

Temat I

O FIZYCE, POMIARACH, MATEMATYCE I JEDNOSTKACH

1. Fizyka ♦

*Wszystko należy upraszczać jak tylko można,
ale nie bardziej*

Albert Einstein

Czym jest fizyka? Jest to jedno z tych radośnie prostych pytań, na które nie sposób znaleźć satysfakcjonującej odpowiedzi. Dlatego postaram się nie tyle udzielić na nie odpowiedzi ile „opowiedzi”. Opowiem moją „opowiedź” koncentrując się na tym co robią fizycy. Z tego co robią fizycy każdy będzie mógł wywnioskować, na swoje potrzeby i możliwości, czym jest fizyka. Oczywiście będzie to moja „opowiedź”, ktoś inny, mógłby opowiedzieć nieco inną „opowiedź”, ale to już jego problem. Zatem co robią fizycy?

- ❖ fizycy robią eksperymenty i obserwacje
- ❖ fizycy szukają reguł
- ❖ fizycy budują modele
- ❖ fizycy uczą fizyki
- ❖ fizycy piszą książki popularnonaukowe
- ❖ fizycy pracują w wielu miejscach nie mających nic wspólnego z fizyką

Nie każdy fizyk robi to wszystko co zostało wyżej wypisane. W sumie żeby być fizykiem trzeba mieć pojęcie na poziomie przynajmniej fizyki nauczycielskiej o fizyce; poza tym można sprzedawać szczypiorek. A właśnie, to zadziwiające jak w wielu miejscach pracują ludzie z dyplomem fizyka. Chętnie widzą ich w bankach, energetyce, medycynie, policji, wojsku, w branży informatycznej, Chyba najtrudniej po fizyce zostać fizykiem. Mnie się udało, dlatego mam czas, siłę i ochotę na snucie mojej „opowiedzi” na temat fizyki.

Zacznę od punktu pierwszego. Fizycy robią eksperymenty i obserwacje. Czasem takich fizyków nazywamy doświadczalnikami. Ale po co w zasadzie robią te eksperymenty? Jedną z odpowiedzi jest: bo im za to płacą! Ale odpowiedź ta, choć słuszna, nie wyczerpuje tematu. Popatrzmy na taki przykład.

Każda wielka międzynarodowa korporacja ma swoich szpiegów i kontrszpiegów. Tajne wiadomości przesyłane są za pomocą szyfrów. Powiedzmy, że wywiadowcy koncernu A przechwycili depezę koncernu B, której początek wyglądał mniej więcej tak

10011AA044566;)=(7889CCCC45KKKddEEE%===))((“\>< ...

Wiadomo nadto, że depeza dotyczy szczegółów promocji nowego produktu, który korporacja B, ku własnym zyskom oraz utraeniu korporacji A ma zamiar wprowadzić na rynek. Prezes korporacji A spotkał się ze swoimi kontrwywiadowcami i rzekł: chłopcy i wy dziewczuszki, jak mi to odczytacie to was ozłocę. Cóż w tym momencie uczynił prezes? Otóż prezes wyraził nadzieję,

że przechwycona depesza zawiera dwie informacje. Pierwsza z nich dotyczy szczegółów promocji, a druga dotyczy klucza do odcyfrowania interesującej dla prezesa treści depeszy. Prezes ma nadzieję, że jak jego chłopcy i dziewczuszki popatrzą na depeszę wystarczająco długo i uporczywie dojrzą ów klucz i odczytają interesującą go treść. Ten klucz to zbiór reguł, których zastosowanie pozwala na przetransformowanie, pozornie nic nie znaczącego ciągu znaków na mający znaczenie tekst. Podobne rzeczy czynią fizycy. Swoimi działaniami wyrażają nadzieję, że można znaleźć zbiór reguł, który pozwala na opisanie przyrody, w istotnym dla nas zakresie. Aby jednak ten zbiór reguł znaleźć potrzebni są ludzie, którzy przechwycą depeszę i znajdą ów tajemniczy klucz. Ludźmi przechwytyjącymi depeszę są fizycy doświadczalnicy, którzy działają w ramach fizyki doświadczalnej. Ci, którzy szukają klucza, to fizycy teoretycy (stąd mamy również fizykę teoretyczną). Fizycy doświadczalnicy uważnie obserwują zjawiska i dokładnie, często w kontrolowanych warunkach, mierzą różne wielkości. Zebrany przez nich materiał jest punktem wyjścia dla pracy fizyków teoretyków. Fizycy teoretycy mają za zadanie tak długo i uporczywie wpatrywać się w depeszę przechwyconą przez doświadczalników aż zobaczą przynajmniej zarys szukanych reguł.

Mikołaj Kopernik formułując heliocentryczny obraz Kosmosu, przyjął że Ziemia porusza się wokół Słońca po kołowej orbicie. Niestety żadna kołowa orbita Ziemi nie jest wystarczająco, zgodna z obserwacjami. Aby sprawę naprawić, stosując uznaną w owych czasach metodologię, Kopernik złożył orbitę Ziemi z dwóch okręgów o różnych średnicach i położeniach. Dziś powiemy, że orbita Ziemi jest eliptyczna. Ale w czasach Kopernika, w dostrzeżeniu eliptycznego kształtu orbity przeszkadzały obowiązujące kanony nauki o niebie. Co równie ważne, dokładność dostępnych pomiarów astronomicznych była za mała aby móc owe elipsy wystarczająco jasno dostrzec. Z drugiej strony była wystarczająco duża, aby stwierdzić, że jedno koło to za mało, aby oddać obserwowany ruch planety. Kilkadziesiąt lat później Tycho Brahe przez lat ponad dwadzieścia obserwował planety ze znacznie większą dokładnością, niż czynili to jego poprzednicy. Z Brahe (świetnym doświadczalnikiem) współpracował Kepler, który próbował dostrzec reguły, w zebranych przez Brahe obserwacjach. Po jakichś dziesięciu latach uporczywego wpatrywania się w wyniki uzyskane przez Tychona i jego zespół Kepler dostrzegł w ruchu Marsa elipsę. I to był przełom. Kepler jest przykładem teoretyka. Teoretyk bierze fakty doświadczalne i myśli, myśli, myśli, aż wymyśli jakąś nową regułę, lub nie wymyśli nic, co zdarza częściej. A jak już wymyśli nową regułę (czyli prawo lub zasadę fizyczną) to ogłasza to wszem i wobec i oczekuje że doświadczalnicy zweryfikują jego wymysł. Słowem piłeczka wraca do doświadczalników. Owa weryfikacja to ciężka praca. Onegdaj Galileusz postulował, że pod wpływem li tylko przyciągana przez Ziemię, wszystkie ciała spadają z takim samym przyspieszeniem. A to, że obserwujemy, że ciała lekkie spadają wolniej niż ciężkie spowodowane jest

