędem siły

Definicja 3.1: Popęd siły

Iloczyn siły i czasu jej działania nazywamy popędem siły

3.1. Uwagi o jednostkach siły ♦

W układzie SI jednostką siły jest jeden niuton 1 [N]. Z jednostką tą spotkaliśmy się już w paragrafie (TV 3.1). Teraz mogę podać jej definicję

Definicja 3.1.1: Niuton [N]

Jeden niuton jest siłą jaką, w układzie inercyjnym, nadaje masie jednego kilograma przyspieszenie jednego metra na sekundę kwadrat

Przez jednostki podstawowe układu SI niuton wyraża się następująco

$$1\text{N} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \quad 3.1.1$$

Przypominam, że starą jednostką siły był kilogram siła, który jest równy sile z jaką przy powierzchni Ziemi przyciągany jest jeden kilogram masy.

Definicja 3.1.2: Kilogram siła [kG] (układ MKSA – układ ciężarowy)

Jest to siła, z jaką Ziemia przyciąga masę 1 kg w miejscu, w którym przyspieszenie ziemskie wynosi 9.80665 m/s^2

Fakt 3.1.1

$$1\text{kG}=9.80665\text{N}.$$

Jeden kilogram siła jest ciągle powszechnie używany w handlu.

W starym układzie CGS jednostką siły jest dyna.

Definicja 3.1.3: dyna [dyn] (układ CGS)

Jedna dyna jest siłą, która masie jednego grama nadaje przyspieszenie jednego centymetra na sekundę kwadrat

Przez jednostki podstawowe układu CGS dyna wyraża się następująco:

$$[\text{dyn}] = \frac{[\text{g}][\text{cm}]}{[\text{s}^2]} \quad 3.1.2$$

Fakt 3.1.2

$$1\text{dyn}=10^{-5}\text{N}.$$

Podstawową jednostką siły w brytyjskim systemie miar jest funt siła.

Definicja 3.1.4: funt siła [lbf] (pond force)

Jeden funt siła jest siłą jaką masie jednego funta nadaje przyspieszenie jednej stopy na sekundę kwadrat

Fakt 3.1.4

$$1\text{lbf}=4.44822\text{N}$$

3.2. Uwagi o jednostkach masy ♦

W układzie SI jednostką masy jest jeden kilogram masa [kg]. Jest to zarazem jednostka podstawowa układu SI (§TI_6.2). Przykłady innych jednostek masy to

Definicja 3.2.1: atomowa jednostka masy

Atomowa jednostka masy jest równa jednej dwunastej masy atomu węgla ^{12}C

Fakt 3.2.1

$$1u = 1.660540210 \cdot 10^{-27} \text{kg}$$

Atomowa jednostka masy jest powszechnie wykorzystywana w chemii i fizyce atomowej. Podstawową jednostką masy w brytyjskim układzie jednostek jest funt (pound [lb]).

Fakt 3.2.2

$$1\text{lb} = 0.453592\text{kg}$$

Innym przykładem niestandardowej jednostki masy jest funt aptekarski (pound troy).

Fakt 3.2.3

$$1\text{lb tr} = 0.373242\text{kg}$$

Kolejnym przykładem brytyjskiej jednostki masy jest uncja (ounce [oz])

Fakt 3.2.4

$$1\text{oz} = 28.3495\text{g}$$

W farmacji w użyciu jest uncja aptekarska (ounce troy [oz tr])

Fakt 3.2.5

$$1\text{oz tr} = 31.1035\text{g}$$

W dawnej Polsce za jednostkę masy służył między innymi łut

Fakt 3.2.6

$$1\text{łut} = 12.672\text{g}$$

Więszą jednostką był cetnar

Fakt 3.2.7

$$1\text{cetnar} = 40.55\text{kg}$$

3.3. Równania ruchu - przykłady ♦

Newtonowskie prawa ruchu są regułami, z użyciem których powinniśmy budować modele konkretnych układów fizycznych (§TI 1). Oprócz równań ruchu potrzebujemy jeszcze metod, które pozwalają na określenie działających, w analizowanym układzie sił, oraz zidentyfikowanie znajdujących się w nim mas. Musimy znać również tzw. warunki początkowe, o których więcej będzie w sekcji 7. Oznacza to, że badany układ fizyczny upraszczamy sprowadzając go do rozkładu mas i sił, oraz określając warunki początkowe. Rysunek (rys. 3.3.1) pokazuje taki prosty model dla układu, w którym znajduje się Ziemia, Księżyc i Słońce. Naszym zadaniem jest obliczenie ruchu tych trzech ciał. W tworzonym modelu tego układu fizycznego pomijamy większość informacji. Nie interesuje nas temperatura

powierzchni tych ciał, ani ich wnętrza. Nie troszczymy się o stan ziemskiej atmosfery, czy słonecznej fotosfery. Co więcej traktujemy te ciała jako punkty materialne, które mają określone położenie i masę. Słowem odrzucamy wszystko co nie jest masą, położeniem i prędkością. Odrzucamy również wpływ innych planet i gwiazd, przyjmując, że jest zbyt słaby aby się nim martwić.



Rysunek 3.3.1. W modelu układu Słońce, Księżyc, Ziemia, przyjmujemy, że ciała można sprowadzić do punktu materialnego. Oznacza to, że ich cechy redukujemy do masy, położenia ich środka masy i prędkości ich środka masy. Nadto w wybranym układzie współrzędnych, na przykład w układzie środka masy tych trzech ciał, i dla wybranej chwili określamy ich położenia oraz prędkości początkowe. Na rysunku niebieski układ współrzędnych zaczepiony jest w środku masy tych trzech ciał. Ponieważ Słońce jest ponad 300 000 razy masywniejsze od Ziemi i Księżyca razem wziętych, możemy również, w pierwszym przybliżeniu przyjąć, że Słońce jest nieruchome (Ziemia i Księżyc nie zmienia ruchu Słońca) i przesunąć układ współrzędnych do środka masy Słońca.

Czy tak radykalne uproszczenia mają sens? Mają, gdyż obliczone trajektorie trzech analizowanych ciał są całkiem bliskie trajektoriom rzeczywistym. To jest swoisty cud fizyki. Świat, a przynajmniej jego istotna dla nas część, ma taką dziwną własność że często możemy sensownie zacząć analizę układu od modelu kulistej krowy (§T1 1), z czego nauczyli się już korzystać Hellenowie (rys. TI 4.1.4). Przy większych wymaganiach możemy dodać na przykład wpływ Wenus i Marsa. Model się komplikuje i obliczenia też, ale wyniki są dokładniejsze. Możemy również uwzględnić kształt Ziemi, przyjmując na przykład, że jest nieco spłaszczoną kulą. Możemy dodawać do naszego modelu nowe elementy tak długo jak długo będziemy w stanie go obliczać. Jednak podkreślę tu jeszcze raz, że nawet tak radykalnie uproszczony model jak przedstawiony powyżej pozwala zadziwiająco dokładnie wyznaczyć orbitę Ziemi, przynajmniej we względnie krótkich odcinkach czasu.

Podobnie postępujemy wykorzystując mechanikę klasyczną do rozwiązywania zagadnień na Ziemi. Pamiętajsz analizę naprężeń konstrukcji mostu (zadanie. TV 2.1.2). W modelu sprowadziłeś jego konstrukcję do układu nieważkich prętów.

Gdy mamy zdefiniowany model możemy przystąpić do napisania równań ruchu. Równania ruchu to nic innego tylko układ równań opisujący model układu fizycznego ułożony na bazie drugiego prawa Newtona. Następnie rozwiązujemy otrzymane w ten sposób równanie lub układ równań. Zacznę od najprostszego przykładu, modelu pewnej sytuacji fizycznej, w którym mamy ciało o masie m , które traktujemy jak punkt materialny. Na ciało to działa siła o zerowej wartości $F=0$. Całość analizowana jest w inercjalnym układzie odniesienia. O układach inercjalnych już było (§TIV 2). Krótko - to takie układy, w których cząstka na którą działają zrównoważone siły, porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Dokładana dyskusja kwestii układów inercjalnych będzie w temacie (§TVII). Równanie ruchu dla naszego zagadnienia ma postać:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0} \quad 3.3.1$$

Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$\mathbf{p} = \text{const} \quad 3.3.2$$

W omawianym przypadku rozwiązanie równania ruchu mówi, że pęd ciała jest cały czas taki sam, czyli stały; w sumie żadna rewelacja. Widzimy, że drugie prawo jest zgodne z zasadą zachowania pędu.

Możemy zapytać: stały pęd – czyli dokładnie jaki? Cóż, na to pytanie równanie ruchu nie odpowie. Równanie ruchu pozwala na obliczenie przyrostów takich wielkości jak pędy, prędkości i położenia. Powiedzmy, że masz magiczną skrzynkę, która może Ci powiedzieć ile w bieżącym miesiącu zarobił dowolny mieszkaniec Ziemi. Słowem magiczna skrzynka umie określić przyrost gotówki w kieszeni dowolnej osoby. Ale to, że wiesz, iż pan Abacki zarobił 2879zł i 40gr, nie daje jeszcze odpowiedzi na pytanie ile ma teraz pieniędzy. Aby wiedzieć ile ma pieniędzy musimy wiedzieć jaki był początkowy stan jego kasy. O tym magiczna skrzynka nie może nas poinformować. Równania ruchu są magiczną skrzynką do obliczania przyrostów takich wielkości jak pędy, prędkości czy położenia. W naszym przypadku przyrost pędu jest równy zeru. Aby wiedzieć ile dokładnie wynosi wartość pędu musimy odwołać się do innych metod. Możemy na przykład spróbować zapytać wyroczni, albo wujka, lub zmierzyć pęd ciała w dowolnej chwili jego ruchu. To jest właśnie warunek początkowy, czyli wartość pędu i położenia wszystkich mas układu w jednej wybranej chwili.

Fakt 3.3.1:

Równania ruchu pozwalają na obliczanie przyrostów takich wielkości jak pędy, prędkości czy położenia.

Ale uwaga - jest wielkość związana z przemieszczeniem, którą równania ruchu pozwalają wyznaczyć dokładnie. Tą wielkością jest przyspieszenie.

W naszym przykładzie przyspieszenie jest równe zeru. Wszystko to wynika z tego, że w drugim prawie mamy przyrosty czasu dt , położenia dr , prędkości dv , lub pędu dp , ale nie mamy przyrostu przyspieszenia, tylko po prostu przyspieszenie. Dlatego obliczamy odpowiednio przyrosty położenia, prędkości lub pędu i wartość przyspieszenia.

Fakt 3.3.2:

Z równań ruchu możemy wyznaczyć wartość przyspieszenie

Przeanalizuję drugi przykład, to jest stałej siły $\mathbf{f}$ działającej na punktową masę.

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} \quad 3.3.3$$

Równanie ruchu ma postać:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad 3.3.4$$

Rozwiążę to równanie w rozsądnym układzie współrzędnych, to jest takim, którego oś x -ów pokrywa się z kierunkiem działania siły. W tak obranym układzie współrzędnych y -owa i z -owa składowa siły jest równa zeru. Mamy więc układ trzech jednowymiarowych równań ruchu

$$f_x = \frac{dp_x}{dt} \quad 3.3.5a$$

$$f_y = 0 = \frac{dp_y}{dt} \Rightarrow p_y = \text{const} \quad 3.3.5b$$

$$f_z = 0 = \frac{dp_z}{dt} \Rightarrow p_z = \text{const} \quad 3.3.5c$$

Równania (3.3.5b) i (3.3.5c) są nam już znane (zobacz (3.3.1) i (3.3.2)). Wiemy, że gdy siła jest zerowa to przyrost pędu w kierunku tej siły jest zerowy. Zatem składowe p_y i p_z są stałe. Oczywiście składowe te nie muszą mieć takiej samej wartości. Skrót „const” nie oznacza tu konkretnej wartości, jest tylko stwierdzeniem, że wielkość stojąca po lewej stronie równania jest stała. Pierwsze z równań (3.3.5) ma nową formę. Jest to proste równanie różniczkowe (§DC 3). Jego rozwiązanie ma postać

$$p_x = f_x \Delta t + \text{const} \quad 3.3.6$$

Z rozwiązania (3.3.6) wiemy jak zmienia się składowa x -owa pędu z czasem (jak przyrasta składowa x -owa pędu w przedziale czasu Δt), ale ponownie nie znamy wartości stałej, do której ten przyrost należy dodać. Powiedzmy, że zmierzaliśmy pęd (jego składową x -ową) w chwili t_p (chwila początkowa) i wynosił on p_{xp} (wartość początkowa x -owej składowej pędu). Mając

wartość składowej p_{xp} w wybranej chwili początkowej t_p , możemy zapisać p_x jako funkcję czasu

$$p_x(t) = f_x \underbrace{(t - t_p)}_{\Delta t} + p_{xp} \quad 3.3.7$$

Zauważ, że dla $t=t_p$, to jest, gdy $\Delta t=0$, $p_x(t)$ ma wartość stałą z wyrażenia (3.3.6), tak jak należało oczekiwać

$$p_x(t_p) = p_{xp} \quad 3.3.8$$

W wyrażeniu (3.3.7) czas $t-t_p$ może przybierać wartości mniejsze od zera. Czasy mniejsze od zera reprezentują chwile wcześniejsze od chwili początkowej t_p i pozwalają wyznaczyć przyrost składowej p_x przed chwilą początkową.

Mając składową x-ową pędu i jego wartość początkową (tą zmierzoną w chwili początkowej t_p) oraz masę ciała m możemy obliczyć prędkość ciała.

$$v_x(t) = \frac{p_x(t)}{m} = \frac{f}{m} \Delta t + \frac{p_{xu}}{m} = \frac{f}{m} \Delta t + v_{xp} \quad 3.3.9$$

Przez v_{xp} oznaczyłem prędkość w chwili początkowej t_p . Składowa x-owa siły jest stała, zatem możemy korzystać z równania $F_x=f_x=ma_x$. Wyznaczając stąd $a_x=f/m$ wyrażenie (3.3.9) możemy zapisać w postaci

$$v_x(t) = a_x \Delta t + v_{xp} \quad 3.3.10$$

Otrzymaliśmy znany ze szkoły wzór na prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym. Nic w tym dziwnego, gdyż ruch jednostajnie przyspieszony ma miejsce wtedy, gdy działająca siła jest stała. Na tej podstawie możemy od razu napisać szkolny wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym.

$$x(t) = \frac{a_x}{2} \Delta t^2 + v_{xp} \Delta t + x_p \quad 3.3.11$$

Oczywiście, z rozwiązania równania ruchu znamy przyrost drogi wzdłuż osi x . Aby skorzystać z powyższego wzoru musimy, czy to z pomiaru, czy to od wujka, znać początkowe położenie ciała x_p w chwili początkowej $t=t_p$.

W ten sposób mamy pełne rozwiązanie równania ruchu dla współrzędnej x-owej; to znaczy wyznaczyliśmy pęd, prędkość i położenie ciała w funkcji czasu. Bez większego problemu uzyskamy pełne rozwiązanie dla składowych y-owej i z-owej. Korzystając z (3.3.5b) i (3.3.5c) mamy

$$v_y(t) = v_{yp} \quad 3.3.12a$$

$$v_z(t) = v_{zp} \quad 3.3.12b$$

$$y(t) = v_{yp} \Delta t + y_p \quad 3.3.12c$$

$$z(t) = v_{zp}\Delta t + z_p \quad 3.3.12d$$

Tutaj v_{yp} , v_{zp} oraz y_p , z_p to wartości składowych odpowiednio prędkości początkowej i położenia początkowego. W sumie nie wyszliśmy jeszcze poza szkolne wzory. Lecz uzyskaliśmy je z ogólnie zapisanych równań ruchu, które równie dobrze możemy zastosować do bardziej złożonych problemów. Zanim przejdę do trudniejszych przykładów, poświęcę chwilę na analizę prostego, ale ważnego przykładu ruchu ciała po równie pochyłej.

3.4. Równia pochyła ♦

Przeanalizuję ruch ciała po równi pochyłej o wysokości h i kącie równi α . W analizie pominię wpływ tarcia na ruch ciała. Nie będę również korzystał z zasad zachowania, co przy braku tarcia znacznie ułatwiłoby analizę. Mnie jednak zależy na przykładzie zastosowań równań ruchu. Zwykle takie zadania robi się szybko i na skróty. Ma to jednak zasadniczą wadę. Kiedy na skróty próbuje się rozwiązywać trudniejsze problemy pojawiają się kłopoty. Dlatego robiąc to zadanie będę unikał skrótów.

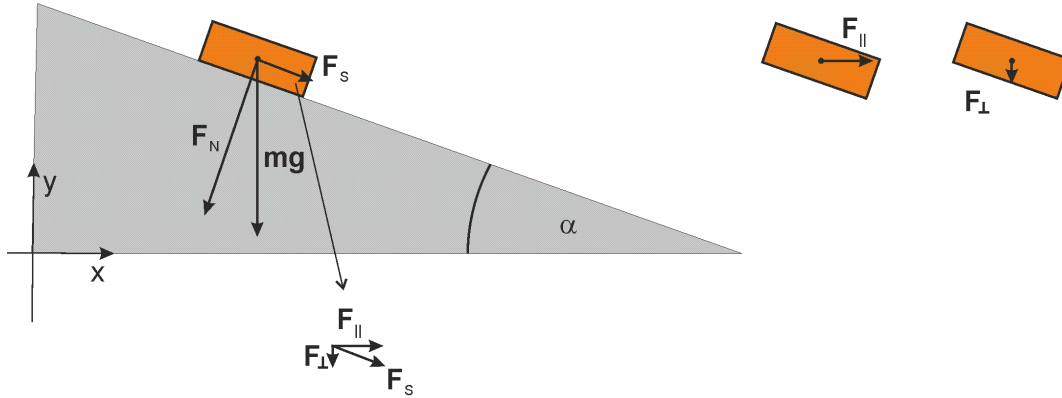
Będzimy korzystać z faktu, że wektory możemy rozkładać na współrzędne, a jeżeli wektory to i wielkości wektorowe. Zacznę od rozkładu siły grawitacji na dwie składowe: składową prostopadłą do powierzchni równi i składową równoległą do powierzchni równi. Obie składowe traktuję jak nowe wektory siły (rys. 3.4.1). Składowa prostopadła $\mathbf{F}_N$, wyznacza nacisk ciała na powierzchnię równi i tak długo jak pomijamy tarcie nie ma wpływu na rozwiązanie problemu. Za ruch ciała odpowiada składowa równoległa do powierzchni równi, którą nazwę siłą ściąającą $\mathbf{F}_s$. Wartość tej siły wyraża się ona wzorem

$$|\mathbf{F}_s| = m|\mathbf{g}|\sin(\alpha) \quad 3.4.1$$

Ruch ciała pod działaniem siły ściąającej mogą rozłożyć na dwa niezależnie ruchy składowe. Ruch w kierunku pionu i w kierunku poziomym. W ten sam sposób mogą rozłożyć siłę ściąającą $\mathbf{F}_s$ na składowe równoległą do poziomemu ziemi $\mathbf{F}_{||}$ i prostopadłą do poziomemu ziemi $\mathbf{F}_{\perp}$

Uwaga 3.4.1.

To że siła ściąająca $\mathbf{F}_s$ jest już składową siły ciężkości nie przeszkadza w rozłożeniu jej na składowe. Składowe wektora możemy traktować jak wektory, a każdy wektor możemy rozłożyć na sumę składowych wzdłuż wybranych kierunków. Mówiąc prosto, wektor $\mathbf{F}_s$ nie ma „pojęcia” o tym, że my go uważamy za składową innego wektora i zachowuje się jak każdy inny wektor



Rysunek 3.4.1. Ilustracja rozkładu sił, działających na ciało na równi pochyłej, przy braku oporów ruchu.