obecnością dodatkowych sił - sił oporu powietrza. Przed Galileuszem było kilku takich co głosili podobne rewelacje, ale mało kto się wówczas tym przejmował. Na co dzień wszyscy widzimy, że przedmioty lekkie spadają wolniej niż ciężkie i póki nam to spostrzeżenie wystarczy do życia póty przeciętny zjadacz chleba nie będzie się wywodami jakiegoś Galileusza przejmował. Wśród ludzi nauki rozgorzeje oczywiście spór, a najlepszym jego rozstrzygnięciem byłby test eksperymentalny. Tylko jak sprawdzić taki dziwny postulat teoretyka? Cóż, trzeba albo pozbyć się oporów powietrza, co wymaga efektywnej pompy próżniowej (tej w czasach Galileusza nie było) albo sprytnie obejść kłopoty związane z obecnością oporów powietrza. Można na przykład przeprowadzić serię eksperymentów ze staczającymi się walcami, lub kulami z równi pochyłej, czego zresztą próbował Galileusz, albo odwołać się do ruchu wahadła, do czego jeszcze wrócę. Jak widać z tego przykładu, ze względu na obecność różnych zakłócających czynników, pomijanych przez teoretyków, dokładne sprawdzenie reguł odkrywanych przez nich w fizyce jest trudnym zadaniem. Dziś możemy sprawdzić postulat Galileusza mierząc metodami elektronicznymi spadek ciał w kolumnach, w których jest próżnia. Taki eksperyment jest obecnie w zasięgu każdej przyzwoitej studenckiej pracowni fizyki. Ale w czasach Galileusza nawet uczony mający do wydania górę złota nie byłby w stanie go przeprowadzić i musiał zastąpić kolumnę próżniową i elektronikę sprytem. I tak dzięki różnym sprytnym, a czasem wręcz genialnym pomysłom, doświadczalnicy jakoś sobie radzą, nawet z bardzo niewdzięcznymi wymysłami teoretyków; i chwała im za to.

Reguły współczesnej fizyki mają ciekawą własności. Są bardzo, bardzo ascetyczne, nieliczne i strasznie matematyczne - no trudno. Cała istota dynamiki Newtona zawiera się w równaniu różniczkowym

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad 1.1$$

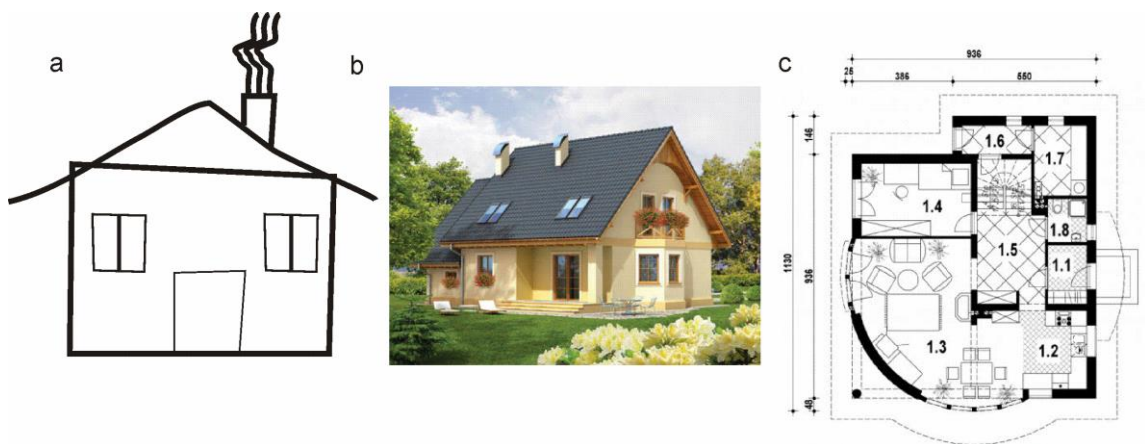
W tym wzorze $\mathbf{F}$ jest wektorem siły działającej na ciało punktowe, $\mathbf{p}$ wektorem pędu tego ciała, a t to czas. Do wzoru (1.1) dochodzi jeszcze postulat o istnieniu układów inercjalnych (pierwsze prawo Newtona), w których ten wzór obowiązuje. To zadziwiająco niewiele jak na duży (przynajmniej z naszej ludzkiej perspektywy duży) kawałek świata jaki można stosując to prawo skutecznie opisać. Niestety jego użycie bywa okupione ciężkim, lub bardzo ciężkim, lub nawet deprymująco strasznie ciężkim wysiłkiem obliczeniowym. Całe szczęście, że mamy komputery!

Kiedy już poznamy reguły fizyki możemy przystąpić do budowy modeli. Tu wkraczamy na teren fizyki stosowanej. Powiedzmy, że chcemy wiedzieć gdzie będzie Księżyc za lat siedem. Co musimy zrobić? Musimy wziąć drugie prawo Newtona i zapisać w układzie równań, z których każde jest typu (1.1), siłę oddziaływania grawitacyjnego pomiędzy Księżycem a: Ziemią, Słońcem, Marsem, Jowiszem, itd. Siły grawitacyjne możemy wyznaczyć z osobnej reguły,

czyli z prawa powszechnego ciążenia. Piszemy więc odpowiedni układ równań i dochodzimy do wniosku, że za nic w świecie go nie rozwiążemy. Ale gdybyśmy go rozwiązali, to wtedy obliczylibyśmy położenie Księżyca choćby na sto lat do przodu. Na marginesie dodam, że do Księżyca próbował się dostać Newton ale poległ na problemie, gdyż zmogły go trudności obliczeniowe. Dziś radzimy sobie z tymi trudnościami głównie dzięki komputerom. Z punktu widzenia fizyka komputer to automat do szybkiego wykonywania niewiarygodnie wielu niewiarygodnie żmudnych obliczeń. Widać z tego, że samo stworzenie modelu nie zamyka sprawy. Nie każdy model będzie użyteczny.

Jakie cechy powinien mieć idealny model? Tylko proszę, nie mów, że idealny model, to model jak najdokładniejszy, bo nie ma głępszej odpowiedzi na to pytanie. Gdyby to była prawda, to najlepszym modelem, na przykład domu byłby tenże dom. To mało satysfakcjonująca perspektywa. Na rysunku poniżej przedstawiam trzy modele domu. Który z nich jest najlepszy? Inteligentna odpowiedź brzmi „nie wiem”. A dlaczego? Wyobraź sobie, że jesteś w Chinach gdzie spotykasz urodziwą Chinkę. Przepraszam panie za ten wybitnie męsko centryczny przykład. Ty po chińsku ni w ząb, ona po polsku też nie, a bardzo chciałbyś jej powiedzieć, że chcesz jej pokazać śliczny dom, który w Chinach podnajmujesz. Jak to możesz uczynić? Rysunek – tak, to jest genialna myśl! Rysujesz więc piękny model domu jak na rysunku (1.1c). Rysujesz pierwszą godzinę, drugą, trzecią..., obawiam się, że nawet znane ze swej cierpliwości Chinki tego by nie wytrzymały. W twojej sytuacji najlepszy jest model pokazany na rysunku (1.1a). Tak, mój drogi (i moja droga też), aby odpowiedzieć na pytanie, który model jest najlepszy, trzeba jeszcze wiedzieć do czego on służy. Pokazanie majstrowi, który buduje mury twojego domu rysunku (1.1a) zamiast (1.1c), to bardzo kiepski pomysł. Ale w przypadku komunikacji z Chinką wybór jest to genialny.

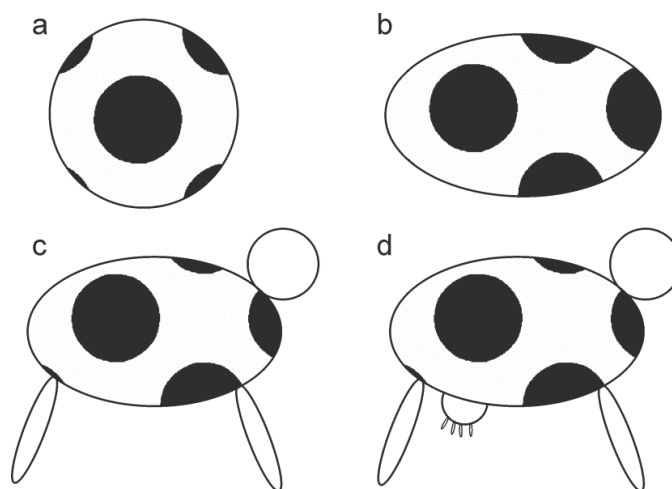
A teraz złota myśl odnośnie modelu. Model powinien być możliwie najprostszy, ale ciągle spełniający postawione przed nim zadania. Tak też jest z modelami w fizyce.



Rysunek 1.1. Trzy różne modele domu

Wróćmy do Księżyca. Chcemy obliczyć jego orbitę. Mamy odpowiednie reguły: prawo dynamiki Newtona (1.1) i prawo powszechnego ciążenia. Mamy też niezbędne dane: bieżące położenia i prędkości Księżyca, Słońca i planet oraz ich masy. Bierzemy się do roboty. Jak reprezentować Ziemię? W idealnie dokładnym modelu (czyli w najgorszym z możliwych) trzeba wziąć pod uwagę, że mój ruch w sali wykładowej zmienia siłę z jaką Ziemia przyciąga Księżyc; zmiana jest zupełnie śmiesznie mała; albo nawet jeszcze mniejsza, ale jest. Fizyk, który się tym przejmie powinien zmienić zawód. W najprostszym modelu Ziemia może być traktowana jako kula, tak samo jak Słońce i Księżyc. Mały wpływ Marsa i innych planet może być pominięty. Dopiero, jeżeli to nie wystarczy, bo wyznaczony ruch Księżyca okaże się za mało dokładny, możemy, nieco skomplikować model. Zatem w pierwszym podejściu traktujemy ciała niebieskie jako idealne kule i piszemy odpowiedni układ równań, a potem i tak pozostaje rozpacz związana z rozwiązaniem tego układu równań.

W podsumowaniu tych dywagacji na temat modelu przytoczę jedną opowiastkę. W pewnym kraju prezes związku hodowców krów zlecił wybitnemu uczonemu opracowanie takich metod ich hodowli, które zwiększyłyby ich mleczność nie zwiększając kosztów. Po trzech latach pracy, ów uczony przedstawił swoje zalecenia. Rezultaty były oszałamiające. Mleczność krów postanowił przeczytać trzystustronicową dysertację jaką na ten temat napisał ów uczony. Otworzył dysertację na pierwszej stronie i przeczytał: „Rozważmy kulistą krowę...”. Tak, ów uczony był rzeczywiście wybitny. Zaczął od najprostszego modelu krowy, zbudowanego jednak w oparciu o znane reguły. Kula jest tu symbolem prostoty, można więc powiedzieć, że uczony zaczął od najbardziej krowiastej kuli. Potem stwierdził, z bólem serca oczywiście, że tak prosty model nie daje żadnej informacji o mleczności krów. Otarł więc czoło z potu, westchnął ciężko i zbudował bardziej skomplikowany model, powiedzmy oparty o najbardziej krowiastą elipsoidę. A gdy to nie wystarczyło – o zgrozo - otarł czoło z potu, westchnął ciężko i zbudował model trzeci, a potem otarł czoło z potu, westchnął bardzo ciężko i zbudował model czwarty (rys.1.2), a potem ... STOP!! Nie ma żadnego POTEM! Model numer cztery dał wiele interesujących odpowiedzi na pytanie o związek mleczności krów z metodami ich hodowli. Nasz uczony odetchnął z ulgą. Bał się, że model numer pięć będzie już zbyt skomplikowany do dalszej analizy i potknął się jak Newton na problemie Księżyca. Na szczęście skończyło się na modelu numer cztery. Uczony nasz wziął więc sowitą zapłatę i teraz odpoczywa na Karaibach. A głupcy uparcie trawia lata na nic nie warte budowanie modeli możliwie najdokładniejszych, zamiast możliwie najprostszych ze skutecznych.



Rysunek 1.2. a) Pierwszy model – najbardziej krowiastej kuli; b) drugi model najbardziej krowiastej elipsoidy; c) trzeci model; d) czwarty model – BINGO!!!.

W czasach, w których najbardziej liczy się zysk, choćby domniemany, modele są podstawą istnienia fizyki. Dzięki nim możemy rozwiązywać praktyczne problemy. Uzyskane rozwiązania mogą stać się podstawą zastosowań w przemyśle, medycynie, wojsku. Modele są oczywiście matematyczne, co większości z Was z pewnością zmartwi. Ale tak jest i dlatego każdy kto mówi, że fizyki można się nauczyć bez matematyki nie wie co mówi (albo agituje maturzystów do podjęcia studiów na fizyce). Tworzenie dobrego modelu, czyli takiego, który jest wystarczająco dokładny dla analizy danego problemu, ale ani trochę więcej skomplikowany niż potrzeba jest wielką sztuką. W czasie tego wykładu będziemy spotykali się z wieloma przykładami modeli układów fizycznych. Kiedy powiem, że zastosowana tu została „droga krowy”, to będziesz wiedział o co chodzi. Początek jest zawsze taki sam: rozważmy kulistą krowę.