Wartości składowych siły ściąągającej $\mathbf{F}_s$ wyrażają się wzorami

$$F_{||} = |\mathbf{F}_s| \cos(\alpha) = m|\mathbf{g}| \cos(\alpha) \sin(\alpha) = \frac{1}{2} m|\mathbf{g}| \sin(2\alpha) \quad 3.4.2a$$

$$F_{\perp} = -|\mathbf{F}_s| \sin(\alpha) = -m|\mathbf{g}| \sin^2(\alpha) \quad 3.4.2b$$

Znak minus we wzorze (3.4.2b) wziął się stąd, że wektor $\mathbf{F}_{\perp}$ skierowany jest przeciwnie do kierunku osi y (składowa y -owa tego wektora jest ujemna). Mając wyznaczoną siłę możemy napisać dwa równania ruchu, jedno dla ruchu wzdłuż osi równoległej do podstawy równi, a drugie dla ruchu wzdłuż osi prostopadłej do powierzchni równi przyjmując $g=|\mathbf{g}|$.

$$F_{||} = \frac{1}{2} mg \sin(2\alpha) = \frac{dp_x}{dt} \quad 3.4.3a$$

$$F_{\perp} = -mg \sin^2(\alpha) = \frac{dp_y}{dt} \quad 3.4.3b$$

Jeżeli przyjmiemy oznaczenia

$$f_x = \frac{1}{2} mg \sin(2\alpha) \quad 3.4.4a$$

$$f_y = -mg \sin^2(\alpha) \quad 3.4.4b$$

to równania (3.4.3) przyjmą taką samą postać jak równanie (3.3.5a). Wzorując się na wyrażeniach (3.3.10) i (3.3.11) od razu możemy napisać rozwiązanie naszych równań ze względu na prędkość i położenie

$$v_x(t) = \underbrace{\frac{1}{2} g \sin(2\alpha)}_{a_x} \Delta t + v_{xp} \quad 3.4.4a$$

$$v_y(t) = \underbrace{-g\sin^2(\alpha)}_{a_y} \Delta t + v_{yp} \quad 3.4.4b$$

$$x(t) = \frac{g\sin(2\alpha)}{4} \Delta t^2 + v_{xp} \Delta t + x_p \quad 3.4.4c$$

$$y(t) = -\frac{g\sin^2(\alpha)}{2} \Delta t^2 + v_{yp} \Delta t + y_p \quad 3.4.4d$$

W chwili początkowej $t=t_p=0$ ciało jest na szczycie równi i spoczywa, zatem $v_{xp}=v_{yp}=0$. Ponadto w chwili początkowej współrzędne ciała wynoszą: $x_p=0$, oraz $y_p=h$. Podstawiając te wartości do wyrażen (3.4.4) otrzymuję

$$v_x(t) = \underbrace{\frac{1}{2} g\sin(2\alpha)}_{a_x} \Delta t \quad 3.4.5a$$

$$v_y(t) = \underbrace{-g\sin^2(\alpha)}_{a_y} \Delta t \quad 3.4.5b$$

$$x(t) = \frac{g\sin(2\alpha)}{4} \Delta t^2 \quad 3.4.5c$$

$$y(t) = -\frac{g\sin^2(\alpha)}{2} \Delta t^2 + h \quad 3.4.5d$$

Mając rozwiązanie równania ruchu mogę obliczać interesujące mnie wielkości, to znaczy przejść do analizy uzyskanych rozwiązań. Mogę na przykład obliczyć czas po jakim ciało zsunie się z równi. W tym celu wystarczy do równania (3.4.5d) podstawić $y=0$.

$$0 = -\frac{g\sin^2(\alpha)}{2} \Delta t^2 + h \quad 3.4.6$$

Rozwiązując to równanie ze względu na Δt mam

$$\Delta t = \frac{1}{\sin(\alpha)} \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad 3.4.7$$

Podsumujmy podjęte kroki. Z działającej na ciało siły wydzieliłem część $\mathbf{F}_N$, która nie miała wpływu na przebieg ruchu. Nie zawsze taka część jest, ale gdy jest warto ją wydzielić aby nie przeszkadzała w dalszych poczynaniach. Następnie działającą część siły $\mathbf{F}_s$ rozłożyłem na wygodne składowe i dla każdej składowej napisałem odpowiednie równanie ruchu.

Ponieważ siła F_s jest stała równania ruchu dla obu składowych były proste, więc bez trudu znalazłem rozwiązania tych równań.

Równię pochyłą, nazywa się czasem przyrządem do „rozcieńczania” grawitacji. Patrząc na składową pionową zsuwającego się klocka widać, że wartość przyspieszenia z jakim ów klocek spada (podziel (3.4.4b) przez m) jest mniejsza od wartości przyspieszania grawitacyjnego g .

3.5. Rzut w polu grawitacyjnym ♦

Postąpię w ten sam sposób w przypadku innego prostego zagadnienia: rzutu ciała w polu grawitacyjnym. Drobne ciało o masie m zostaje rzucone z prędkością v pod kątem α do poziomu. W każdym punkcie toru na ciało działa siła grawitacji mg . W zadaniu pomijamy opory ruchu, więc siła grawitacji jest jedyną siłą jaką biorę pod uwagę. Wybieram układ współrzędnych w którym wektor przyspieszenia ziemskiego g jest równoległy do osi z i przeciwnie skierowany (rys. 3.5.1). Przy niewielkich różnicach wysokości, jakie tu zakładamy, możemy uznać, że wartość siły grawitacji nie zależy od wysokości ciała nad powierzchnią Ziemi. Przy orientacji układu współrzędnych jak na rysunku wektor przyspieszenia grawitacyjnego ma współrzędne $g(0,0,-g)$, a wektor siły grawitacyjnej działającej na ciało ma współrzędne $F(0,0,-mg)$. Mogę teraz napisać równanie ruchu dla składowej poziomej i prostopadłej.

$$0 = m\ddot{x} \quad 3.5.1a$$

$$-mg = m\ddot{z} \Rightarrow -g = \ddot{z} \quad 3.5.1b$$

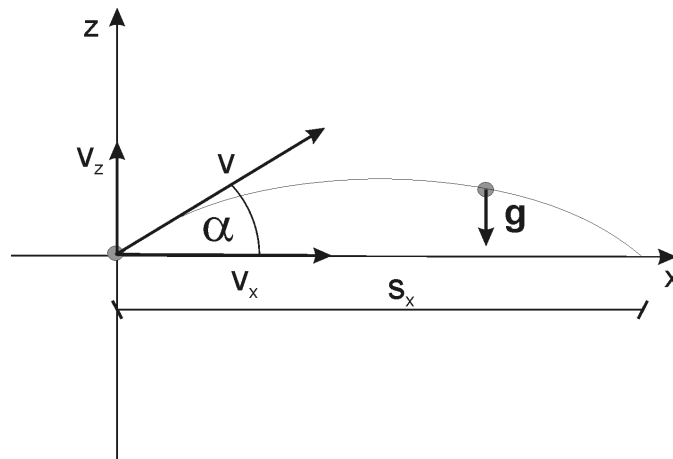
Postać rozwiązań tych równań już znamy (3.3).

$$v_x(t) = v_{xu} \quad 3.5.2a$$

$$v_z(t) = \underbrace{-g}_{a_z} \underbrace{\Delta t}_{t-t_u} + v_{zu} \quad 3.5.2b$$

$$x(t) = v_{xu}\Delta t + x_u \quad 3.5.2c$$

$$z(t) = -\frac{g}{2}\Delta t^2 + v_{zu}\Delta t + z_u \quad 3.5.2d$$



Rysunek 3.5.1. Ciało o masie m zostaje wyrzucone z prędkością $\mathbf{v}$ skierowaną pod kątem α do poziomu.

Łatwo też możemy określić warunki w chwili początkowej; przyjmiemy, że chwila początkowa to $t_p=0$. Wtedy $\Delta t=t$, co upraszcza zapis rozwiązania. W chwili początkowej prędkość w kierunku osi x wynosiła $v_{xp}=|\mathbf{v}|\cos(\alpha)$, w kierunku osi y wynosiła $v_{yp}=|\mathbf{v}|\sin(\alpha)$. Położenie początkowe wynosiło odpowiednio: $x_p=y_p=0$. Podstawiając te wartości do wyrażen (3.5.2) otrzymujemy

$$v_x(t) = |\mathbf{v}| \cos(\alpha) \quad 3.5.3a$$

$$v_z(t) = -gt + |\mathbf{v}|\sin(\alpha) \quad 3.5.3b$$

$$x(t) = |\mathbf{v}|\cos(\alpha)t \quad 3.5.3c$$

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + |\mathbf{v}|\sin(\alpha)t \quad 3.5.3d$$

Rozwiązaliśmy równanie ruchu dla rzutu ukośnego w polu grawitacyjnym; teraz czas na wnioski, czyli na analizę rozwiązania. W pierwszym rzędzie obliczę czas lotu ciała. Wyrzucone ciało wznosi się do punktu maksymalnego wzniesienia a następnie powraca do punktu wyrzutu, dla którego współrzędna z -towa jest równa zero. Zatem mając równanie (3.5.3d) mogę zapisać

$$0 = -\frac{g}{2}t^2 + |\mathbf{v}|\sin(\alpha)t \Rightarrow t = 0 \text{ lub } t_L = \frac{2|\mathbf{v}|\sin(\alpha)}{g} \quad 3.5.4$$

Równanie to, ze względu na t , ma dwa rozwiązania. Pierwsze z nich $t=t_p=0$ jest oczywiste: w momencie wyrzutu ciało znajduje się w położeniu $z=0$. Drugie rozwiązanie mówi po jakim czasie t_L ciało to wróci do położenia $z=0$. Jest to szukany czas lotu ciała. Droga w kierunku osi x , czyli zasięg rzutu obliczamy ze wzoru (3.5.3a) podstawiając za t czas lotu t_L .

$$x_{max} = |v| \cos(\alpha) t_L = |v| \cos(\alpha) \frac{2|v| \sin(\alpha)}{g} = |v|^2 \frac{\sin(2\alpha)}{g} \quad 3.5.5$$

Zajmę się obliczeniem kąta przy, którym zasięg rzutu jest maksymalny. Wartość tego kąta można szybko znaleźć analizując wzór (3.5.5) na zasięg rzutu. Zasięg rzutu będzie największy, gdy funkcja sinus przyjmie największą możliwą wartość – wartość jeden. Wtedy kąt 2α musi przyjąć wartość 90° , a kąt α wartość 45° ; czego można się było spodziewać. Możemy jeszcze określić kształt toru, po którym porusza się ciało. Skorzystamy z równań (3.5.3c) i (3.5.3d). Z równania (3.5.3c) wyliczamy t .

$$t = \frac{x}{|v| \cos(\alpha)} \quad 3.5.6$$

Tak wyliczone t podstawiamy do równania (3.5.3d)

$$\begin{aligned} z(x) &= -\frac{g}{2} \frac{x^2}{|v|^2 \cos^2(\alpha)} + |v| \sin(\alpha) \frac{x}{|v| \cos(\alpha)} \\ &= \tan(\alpha) x - \frac{gx^2}{2|v|^2 \cos^2(\alpha)} \end{aligned} \quad 3.5.7$$

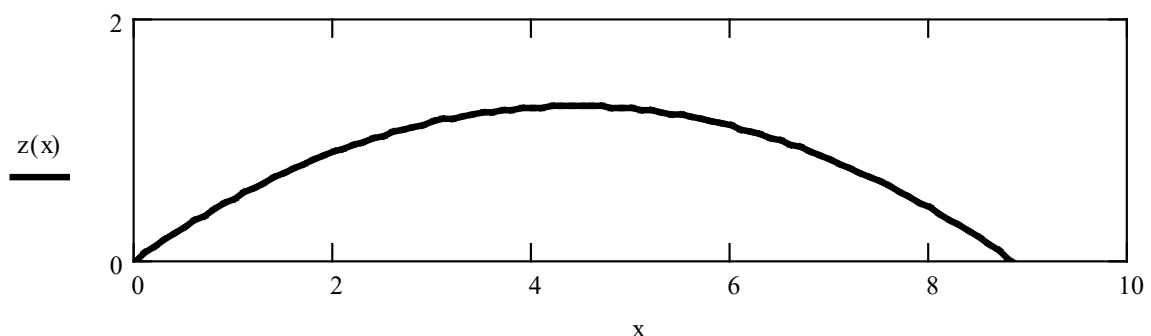
Otrzymaliśmy równanie postaci

$$z(x) = ax + bx^2 \quad 3.5.8a$$

$$a = \tan(\alpha); \quad b = -\frac{g}{2|v|^2 \cos^2(\alpha)} \quad 3.5.8b$$

czyli równanie paraboli.

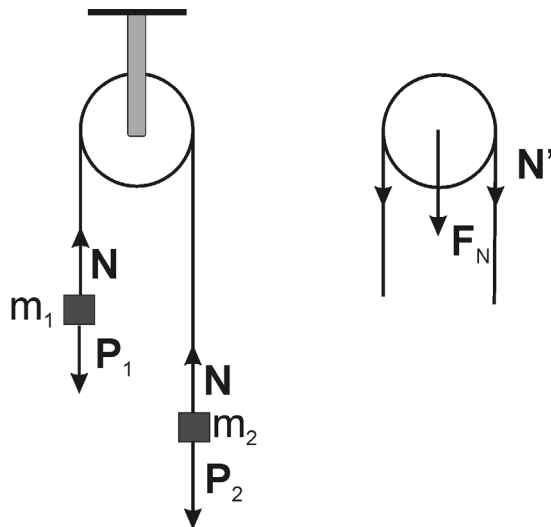
Dla przykładu przyjmę, że $\alpha = \pi/6$; $|v| = 10 \text{ m/s}$. Wtedy czas lotu obliczony ze wzoru (3.5.4) wynosi $t_L \approx 1.02 \text{ s}$; zasięg lotu obliczony z wzoru (3.5.5) wynosi $x_{max} \approx 8.83 \text{ m}$. Wartość współczynnika paraboli dana wzorem (3.5.8b) wynosi: $a \approx 0.577$; $b \approx -0.0651/\text{m}$. Rysunek (3.5.2) przedstawia parabolę ilustrującą obliczony tor ciała.



Rysunek 3.5.2. Paraboliczny tor ciała dla obliczonego przykładu

3.6. Blok nieruchomy ♦

Rozważmy kolejny przykład. Przez obracający się wokół poziomej osi blok przerzucono nieważką nierozciągliwą nić, do której końców przywiązano ciężarki o masach $m_1=0.5\text{kg}$ i $m_2=0.6\text{kg}$ (rys. 3.6.1). Znaleźć siłę nacisku bloku na oś podczas ruchu ciężarków. Zaniedbać masę bloku i tarcie osi.



Rysunek 3.6.1. Dwa ciężarki o masie m_1 i m_2 obciążają ruchomy blok. Na rysunku z lewej strony siły N są siłami działającymi na ciężarki. Zakładamy brak oporów ruchu. W takim przypadku z obu stron siły naciągu nici od strony ciężarków są takie same. Siły naciągu nici N' od strony bloku są takie same jak siły N , tylko przeciwnie skierowane (zasada akcji i reakcji) – rysunek z prawej. Suma obu sił N' daje obciążenie bloczka F_N .

Tym razem napiszę układ równań ruchu. Jedno równanie opisze ruch masy m_1 , a drugie ruch masy m_2

$$m_1 a = P_1 + N \quad 3.6.1a$$

$$-m_2 a = P_2 + N \quad 3.6.1b$$

Pisząc te równania skorzystałem z faktu, że jeżeli nić jest nierozciągliwa, to przyspieszenia obu ciężarków są takie same co do wartości, tylko przeciwnie skierowane. Przyjmę, że ruch odbywa się wzdłuż osi x -ów, której dodatni kierunek skierowany jest do góry. Wtedy całe zagadnienie można traktować jako zagadnienie skalarne, czyli jednowymiarowe. Rozwiązując powyższy układ równań mamy:

$$N = 2g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad 3.6.2$$

Zgodnie z III prawem Newtona $N = -N'$. Siła nacisku na oś równa jest $F_N = 2N'$, stąd

$$F_N = -4g \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx 10.7\text{N} \quad 3.6.3$$

Gdy ciężarki nie są sobie równe siła nacisku na oś jest mniejsza od sumy ciężarów tych ciężarków. Ponadto, gdy masa jednego z ciężarków

(powiedzmy m_1) maleje to maleje siła nacisku F_N . Gdy m_1 (lub m_2) równa się zeru to $F_N=0$. Ciężarek m_2 nie ma przeciwwagi i swobodnie spada nie obciążając bloczka. Przy okazji z układu równań (3.6.1) możemy wyznaczyć przyspieszenie a .

$$a = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \approx 0.89 \frac{m}{s^2} \quad 3.6.4$$

3.7. Ruch harmoniczny ♦

Niech będzie dana siła

$$F = -k\Delta x \quad 3.7.1$$

Siłę tą możemy opisywać jako jednowymiarową; układ współrzędnych orientujemy tak, aby jedna z jego osi (w naszym przypadku oś x) była równoległa do kierunku działania siły. Wielkość k jest współczynnikiem proporcjonalności. Tak określona siła jest proporcjonalna do wielkości wychylenia Δx i przeciwnie do tego wychylenia skierowana. Przykładem źródła takiej siły jest sprężyna. Im mocniej ją naciągniemy tym silniej odczuwamy siłę oporu sprężyny. Siła ta już pojawiła się przy analizie energii potencjalnej sprężyny (§TII 5.3). Niech teraz siła dana wzorem (3.7.1) działa na masę m . Napiszę równanie ruchu dla takiej siły, zakładając, że masa m nie zmienia się w czasie.

$$m\ddot{x} = -kx \quad 3.7.2$$

Rozwiązanie tego równania ruchu przekracza nasze obecne możliwości, więc ograniczę się do napisania jego rozwiązania

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad 3.7.3$$

Sprawdzę czy powyższa funkcja jest rozwiązaniem równania ruchu (3.7.2). Aby to zrobić rozwiązanie (3.7.3) muszę wstawić do obu stron równania (3.7.2) i sprawdzić czy równanie jest spełnione. Obliczam pierwszą pochodną funkcji będącej rozwiązaniem równania ruchu.

$$\dot{x}(t) = v_x(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \quad 3.7.4$$

Pierwsza pochodna daje nam oczywiście prędkość w badanym ruchu. Druga pochodna (czyli przyspieszenie) wyraża się w następujący sposób

$$\ddot{x}(t) = \dot{v}_x(t) = -A\omega\cos(\omega t + \varphi) \quad 3.7.5$$

Wstawiając obliczone wyrażenia do równania ruchu (3.7.2) mam

$$-mA\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -kA\sin(\omega t + \varphi) \quad 3.7.6$$

Po uproszczeniu mam

$$m \omega^2 = k \quad 3.7.7$$

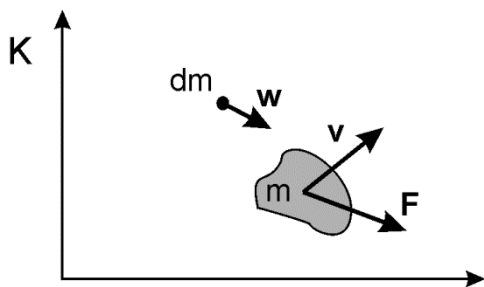
lub inaczej

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 3.7.8$$

Jeżeli powyższy związek jest spełniony to wtedy wyrażenie (3.7.3) jest rozwiązaniem naszego równania ruchu. Ze spełnieniem tego związku nie ma problemu. Określa on częstość drgań ω , przy danej stałej sprężystości k i masie m . Do ruchu tego typu powrócę jeszcze podczas wykładu poświęconego układom drgającym (§TVIII).

3.8. Rakieta w polu grawitacyjnym ♣

Ruch rakiety jest przykładem ruchu ciała ze zmienną masą. Rozważaliśmy go przy omawianiu zasady zachowania pędu (§TIV 1.1), w przypadku gdy na rakietę nie działała siła grawitacji. Warto pójść krok dalej i rozwiązać równanie ruchu dla rakiety poruszającej się w stałym polu grawitacyjnym. Rozważmy następującą sytuację. Mamy punkt materialny o masie m , który względem danego układu inercjalnego K porusza się z prędkością $\mathbf{v}$. Niech w pewnej chwili do naszego ciała o masie m dołączy znikomo mała cząsteczką o masie dm , przy czym przed połączeniem cząsteczką ta porusza się z prędkością $\mathbf{w}$, mierzoną względem układu K (rys. 3.8.1).



Rysunek 3.8.1. Do ciała poruszającego się z prędkością $\mathbf{v}$, na które działa siła $\mathbf{F}$ dołącza cząsteczką o masie dm , która porusza się z prędkością $\mathbf{w}$. Wszystkie prędkości mierzone są w inercjalnym układzie współrzędnych K .

Przed połączeniem pęd całego układu wynosił

$$\mathbf{p}_p = m\mathbf{v} + dm\mathbf{w} \quad 3.8.1$$

Po połączeniu mamy

$$\mathbf{p}_k = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \quad 3.8.2$$

Zmiana pędu wynosi

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_p = m d\mathbf{v} + dm\mathbf{v} + \underbrace{dm d\mathbf{v}}_0 - dm\mathbf{w} \quad 3.8.3$$

Wiemy, że dwie przemnożone przez siebie wielkości nieskończenie małe możemy w takim równaniu uznać za równe zero (§TII 6), stąd mamy

$$d\mathbf{p} = m d\mathbf{v} + dm(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \quad 3.8.4$$

Dzieląc obie strony przez dt i korzystając z wyrażenia (3.6) mamy

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \underbrace{(\mathbf{v} - \mathbf{w})}_{-\mathbf{u}} \quad 3.8.5$$

$\mathbf{F}$ jest tu siłą zewnętrzną działającą na układ. Wektor $\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v}$ jest równy prędkości cząstki dm względem masy m (rys. 3.8.1). Mając to na uwadze równanie (3.8.5) przyjmie postać

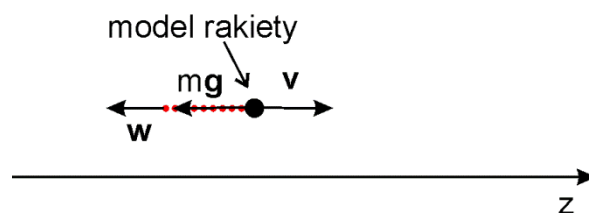
$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \mathbf{u} \quad 3.8.6$$

Możemy teraz napisać równanie ruchu, w postaci (3.3) dla układu z rysunku (3.8.1)

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt} \mathbf{u} \quad 3.8.7$$

Równanie to jest punktem wyjścia do rozwiązania problemu ruchu rakiety w stałym polu grawitacyjnym.