Definicja 1.1: Droga krowy

Droga krowy polega na systematycznym komplikowaniu modelu układu fizycznego do momentu, gdy nie osiągniemy wglądu w interesujące nas zjawiska lub nie skończą się nasze możliwości obliczeniowe.

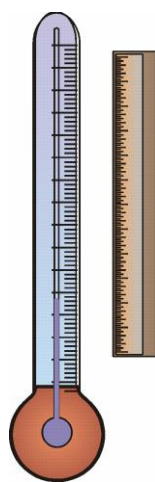
Współczesna fizyka ma coś w sobie z zagadnienia kompresji obrazu. Obrazki zajmują sporo miejsca w pamięci naszych elektronicznych zabawek. A jeżeli obrazków jest tak dużo jak na przykład w stu minutowym filmie HD sprawa robi się poważna. Stosujemy więc metody kompresji obrazu. Kompresja pozwala zmniejszyć rozmiar obrazka, ale z drugiej strony zwiększa wymagania na moc obliczeniową komputera. Im bardziej skompresowany obrazek, tym mocniejsza musi być maszyna aby go zdekompresować, w zadanym czasie. Prawa fizyki to taka bardzo, bardzo wydajna kompresja. Wiele ze zjawisk mechanicznych da się odtworzyć za pomocą ascetycznej reguły (1.1). Ale im bardziej złożony układ tym większa jest potrzebna moc obliczeniowa by

z modelu wyciągnąć praktyczne wnioski. Zapotrzebowanie na moc rośnie tak szybko, że nawet dziś rezygnujemy w pewnych wypadkach z obliczeń na rzecz eksperymentu. Przykładem może być zagadnienie modelowania lotu dużego samolotu pasażerskiego. Obliczanie lotu takiego samolotu wymaga mocy obliczeniowej, która jest określana mianem „kwestia jutra” (mając nadzieję, że jutro komputery znów będą szybsze). Niemniej szybkie komputery spowodowały, że dziś obliczamy znacznie więcej problemów niż miało to miejsce dwadzieścia lat temu. Dzięki temu udało nam się rozwiązać problemy, których rozwiązanie innymi metodami byłoby nieopłacalne. Pamiętaj jednak, że nie ma takiej mocy komputera, która byłaby wystarczająca dla fizyka. Każdy porządny fizyk, znajdzie intrygujące zagadnienie, którego rozwiązanie zatka kolejną generację maszyn obliczeniowych.

Mam nadzieję, że po tych krótkich dywagacjach wyrobisz sobie pojęcie o tym, czym jest fizyka.

2. Pomiar ♦

Może zabrzmieć to zaskakująco, ale to pomiar czyni fizykę nauką o wyraźnie teoretycznym charakterze. Praktycznie każdy przyrząd pomiarowy bazuje na jakiejś teorii. Posłużę się prostym przykładem pomiaru temperatury. Przełomem w pomiarze temperatury była budowa termometru cieczowego, szczególnie termometru rtęciowego. Odczytując na skali termometru rtęciowego temperaturę, odczytujemy zmiany długości słupa rtęci. Tak - termometrem mierzymy długość słupa rtęci a nie temperaturę słupa rtęci (rys. 2.1).



Rysunek 2.1. Termometr działa jak wyspecjalizowana linijka służąca do pomiaru wysokości słupa rtęci i wyskalowana w stopniach Celsjusza.

Tyle szczęścia, że jakaś dobra dusza zamiast oznakować skalę termometru w centymetrach zrobiła to w stopniach Celsjusza. Jednak samo oznakowanie linijki w stopniach Celsjusza nie zmienia faktu, że jest to linijka do pomiaru długości słupa rtęci.

Skąd ta dobra dusza wiedziała, która kreska na linijce odpowiada której temperaturze? Otóż owa dobra dusza posłużyła się teorią. Termometr rtęciowy zaopatrujemy w skalę Celsjusza w następujący sposób. Wkładamy go do zamarzającej wody, pod normalnym ciśnieniem i czekamy aż słupek rtęci ustabilizuje się i zaznaczamy kreskę zero stopni Celsjusza. Następnie wkładamy tenże termometr do wrzącej wody, pod normalnym ciśnieniem, i zaznaczamy kreskę oznaczającą sto stopni Celsjusza. Następnie odcinek pomiędzy tymi kreskami dzielimy na dziewięćdziesiąt dziewięć równych przedziałów (operujemy na długości a nie temperaturze) i uznajemy, że każdy taki odcinek oznacza zmianę temperatury o jeden stopień Celsjusza. Ba, możemy nawet dorysować odcinki o takiej samej długości poniżej odcinka wskazującego zero stopni Celsjusza (wtedy termometr mierzy temperatury ujemne) i powyżej odcinka wskazującego sto stopni Celsjusza. Założenie, że każda kreska oznacza

zmianę o jeden stopień stanowi teorię, na której się tu opieramy. Prosta to teoria ale jakby nie patrzeć teoria.

Pozostaje jednak pytanie: Skąd wiadomo, że zmiana długości słupa rtęci o jeden odcinek oznacza przyrost temperatury o jeden stopień Celsjusza? Inaczej rzecz biorąc, skąd wiadomo, że przyjęta teoria jest prawdziwa? Może być przecież tak, że w niskich temperaturach rtęć rozszerza się szybciej niż w wyższych. I tak, jeżeli zwiększymy temperaturę porcji wody mającej temperaturę 20°C o jeden „prawdziwy” stopień to wysokość słupa rtęci może się zmienić na przykład o 1.07 kreski. Gdy wystartujemy od 80°C , to wzrost o jeden „prawdziwy” stopień może oznaczać przyrost wysokości słupa o 0.94 kreski. Przy ogrzaniu wody o dziesięć „prawdziwych” stopni błąd wskazania termometru może wynosić już 0.6°C . Niby nic, ale przy dokładnych pomiarach to spory błąd.

Że trzeba uważać, niech świadczy następujący fakt. Załóżmy, że rtęć zamieniamy na glicerynę. Nowy, glicerynowy termometr skalujemy tak jak rtęciowy – zero stopni dla zamarzającej wody, a sto dla wrzącej wody. Możemy być przynajmniej pewni, że dla zamarzającej i wrzącej wody wskazania obu termometrów są takie same (przy tym samym ciśnieniu atmosferycznym). Jeżeli jednak wstawimy termometr rtęciowy do wody, w której pokaże on temperaturę 50°C , to w tej samej wodzie termometr glicerynowy pokaże temperaturę 47.6°C . Która temperatura jest prawdziwa?

Możemy oczywiście przyjąć, że termometr rtęciowy lub glicerynowy jest wzorcowy, to znaczy że jego wskazania wyznaczają to co rozumiemy przez temperaturę. Jednak jest to podejście kapitulackie. Dowodzi, że tak naprawdę płytko rozumiemy wielkość fizyczną o nazwie „temperatura”. Dojrzałe podejście do zagadnienia wymaga poszukiwania możliwie precyzyjnej teorii. Następnym krokiem w rozwoju termometrii powinna być teoria, która pozwala zbudować termometr wskazujący na odchylenia od założenia liniowej rozszerzalności temperaturowej rtęci. Tak długo jak taki termometr nie powstanie, tak długo w pomiarach temperatury nie pojawi się nowa jakość.

Bardzo lubimy, gdy coś wykazuje liniową zależność, to bardzo ułatwia życie; ot choćby skalowanie przyrządów pomiarowych. Niestety liniowa zależność rozszerzalności cieplnej od temperatury, jest zawsze przybliżeniem, sensownym tylko dla pewnego zakresu temperatur. Im bardziej precyzyjne muszą być pomiary temperatury, tym węższy zakres temperatur, w którym możemy zakładać liniową zależność rozszerzalności cieplnej. Co więcej, od pewnego zakresu temperatur powinniśmy się spodziewać dramatycznego załamania liniowego charakteru rozszerzalności cieplnej rtęci (jak i każdej innej substancji). Na przykład dzieje się tak blisko temperatury zamarzania rtęci. Zamarznięta rtęć ma wyraźnie inny współczynnik rozszerzalności cieplnej. Podobnie sprawy się mają powyżej temperatury parowania rtęci. Niestety rozszerzalność cieplna nie jest wielkością wyjątkową. Praktycznie wszystkie

wielkości fizyczne, które zdają się być liniową funkcją jakiegoś parametru, są nią tylko w przybliżeniu, które jest sensowne w pewnym ograniczonym zakresie zmienności tegoż parametru. Do liniowości powrócę jeszcze w punkcie 4 tego tematu.

W XIX wieku fizycy mieli dobre przesłanki do przyjęcia założenia, że rtęć jest bardzo dobrą cieczą do budowy termometrów, lepszą od gliceryny czy alkoholu. Przesłanki te wskazywały, że w zakresie temperatur jakie spotykamy podczas mrozów do powiedzmy około 200°C, wszystko jest w miarę w porządku, to znaczy słupek rtęci rośnie prawie proporcjonalnie do wzrostu temperatury. Zdawano sobie sprawę, że nie jest to całkowicie prawdą. Dla wielu codziennych pomiarów drobne nieścisłości w pomiarze temperatury nie miały znaczenia, jednak w nauce i technice brak dokładności przeszkadzał. W końcu znaleziono lepszą teorię dla skalowania termometrów. Teorią tą była teoria gazu doskonałego. Równanie stanu gazu doskonałego ma postać

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad 2.1$$

W tym równaniu p oznacza ciśnienie gazu, V jego objętość, n ilość moli gazu, R jest stałą gazową, a T temperaturą wyrażoną w skali absolutnej. Równanie to pozwoliło powiązać wzrost ciśnienia (przy stałej objętości) lub objętości (przy stałym ciśnieniu) gazu, ze wzrostem jego temperatury. Pozostaje pytanie czy w przyrodzie są gazy, które można uznać za doskonałe? Okazuje się, że w temperaturze pokojowej i pod normalnym ciśnieniem powietrze, jak i poszczególne jego składniki możemy traktować jako gazy prawie doskonałe. Zatem mając teorię gazu doskonałego i gaz prawie doskonały możemy prawie idealnie wyskalować termometry. Do tego celu budujemy termometry gazowe, które są uciążliwe w użyciu, ale używa się ich do skalowania innych, wygodnych w użyciu termometrów; na przykład termometrów rtęciowych. Przy porównaniu z termometrem gazowym widać, że rozszerzalność cieplna rtęci jest prawie liniowa, w podanym wyżej zakresie temperatur. Problem pomiaru temperatury był tylko przykładem ilustrującym ważny fakt:

Fakt: 2.1: teoria i przyrządy pomiarowe

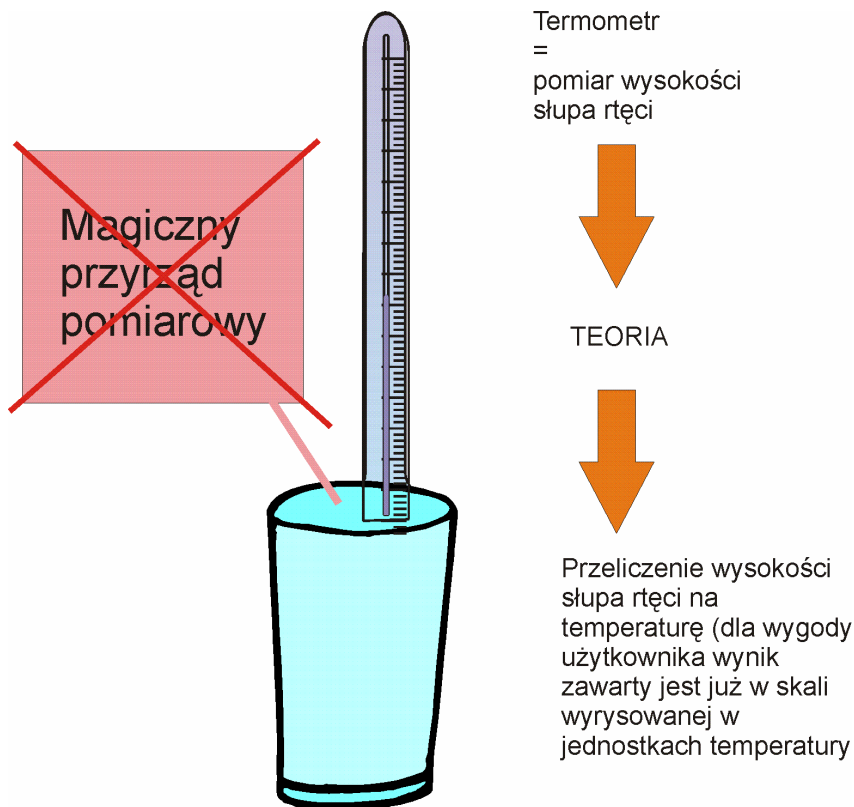
Do budowy przyrządów pomiarowych potrzebujemy teorii, tak jak to podsumowuje rysunek (2.2).