Tak jak w poprzednim przypadku (§TIV 1.1) rakietę traktujemy jako punkt materialny o masie m , który ze stałą prędkością traci masę. Dodatkowo na ten punkt działa stała siła ciężenia (rys. 3.8.2)



Rysunek 3.8.2. W naszym modelu rakietą jest punktem materialnym o zależnej od czasu masie m . Punkt ten traci masę (czerwone kropeczki) ze stałą prędkością m_p w kierunku $-z$. Ponadto, działa na niego siła grawitacji o wartości mg , skierowana przeciwnie do osi z .

Analizę ruchu rakiety możemy ograniczyć do jednego wymiaru, gdyż prostopadle do kierunku siły ciężenia nie działają żadne siły. Korzystając z (3.8.7) napiszemy równanie ruchu rakiety

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - \frac{dm}{dt} u \quad 3.8.8$$

Znak minus przy mg bierze się z orientacji osi z (rys. 3.8.2). Znak minus przy dm/dt wyraża fakt, że cząsteczki paliwa odłączają się od rakiety a nie przyłączają. Rozwiążemy to równanie ze względu na masę m . Ponieważ m jest zmienne i ma wpływ na ruch możemy uznać, że zmienna z określająca położenie rakiety jest funkcją masy m : $z(m(t))$, wtedy

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dm} \frac{dm}{dt} = -m_p \frac{dz}{dm} \quad 3.8.9$$

$$m_p = -\frac{dm}{dt} \quad 3.8.9a$$

Zgodnie z przyjętymi warunkami wielkość m_p jest stała i oznacza tempo wypływu masy (paliwa) w jednostce czasu. Znak minus bierze się stąd, że rakietę traci masę (przyrost masy jest ujemny). Obliczając drugą pochodną z funkcji $z(m(t))$ mamy

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -m_p \frac{d}{dt} z'_m(m(t)) = -m_p \frac{dz'_m}{dm} \frac{dm}{dt} = m_p^2 \frac{dz'_m}{dm} = m_p^2 \frac{d^2 z}{dm^2} \quad 3.8.10$$

Przez z'_m oznaczyłem pochodną dz/dm , która jest również funkcją zmiennej w czasie masy rakiety. Wstawiając (3.8.10) i (3.8.9a) do równania ruchu (3.8.8) mamy

$$m m_p^2 \frac{d^2 z}{dm^2} = -mg + m_p u \quad 3.8.11$$

$$\frac{d^2 z}{dm^2} = -\frac{g}{m_p^2} + \frac{1}{m} \frac{u}{m_p} \Rightarrow dz'_m = \left(-\frac{g}{m_p^2} + \frac{1}{m} \frac{u}{m_p} \right) dm \quad 3.8.11a$$

Pierwsze całkowanie daje

$$z'_m = \frac{dz}{dm} = -\frac{g}{m_p^2} m + \frac{u}{m_p} \ln(m) + C_1 \quad 3.8.12$$

Drugie całkowanie daje

$$z = -\frac{1}{2} \frac{g}{m_p^2} m^2 + \frac{u}{m_p} (m \ln(m) - m) + C_1 m + C_2 \quad 3.8.13$$

Przyjmę następujące warunki początkowe: w chwili $t=0$ masa rakiety jest równa jej masie startowej m_s , współrzędne punktu startu wynoszą $x=y=z=0$, wartość prędkości początkowej rakiety $v_p=0$. Z zależności (3.8.9) mamy

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = v_{pz} = -m_p \left. \frac{dz}{dm} \right|_{m_s} \Rightarrow \left. \frac{dz}{dm} \right|_{m_s} = -\frac{v_{pz}}{m_p} \quad 3.8.14$$

Wstawiając (3.8.14) do (3.8.12) mamy

$$-\frac{v_{pz}}{m_p} = -\frac{g}{m_p^2} m_s + \frac{u}{m_p} \ln(m_s) + C_1 \Rightarrow \quad 3.8.15$$

$$C_1 = \frac{g}{m_p^2} m_s - \frac{u}{m_p} \ln(m_s) - \frac{v_{pz}}{m_p}$$

W chwili $t=0$ z równania (3.8.13) mamy

$$C_2 = \frac{1}{2} \frac{g}{m_p^2} m^2 - \frac{u}{m_p} (m \ln(m) - m) - C_1 m \quad 3.8.16$$

Wstawiając (3.8.16) do (3.8.13) mamy

$$C_2 = \frac{1}{2} \frac{g}{m_p^2} m_s - \frac{u}{m_p} (m_s \ln(m_s) - m_s) \quad 3.8.17$$

$$- m_o \left(\frac{g}{m_p^2} m_s - \frac{u}{m_p} \ln(m_s) - \frac{v_{pz}}{m_p} \right)$$

Wstawiamy wyrażenie na C_2 do równania (b)

$$\frac{dz}{dm} = -\frac{g}{m_p^2} (m - m_s) + \frac{u}{m_p} \ln\left(\frac{m}{m_s}\right) - \frac{v_{pz}}{m_p} \quad 3.8.18$$

Wstawiając (3.8.15) do (3.8.12) mamy

$$\frac{dz}{dm} = \frac{u}{m_p} \ln\left(\frac{m}{m_s}\right) - \frac{g}{m_p^2} (m - m_s) - \frac{v_{pz}}{m_p} \quad 3.8.19$$

Korzystając z (3.8.9) mamy

$$-\frac{1}{m_p} \frac{dz}{dt} = \frac{u}{m_p} \ln\left(\frac{m}{m_s}\right) - \frac{g}{m_p^2} (m - m_s) - \frac{v_{pz}}{m_p} \quad 3.8.20a$$

$$v_z(t) = v_{pz} + \frac{g}{m_p} (m(t) - m_s) - u \ln\left(\frac{m(t)}{m_s}\right) \quad 3.8.20b$$

Korzystając z rozwiązania (3.8.13) oraz wzoru na stałą C_2 (3.8.17) moglibyśmy zapisać jawną postać rozwiązania na współrzędną z . Pozostawię to jako ćwiczenie dla czytelników i zajmę się krótką analizą wzoru na prędkość rakiety (3.8.20b).

Pierwsza sprawa, na którą chcę zwrócić uwagę to: jeżeli w rozwiązaniu (3.8.20b) wstawimy prędkość początkową $v_{pz}=0$ oraz $g=0$ (brak pola grawitacyjnego), to otrzymamy wzór (TIV 1.1.10), czego należało oczekiwać.

Mając na uwadze, że paliwo wypływa stałą strugą, masę rakiety, w chwili t , wyrażę wzorem

$$m(t) = m_s - m_p t \quad 3.8.21$$

Przy czym zakładam, że w chwili włączenia silników $t=0$. Mając to na uwadze wzór (3.8.20b) mogę zapisać w postaci

$$v_z(t) = v_{pz} - gt - u \ln \left(1 - \frac{m_p}{m_s} t \right) \quad 3.8.22$$

Jeżeli prędkości początkowa rakiety jest równa zero, to

$$v_z(t) = -gt - u \ln \left(1 - \frac{m_p}{m_s} t \right) \quad 3.8.23$$

Niech po chwili t_k spalono zostanie całe paliwo. Wtedy masa rakiety przestaje się zmieniać i równa się masie korpusu rakiety

$$m(t \geq t_k) = \text{const} = m_k = m_s - m_p t_k \quad 3.8.24$$

Tutaj m_k oznacza masę rakiety bez paliwa Stąd mamy

$$v_z(t \geq t_k) = -gt_k - u \ln \left(1 - \frac{m_{\text{paliwa}}}{m_s} \right) = -gt_k - u \ln \left(\frac{m_k}{m_s} \right) \quad 3.8.25$$

Masa pustej rakiety m_k (po spaleniu paliwa) jest mniejsza od masy startowej m_s rakiety i logarytm ma wartość ujemną. Pierwszy czynnik we wzorze (3.8.25) odpowiada za działanie siły ciężenia. Czynnik ten działa przeciwnie do drugiego członu. Jest to oczywiste, siła ciężenia zmniejsza prędkość startującej rakiety. Przyjmijmy, że

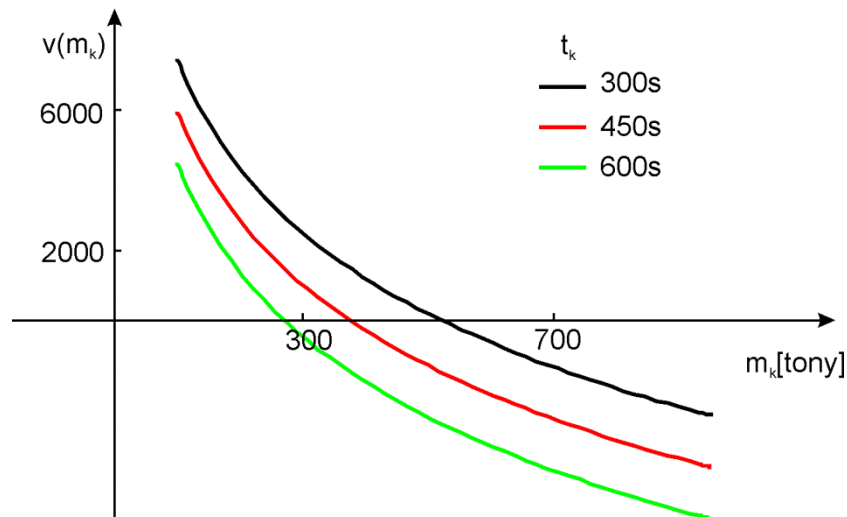
$$0 = -gt_k - u \ln \left(\frac{m_k}{m_s} \right) \Rightarrow -gt_k = u \ln \left(\frac{m_k}{m_s} \right) \quad 3.8.26$$

Wzór (3.8.26) wyznacza masę paliwa, dla której, przy danej prędkości wylotowej paliwa u , po jego spaleniu, całkowita zmiana prędkości rakiety wynosi zero. W takim przypadku praca silników równoważy działanie siły przyciągania. Rozwiązując to równanie ze względu na masę pustej rakiety mamy

$$m_k = m_s e^{-\frac{g t_k}{u}} \quad 3.8.27$$

Wzór ten określa masę paliwa potrzebną na zneutralizowanie siły ciężenia.

Rysunek (3.8.3) pokazuje zależność prędkości końcowej, wyznaczonej ze wzoru (3.8.25), dla różnych mas pustej rakiety (po spaleniu paliwa), przy zadanej masie startowej i prędkości wylotowej paliwa



Rysunek 3.8.3. Wykres pokazuje wartość przyrostu prędkości (w metrach na sekundę) dla trzech różnych czasów t_k spalania paliwa w zależności od masy pustej rakiety m_k , przy masie startowej $m_s=1000\text{ton}$ i prędkości wylotowej paliwa 4500m/s . Masa paliwa to $1000-m_k$

Z wykresów widać, że warto spalać paliwo szybko. Mniejszy czas spalania, to mniejszy czas działania grawitacji i mniejszy wpływ czynnika gt we wzorze (3.8.25). Gdy wartość $v(m_k)$ schodzi poniżej zera to rakietę ma za mało paliwa by się unieść w górę. Przecięcie wykresów z osią masy ma miejsce w punktach, w których spełnione jest równanie (3.8.27). Przypominam, że aby wejść na niską orbitę Ziemi prędkości statku musi przekroczyć 8km/s . Aby to osiągnąć, przy dostępnych prędkościach wylotowych u , prawie całą masę startową rakiety stanowi paliwo.

Wzbogaciliśmy model rakiety o oddziaływanie z polem grawitacyjnym Ziemi. Przyjęliśmy, że pole to jest stałe. Gdy lecimy na niską orbitę Ziemi (200-500km) nad Ziemią założenie to sprawuje się bardzo dobrze. Niestety na drodze w kosmos czeka na nas jeszcze jeden potwór – siły oporu powietrza. Dla szybko lecącej rakiety są one znaczne i ich zaniedbanie prowadzi do błędów w oszacowaniu ilości potrzebnego paliwa. Uwzględnienie oporów powietrza komplikuje model, ale kto chce zbudować raketę musi przez to przejść. Opory powietrza mają również wpływ na strategię startu. Z wykresu (3.8.3) wynika, że korzystne jest szybkie spalanie paliwa. Jednak inne czynniki „głosują” za wolnym spalaniem. Przeciężenie w rakiecie nie może przekroczyć rozsądnych wartości (dla załogowych lotów jest to ok. 3-4g). Szybkość spalania jest ograniczona przez wytrzymałość konstrukcji silników rakiety. Ponadto zbyt duża prędkość w dolnych warstwach atmosfery oznaczałaby zbyt duże opory powietrza. Jak to zwykle bywa w zagadnieniach praktycznych, nie można skupić się na jednym czynniku; trzeba znaleźć złoty środek ławirując między różnymi technicznymi problemami. Konstruktor raket nie może zakończyć analizy

modelu rakiety jako punktu – nawet po uwzględnieniu oporów powietrza. Rakieta w locie nie może koziołkować, lub nawet lekko odchyłać się od założonego kierunku lotu. Jest to szczególnie ważne w locie atmosferycznym, gdzie siły oporu powietrza „chętnie” zakręciłyby rakieta. Cóż w pewnym momencie trzeba model naszej raketowej „krowy” jeszcze bardziej skomplikować i uwzględnić fakt, że nie jest ona punktem i porusza się w powietrzu.

Poważne zmagania z budową rakiet kosmicznych zaczęły się w późnych latach 20-tych XX wieku. Analizy teoretyczne przeplatane były z eksperymentami. Projekty kosmiczne były mocno splecione z wojskowymi. Na marginesie tych działań dla wojska, po ponad 30 latach prób z raketami, 4 października 1957 roku z radzieckiego kosmodromu Bajkonur wystrzelony został pierwszy sztuczny satelita Ziemi.

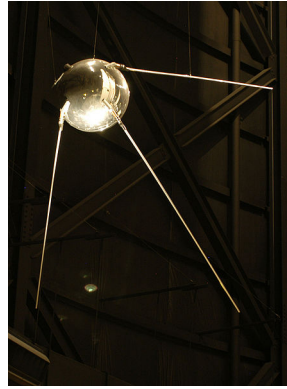
3.8.1. Rakiety nośne ♦

Analiza ruchu rakiety w polu grawitacyjnym wyraźnie pokazuje, że wyniesienie statku czy sondy kosmicznej jest sprawą trudną. Korzystne okazało się stosowanie rakiet wielostopniowych, które składają się z dwóch, trzech lub czterech członów napędowych. Wypalenie kolejnych członów oznacza odrzucenie ich konstrukcji i przejście na ciąg wytwarzany przez silniki następnego członu. W ten sposób rakieta nośna nie dźwiga zbędnego balastu. A wiemy, już że każdy kilogram mniej to duża oszczędności na masie paliwa. Dziś rakiety nośne klasyfikujemy na: małe, zdolne wynieść na niską orbitę Ziemi⁸ (ok. 200km nad powierzchnię Ziemi) do 2000kg ładunku, średnie, których udźwig zawiera się w przedziale 2000-20000kg, ciężkie o udźwigu 20000-50000kg oraz superciężkie o udźwigu powyżej 50000kg.

Pierwszą raketą nośną była dwustopniowa radziecka raketa Sputnik (Polyot), z rodziny rakiet oznaczonych symbolem R-7⁹. Sputnik miał udźwig, na niską orbitę Ziemi, ok. 1200kg. Wyniósł na orbitę pierwszego sztucznego satelitę Ziemi Sputnika -1 (rys. 3.8.2).

⁸ ang. LEO - Low Earth Orbit

⁹ Pierwsze radzieckie i amerykańskie rakiety nośne były konstruowane przy udziale niemieckich specjalistów pracujących przy programie rakiety V-2, w czasie drugiej wojny światowej.



Rysunek 3.8.2. Replika pierwszego sztucznego satelity Ziemi – Sputnika 1. Wystrzelony 4 października 1957 roku z okazji Międzynarodowego Roku Geofizyki. Do momentu spłonięcia w atmosferze okrążył Ziemię 1400 razy. Korpus statku był sferą o średnicy 59cm wykonaną z aluminium o grubość 2mm. Korpus został wypełniony azotem, którego ciśnienie było monitorowane. Rozszczelnienie statku mogło być wynikiem zderzenia z meteoroidem, do czego jednak nie doszło. Do korpusu przymocowane były cztery anteny o długości 2.4-2.9m. Statek nadawał proste sygnały radiowe. Zasilany był z trzech baterii cynkowo-srebrowych, które działały przez trzy tygodnie. Statek pobierał około 1W mocy. Masa satelity 83.6kg; Źródło zdjęcia Wikipedia



Rysunek 3.8.3. Z lewej rakieta Sojuz na platformie startowej. Zdjęcie pochodzi z realizacji programu wspólnego (USA-ZSRR) załogowego lotu orbitalnego Sojuz-Apollo, który odbył się w 1975 roku; z prawej zestaw silników rakiety Sojuz TMA-5, na stanowisku montażowym w ośrodku Bajkonur (2004 rok); Źródło zdjęć Wikipedia

Najczęściej używaną rodziną rakiet nośnych jest radziecka (obecnie rosyjska) rodzina trójstopniowych rakiet Sojuz. Do chwili obecnej (2020rok) Sojuz odbył ponad 1700 lotów. Sojuzy cenione są za niezawodność i niskie koszty. Pierwszy Sojuz wystartował w listopadzie 1966 roku. Konsekwentnie unowocześniane rakiety nośne rodziny Sojuz skutecznie

realizują zadania rosyjskiego programu kosmicznego oraz zadania komercyjne do dnia dzisiejszego.

Unia Europejska eksploatuje rodzinę rakiet Ariane (rys. 3.8.4). Do roku 2006 w 169 lotach rakiety z rodziny Ariane miały dostarczyć 290 satelitów z czego na miejsce przeznaczenia dotarło 271 obiektów (co oznacza wysoką niezawodność). Obecnie eksploatowaną wersją rakiet Ariane jest wersja V (Ariane V). Ariane V może być montowana w różnych konfiguracjach o udźwigu od 7 do 21 ton na niską orbitę Ziemi.

Największą rakieta nośną była używana w programie Apollo rakiet Saturn V¹⁰. Wysoka na 110m (wraz ze statkiem księżycowym Apollo) rakiet miała udźwig 120 ton na niską orbitę Ziemi



Rysunek 3.8.4. Z lewej rodzina rakiet Ariane; z prawej start rakiety Ariane 5V192, który miał miejsce 02.11.2009. Rakiet Ariane V jest obecnie eksploatowaną wersją rakiety. Przystosowana jest do wynoszenia ładunków do 21000kg (na niską orbitę Ziemi); Źródło zdjęć ESA.



Rysunek 3.8.5. Rakiet Saturn V ze statkiem Apollo 17 na stanowisku startowym; Źródło NASA

¹⁰ Pod koniec lat 80-tych XX wieku Związek Radziecki przeprowadził próbę, wersji podstawowej, rakiety Energia. W wersji podstawowej miała ona udźwig około stu ton. W wersji maksymalnej miała mieć udźwig do dwustu ton. Po upadku ZSRR program zakończono. Do tego czasu zdołano przeprowadzić jeden test rakiety w wersji podstawowej. Rekord nośności należy więc do rakiet Saturn V.

W ostatnich latach za budowę rakiety wzięli się prywatni inwestorzy. Tu szczególnie wyróżnia się firma SpaceX Elona Muska. SpaceX wprowadziła do użytku rakiety, których pierwszy człon ląduje łagodnie na wyznaczonej do tego platformie i może być ponownie użyty. Przynajmniej ta część rakiety przestaje być elementem jednorazowego użytku. Rakiety SpaceX realizują zamówienia ze strony NASA na transport towarów i ludzi na orbitę. Rysunek (3.8.9) pokazuje rakiety Falcon produkcji SpaceX.



Rysunek 3.8.9. Rakieta Falcon 9 ze statkiem zaopatrzeniowym Dragon; start w październiku 2012 w celu dostarczenia zaopatrzenia do stacji ISS. Od 2020 roku załogowe wersje statku Dragon przewożą na ISS astronautów; z prawej lądowanie pierwszego członu rakiety Falcon 9; źródło zdjęć Wikipedia.

Budowa rakiet nośnych, szczególnie małych (udźwig do 2000kg) jest dziś w zasięgu możliwości technicznych i ekonomicznych wielu państw, w tym również Polski¹¹. Należy jednak pamiętać, że rakieta nośna jest kosmiczną ciężarówką mającą wynieść na orbitę lub dalej użyteczny ładunek. Budowa rakiety bez perspektywy jej komercyjnej eksploatacji lub bez własnego programu kosmicznego nie ma sensu. To tak, jakby zaprojektować samochód dostawczy i wdrożyć jego produkcję po to, by po wykorzystaniu jednego czy dwóch egzemplarzy na pokaz, cały projekt zatrzymać.

¹¹ Oprócz Rosji, USA i UE własne rakiety nośne mają (rok 2017) Japonia, Chiny, Indie, Izrael, Korea Północna, Korea Południowa, Iran.

4. Opory ruchu ♦

Ważną klasą sił są tak zwane siły oporu ruchu. Przykładem sił oporu ruchu są: siły tarcia, opory aerodynamiczne (opory stawiane przez powietrze), opory hydrodynamiczne (np. opory stawiane przez wodę przy ruchu pojazdów pływających). Siły oporu ruchu skierowane są w stronę przeciwną do wektora prędkości poruszającego się ciała. Są one wypadkową oddziaływania cząsteczek ciała z cząsteczkami podłoża (siły tarcia) lub ośrodka (np. powietrze). Ponieważ liczba oddziałujących cząstek jest ogromna siły te określa się na podstawie doświadczenia, złożonej analizy statystycznej lub/i analizy numerycznej. Krótkie omówienie sił oporu ruchu zacznę od sił tarcia statycznego i poślizgowego.

4.1. Tarcie poślizgowe

Opory, które występują, gdy jedno ciało przesuwa się po powierzchni drugiego (oba ciała stykają się) nazywamy tarcie poślizgowym. Fenomenologiczne prawa opisujące tarcie były znane już w czasach Leonardo da Vinci. Dla fizyki współczesnej odkrył je ponownie Guillaume Amontons (1699). Dokładne badania doświadczone przeprowadził Charles Augustin Coulomb (1781). Prawa te nazywa się czasem prawami Amontonsa-Coulomba.

Rozważmy ciało leżące na powierzchni płaskiej. Zaczynamy je ciągnąć niewielką siłą równoległą do powierzchni. Siła ta okazuje się za mała do wprowadzenia ciała w ruch - równoważona jest przez siłę tarcia. Następnie zwiększamy powoli wartość siły ciągnącej, aż do momentu, kiedy ciało ruszy z miejsca. Minimalna siła potrzebna na poruszenie ciała wyznacza nam tak zwaną siłę tarcia statycznego F_s . Kiedy ciało jest w ruchu siła potrzebna na utrzymanie stałej prędkości ciała jest mniejsza niż siła potrzebna do wprowadzenia ciała w ruch. Zatem tarcie poślizgowe, czyli to, które towarzyszy ruchowi ciała, jest mniejsze od tarcia statycznego.

Fakt 4.1.1:

Dla danego ciała na danym podłożu siła tarcia statycznego jest większa od siły tarcia poślizgowego

Pierwsze prawo tarcia określa związek między tarcie a siłą z jaką jedno ciało jest dociskane do drugiego.

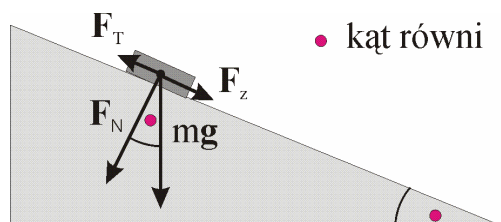
Określenie 4.1.1: Pierwsze prawo tarcia

Siła tarcia (poślizgowego) między dwoma ciałami jest proporcjonalna do siły normalnej utrzymującej te ciała w zetknięciu

Niech $\mathbf{F}_N$ będzie siłą normalną w stosunku do podłoża, a $\mathbf{F}_T$ siłą tarcia poślizgowego, $\hat{\mathbf{v}}$ jest jednostkowym wektorem równoległym do wektora prędkości ciała, którego ruch badamy; wtedy

$$\mathbf{F}_T = -\hat{\mathbf{v}}f\mathbf{F}_N \quad 4.1.1$$

f jest współczynnikiem tarcia. Znak minus wskazuje, że siła tarcia jest skierowana przeciwnie do prędkości ciała. Siła normalna $\mathbf{F}_N$ to najczęściej siła ciężkości ciała (siła nacisku), lub jej składowa prostopadła do powierzchni styku, jeżeli ciało zsuwa się na przykład po równi (rys. 4.1.1).



Rysunek 4.1.1. Siła normalna, najczęściej jest składową siły ciężkości prostopadłą do powierzchni podłoża

Tabela (4.1.1) podaje przykładowe wartości współczynnika tarcia (orientacyjne) dla różnych par ciał stykających się gładkimi powierzchniami. Dla porównania podane są również współczynniki tarcia statycznego. Związek między tarciem statycznym a siłą normalną do powierzchni styku jest taki sam jak dla tarcia ślizgowego.

Uwaga 4.1.1:

Współczynnik tarcia zależy od wielu czynników. Dla tej samej pary materiałów może przybierać różne wartości zależne od stopnia gładkości stykających się powierzchni czy obecności niewielkich zanieczyszczeń znajdujących się na tych powierzchniach. Dlatego wartości podane w tabeli (4.1.1) należy traktować jak orientacyjne.

Dwa następne prawa tarcia stanowią

Określenie 4.1.2: Drugie prawo tarcia

Przy danej sile normalnej siła tarcia poślizgowego nie zależy od powierzchni zetknięcia między dwoma ciałami

Określenie 4.1.3: Trzecie prawo tarcia

Przy niedużych prędkościach ruchu współczynnik tarcia nie zależy od wzajemnej prędkości ślizgających się ciał

materiał	współczynnik tarcia statycznego	współczynnik tarcia poślizgowego
stal-stal	0.15	0.09 – 0.03
metal-drewno	0.6 – 0.5	0.5 – 0.2
drewno-drewno	0.65	0.4 -0.2
stal-lód	0.027	0.014
opona-suchy beton	1	0.7
opona-mokry beton	0.7	0.5
teflon-teflon	0.04	0.04
Tabela 4.1.1. Przykładowe wartości współczynnika tarcia statycznego i poślizgowego.		

Nie w każdym podręczniku trzecie prawo tarcia zostaje uwzględnione jako osobne prawo. W niektórych figuruje jako uwaga. Pamiętać należy, że podane wyżej prawa mają charakter inżynierski. Ponieważ tarcie jest powszechnie występującym zjawiskiem potrzebujemy możliwie prostych reguł, które pozwolą na skuteczne obliczanie typowych problemów inżynierskich. Podane wyżej trzy prawa tarcia są zbiorem takich reguł. Teoria, która opisuje zjawisko tarcia jest bardzo złożona, ze względu na złożony charakter oddziaływania między dwoma stykającymi się powierzchniami. Dla praktyki zgłębianie złożonych problemów teoretycznych nie jest konieczne do podjęcia skutecznego działania. Praktyk musi mieć natomiast dobre pojęcie w jakim zakresie wymienione wyżej prawa można stosować. Nie oznacza to jednak, że teoria się nie liczy. Prawa inżynierskie są proste ale ograniczone w swoich możliwościach. Ktoś powinien orientować się w tych ograniczeniach i umieć sobie radzić z problemami, gdy pojawią się zagadnienie, w których reguły inżynierskiej nie mogą być stosowane.

Podam teraz przykład prostego zadania, gdzie wymagane będzie uwzględnienie siły tarcia.

Zadanie 4.1.1:

Ciało o masie m ustawiono na równi pochyłej o zmiennym kącie nachylenia. Kąt równi zwiększano do momentu, gdy ciało zaczęło się zsuwać. Kąt graniczny wynosił α_s . Oblicz współczynnik tarcia statycznego dla pary materiał równi - materiał ciała. Dana jest wartość przyspieszenia grawitacyjnego g .

W momencie gdy ciało zaczyna się zsuwać wartość siły tarcia statycznego F_s równa jest wartości składowej ściągającej F_z siły grawitacji. Z rysunku (4.1.2) mamy

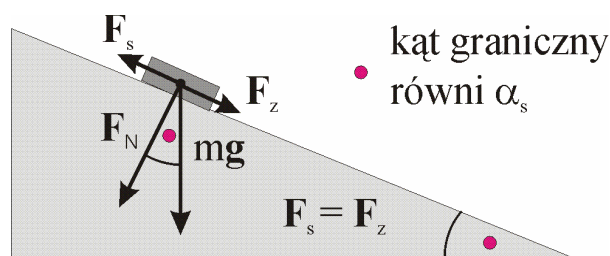
$$F_s = F_z = mg \sin(\alpha) \quad 4.1.2$$

We wzorze tym pominąłem znaki, czyli w gruncie rzeczy porównałem wartość bezwzględne obu sił. W prostych zadaniach jest to dopuszczalne, o ile jest się tego świadomym. W trudniejszych zadaniach takie pomijanie może prowadzić do błędów. Wartość siły tarcia jest proporcjonalna do składowej siły ciężenia, normalnej do powierzchni równi (siła nacisku)

$$F_s = f_s F_N = f_s mg \cos(\alpha_s) \quad 4.1.3$$

Łącząc wzory (4.1.3) i (4.1.2) znajdujemy

$$f_s = \tan(\alpha_s) \quad 4.1.4$$



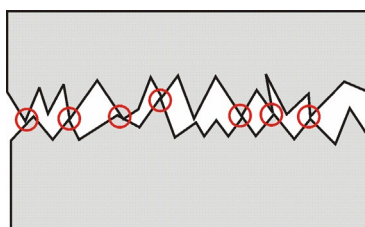
Rysunek 4.1.2. Szukamy wartości współczynnika tarcia statycznego, znając kąt równi, przy którym ciało zaczyna się z równi zsuwać.

4.2. Tarcie poślizgowe – obraz mikroskopowy

Choć omawiając fenomenologiczne prawa tarcia odżegnałem się od teorii, to nie mogę sprawy pozostawić całkiem bez komentarza. Nie będę rozbudowywał ilościowej teorii tarcia. Ale małe co nie co na temat przyczyn występowania tarcia nie zaszkodzi.

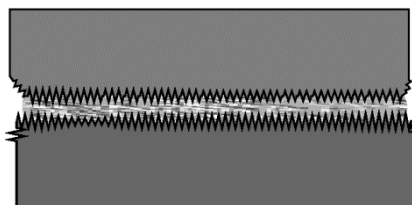
Powierzchnia każdego makroskopowego ciała wykazuje dużą (w skali atomowej) chropowatość. W efekcie rzeczywista powierzchnia styku dwóch ciał jest mała w porównaniu z powierzchnią, którą jedno ciało jest dociskane do drugiego. Tam gdzie cząsteczki zbliżają się do siebie na odległość działania sił utrzymujących spójność ciała stałego dochodzi do ich oddziaływania i utworzenia wiązania. Siły wiązania dzieli się na te związane

ze zjawiskiem adhezji oraz siły związane z tworzeniem wiązań chemicznych (tzw. połączeń mostkowych). Ciała również zahaczają się większymi nierównościami co prowadzi do ścierania się powierzchni. Aby przesunąć jedno ciało względem drugiego trzeba te połączenia pozrywać. Suma sił potrzebna na zerwanie tych wiązań jest przez nas odbierana jako siła tarcia. Można teraz zrozumieć dlaczego zwiększenie nacisku zwiększa wartość siły tarcia. Większy nacisk oznacza, że obie powierzchnie lepiej do siebie przylegają. Rośnie powierzchnia styku obu ciał przez co również rośnie sumaryczna siła potrzebna na zerwanie powstających wiązań. Tarcie statyczne jest większe od poślizgowego, gdyż dwa ciała, w statycznym kontakcie, mają wystarczająco dużo czasu aby ustabilizować wiązania. Gdy ciała przesuwamy względem siebie, to wiązania tworzą się i są zrywane na bieżąco. W takim przypadku sumaryczna siła wiązań jest mniejsza niż w przypadku statycznym.



Rysunek 4.2.1. Na poziomie atomowym każda powierzchnia jest chropowata. Dwa ciała stykają się ze sobą tylko na bardzo ograniczonym obszarze. W miejscach styku dochodzi do tworzenia wiązań między cząsteczkami obu ciał. Przy próbie przesuwania jednej powierzchni względem drugiej musimy pozrywać te wiązania. Siła oporu jaką w związku z tym odczuwamy to siła tarcia

Smary mają za zadanie rozdzielić obie trące o siebie powierzchnie. W takim przypadku powierzchnie ślizgają się po oddzielającej je warstwie smarów. Tarcie poślizgowe zamienione jest na opory związane z lepkością smarów, a te są zwykle dużo mniejsze (rys. 4.2.2).



Rysunek 4.2.2. Pomiędzy dwoma płytami znajduje się warstwa smaru, która je oddziela. Płyty ślizgają się po tej warstwie, a siły tarcia na styku płyta-smar, oraz wewnątrz warstwy smaru są znacznie mniejsze od sił tarcia występujących przy bezpośrednim styku płyt.

4.3. Opory aerodynamiczne (hydrodynamiczne)

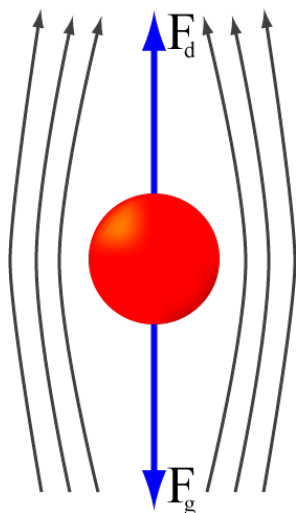
W przypadku ruchu w powietrzu (cieczy) mamy do czynienia z oporami aerodynamicznymi (hydrodynamicznymi). Ciało musi „przepychać się” przez cząsteczki gazu (cieczy) (rys. 4.3.1). Oczywiste jest, że z im większą prędkością to się dzieje tym większe powinny być opory ośrodka. W pierwszym przybliżeniu możemy przyjąć, że opory ośrodka są proporcjonalne do prędkości ciała i przeciwnie skierowane

$$\mathbf{F} = -C\mathbf{v} \quad 4.3.1$$

Tutaj C jest współczynnikiem oporu aerodynamicznego i ma wymiar masa/czas. Wartość tego współczynnika zależy od kształtu ciała i własności ośrodka (gazu lub cieczy). Przy większych prędkościach konieczne staje się uwzględnienie członów proporcjonalnych do kwadratu prędkości.

$$\mathbf{F} = -C\mathbf{v} - Dv^2\hat{\mathbf{v}} \quad 4.3.1a$$

Gdzie $\hat{\mathbf{v}}$ jest jak zwykle jednostkowym wektorem w kierunku wektora prędkości. Ogólnie widać, że siłę oporu możemy przedstawić w postaci szeregu potęgowego wyznaczonego względem prędkości ciała $\mathbf{v}$ (§DB 3). Im dokładniejsza analiza i większa prędkość tym więcej wyrazów rozwinięcia musimy uwzględnić. Wszystkie wyrazy powinny złożyć się do funkcji opisującej opory przy dowolnej prędkości. Ale nie mamy teorii pozwalającej nam na wydumanie postaci takiej funkcji, więc zadowolamy się metodą szeregu, co sprowadza się do stwierdzenia, że każda funkcja ciągła, w otoczeniu danego punktu jest dobrze przybliżana przez funkcję liniową.



Rysunek 4.3.1. Ciało poruszające się w powietrzu (cieczy) pod wpływem siły $\mathbf{F}_g$ rozsuwa masy powietrza (cieczy). W wyniku działania sił reakcji ciało to odczuwa siły oporu powietrza (cieczy) $\mathbf{F}_d$ skierowane przeciwnie do kierunku jego ruchu.

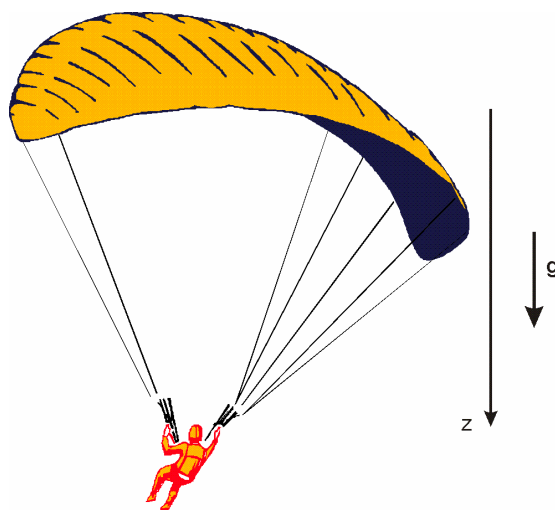
W naszym przypadku oznacza to, że siły oporu powietrza są liniową funkcją wartości prędkości, co zapisujemy w postaci (4.3.1). Ponieważ nie mamy postaci funkcji rozwijanej w szeregu wartości współczynników rozwinięcia musimy wyznaczyć doświadczalnie. W ten sposób nie znając mechanizmu

generującego opory ruchu, możemy je doświadczalnie opisać, przynajmniej w pewnym zakresie prędkości.

Siły oporu powietrza są już wyraźne przy prędkości rzędu 30-50km/h (w zależności od kształtu poruszającego się ciała). Przykładowo, przy prędkości około 50km/h 90% mocy zawodowego kolarza idzie na zrównoważenie sił oporu powietrza. Jadąc za samochodem z tarczą równoważącą siły oporu powietrza zawodowy kolarz może rozpędzić się do prędkości przekraczającej wartość 200km/h¹². Fakty te tłumaczą walkę jaka toczy się o elementy stroju kolarzy, łyżwiarzy szybkich czy pływaków. Nawet niewielkie zmniejszenie współczynnika oporu powoduje, że kolarz torowy, panczenista, czy pływak może, ze swojego wyniku, „urwać” kilka setnych części sekundy, co w dzisiejszym sporcie może otworzyć drogę do olimpijskich medali.

Dla przykładu rozwiążę problem ruchu spadochroniarza. Przyjmuję model, w którym spadochroniarz jest ciałem punktowym o masie m , na które działają siły oporu powietrza, które wyrażają się wzorem (4.3.1). C opisuje opór stawiany przez układ spadochron-spadochroniarz (rys. 4.3.2). Równanie ruchu przyjmie postać

$$m \frac{dv_z}{dt} = mg - C v_z \quad 4.3.2$$



Rysunek 4.3.2. Spadochroniarz spada pod wpływem działania siły grawitacji. Spadochron ma na celu zwiększenie siły oporu powietrza (wartości współczynnika C), i w efekcie ograniczenie maksymalnej prędkości do jakiej rozpędza się skoczek.

Możemy je przepisać w postaci

¹² Zobacz - Krzysztof Ernst, Fizyka Sportu. PWN (2010)

$$\frac{dv_z}{dt} = g - \frac{C}{m} v_z \quad 4.3.3$$

Interesujące wnioski możemy wyciągnąć nawet nie rozwiązując tego równania. Zauważmy, że gdy

$$g - \frac{C}{m} v_z = 0 \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad 4.3.4$$

Co oznacza, że przyspieszenie ciała jest równe zero, czyli prędkości ciała v_z nie zmienia się. Oznaczę tą stałą prędkość jako v_{gr} . W prosty sposób możemy wyznaczyć jej wartość.

$$v_{gr} = \frac{m}{C} g \quad 4.3.5$$

Zapomnijmy na chwilę o spadochroniarzu i zastąpmy go dowolnym ciałem o współczynniku oporu aerodynamicznego C . Załóżmy, że ciało zaczyna spadać z prędkością początkową v_p mniejszą od v_{gr} . Wtedy wartość siły oporu powietrza F_{op} wynosi

$$F_{op} = -C v_p < -C \frac{m}{C} g = -mg \quad 4.3.6$$

Zatem bezwzględna wartość tej siły jest mniejsza od siły grawitacji i ciało zwiększa swoją prędkość spadania. Ale, gdy ciało zwiększa prędkość, to siła oporu powietrza rośnie i w pewnym momencie staje się równa sile ciężenia. Gdy obie siły nawzajem się równoważą przyspieszenia ciała spada do zera i jego prędkość przestaje się zmieniać. Ma to miejsce gdy prędkości ciała jest równa prędkości granicznej v_{gr} danej wzorem (4.3.5).

A co się stanie gdy prędkość początkowa ciała będzie większa od v_{gr} (jak to ma miejsce przy wchodzeniu meteorów do atmosfery)? Wtedy wartość bezwzględna siły oporu powietrza jest większa od siły grawitacji.

$$|F_{op}| = |C v_p| > \left| C \frac{m}{C} g \right| = |mg| \quad 4.3.7$$

W efekcie ciało hamuje aż do osiągnięcia prędkości granicznej. Tak więc prędkość graniczna jest prędkością, do której dąży ciało przy ruchu w atmosferze. Jak widać ze wzoru (4.3.5). Jest ona tym mniejsza im większe jest wartość stałej charakteryzującej opór aerodynamiczny ciała C . Spadochron ma za zadanie zwiększyć współczynnik C do takiej wartości, aby v_{gr} przyjęła akceptowalne dla człowieka wartości. Spadający bez spadochronu człowiek również odczuwa opór powietrza. Ale jego osobiste C jest na tyle małe, że v_{gr} jest rzędu 200km/h; to trochę za dużo na udane lądowanie. W znacznie lepszej sytuacji są zwierzęta mniejsze od człowieka (pomyśl – dlaczego tak jest?). Na przykład dla kota v_{gr} jest rzędu 90km/h. Przy takiej prędkości kot jest w stanie, bez szwanku, wytrzymać lądowanie

na miękki grunt (np. trawnik) pod warunkiem, że zrobi to na przysłowiowe cztery łapy. Myszki mogą bezpiecznie opaść nawet na twarde podłoże. O pajęczkach nie warto nawet wspominać.

Przypominam, że na początku założyłem, że siły oporu powietrza są proporcjonalne do wartości prędkości ciała i przeciwnie skierowane (4.4.1). Przy dużych prędkościach nie jest to prawda. Siły oporu rosną szybciej niż wartość prędkości. Ale nie zmienia to faktu, że i dla szybciej rosnących sił pojawia się prędkość graniczna; tyle że jej wartość nie jest dana wzorem (4.4.5). Druga uwaga dotyczy zmiany gęstości powietrza wraz z wysokością nad powierzchnią Ziemi. Im wyżej tym rzadsze powietrze i mniejsze opory ruchu, a zatem większa prędkość graniczna. Już dla skoków spadochronowych należałoby to uwzględnić, przy dokładnym analizowaniu historii ruchu skoczka. Na szczęście skoczek zawsze kończy swój ruch przy powierzchni ziemi, gdzie gęstość powietrza jest mniej więcej zawsze taka sama. Jeżeli zatem interesuje nas prędkość z jaką skoczek kończy skok (a to jest dla niego ważne), to zmiany gęstości powietrza z wysokością możemy zaniedbać.