Na końcu każdego pomiaru stoi człowiek, który postrzega system pomiarowy przy użyciu swoich zmysłów. Warto wyodrębnić szczególny rodzaj pomiaru jakim jest pomiar przez czysto zmysłową obserwację – nazwę ten pomiar „pomiar naturalnym”.

Definicja 2.1: Pomiar naturalny

Pomiar nazywany naturalnym, gdy mierzone wielkości są przez nas bezpośrednio postrzegane.

Przykładem takich wielkości są: długość, ciężar (o ile nie jest za duży), natężenie dźwięku, barwa dźwięku, barwa oglądanego przedmiotu.

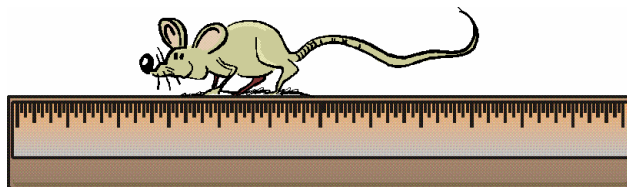


Rysunek 2.2. Nie mamy magicznego przyrządu do pomiaru temperatury np. wody w szklance, który podawałby nam bezpośrednio wynik w jednostkach temperatury. Musimy posługiwać się termometrem, który mierzy długość słupa rtęci, a potem odwołując się do teorii przeliczać jednostki długości na jednostki temperatury. W przypadku rtęci teoria składa się w sumie z założenia, że przyrost wysokości słupa rtęci jest proporcjonalny do zmiany temperatury. Dziś termometry cieczowe skaluje się względem innych bardziej precyzyjnych termometrów opartych o bardziej wyrafinowane teorie.

Do najważniejszych pomiarów naturalnych, z punktu widzenia fizyki, należą pomiary względnego położenia przedmiotów w przestrzeni, pomiar polegający na określeniu kolejności zdarzeń oraz pomiar, którego wynikiem jest określenie orientacji przebiegu linii w przestrzeni. Umiejętność określenia względnego położenia przedmiotów w przestrzeni wraz ze zdolnością określenia kierunku linii w przestrzeni pozwala nam na przykład mierzyć długości odcinków przy użyciu linijki.

Robimy to mniej więcej tak: Wybieramy istotne dla pomiaru punkty na przedmiocie. Punkty te definiują nam odcinek. Przykładamy linijkę tak aby

miała ten sam kierunek co odcinek wyznaczony przez wybrane punkty. Określamy punkty na linijce, które mają to samo położenie (w kierunku orientacji linijki) co wybrany punkt na przedmiocie. Na skali linijki odczytujemy naniesione wartości, które wyznaczają mierzoną długość linijki. Na tym ostatnim etapie korzystamy ze złożonych wrażeń wzrokowych, jakie towarzyszą czytaniu cyfr na skali linijki (rys.2.3).



Rysunek 2.3. Pomiar długości należy do najprostszych pomiarów naturalnych. Bazuje na naszych podstawowych zdolnościach orientowania przedmiotów w przestrzeni i określaniu ich względnego położenia. Na pomiarze długości odcinków opartych jest wiele pośrednich metod pomiarowych; na przykład pomiar temperatury za pomocą termometru rtęciowego.

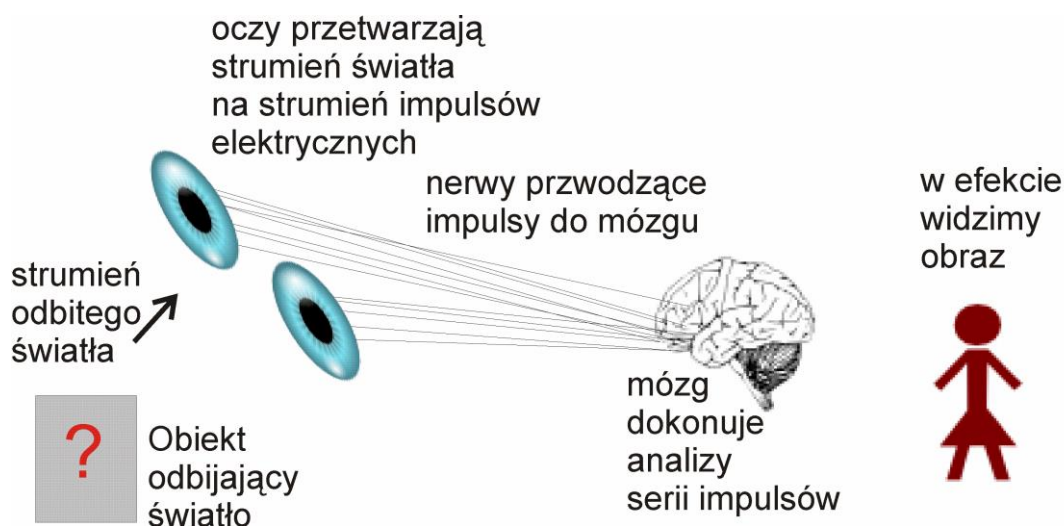
Czy pomiar długości przy pomocy linijki jest pomiarem naturalnym. Wszak wykorzystujemy przyrząd w postaci linijki. Ale ten przyrząd jest wyskalowany mierzy długość odcinka, to jest wielkość, którą jesteśmy w stanie zobaczyć. Może nie potrafimy patrząc na kawałek kija powiedzieć, że ma on 32cm długości, ale patrząc na dwa kawałki kija obok siebie potrafimy powiedzieć, który jest dłuższy, a który krótszy. Dlatego pomiar długości przy użyciu linijki będę uważał za naturalny. W przypadku termometru, chociaż mierzymy długość, to na skali mamy temperaturę, gdzieś musi zatem pośredniczyć teoria pozwalająca na wyskalowanie linijki w jednostkach temperatury. Temperaturę co prawda odczuwamy. Potrafimy wyczuć, które ciało jest cieplejsze a które zimniejsze, ale używając termometru nie korzystamy z tych naszych możliwości, tylko ze wzroku.

Pomiar polegający na określeniu kolejności zdarzeń wykorzystujemy głównie do pomiaru czasu. Patrząc na skalę zegara (odczyt 1) określamy położenie wskazówek względem znaków na skali (tu wykorzystujemy te same możliwości co przy pomiarze długości). Przy ponownym spojrzeniu na zegar widzimy, że wskazówki zajmują inne położenie (odczyt 2). W naturalny sposób wiemy, który odczyt był pierwszy, a który drugi. Możemy więc porównując wartość tych odczytów określić czas jaki między nimi upłynął. Rzadziej wykorzystywane do pomiarów fizycznych naturalne pomiary obejmują wrażenia związane z odbiorem dźwięku, dotykiem, smakiem i zapachem. Rola przysłowiowego szóstego zmysłu jest ciągle zażarcie dyskutowana.

Wydawać by się mogło, że naturalne pomiary są proste. Bo cóż może być prostszego od pomiaru długości przy pomocy linijki? Mój droga / mój drogi nic bardziej mylnego. Wszystko co związane jest z działaniem mózgu jest wysoce złożone i w dużej mierze niepojęte. W końcu napisanie zdania na komputerze

jest dziś równie proste jak pomiar długości przy pomocy linijki. Ale tak to wygląda z punktu widzenia użytkownika. Czy wiesz ile różnych zmian napięć i prądów musi zajść w gigantycznym gąszczu układów komputerowych, żeby monitor wyświetlił owo zdanie? A komputer to ciągle prosta maszyna, gdy go porównać z mózgiem.

Przyjrzyjmy się nieco procesowi widzenia. Do widzenia potrzebujemy oczu połączeń nerwowych i wyspecjalizowanych struktur w mózgu (rys. 2.4). Chciałoby się powiedzieć wystarczy kamera, kable i odpowiednio oprogramowany PC. Ale gdyby to było takie proste już dziś, za kilkaset złotych, można byłoby kupić widzący i samodzielnie odkurzający odkurzacz. Zamiast tego w sklepach dostępne są albo zwykłe odkurzacze albo namiastki takich samodzielnych odkurzaczy, których ceny należą do odstrasających (około 4000 złotych). Te automaty nie posługują się wzorkiem a dotykiem i echolokacją. Obmacują odkurzone pomieszczenia tworząc ich mapę, a za pomocą echolokatora identyfikują przeszkody do ominięcia. Nie licz jednak na to, że odróżnią kruszynkę chleba od koralika. I koralik i kruszynka zostaną wchłonięte przez maszynę.



Rysunek 2.4. Światło odbite od obiektu trafia do oczu, gdzie na siatkówce ulega przekształceniu na sygnał elektryczny. Z każdego oka po około milionie nerwów sygnały elektryczne transmitowane są do wyspecjalizowanych obszarów mózgu, gdzie ulegają analizie i interpretacji. Jedno włókno nerwowe przenosi sygnał z wielu światłoczułych komórek siatkówki, co oznacza, że sygnał wędrujący po włóknach nerwowych jest już częściowo przetworzony przez siatkówkę. Na końcu całego procesu mamy wrażenie wzrokowe przedmiotu. Pozostaje oczywiście nierozstrzygnięte pytanie jak wrażenie wzrokowe przedmiotu ma się do samego przedmiotu?

Jak nauczyć robota widzieć? To co robot dostaje z kamery wygląda mniej więcej tak jak jest przedstawione na rysunku (2.5). Sztuką jest zobaczenie w tym gąszczu cyfr obrazu (rys. 2.6). Pomysł, aby porównywać uzyskaną macierz liczb (tabelę liczb) z kamery z macierzami wzorcowymi zapisanymi w pamięci

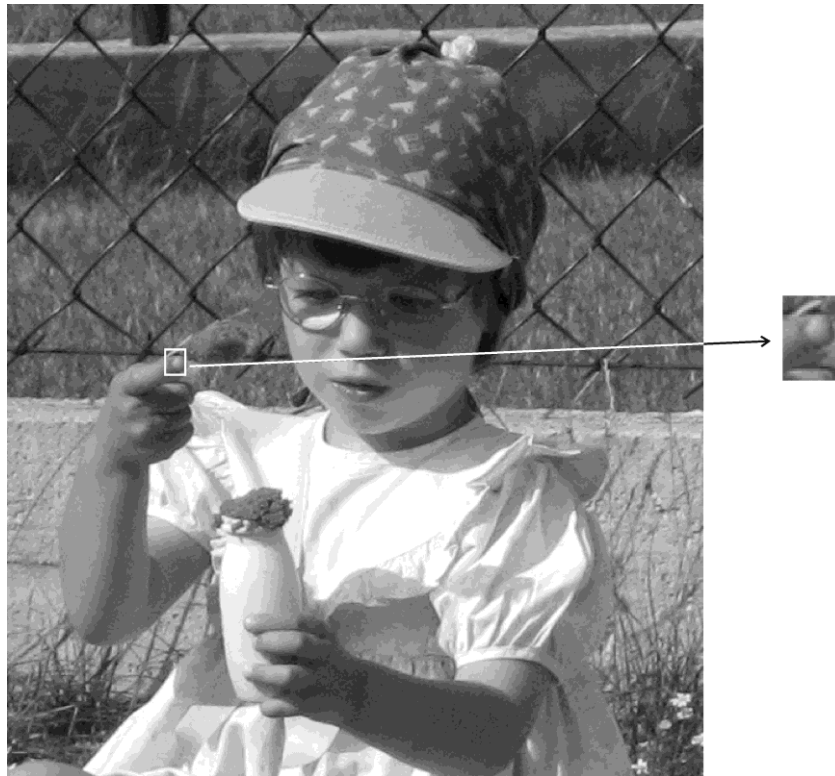
komputera nie jest dobry. Każdy obiekt może przyjmować różne położenie względem światłoczułej matrycy kamery, może również być widziany pod różnymi kątami oraz przy różnym oświetleniu. Obiekty, które my łatwo rozpoznajemy jako należące do tej samej kategorii mogą się wizualnie bardzo od siebie różnić. Jak napisać program, który w wielkiej tablicy cyfr identyfikuje klamkę, biorąc pod uwagę ogromną różnorodność klamek (rys. 2.7)? A przecież rozsądnie działający robot nie powinien mieć kłopotów z zobaczeniem klamki. Przynajmniej my ludzie takich kłopotów nie mamy. Obecnie nie umiemy napisać oprogramowania zdolnego do analizy obrazu na potrzeby widzących maszyn¹. Ale zdaliśmy sobie sprawę jak ogromnie złożonym procesem jest widzenie. Na pewno sztuka widzenia opiera się na pewnej wiedzy a' priori (wrodzonej). Słowem mózg analizując obrazy odwołuje się do czegoś w rodzaju teorii, choć reprezentacja tej teorii wygląda zupełnie inaczej niż zapis naszych teorii fizycznych w książkach. Teorie zapisane w mózgu (czyli ta wiedza a' priori) reprezentowana jest poprzez odpowiednie konfiguracje i stany komórek biorących udział w procesie widzenia.