W dniu 23 marca 2001 roku na Ziemię spadła rosyjska stacja kosmiczna Mir (rys. 4.3.3). Żyjący z sensacji dziennikarze do spółki z lubiącą horrory publicznością z lubością napędzali się w wymyślaniu dramatycznych scenariuszy tego zdarzenia. Jednak opory powietrza popsuły czarne scenariusze rozwoju zdarzeń wyhamowując stację do v_{gr} , która w przypadku takich konstrukcji wynosi około 600km/h, czyli tyle co dla dużego samolotu spadającego na skutek awarii silników. W dodatku, stacja wchodząca w atmosferę z prędkością rzędu 8km/s uległa rozerwaniu (stacja jest czymś w rodzaju pustej metalowej puszkii o cienkich ściankach i łatwo ulega rozerwaniu) a jej poszczególne kawałki w dużej części spaliły się przy gwałtownym hamowaniu. W efekcie marne szczątki Mira spadły na południowym Pacyfiku; takie to było wielkie bum. W sumie spadek stacji kosmicznej jest dla nas mniej niebezpieczny niż upadek większego samolotu pasażerskiego.



Rysunek 4.3.3. Stacja Mir wraz z przycumowany amerykańskim wahadłowcem. Wystrzelona 19 lutego 1986 roku. Masa stacji wynosiła około 140 ton. Stację odwiedziły łącznie 104 osoby z różnych krajów; Źródło Wikipedia



Rysunek 4.3.4. W takiej postaci resztki Mira zbliżały się do powierzchni Pacyfiku; Źródło Wikipedia

Co roku w atmosferę ziemską wchodzi znacznie masywniejsze od Mira i bardziej zwarte kosmiczne kawałki lodu lub skały. Nawet te dużo, dużo większa od Mira obiekty są w stanie tylko w reszkowej formie przeżyć spotkanie z atmosferą. Warto o tym pamiętać przy następnym upadku czegoś z kosmosu. Chyba, że lubicie nakręcać się scenariuszami horrorów.

Oczywiście upadek sztucznego obiektu z kosmosu jest potencjalnie w stanie wywołać śmiertelny wypadek; na przykład jeżeli taki kawałek bezpośrednio w kogoś uderzy. Tyle, że w Polsce w roku 2012 w wypadkach drogowych zginęło 3520 osób, a do tej pory żadne mieszkańiec Polski nie ucierpiał na skutek spadku resztek satelitów czy uderzenia meteorów.

Dlaczego bez strachu chodzimy po ulicach a z zaniepokojeniem spoglądamy w niebo gdy coś ma stamtąd spaść?

4.3.1. Hamowanie atmosferyczne

Hamowanie atmosferyczne to nic innego jak redukcja prędkości na skutek oporów powietrza. W sumie żadna dla nas nowość. Kto jechał na rowerze z prędkością rzędu 30km/h wyraźnie mógł odczuć skutki hamowania atmosferycznego. Potrafimy je świadomie wykorzystać, na przykład prostując się przy jeździe na rowerze czy nartach. Wyprostowana sylwetka zagarnia więcej powietrza, rosną opory powietrza i efektywniej tracimy prędkość. Igdyby do tego sprowadzała się sprawa nie byłoby po co wymyślać dla tego zjawiska tak mądrej nazwy jak: „hamowanie atmosferyczne”. Jednak hamowanie atmosferyczne zrobiło karierę w astronautyce. Powracający na Ziemię statek kosmiczny uderza na wysokości nieco ponad stu kilometrów o górne warstwy ziemskiej atmosfery. Pojawiają się siły oporu ruchu, które zmniejszają prędkość statku. Ponieważ prędkość wejścia jest bardzo duża (ponad 8km/s) nawet mocno rozrzedzone warstwy atmosfery działają hamująco. Efekt ten jest wykorzystywany do wyhamowania lądującego statku, bez spalania cennego paliwa. Jednak bardzo poważnym problemem jest rozgrzewanie się statku podczas hamowania. Bardzo duża prędkość wejścia powoduje, że siły tarcia o powietrze są również bardzo duże, a duże tarcie oznacza duży wzrost temperatury. Na 1kg masy przy zmniejszeniu prędkości o 1km/s utrata energii kinetycznej wynosi

$$E_k = \frac{1}{2} 10^6 \frac{m^2}{s^2} \cdot 1\text{kg} = 0.5\text{MJ} \quad 4.3.7$$

Czyli zmniejszenie prędkości jednego kilograma masy o jeden kilometr na sekundę wyzwala energię równą pół miliona dżuli. Zgodnie z zasadą zachowania energii, ta energia nie może zniknąć. Energia kinetyczna pędzącego statku zamienia się na chaotyczną energię cząsteczek powietrza i powłok, którymi pokryty jest statek, a to oznacza znaczny wzrost temperatury. Powłoki statku mogą rozgrzać się do ok. 2000°C (rys. 4.3.5). Aby uniknąć spalania, kapsuły lądujące wyposażone są w warstwy ablacyjne. Typowa warstwa ablacyjna składa się z dwóch podwarstw. Zewnętrzna, pod wpływem nagrzania ulega sublimacji (sublimacja to przejście ze stanu stałego do gazowego bez pośredniego stanu ciekłego). Odparowany materiał tworzy poduszkę z rozgrzanych gazów, które stanowią dynamiczną tarczę ochronną dla lądowika. Wewnętrzna warstwa podatna jest na zjawisko pyrolizy. Polega ono na tym, że pod wpływem wysokiej temperatury pewne cząstki chemiczne ulegają rozkładowi. W efekcie druga warstwa gwałtownie

wyrzuca produkty rozpadu wspomagają poduszkę gazową utworzoną przez pierwszą warstwę.



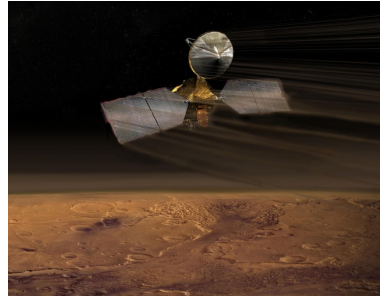
Rysunek 4.3.5. Artystyczna wizja wejścia modułu lądującego statku Apollo do atmosfery; Źródło NASA

Na potrzeby NASA opracowano powłoki ochronne wielokrotnego użytku. Zostały one użyte do ochrony amerykańskich wahadłowców. Termiczne pokrycie wahadłowca składało się z ponad dwudziestu tysięcy żaroodpornych płytek, kilku odmian (rys. 4.3.6).



Rysunek 4.3.6. Zdjęcie spodu skrzydła wahadłowca Discovery pokryte żaroodpornymi płytkami; Źródło NASA

Hamowanie atmosferyczne wykorzystuje się również do korekcji orbit sond międzyplanetarnych. W maju 1993 roku zastosowano tą metodę do korekcji kształtu orbity wenusjańskiej sondy Magellan. Za hamulec posłużyły odpowiednio ustawione panele słoneczne. Był to dodatkowy eksperyment przeprowadzony po wypełnieniu pierwotnego planu misji. Pierwszą sondą, która hamowanie atmosferyczne miała wpisane jako zasadniczy element misji był Mars Global Surveyor. Sonda również wykorzystywała do hamowania i korekcji orbity panele słoneczne. Kolejne dwie marsjańskie sondy wykorzystujące tą technikę to Mars Odyssey i Mars Reconnaissance Orbiter (rys. 4.3.7).



Rysunek 4.3.7. Artystyczna wizja sondy Mars Reconnaissance Orbiter podczas manewru hamowania atmosferycznego, w celu osiągnięcia zaplanowanej orbity. Orbita sondy jest eliptyczna. Hamowanie powtarza się wielokrotnie przy zbliżeniu się do górnych warstw atmosfery planety. Po osiągnięciu zamierzonego skutku ostateczny kształt orbity nadają sondzie silniki rakietowe; Źródło NASA.

Pamiętasz co pisałem o silnikach rakietowych (TIV_1.1). Ich mały impuls właściwy powoduje, że koszt wysłania każdego kilograma masy w Kosmos jest bardzo duży. Zastosowanie hamowania atmosferycznego pozwoliło zredukować masę paliwa sondy Mars Odyssey o ponad 200kg. Skutkiem tego można było użyć lżejszej i tańszej rakiety do wyniesienia sondy. Sonda ocierała się o atmosferę 332 razy zanim osiągnęła orbitę o zamierzonych parametrach.

5. Ruch po okręgu ♦/♣

Ruchowi po okręgu poświęciłem nieco czasu w temacie (§TV 3). Tutaj podejmę temat ruchu po okręgu pod kątem drugiego prawa dynamiki. Tor ciała poruszającego się po okręgu o promieniu r możemy opisać następującymi równaniami parametrycznymi

$$x = r \cos(\omega t) \quad 5.1a$$

$$y = r \sin(\omega t) \quad 5.1b$$

Składowe wektora prędkość $\mathbf{v}$ wyrażą się wzorami

$$v_x = \dot{x} = -r\omega \sin(\omega t) \quad 5.2a$$

$$v_y = \dot{y} = r\omega \cos(\omega t) \quad 5.2b$$

Długość wektora prędkości jest równa

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = r\omega \quad 5.3$$

Wektor prędkość w danym punkcie toru cząstki jest oczywiście styczny do tego toru. Składowe wektora przyspieszenia $\mathbf{a}$ wyrażają się wzorem

$$a_x = \ddot{x} = -r\omega^2 \cos(\omega t) \quad 5.4a$$

$$a_y = \ddot{y} = -r\omega^2 \sin(\omega t) \quad 5.4b$$

Długość (wartość) wektora przyspieszenia $\mathbf{a}$ wyraża się, znanym wzorem

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} \quad 5.5$$

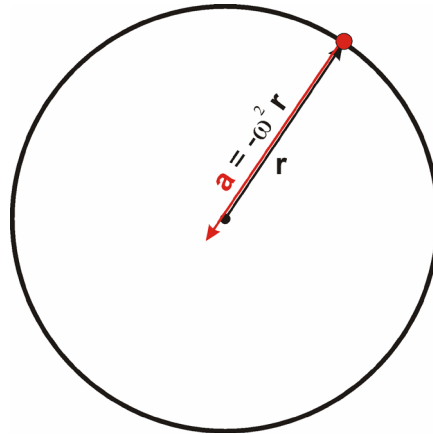
Pokażę, że obliczone przyspieszenie skierowane jest przeciwnie do promienia okręgu. W tym celu wektor przyspieszenia $\mathbf{a}$ napiszę w postaci

$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2 \cdot (r \cos(\omega t); r \sin(\omega t)) = -\omega^2 \cdot \mathbf{r} \quad 5.6$$

Znak minus wskazuje, że wektor przyspieszenia $\mathbf{a}$ jest przeciwnie skierowany do wektora wodzącego $\mathbf{r}$ punktu poruszającego się po okręgu (rys. 5.1). Przyspieszenie to nazywamy przyspieszeniem dośrodkowym lub przyspieszeniem normalnym.

Definicja 5.1: przyspieszenie dośrodkowe (normalne)

Składową wektora przyspieszenia, która jest skierowane prostopadłe do wektora prędkości (do toru) nazywamy przyspieszeniem dośrodkowym lub normalnym i oznaczamy jako $\mathbf{a}_n$.



Rysunek 5.1. W ruchu po okręgu ze stałą wartością prędkości liniowej wektor przyspieszenia $\mathbf{a}$ ciała jest skierowany do środka okręgu.

Nazwa przyspieszenie normalne bierze się stąd, że w matematyce prostą prostopadłą do danej krzywej, w danym punkcie (prostopadłą do stycznej do tej krzywej) nazywa się normalną do krzywej.

Definicja 5.2: przyspieszenie styczne

Składową wektora przyspieszenia, która jest skierowana równoległe do wektora prędkości (stycznie do toru) nazywamy przyspieszeniem stycznym i oznaczamy jako $\mathbf{a}_s$.

Całkowite przyspieszenie $\mathbf{a}_c$ jest równe sumie składowej stycznej i normalnej (rys. 5.2)

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_n \quad 5.7$$

Długość wektora przyspieszenia całkowitego to

$$|\mathbf{a}_c| = \sqrt{a_s^2 + a_n^2} \quad 5.8$$

Przyspieszeniu dośrodkowemu towarzyszy siła dośrodkowa (normalna) $\mathbf{F}_d$ równa

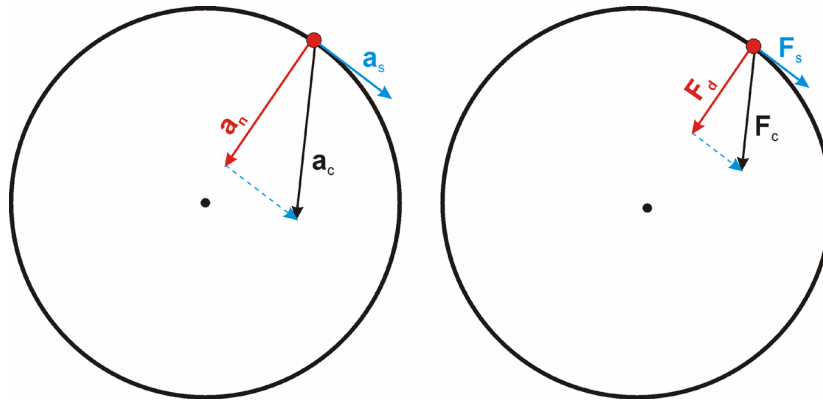
$$\mathbf{F}_d = m\mathbf{a}_n \quad 5.9$$

Całkowitą siłę $\mathbf{F}_c$ działającą na ciało można rozłożyć na składową styczną $\mathbf{F}_s$ i normalną $\mathbf{F}_d$ do toru ciała (rys. 5.2)

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_d = m(\mathbf{a}_s + \mathbf{a}_d) \quad 5.10$$

Składowa styczna siły, w danym punkcie toru ciała, ma następujące własności

- jest styczna do toru (równoległa do wektora prędkości)
- odpowiada za zmiany wartości wektora prędkości
- nie zmienia kierunku wektora prędkości



Rysunek 5.2. Całkowite przyspieszenie ciała w ruchu po okręgu, oraz działającą na to ciało siłę można rozłożyć na składową normalną i styczną.

Składowa normalna siły, w danym punkcie toru ciała, ma następujące własności

- jest normalna do toru (prostopadła do wektora prędkości)
- odpowiada za zmiany kierunku wektora prędkości
- nie zmienia wartości wektora prędkości

Gdy w ruchu po okręgu składowa styczna przyspieszenia, a co za tym idzie siły jest różna od zera to ruch ten odbywa się ze zmienną wartością prędkością. Jeżeli ruch po okręgu zachodzi ze stałą wartością prędkości, to składowe styczne siły i przyspieszenia są równe zero.

Prędkość linową możemy powiązać z wektorem prędkości kątowej ω i wektorem położenie wzorem (TV 3.1.2). Prędkość kątowa to oczywiście przyrost kąta φ w czasie (TV 3.1.1). Obliczmy teraz przyspieszenie korzystając bezpośrednio ze wzoru (TV 3.1.2)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \times \mathbf{r}) = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad 5.12$$

Skorzystaliśmy ze wzoru na obliczanie pochodnej iloczynu wektorowego (DB 1.1.9) Pierwszy składnik wyraża wektor prostopadły do wektorów ω i $\mathbf{r}$; jest zatem równoległy do wektora prędkości i wyraża przyspieszenie styczne

$$\mathbf{a}_s = \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} \quad 5.13$$

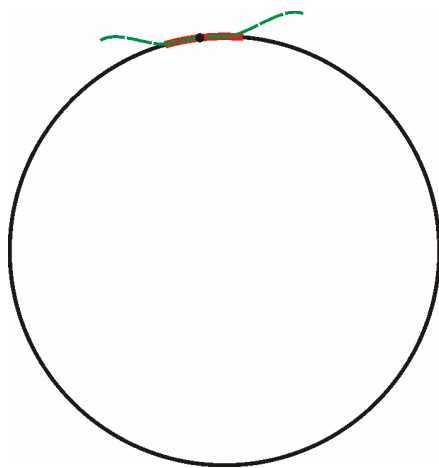
Drugi składnik przedstawia wektor prostopadły do wektorów ω i $\mathbf{v}$ i wyraża przyspieszenie normalne.

$$\mathbf{a}_n = \omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad 5.14$$

Wychodząc z czysto formalnego wyrażenia na związek prędkości ruchu po okręgu otrzymaliśmy ponownie rozkład przyspieszenia całkowitego na składową styczną i normalną.

5.1. A jak nie po okręgu? ♦

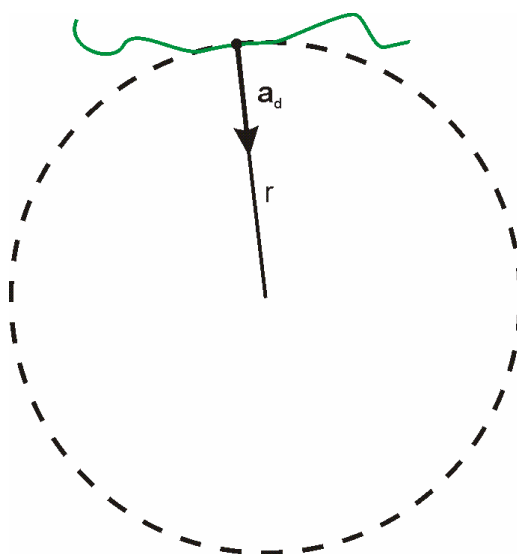
Do tej pory analizowałem szczególne przypadki ruchu krzywoliniowego to jest, ruch po okręgu – zwykle ze stałą wartością prędkości, ruch po elipsie (I i II prawo Keplera) oraz ruch po paraboli (rzut w polu grawitacyjnym). Przy czym szczegółowo omówiłem ruch po okręgu. Czy jesteśmy w stanie poradzić sobie z innymi przypadkami? Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Jak przystało na spryciarzy sprowadzimy te inne przypadki do ruchu po okręgu (metoda wiadra (§T1 4)). Aby to zrobić zauważmy, że przy określaniu, w danej chwili czasu, położenia, prędkości czy przyspieszenia jakiegoś punktu materialnego nie interesuje nas całość jego toru, tylko ta jego część, która znajduje się w bliskim sąsiedztwie punktu, w którym ten punkt materialny jest. Jak bliskie może być to sąsiedztwo? Jak się możesz domyślać – nieskończenie bliskie. Wiemy już, że w takim nieskończenie bliskim otoczeniu, każdy tor można uważać za fragment toru prostoliniowego, przy czym prosta musi być styczna do toru w danym punkcie. Czy zamiast prostej stycznej nie dałoby się zdefiniować okręgu stycznego do toru w danym punkcie? Pewnie, że tak. Tak na dobrą sprawę każdy kawałek krzywej gładkiej może być tak usytuowany i zorientowany, że będzie styczny do toru cząstki w danym punkcie. (rys. 5.1.1).



Rysunek 5.1.1. Interesujący nas w danej chwili czasu fragment toru cząstki (pomarańczowy) będącego częścią okręgu może równie dobrze być fragmentem wielu innych krzywych. Jedną z nich pokazuje przerywana linia zielona.

No to już teraz wszystko wiesz. Powiedzmy, że mamy jakiś krzywoliniowy tor. Chcemy wyznaczyć przyspieszenie punktu poruszającego się po tym

torze. Postąpimy teraz odwrotnie do tego co pokazałem na rysunku (5.1.1). Zamiast do wycinka koła dopasowywać inne krzywe, my do małego odcinka pewnej krzywej dopasujemy okrąg (okrąg styczny) (rys. 5.1.2).



Rysunek 5.1.2. Teraz do małego fragmentu dowolnego toru (zielony) możemy dopasować okrąg styczny. Kiedy mamy do krzywej, w danym punkcie, dopasowany okrąg, który możemy nazwać okręgiem stycznym, to możemy ze wzoru (5.1.1) wyliczyć wartość przyspieszenia dośrodkowego. Kierunek i zwrot wektora tego przyspieszenia również wyznaczamy tak jak dla ruchu po okręgu.

Kiedy dopasujemy już taki okrąg, to stwierdzimy, że na tym krótkim odcinku możemy równie dobrze myśleć o naszym punkcie jako poruszającym się po okręgu, a nie po torze o innej geometrii. A skoro po okręgu to znamy przyspieszenie punktu; prawda? W końcu w ruchu po okręgu przyspieszenia i styczne i dośrodkowe obliczać potrafimy. Tak więc wartość przyspieszenia dośrodkowego w wybranym punkcie toru krzywoliniowego wynosi

$$a_d = \frac{v^2}{r} \quad 5.1.1$$

Kierunek wektora przyspieszenia $\mathbf{a_d}$ jest zgodny z kierunkiem promienia okręgu, a zwrot wektora jest skierowany do środka okręgu (rys. 5.1.2). Przyspieszenie styczne jest dalej równe ilorazowi zmiany długości wektora prędkości do czasu tej zmiany.

Pozostaje tylko jeszcze jeden problem. Czy istnieje jakaś dobra metoda dopasowywania okręgów do kawałków krzywej? I czy metoda ta daje jednoznaczne wyniki? Bo gdyby się okazało, że do krzywej można dopasować dwa różne okręgi, to mielibyśmy wyznaczone dwa różne wektory przyspieszenia dośrodkowego i sytuacja byłaby cokolwiek niezręczna. Na szczęście matematycy wszystko ściśle zdefiniowali i znaleźli odpowiednie

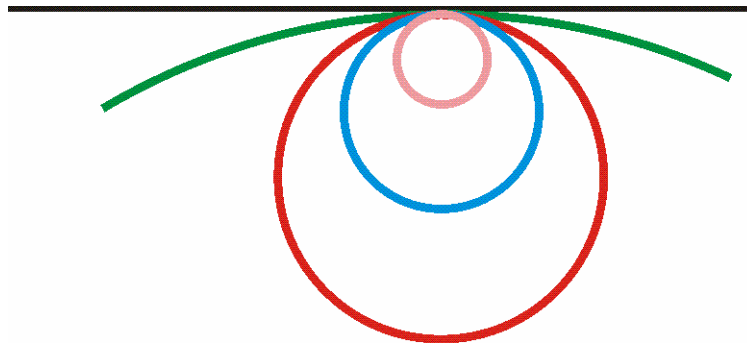
metody dające jednoznaczne wyniki. Krótkie przedstawienie tych metod zacznę od wprowadzenia pojęcia krzywizny. Krzywizna C okręgu o promieniu R jest równa odwrotności promienia R tegoż okręgu (DF_Ix).

Definicja 5.1.1: Krzywizna okręgu

Krzywizną C okręgu nazywamy odwrotności wartości długości jego promienia R ,

$$C = \frac{1}{R} \quad 5.1.2$$

Widać, że im mniejszy promień R okręgu, tym większa jest jego krzywizna C , a jednocześnie większa krzywizna wskazuje na okrąg który szybciej odchodzi od stycznej (rys. 5.1.4), czyli jest styczny do bardziej zakrzywionej krzywej.



Rysunek 5.1.4. Okręgi o mniejszych promieniach szybciej odchodzą od punktu styczności do prostej.

Fakt 5.1: Wymiar krzywizny

Wymiarem krzywizny jest odwrotność długość. W układzie SI jednostką krzywizny jest jeden przez metr.

Prostą możemy uważać za okrąg o nieskończonym promieniu; zatem krzywizna prostej jest równa $C=0$. Krzywizna ma być naszą miarą szybkości odchodzenia krzywej od prostej stycznej. Prosta sama od siebie nie odchodzi – więc wszystko się tu zgadza. Im mniejszy promień okręgu tym większa krzywizna. A co się dzieje gdy promień okręgu zbliża się do zera? Cóż wtedy okrąg przechodzi w punkt, a krzywizna rośnie do wartości nieskończonej. Krzywiznę dowolnej krzywej gładkiej definiujemy tak

Definicja 5.1.2: Krzywizna krzywej gładkiej

Krzywizną C krzywej gładkiej, w punkcie P nazywamy krzywiznę okręgu stycznego do tej krzywej w punkcie P

Musimy teraz zapytać o sposoby obliczania krzywizny dowolnej krzywej. To znaczy będziemy musieli, mając daną krzywą i jej wybrany punkt

P nauczyć się znajdować taką liczbę C , która będzie krzywizną okręgu stycznego, w punkcie P do tej krzywej. Matematycy uporali się z tym zadaniem. Przypomnę tu wzory podane już w (DF_XX) Dla funkcji danej wzorem $y=f(x)$ krzywizna okręgu stycznego do tej krzywej w punkcie $P(x_p, y_p)$, a zarazem krzywizna samej krzywej, wyraża się wzorem

$$C = \frac{|f''(x_p)|}{\left(1 + f'^2(x_p)\right)^{\frac{3}{2}}} \quad 5.1.3$$

Ze wzoru tego widać, że musimy zażądać aby funkcja f była dwukrotnie różniczkowalna. Mając obliczoną krzywiznę możemy policzyć wartość przyspieszenia normalnego

$$a_n = \frac{v^2}{R} = v^2 C \quad 5.1.4$$

Dobrze byłoby również znać kierunek wektora przyspieszenia dośrodkowego. W tym celu możemy skorzystać ze wzorów określający położenie środka (x_s, y_s) okręgu stycznego do krzywej w danym punkcie. Jak wiemy, wektor przyspieszenia dośrodkowego musi być skierowany do tego punktu. Odnośne wzory mają postać

$$x_s = x_p - f'(x_p) \frac{1 + f'^2(x_p)}{f''(x_p)} \quad 5.1.5a$$

$$y_s = y_p + \frac{1 + f'^2(x_p)}{f''(x_p)} \quad 5.1.5b$$

Dla krzywej określonej parametrycznie $x=x(t)$, $y=y(t)$ wzór na krzywiznę ma postać

$$C = \frac{|\ddot{y} \dot{x} - \ddot{x} \dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad 5.1.6$$

Wzory na współrzędne środka krzywizny mają postać

$$x_s = x_p - \dot{y} \frac{x^2 + y^2}{\ddot{y} \dot{x} - \ddot{x} \dot{y}} \quad 5.1.7a$$

$$y_s = y_p + \dot{x} \frac{x^2 + y^2}{\ddot{y} \dot{x} - \ddot{x} \dot{y}} \quad 5.1.7b$$

Mamy wszystko co jest potrzebne do wyznaczenia przyspieszenia w ruchu po dowolnej krzywej. No, może nie całkiem dowolnej. Funkcje opisujące nasze krzywe, przy wykorzystaniu wzorów (5.1.3 i 5.1.5) muszą być

przynajmniej dwukrotnie różniczkowalne, czyli co najmniej klasy C^2 . Ponadto muszą to być krzywe zawarte w płaszczyźnie. A co z krzywymi w przestrzeni? Cóż technika postępowania jest podobna. Trzeba sobie jednak radzić z możliwością kręcenia się krzywej wokół siebie (tak zwanej torsji). Ten fakt powoduje, że odnośna teoria staje się bardziej skomplikowana i nie będziemy jej w tym miejscu wprowadzali.

5.2. Przykład – ruch po paraboli ♦/♣

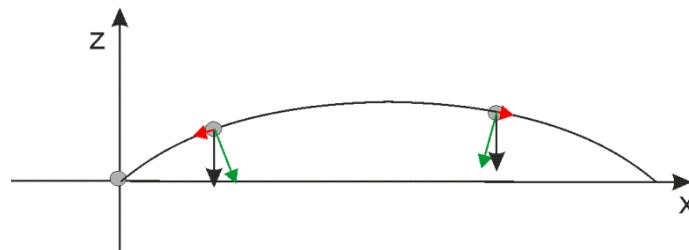
Z rozwiązania zagadnienia rzutu ukośnego w polu grawitacyjnym wynika, że ruch odbywa się po torze parabolicznym opisanym równaniem parametrycznym (3.5.3c,d), który tutaj przepiszę w postaci

$$x(t) = |v|\cos(\alpha)t \quad 5.2.1a$$

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + |v|\sin(\alpha)t \quad 5.2.1b$$

Obliczmy wartość przyspieszenia normalnego i stycznego w dowolnym punkcie parabolicznego toru.

W analizowanym ruchu działa tylko stałe co do wartości i kierunku przyspieszenie grawitacyjne $\mathbf{g}$. W układzie współrzędnych z rysunku (5.2.1) wektor $\mathbf{g}$ ma współrzędne $\mathbf{g}(0,0,-g)$. W każdym punkcie toru szukamy więc rozkładu tego wektora na kierunek normalny i styczny do toru



Rysunek 5.2.1. W każdym punkcie parabolicznego toru swobodnie rzuconego ciała jego przyspieszenie $\mathbf{g}$ (czarna strzałka) rozkładamy na składową normalną do toru (zielona strzałka) i składową styczną do toru (czerwona strzałka).

Zadanie rozwiążę na dwa sposoby.

5.2.1. Sposób pierwszy ♦

Przyspieszenie styczne zależne jest od zmian wartości wektora prędkości z czasem. Możemy obliczyć współrzędne wektora prędkości

$$v_x = v_0\cos(\alpha) \quad 5.2.2$$

$$v_z = v_0\sin(\alpha) - gt \quad 5.2.2$$

Wartość wektora prędkości wynosi

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin(\alpha)} \quad 5.2.3$$

Wartość składowej stycznej przyspieszenia można obliczyć jako przyrost wartości prędkości.

$$a_s = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = \frac{g^2 t - v_0 g \sin(\alpha)}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin(\alpha)}} \quad 5.2.4$$

Wartość składowej normalnej wyliczamy ze wzoru

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_s^2} \quad 5.2.5$$

Tutaj oczywiście $\mathbf{a}=\mathbf{g}$

$$a_n = \sqrt{g^2 - \left(\frac{g^2 t - v_0 g \sin(\alpha)}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin(\alpha)}} \right)^2} \quad 5.2.6a$$

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{\frac{g^2 v_0^2 \cos^2(\alpha)}{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin(\alpha)}} \\ &= \frac{g v_0 \cos(\alpha)}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin(\alpha)}} \end{aligned} \quad 5.2.6b$$

No tak, na razie nie skorzystaliśmy jeszcze z naszych nowych narzędzi geometrycznych. Możliwe to było dzięki temu, że znany jest wektor przyspieszenia $\mathbf{g}$ ciała w rzucie swobodnym. Nie zawsze jest jednak tak dobrze. Warto więc na tym prostym przykładzie przećwiczyć ogólniejszą metodę.

5.2.2. Sposób drugi ♣

Równanie (5.2.1) jest równaniem paraboli i nie ma żadnych przeciwwskazań byśmy nie obliczyli składowej normalnej przyspieszenia korzystając ze wzoru na krzywiznę (5.1.6). Z (5.2.1) obliczę potrzebne pochodne

$$\dot{x} = v \cos(\alpha) \quad 5.2.7a$$

$$\ddot{x} = 0 \quad 5.2.7b$$

$$\dot{z} = -gt + v \sin(\alpha) \quad 5.2.7c$$

$$\ddot{z} = -g \quad 5.2.7d$$

Wstawiamy obliczone wyrażenia do wzoru (5.1.6) na krzywiznę, przyjmując $z=y$

$$C = \frac{|-g v \cos(\alpha)|}{(v^2 + g^2 t^2 - 2gvt \sin(\alpha))^{\frac{3}{2}}} \quad 5.2.8$$

Ze wzoru (5.1.4) obliczam wartość przyspieszenia normalnego

$$a_n = (v_0^2 + g^2 t^2 - 2v_0 g t \sin(\alpha)) \frac{|-g v \cos(\alpha)|}{(v^2 + g^2 t^2 - 2gvt \sin(\alpha))^{\frac{3}{2}}} \quad 5.2.9a$$

Gdzie skorzystałem ze wzoru (5.2.3) na wartość prędkości. Po przekształceniu mam

$$a_n = \frac{g v \cos(\alpha)}{\sqrt{v^2 + g^2 t^2 - 2gvt \sin(\alpha)}} \quad 5.2.9$$

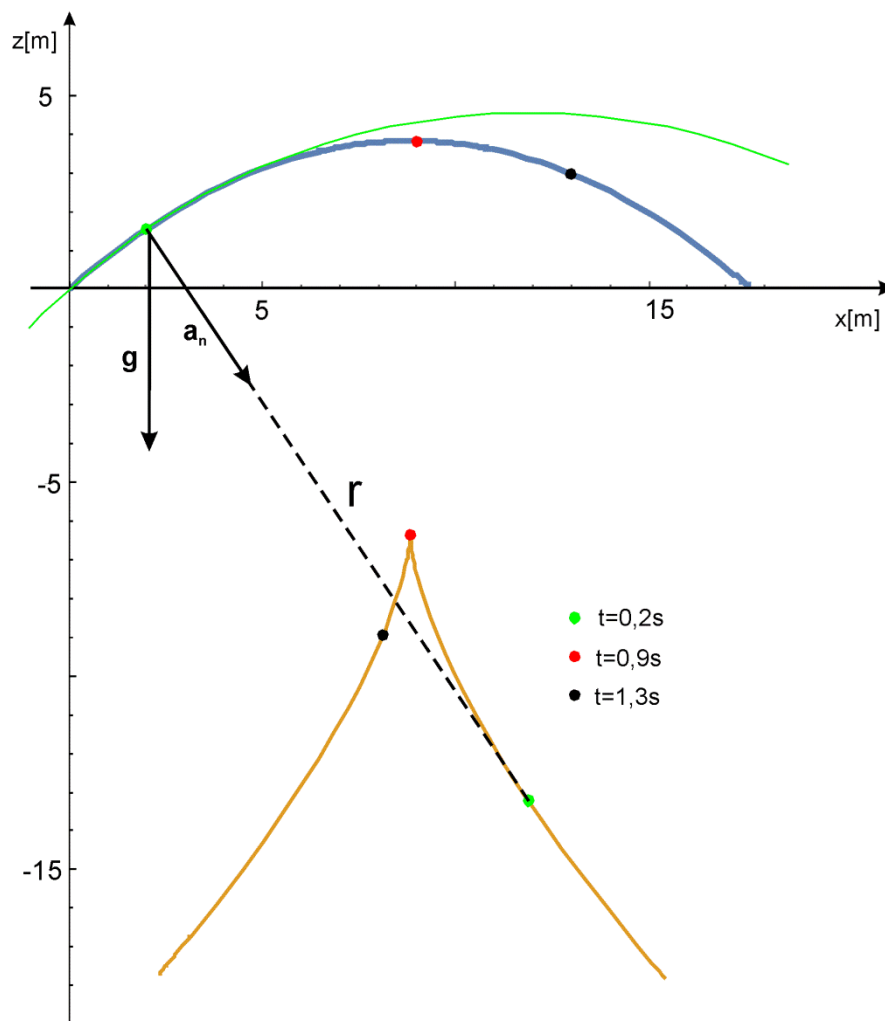
Ponownie wzór postaci (5.2.6). Wzór (5.2.9) określa bezwzględną wartość przyspieszenia normalnego. Kierunek i zwrot mogą określić obliczając współrzędne środka krzywizny. Mógłbym skorzystać ze wzorów (5.1.7) ale wolę bardziej elegancki sposób. W (DF xx) zdefiniowałem ewolutę jako zbiór punktów reprezentujących środki stycznych okręgów do zadanej krzywej. Wykorzystam podane tam wzory na ewolutę i wykreślę ją dla paraboli opisującej ruch ciała w naszym zadaniu. Po skorzystaniu ze wzorów (DF xx) równanie parametryczne ewoluty dla paraboli określonej wzorami (5.2.1) ma postać

$$x(t) = v \cos(\alpha) t - \frac{(g t - v \sin(\alpha))(g^2 t^2 + v^2 - 2g t v \sin(\alpha))}{g v \cos(\alpha)} \quad 5.2.10a$$

$$y(t) = -\frac{3}{2} g t^2 - \frac{v^2}{g} + 3 t v \sin(\alpha) \quad 5.2.10b$$

Rysunek (5.2.2) pokazuje parabolę dla ciała rzuconego pod kątem 60° do powierzchni, z prędkością o wartości $v=10\text{m/s}$ oraz jej ewolutę. Łącząc wybrany punkt na paraboli z odpowiadającym jej punktem ewoluty otrzymujemy odcinek wyznaczający kierunek wektora przyspieszenia normalnego. Zwrot tego wektora jest ustawiony od punktu na paraboli do punktu na ewolucie.

Narzędzia, z których tu skorzystałem należą do arsenału geometrii różniczkowej. Geometria różniczkowa stosuje metody rachunku różniczkowego do analizy własności krzywych, powierzchni, hiperpowierzchni. Narzędzia ta pozwalają na uzyskanie wielu eleganckich rozwiązań problemów, których rozwiązanie metodami klasycznej geometrii jest bardzo trudne lub czasem wręcz praktycznie niemożliwe. Oczywiście księga geometrii różniczkowej jest bardzo gruba. My będziemy korzystali tylko z jej elementów. Ale nawet te elementy pokażą nam jasno jak sinlnymi narzędziami dysponuje geometria różniczkowa.



Rysunek 5.2.2. Niebieska linia pokazuje tor lotu ciała rzuconego pod kątem 60° do powierzchni z prędkością początkową 10m/s . Zgodnie z rozwiązaniem (3.5.3c-d) tor lotu jest parabolą. Żółta linia obrazuje ewolucję tej paraboli. Punkty o tym samym kolorze na paraboli i jej ewolucji odpowiadają tej samej chwili czasu. Dla punktu zielonego wykreślony jest fragment odpowiedniego okręgu o środku w zielonym punkcie na ewolucji i promieniu równym odległości między zielonymi punktami. Jest to okrąg styczny do paraboli w zielonym punkcie. Odwrotność promienia tego okręgu jest równa krzywiznie paraboli w zielonym punkcie, która z użyciem wzorów (5.1.4) pozwala na wyliczenie wartości przyspieszenia normalnego w tym punkcie.

6. Trzecie prawo Newtona ♦

Przypomnę treść trzeciego prawa Newtona

Określenie 6.1: Trzecie prawo:

Siła z jaką ciało A działa na ciało B jest równa co do wartości sile z jaką ciało B działa na ciało A. Obie te siły są równoległe i przeciwnie skierowane.

Często prawo to nazywa się prawem akcji i reakcji i wyraża krótko

Określenie 6.2: Prawo akcji i reakcji

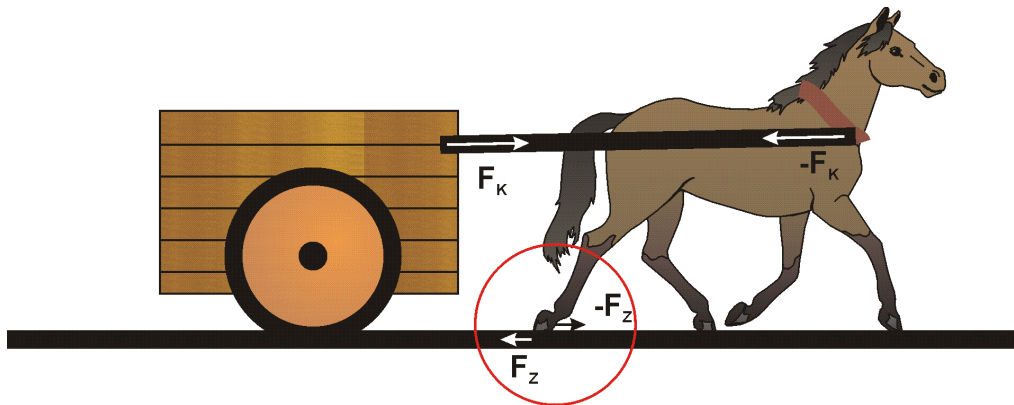
Siła akcji równa jest sile reakcji

Trzecie prawo mimo swej pozornej prostoty może sprawić pewne trudności. Podam dwa przykłady kłopotliwych problemów. Zacznę od brutalnego przykładu kiedy czyjaś pięść ląduje na jakimś nosie. Uderzający mógłby, powołując się na trzecie prawo, stwierdzić, że siła z jaką działa pięść na nos jest taka sama co do wartości jak siła, z którą w tym samym czasie, działa nos na pięść, zatem sytuacja pięści i nosa jest w gruncie rzeczy taka sama. A on jak widać nie narzeka, więc nie ma powodu by narzekał właściciel nosa. Cała sytuacja stanie się jasna kiedy przestaniemy po cichu zakładać, że równość sił pociąga za sobą równość skutków. Ta sama siła przyłożona do mydlanej bańki i do stalowej powłoki kulistej będzie miała różne skutki; tak samo jest z pięścią i nosem. Chociaż nos natychmiast „mści” się na pięści działając na nią tą samą siłą, to skutki działania tej samej siły na pięść i na nos bywają dramatycznie odmienne (rys.6.1).

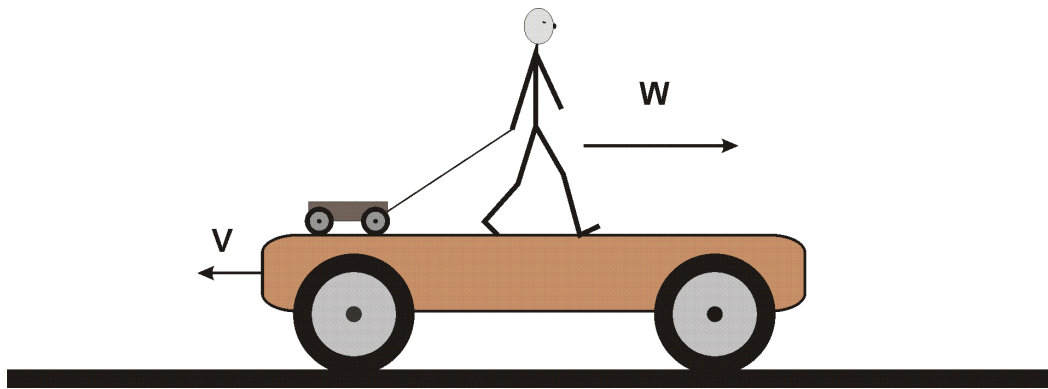


Rysunek 6.1. Z faktu równości siły akcji i siły reakcji nie wynika równość skutków jakie powodują obie siły.

Drugi problem zilustruję na znanym przykładzie konia ciągnącego wóz. Gdy koń ciągnie wóz, to zgodnie z trzecim prawem, wóz ciągnie konia, z taką samą siłą, tyle że przeciwnie skierowaną. Skoro obie siły idealnie się równoważą, czy układ nie powinien być w idealnym spoczynku? Właściwą odpowiedź pomogą nam znaleźć rysunki (6.2 i 6.3).



Rysunek 6.2. Prawdą jest, że gdy koń ciągnie wóz z siłą F_K , to wóz ciągnie konia z siłą $-F_K$. Dlaczego zatem wóz jedzie w tym kierunku, w którym ciągnie go koń? Zauważ jednak, że przesuwa się nie tylko wóz, ale również koń. Należało by raczej stwierdzić, że przemieszcza się układ wóz-koń. Koń nie oddala się od wozu, ani wóz nie oddala się od konia, więc wszystko jest w porządku. Układ wóz-koń przemieszcza się natomiast względem gruntu. Koń odpycha się kopytami od podłoża z taką siłą z jaką podłoże odpycha kopyta konia. Efekt jest taki, że i koń (razem z wozem) i Ziemia przemieszczają się względem siebie. Z tym, że układ koń-wóz ma masę niezauważalnie małą w porównaniu z masą Ziemi. W efekcie przemieszczenie Ziemi jest niezauważalne. Sytuację objaśnia rysunek (6.3).



Rysunek 6.3. Pan Abacki odpycha się od dużego wózka stopami. Dzięki temu zaczyna poruszać się i względem wózka, i względem podłoża (choć z różnymi prędkościami). Wektor $\mathbf{w}$ reprezentuje ruch Abackiego względem podłoża. Jednocześnie Abacki ciągnie za sobą mały wózek. Siła z jaką Abacki działa, poprzez sznurek, na wózek jest równa sile z jaką wózek, poprzez ten sam sznurek działa na Abackiego. Jeżeli sznurek nie rozciąga się, to odległość między Abackim a wózkiem pozostaje stała. Abacki działając siłą na mały wózek powoduje, że ten porusza się z tą samą prędkością $\mathbf{w}$. Skutki oddziaływania nóg Abackiego z dużym wózkiem są inne. Siła z jaką stopy Abackiego działają na duży wózek jest równa sile z jaką duży wózek działa na stopy Abackiego. W tym jednak wypadku duży wózek nie jest związany z Abackim. Odpychanie dużego wózka przez stopy Abackiego powoduje ruch Abackiego i małego wózka z prędkością $\mathbf{w}$, względem podłoża, a dużego wózka z prędkością $\mathbf{v}$ w kierunku przeciwnym (całkowity pęd musi być zachowany). Jeżeli duży wózek jest wielokrotnie masywniejszy od Abackiego to jego prędkość $\mathbf{v}$ względem podłoża jest wielokrotnie mniejsza od prędkości $\mathbf{w}$ Abackiego. Podobnie jest w poprzednim przykładzie. Ziemia, jak bardzo, bardzo duży wózek ucieka spod kopyt konia. Jej niewyobrażalnie wielka masa powoduje, że ta ucieczka jest niezauważalna. Prawdę mówiąc nawet gdybyśmy jakimś cudem mogli zmierzyć „odrzut” Ziemi pod wpływem działania kopyt konia, to na nic by się to nie zdało. W każdej chwili na Ziemię działają siły związane z miliardami stóp ludzi i zwierząt, kół samochodów, działaniem wiatru, prądów morskich, rzek itd. Wszystkie te działania popychają Ziemię we wszystkich możliwych kierunkach, choć każde z nich w niezauważalnym stopniu. Aby zmierzyć oddziaływanie Abackiego lub konia wszystko inne musiałoby na czas pomiaru zatrzymać się.

7. Zagadnienie warunku początkowego ♦

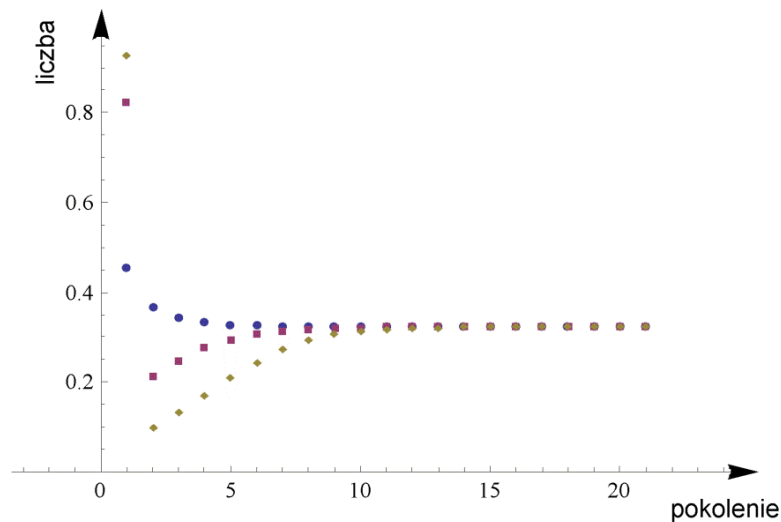
Zacznę od przypomnienia, że drugie prawo Newtona pozwala obliczać przyrosty pędów, prędkości, czy położeń. Aby zatem znać wartość pędu, prędkości czy położenia musimy znać tzw. wartości początkowe (fakt 3.3.1). Z pozoru zagadnienie wygląda dość banalnie i aż trudno uwierzyć, że czai się za nim cały wielki dział fizyki współczesnej. Przedstawię przykład prostego układu, którego analiza pokaże skąd bierze się bogata kraina fizycznego świata o nazwie „zagadnienie warunku początkowego”.

Powiedzmy, że zmianę populacji szczurów w danym mieście możemy opisać za pomocą równania (tzw. równanie logistyczne)

$$p_N = r p_{N-1} (1 - p_{N-1}) \quad 7.1$$

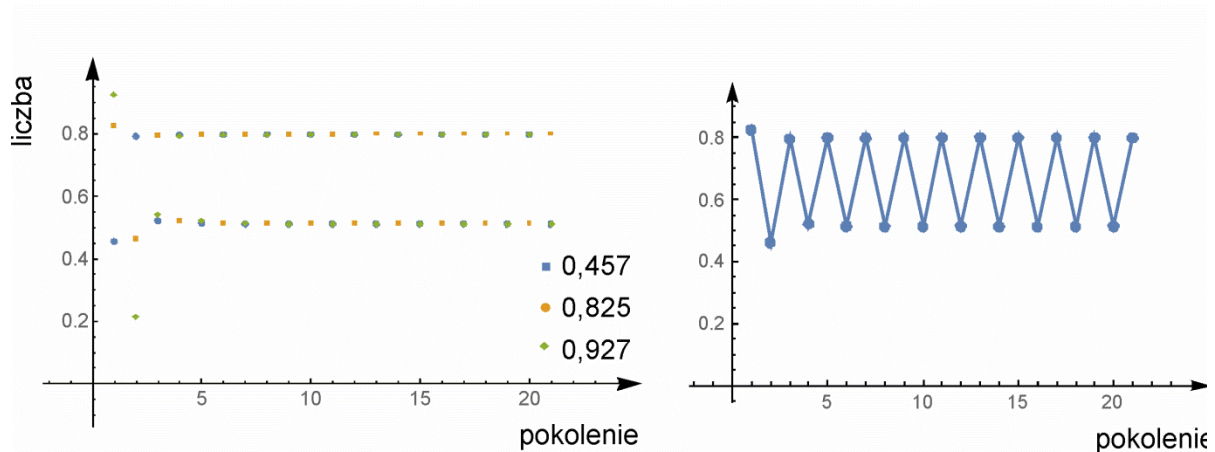
Możemy powiedzieć, że równanie (7.1) reprezentuje prosty model zmian populacji szczurów. W skali złożoności modeli to taka kulista krowa (§TI 1). Liczba N numeruje kolejne pokolenia szczurów. To czy taki model da się sensownie stosować do obliczania populacji szczurów czy nie, nie jest w tej chwili istotne, gdyż na jego przykładzie nie chcę obliczać populacji szczurów, tylko przedstawić pewne pułapki, które czają się w modelach wymagających warunku początkowego. Zauważ, że aby zacząć obliczać z użyciem równania (7.1) musimy znać początkową wartość x , oznaczę ją jako x_0 . Wysyłamy więc w miasto studentów z zadaniem policzenia liczby szczurów. Nasi studenci zbytnio się nie spisali. Jedna grupa oszacowała populację szczurów na 825000, druga na 457000, a trzecia na 927000. Wraźmy liczbę szczurów w milionach. Mamy zatem następujące szacunki liczby szczurów 0.825 miliona; 0.457 miliona; 0.927 miliona. Ten rozrzut oszacowań nie najlepiej świadczy o naszych studentach, ale co mamy robić, muszą nam wystarczyć te dane, które mamy. Sami, ustaliśmy, że wartość parametru r , w naszym mieście wynosi $r=1.48$. Za pomocą wzoru (7.1) liczymy liczebność populacji w kolejnych pokoleniach, wyniki przedstawia rysunek (7.1). Stało się coś i zaskakującego i miłego. Niezależnie od tego czy przyjmujemy początkową liczbę szczurów równą nieco ponad 0.45 miliona czy też nieco ponad 0.9 miliona po paru pokoleniach model przewiduje populację na poziomie nieco ponad 0.32 miliona szczurów. Można zatem przyjąć, że jest to liczba szczurów w naszym mieście, i że nie zmienia się ona w czasie, przynajmniej tak długo jak długo warunki środowiskowe nie zmienią się. Sytuacja populacji szczurów jest podobna do sytuacji kulki w misce (rys. TV 5.1). Niezależnie od tego czy ustawiamy kulkę blisko dna, czy blisko krawędzi ściany (czyli niezależnie od warunku początkowego) po paru wahnięciach kulka i tak zatrzyma się na dnie miski. Widać przy tym z tego, że studenci,

którzy oszacowali liczbę szczurów na 825000 i 927000 zrobili to bardzo niedbale.

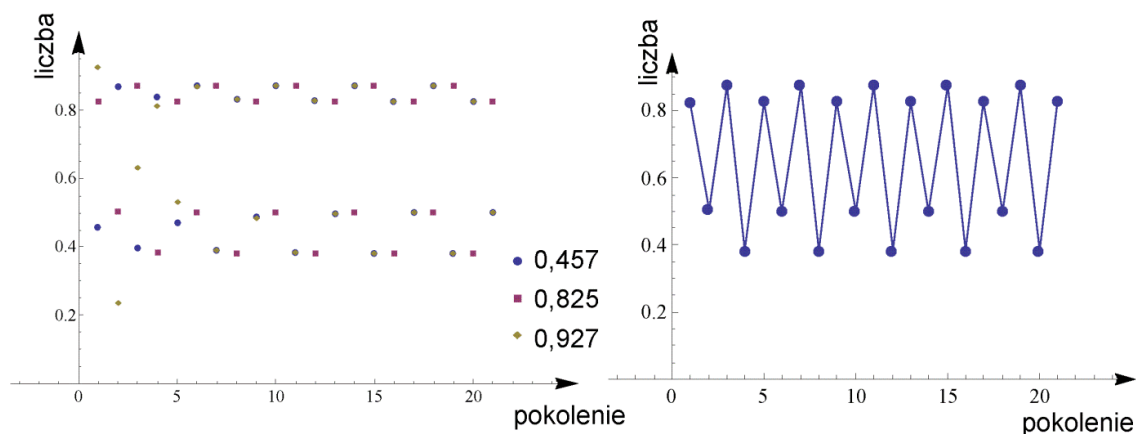


Rysunek 7.1. Zmiana liczebności szczurów w kolejnych dwudziestu pokoleniach, (ostatnie, dwudzieste pokolenie ma numer 21, przy różnych wartościach początkowych. Według modelu liczebność populacji stabilizuje się na poziomie około 0.32 miliona szczurów. Wartość parametru $r=1.48$.

Stało się nieszczęście i nasze miasto nawiedziła wielka powódź. Wiele się w nim zmieniło, a z populacją szczurów zaczęło się dziać coś dziwnego. Wysyłamy znowu grupy studentów by oszacowali ilość szczurów, a ci przynieśli takie same wyniki jak poprzednia grupa; pewnie znaleźli te informacje w Internecie i postanowili zaoszczędzić sobie pracy. Nie pozostało nam nic innego jak wysłać ich znowu w miasto, a sami z nudów możemy zobaczyć co obecnie dadzą stare oszacowania. Osobistym i solidnym wysiłkiem stwierdzamy, że zmienione warunki środowiskowe oznaczają, że w naszym modelu parametr $r=3.2$. Wstawienie starych wartości początkowych do równania (7.1) przynosi zaskoczenie, które ilustruje rysunek (7.2). Populacja szczurów dalej zachowuje się przewidywalnie, tak że nie musimy czekać na powrót studentów. Ale teraz z pokolenia na pokolenie zmienia się między dwiema wartościami. Z jakichś nieznanych przyczyn, gdy populacja urośnie do wartości większej, to jej liczebność załamuje się, a następnie spada do wartości mniejszej, by w kolejnym pokoleniu znów się powiększyć i tak dalej. Z ciekawości sprawdzamy co się stanie dla jeszcze innej wartości $r=3.5$. Wyniki przedstawia rysunek (7.3).



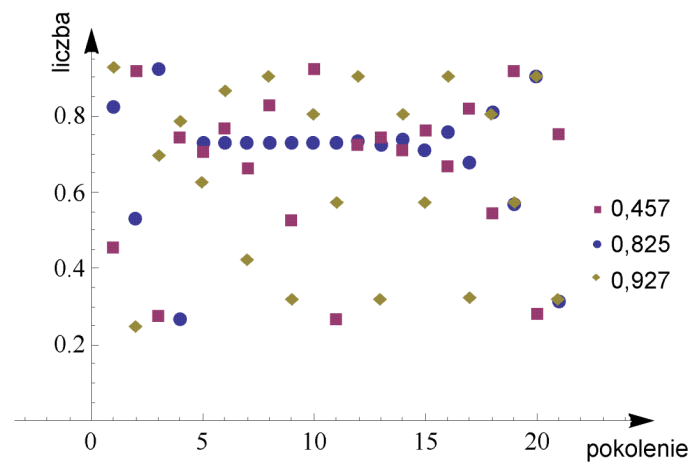
Rysunek 7.2. Lewa strona pokazuje, że niezależnie od wartości początkowej, najdalej, po kilku pierwszych pokoleniach, populacja szczurów zaczyna oscylować między dwiema wartościami; rysunek z prawej pokazuje dokładnie przebieg tych oscylacji dla początkowej populacji 457000 szczurów



Rysunek 7.3. a) Tym razem populacja szczurów oscyluje przyjmując cztery kolejne wartości; b) dokładniejszy rysunek dla liczby początkowej 0.457.

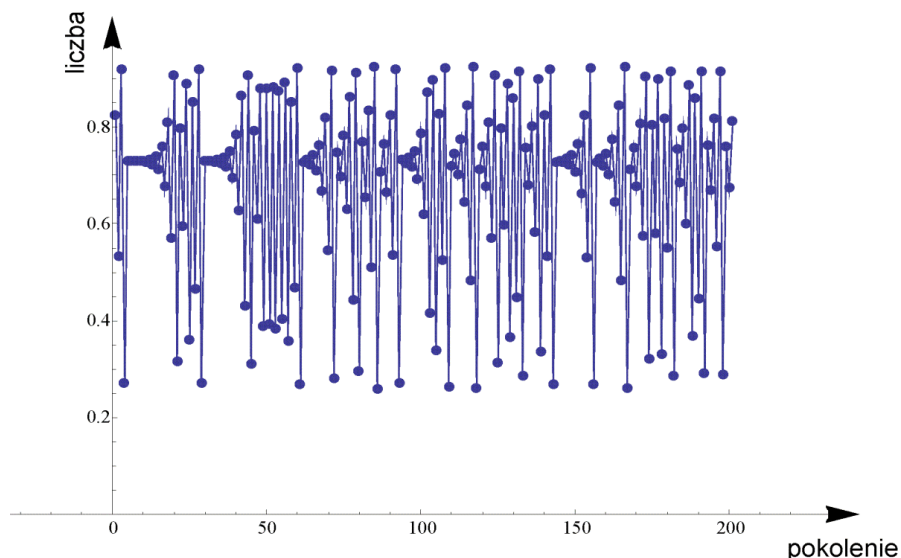
Populacja szczurów zachowuje się w jeszcze bardziej złożony sposób. Tym razem oscyluje wokół czterech następujących po sobie wartości. Przy czym liczba szczurów zmierza do tych czterech wartości niezależnie od wartości początkowej. Ponownie niestarannie zebrane dane początkowe nie zmieniłyby naszych prognoz. Przyjmijmy, że $r=3.7$, efekt obliczeń przedstawia rysunek (7.4). Teraz trudno dostrzec jakąś regularność w następowaniu po sobie kolejnych pokoleń szczurów. Widać nadto, że dla przewidywań kluczowa jest dokładna znajomość początkowej liczby szczurów. Populacja przy wartości początkowej 0.825 wydaje się mieć w miarę stabilny przebieg, ale gdy się ją wykreśli dla większej liczby pokoleń czar pryska (rys. 7.5). Wyniki są co najmniej niepokojące. Pojawia się przede

wszystkim pytanie: jak dokładnie musimy znać początkową liczbę szczurów, by przewidywania nie zaczęły wariować?



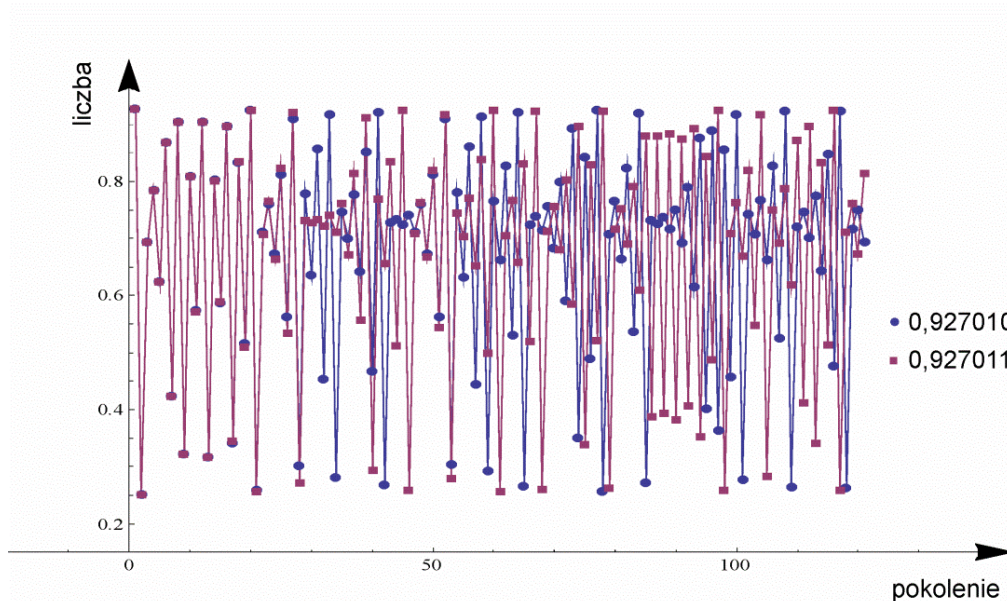
Rysunek 7.4. Dla $r=3.7$ populacja szczurów nie trzyma się żadnego widocznego schematu.

Niestety wystarczy błąd jednego szczura, czyli najmniejszy z możliwych, by wyniki zupełnie się rozjechały, co ilustruje rysunek (7.6). Co prawda przez pierwsze dwadzieścia pokoleń wszystko wygląda tak jakbyśmy tego oczekiwali, to jest wyniki niewiele się od siebie różnią, jednak potem wszystko gwałtownie zaczyna się psuć i przewidywania dla obu wartości początkowych gwałtownie się rozjeżdżają.



Rysunek 7.5. Dla $r=3.7$ i wartości początkowej 0.825 na długości 200 pokoleń populacja nie zmienia się według dobrze uchwytnego wzorca.

Już około trzydziestego pokolenia nie widać by miały coś ze sobą wspólnego.



Rysunek 7.6. Analiza została przeprowadzona dla dwóch początkowych wartości różniących się zaledwie o jednego szczura. O ile przez pierwsze dwadzieścia pokoleń wszystko wygląda zgodnie z oczekiwaniami, o tyle potem wyniki gwałtownie się od siebie oddalają i trudno dostrzec między nimi korelację. Przy różnicy wartości początkowej równej dziesięć szczurów wyniki rozjadą się po mniejszej liczbie pokoleń.

Jest to przykład tego co zostało ochrzczone mianem „chaosu deterministycznego”. Z jednej strony model opisujący populację szczurów jest całkowicie deterministyczny. Oznacza, to że mając dokładną wartość liczby szczurów możemy dokładnie przewidzieć jak się populacja szczurów będzie zmieniała dla ich kolejnych pokoleń. Z drugiej strony nie jest możliwe abyśmy dokładnie poznali liczbę szczurów w danym czasie, co oznacza, że nie możemy wykorzystać naszego deterministycznego modelu do przewidywań.

Należy tu rozróżnić między kilkoma kwestiami. Pierwsza kwestia to stosowność modelu. Jak wiemy każdy model jest tylko uproszczonym obrazem rzeczywistych sytuacji fizycznych. Można by się na przykład przydzielić wartości parametru r . Na ile możemy zakładać, że na przestrzeni kilkudziesięciu lat jest on stały? Zapewne od roku do roku nieco się zmienia. Można by się przydzielić do całego mnóstwa innych uproszczeń związanych z przyjętym modelem. Ale teraz koncentrujemy się na czymś innym. Nawet gdyby się okazało, że model jest wspaniały, to dla pewnych wartości parametru r staje się on nader wrażliwy na warunek początkowy. Nawet drobne błędy przy określeniu warunku początkowego prowadzą do istotnych błędów przewidywania. Problem wrażliwości jest wszyty w konkretny model i nie jest zależny od tego jak bardzo ów model pasuje do tej czy innej sytuacji fizycznej. Zatem podejmując próbę przewidywania

zachowania się populacji szczurów musimy uważać na to co się dzieje z modelem dla konkretnych wartości parametru r . Dla niektórych z nich sytuacja jest komfortowa. Układ jest nader stabilny i zawsze dąży do jakiejś konkretnej wartości określającej liczebności populacji szczurów. Dla innych wartości parametru r populacja szczurów oscyluje, ale wrażliwości modelu na warunek początkowy nie jest zbyt duża. Dla jeszcze innych model staje się wysoce wrażliwy na wartość początkową i jakiegokolwiek przewidywania stają się bardzo niepewne.

7.1. Twój komputer się myli

Równanie logistyczne (7.1) można sprowadzić do równania kwadratowego postaci

$$x_N = x_{N-1}^2 + c \quad 7.1.1$$

Wystarczy przyjąć, że

$$c = \frac{1 - r^2}{4} \quad 7.1.1a$$

$$x_n = \frac{1 + r}{2} - r p_n \quad 7.1.1b$$

Tabela poniżej przedstawia kolejne wartości wyrażenia (7.1.1) dla $x_0=0.5$ i $c=-2$.

x_0	x_1	x_2	x_3
0.5	-1.75	1.0625	-0.87109375
x_4	x_5	x_6	x_7
- 1.241195678710 9375	-0.45943328714 92952	-1.7889210546 591932	1.2002385398 029598
Tabela 7.1.1. Pierwsze siedem wartości x_N obliczone ze wzoru (7.1.1)			

To co rzuca się w oczy to rosnąca liczba miejsc po przecinku, aż do wartości x_4 . To akurat nie może dziwić – mnożenie zwiększa liczbę cyfr. Ale na piątej i dalszych pozycjach tego efektu już nie widać. Związane jest to z tym, że komputer ma ograniczoną możliwość reprezentacji cyfr. W przypadku procesorów firmy Intel jest to piętnaście cyfr. Jeżeli w wyniku mnożenia otrzymujemy ich więcej, to komputer odrzuca te dodatkowe cyfry i podaje

przybliżony wynik. Wiemy jednak, że takie zaokrąglanie liczb nie zawsze jest dopuszczalne. Gdy układ jest w stanie dynamiki chaotycznej skutkuje to poważnymi błędami obliczeniowymi. Podkreślam, że błędy nie muszą się pojawić. Gdy obliczany układ fizyczny jest poza strefą chaosu przybliżenia nie muszą prowadzić do istotnych błędów, ale w obliczu chaosu deterministycznego komputer zawodzi.

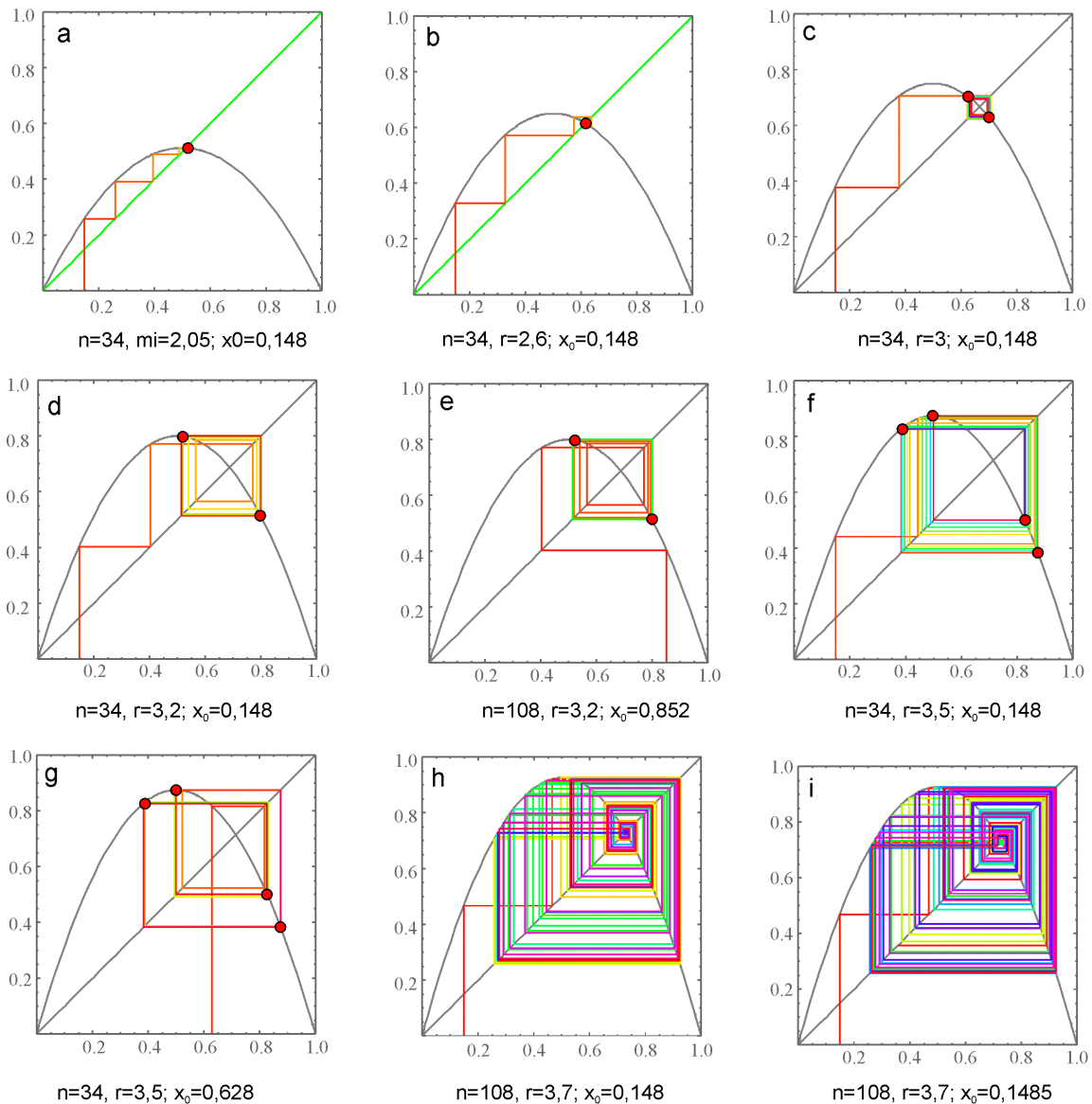
Pakiety matematyczne zwykle pozwalają na obliczanie z większą dokładnością niż wynika to z dokładności arytmetyki procesorów. Takie obliczenia zajmują jednak znacznie więcej czasu, gdyż nie korzystają z szybkich procesów wszytych w konstrukcje mikroprocesora, a z wolniejszych narzędzi programistycznych. Dla przykładu obliczę wyrazy $x_4 - x_7$ z tabeli (7.1.1) z odpowiednio zwiększoną dokładnością z użyciem programu Mathematica

x_4	-1.2411956787109375
x_5	-0.45943328714929521083831787109375
x_6	-1.78892105465919325208009812988585 45187613344751298427581787109375
x_7	1.2002385398029602910361694214655993282 299438558451995774944565277846747376 9130575839679010707872208740809583105 146884918212890625
Tabela 7.1.2. Dokładne wartości x_N , które w tabeli (7.1.1) miały podaną wartość przybliżoną	

Kolejne wartości x_N wymagałyby szybko rosnącej liczby cyfr, co dramatycznie zaczęłoby się odbijać na szybkości obliczeń. Widać z tego, że gdy układ jest w stanie chaotycznym obliczenia komputerowe stają się niewiarygodne.

Mając na uwadze fakt, że równanie logistyczne daje się sprowadzić do równania kwadratowego, proponuję jeszcze jedną ilustrację graficzną dla iterowanego równania logistycznego. Wykresem równania kwadratowego jest parabola. Przy założeniu, że spełnione są relacje (7.1.1) łatwo wykazać, że jest to parabola o punktach zerowych w $x=0$ i $x=1$. Przyjrzy się rysunkowi (7.1.3a), gdzie wykreślona jest taka parabola (dla równania $y(x)=x^2+c$) oraz prosta $y(x)=x$. Zobaczmy jak można na takim wykresie zilustrować proces iteracji równania logistycznego. Przykładowo zaczynamy iterację od wartości początkowej $x_0=0.148$. Wartość funkcji odnajdujemy na paraboli przedstawiającej wykres reprezentujący równanie logistyczne. Następnie

idziemy w kierunku prostej $y=x$, ale po linii równoległej do osi x i odnajdujemy punkt przecięcia z tą prostą. Trzymając w ten sposób obliczoną w pierwszym kroku wartość równania logistycznego odnajdujemy równą tej wartości wartość x , którą wykorzystujemy przy kolejnym kroku iteracji. W efekcie wykres (7.1.1a) przedstawia schodki o malejącym skoku, które dążą do jednego punktu – punktu przecięcia paraboli z linią $y=x$.

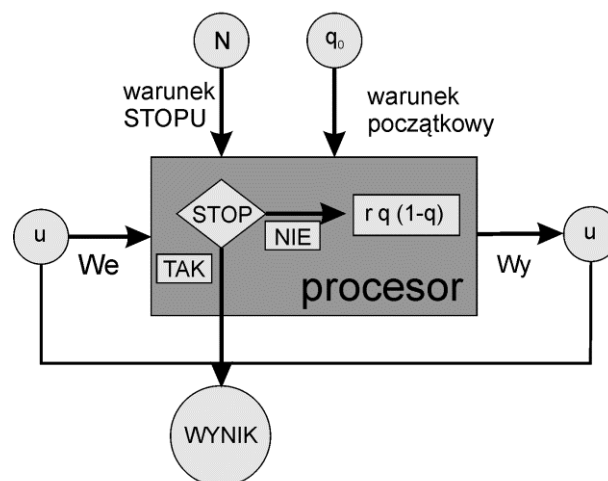


Rysunek 7.1.3. Ilustracja iteracji równania logistycznego (7.1.1) za pomocą paraboli będącej wykresem tego równania i prostej $y=x$. Wartość n oznacza liczbę przeprowadzonych iteracji, r jest wartością parametru równania (7.1.1), a x_0 wartością początkową. Czerwone kropki wskazują punkty, na których stabilizuje się proces iteracji równania logistycznego. Nie zostały one zaznaczone na rysunkach (h-i), gdyż jest tam ich bardzo wiele; układ znajduje się w stanie chaosu deterministycznego.

Zmiana wartości parametru r na $r=2.6$ wydłuża nieco drogę (przechodzimy za górkę) ale iteracja prowadzi w końcu do jednej liczby. Gdy parametr r osiąga wartość $r=3$ sytuacja się zmienia. Zamiast jednego stabilnego punktu mamy dwa, pomiędzy, którymi punkt oscyluje. Podobnie jest dla parametru o wartości $r=3.2$ (rys. 7.1.1d), co odpowiada rysunkowi (7.2). Zmiana wartości początkowej na $x_0=0.852$ nie zmienia charakteru zachowania się iterowanego równania (rys. 7.1.1e). Przy $r=3.5$ pojawiają się oscylacje między czterema punktami (rys. 7.1.1f), co odpowiada rysunkowi (7.3). Ponownie zmiana wartości parametru początkowego nie zmienia charakteru ruchu (rys. 7.1.1g). Przy wartości parametru $r=3.7$ pojawia się chaos (zobacz też rysunki 7.4-7.6). Punkt chaotycznie skacze między różnymi punktami paraboli. Nawet niewielka zmiana wartości początkowej x_0 zmienia istotnie obraz skoków po paraboli (rys. 7.1.1. h –i).

7.2. Rekurencje, iteracje i sprzężenia zwrotne

Procedurę obliczania populacji szczurów z równania logistycznego (7.1) można przedstawić graficznie tak jak na rysunku (7.2.1)



Rysunek 7.2.1. Zagadnienie obliczania populacji szczurów ze wzoru (7.1.1) należy do zagadnień rekurencyjnych.

W ciemno szarym prostokącie przedstawiony jest symbolicznie procesor. Procesor zaczyna działać od odczytania warunku początkowego q_0 , oraz warunku STOPU. Warunek STOPU określa moment, w którym układ przestaje działać. Wewnątrz procesora q_0 traktowane jest jako q : $q_0 \rightarrow q$. Procesor dokonuje na q pewnej operacji, w naszym przypadku jest to działanie $r q (1-q)$, ale może to być jakakolwiek inna operacja. Wyniki operacji jest oznaczony jako u . Wynik wysłany jest z wyjścia procesora Wy i przesłany na jego wejście We . Po wejściu do procesora sprawdzany jest warunek zakończenia pętli. W naszym przypadku procesor musi mieć licznik

przebiegów i w momencie gdy licznik osiąga wartość $N+1$ procesor wysyła wynik na zewnątrz i kończy działanie. Gdy warunek na zatrzymanie nie jest spełniony u zostaje potraktowane jako q : $u \rightarrow q$ i procesor ponownie wykonuje działanie, w naszym wypadku $rq(1-q)$. Tego typu zapętłone procedury są chlebem powszednim w matematyce, informatyce, technice i przyrodzie. Różne grupy specjalistów nadawały im różne nazwy, mamy więc rekurencję, iteracje, sprzężenie zwrotne. Te trzy nazwy oznaczają to samo- proces lub algorytm, który po połączniu warunku początkowego „żywi” się wynikami własnego działania.

Schemat z rysunku (7.2.1) przedstawia najprostszy układ do rekurencji. Sprawdzanie warunku na STOP jest dobrą praktyką przy pisaniu programów (unikamy nieskończonej pętli) nie jest to jednak niezbędne wyposażenie każdego układu do rekurencji. Wyobraź sobie urządzenie kontrolujące temperaturę, składa się ono z czujnika temperatury, procesora, oraz wentylatora. Czujnik temperatury wysyła wskazania temperatury na przykład cieczy chłodzącej w samochodzie. Procesor sprawdza czy wartość temperatury nie jest większa niż wartość zadana. Jeżeli nie na wyjściu pojawia się sygnał „nic nie rób”. Jeżeli temperatura jest za wysoka pojawia się sygnał włącz wentylator. Wentylator obniża temperaturę i po pewnym czasie procesor może ponownie wysłać sygnał „nic nie rób”. Układ działa w pętli, bardziej złożonej niż na rysunku (7.1.1) i nie chcemy by zatrzymał się po powiedzmy 300 odczytach temperatury. W takim wypadku warunek STOPU jest zbędny.

Co to wszystko ma wspólnego z prawami ruchu Newtona? Dużo, gdyż drugie prawo Newtona jest prawem rekurencyjnym. Zapiszmy je tak

$$\Delta \mathbf{p}_N = \mathbf{F}_N \Delta t \quad 7.2.1a$$

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{p}_{N-1} + \mathbf{F}_{N-1} \Delta t \quad 7.2.1b$$

Drugie prawo pozwala nam obliczać przyrost pędu od kroku do kroku (rys. 7.2.2). Znając pęd w punkcie startu możemy ze wzoru (7.2.1b) obliczyć wartość pędu w następnym kroku, a pęd w kolejnych punktach obliczamy powtarzając całą procedurę. Musimy przy tym zacząć od początkowej wartości (warunek początkowy) pędu $\mathbf{p}_0$ w jakimś punkcie x_0 . Jeżeli chcemy obliczyć położenie, to korzystamy z zależności

$$\mathbf{v}_N = \frac{\mathbf{p}_N}{m} = \frac{\mathbf{p}_{N-1}}{m} + \frac{\mathbf{F}_{N-1}}{m} \Delta t \quad 7.2.2a$$

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_{N-1} + \mathbf{v}_{N-1} \Delta t \quad 7.2.2b$$

Ponownie wartość położenia w kroku N obliczamy na podstawie wartości położenia w kroku $N-1$. Jeżeli podział przedziału czasowego, w którym

obliczamy pęd i położenie podzielić na nieskończenie wiele kawałków to wtedy $\Delta t \rightarrow dt$, a wzory (7.2.1) przechodzą w

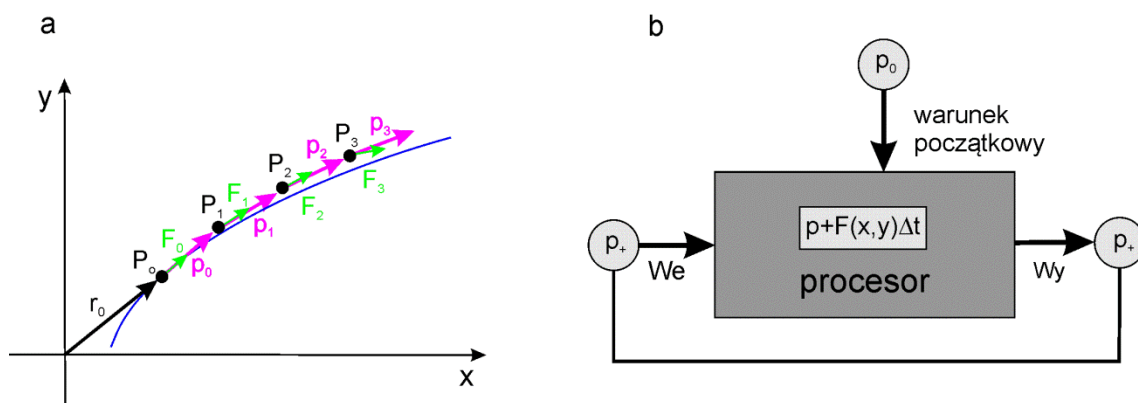
$$d\mathbf{p}_N = \mathbf{F}_N dt \quad 7.2.3a$$

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{p}_{N-1} + \mathbf{F}_{N-1} dt \quad 7.2.3b$$

A wzory (7.2.2) w

$$\mathbf{v}_N = \frac{\mathbf{p}_N}{m} = \frac{\mathbf{p}_{N-1}}{m} + \frac{\mathbf{F}_{N-1}}{m} dt \quad 7.2.4a$$

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_{N-1} + \mathbf{v}_{N-1} dt \quad 7.2.4b$$



Rysunek 7.2.2. a) Punkt materialny porusza się po trajektorii narysowanej niebieską linią. Znamy jego położenie P_0 , w pewnej początkowej chwili t_0 . W wybranym układzie współrzędnych położenie to jest wyznaczone przez wektor wodzący $\mathbf{r}_0$. W punkcie P_0 znamy również pęd $\mathbf{p}_0$ tego punktu oraz działającą siłę $\mathbf{F}_0$. Musimy wyznaczyć trajektorię punktu, przyjmując, że w każdym punkcie znamy działającą siłę. Korzystając ze wzorów (7.2.1) przyjmujemy, że w krótkim odcinku czasu Δt , działająca siła jest stała. Im krótsze jest Δt , tym lepsze jest związane z tym założeniem przybliżenie; ale zwiększa się liczba kroków do przeliczenia. Ze względu na przyjęte przybliżenie stałej siły w przeciągu czasu Δt , obliczony tor będzie się różnił od rzeczywistego (niebieska linia). Kiedy chcemy uniknąć tych rozbieżności musimy przejść do nieskończenie krótkich odcinków czasu $\Delta t \rightarrow dt$ i wzorów (7.2.3); b) cała opisana procedura jest procedurą rekurencyjną. Na wejściu mamy podany wektor pędu $\mathbf{p}$, lub na samym początku obliczeń wektor początkowy pędu $\mathbf{p}_0$. Wewnątrz procesora wartość wejściowa traktowana jest jak parametr wektorowy $\mathbf{p}$, na którym wykonana jest operacja $\mathbf{p} + \mathbf{F}(x,y)\Delta t$. Skąd się bierze wartość $\mathbf{F}(x,y)$? To zależy od konkretnego problemu. Może być podawana z zewnątrz, lub obliczana wewnątrz procesora. Wtedy procesor musi dodatkowo obliczać zmianę położenia punktu, ze wzorów (7.2.2), a następnie korzystać z jawnej postaci funkcji $\mathbf{F}(x,y)$. Dla wielu przypadków, na przykład ruchu w polu grawitacyjnym, taką jawną postać na siłę $\mathbf{F}(x,y)$ można napisać na podstawie praw fizyki.

Równanie ruchu ma charakter rekurencyjny i potrzebuje warunku początkowego. Oznacza to, że dla pewnych parametrów tego równania możemy się spodziewać pojawienia się chaosu deterministycznego; do tematu tego jeszcze powrócę.

Podsumuję: Nawet mając bardzo dobry deterministyczny model układu fizycznego i możliwość dobrego określenia wszystkich niezbędnych parametrów, może się okazać, że wartość predykcyjna modelu jest mała. Związane jest to z tym, że model, przy danym układzie parametrów będzie w stanie chaosu deterministycznego. W tym stanie, po niewielkim czasie nawet bardzo, bardzo mały błąd określenia warunków początkowych może skutkować w praktycznie dowolnie długim błędzie przewidywań. Co więcej, przy obliczeniach numerycznych błąd maszynowy może również prowadzić do szybko narastających błędów obliczeniowych.