¹ Chyba, że maszyna działa w dobrze zdefiniowanym środowisku i ma za zadanie rozpoznać wzorzec w dobrze określonym zbiorze przedmiotów.

	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
290	99	91	105	104	104	117	124	116	104	94	102	112	130	136	113	106	91	116	138	127
291	96	93	96	96	112	122	119	105	92	88	103	110	119	126	121	125	125	127	133	124
292	96	88	87	95	119	115	103	93	90	100	129	148	168	185	178	146	123	128	113	111
293	92	83	93	90	102	101	90	93	122	154	177	186	185	174	153	126	128	122	102	103
294	86	79	86	86	88	90	103	134	174	191	194	178	143	122	94	114	137	117	88	91
295	85	80	69	75	86	100	157	185	183	165	132	100	72	74	85	115	120	107	88	84
296	69	59	56	77	97	161	198	178	140	104	73	60	47	48	57	87	107	99	98	90
297	55	58	92	115	147	183	172	120	111	91	72	69	72	92	89	83	90	87	89	89
298	111	123	143	163	162	164	122	116	119	129	132	141	139	148	149	137	130	113	100	106
299	126	141	150	144	153	146	146	154	150	150	149	165	171	167	169	161	139	123	110	115
300	140	140	148	146	143	149	149	153	142	146	154	177	191	176	164	158	140	125	113	105
301	153	150	148	145	149	140	144	142	140	141	169	188	195	184	170	160	144	131	111	93
302	154	154	153	149	142	142	135	126	134	156	173	190	192	178	170	160	146	132	117	94
303	158	158	152	151	149	137	116	114	139	169	181	188	183	173	167	158	145	133	113	80
304	162	160	151	150	149	134	110	114	148	166	176	177	168	163	160	151	140	122	110	84
305	157	158	151	148	141	129	116	118	140	148	162	164	155	153	151	141	133	122	107	84
Ania = 306	150	150	148	147	136	126	118	114	119	135	150	154	148	146	141	132	124	118	105	86
307	145	139	140	143	137	127	120	112	113	124	134	139	135	132	129	123	118	108	101	91
308	141	134	130	131	127	121	117	112	113	110	112	116	117	116	115	112	108	102	95	87
309	135	136	125	117	109	106	108	105	102	100	96	100	104	104	105	101	95	85	88	99
310	127	124	121	114	107	105	102	96	92	90	88	83	83	90	94	90	86	88	93	120
311	122	117	115	108	102	99	93	85	79	86	84	80	75	72	74	87	103	111	123	136
312	117	110	108	103	98	93	88	79	72	74	80	82	79	75	79	97	117	130	134	135
313	111	104	101	97	93	89	85	82	79	69	81	87	87	91	100	107	111	120	123	125
314	102	98	93	91	87	81	81	85	86	80	86	88	90	97	101	98	94	98	117	129
315	97	94	88	86	83	77	79	86	87	88	88	89	93	95	90	85	88	92	116	132
316	94	90	84	85	85	80	82	88	87	88	87	88	92	92	86	89	100	111	116	124
317	90	87	80	84	88	85	87	90	86	88	88	85	83	85	89	101	114	128	119	117
318	88	86	79	85	95	94	87	85	84	83	82	75	76	86	93	102	118	123	117	113
319	85	82	88	94	92	85	81	77	72	70	71	67	67	77	83	89	100	99	99	109
320	83	86	84	79	75	73	71	69	72	69	72	68	66	68	65	60	62	61	64	79
321	85	94	100	106	116	126	125	123	126	119	120	116	116	118	112	105	105	95	84	72
322	102	125	147	161	163	165	164	157	153	149	145	142	145	147	142	138	138	135	123	102
323	109	119	130	140	145	151	155	156	157	155	151	150	151	149	140	130	123	114	120	119

Rysunek 2.5. Drobny fragment tabeli cyfr czytanej z elektronicznego aparatu fotograficznego (zapisana w trybie monochromatycznym ośmiobitowym)

Oznacza to, że kiedy mierzymy długość przy pomocy linijki to jest to pomiar oparty o pewną teorię, tyle że zapisaną w mózgu. Wynika z tego, że to, że widzimy nie jest tylko kwestią tego jaki sygnał dochodzi do oczu, ale również tego co z tym sygnałem robi mózg. Słowem widzenie jest w części procesem twórczym. Przez to, między innymi, nie wiemy dokładnie jaka jest relacja między przedmiotem, na który patrzymy a wrażeniem wzrokowym. Dzięki temu twórczemu charakterowi tworzenia wrażeń wzrokowych możliwe są takie efekty jakie są pokazane na rysunkach (2.8, 2.9 i 2.10).



Rysunek 2.6. Tablica z poprzedniego rysunku przedstawia zaznaczony kawałek palca tej dziewczynki. Ale pewnie od razu żeście to zauważyli ;)



Rysunek 2.7 Co to w zasadzie jest ta klamka?



Rysunek 2.8. Układ plam, jak układ plam, ale zdrowy mózg uparcie dostrzega w nim dalmatyńczyka. Możemy zaryzykować stwierdzenie, że mózg ma zdefiniowane wizualne esencje rzeczy. Esencja oznacza tu zbiór cech (wizualnych w naszym przypadku), która jest obecna w każdym egzemplarzu danego rodzaju przedmiotów i jako zespół jest dla tego rodzaju przedmiotów charakterystyczna. Na przykład cechy określające wizualną esencję kłamki muszą być obecne w obrazie każdej kłamki. Ten obrazek ma w sobie coś z wizualnej esencji psa. Dlatego widzimy na nim psa. W sumie dobry grafik to ktoś, kto czuje takie esencje. Dobremu grafikowi wystarczy parę kresek aby widz widział to, co ma widzieć. Dokładny obrazek nie jest wcale potrzebny. Choć pomysł z wizualną esencją wygląda obiecująco, to nie potrafimy takich esencji zdefiniować. Ale cóż, mózg potrafi; źródło Wikipedia



Rysunek 2.9. Stara to czy młoda dama? W sumie to układ kresek, który nie jest żadną damą. Jednak mózg doszukuje się, w każdym układzie kresek znaczenia. W tym wypadku znajduje aż dwa takie znaczenia. W jakiś sposób, nie wiemy w jaki, mózg ludzki dostrzega w takim obrazku wizualną esencję albo starej albo młodej kobiety. Jako ciekawostkę dodam, że ten typ rysunku dwuznacznego stworzony został w 1915 roku przez Williama Ely Hilla. Jego dzieło miało tytuł: „Moja żona i moja teściowa”; źródło Wikipedia

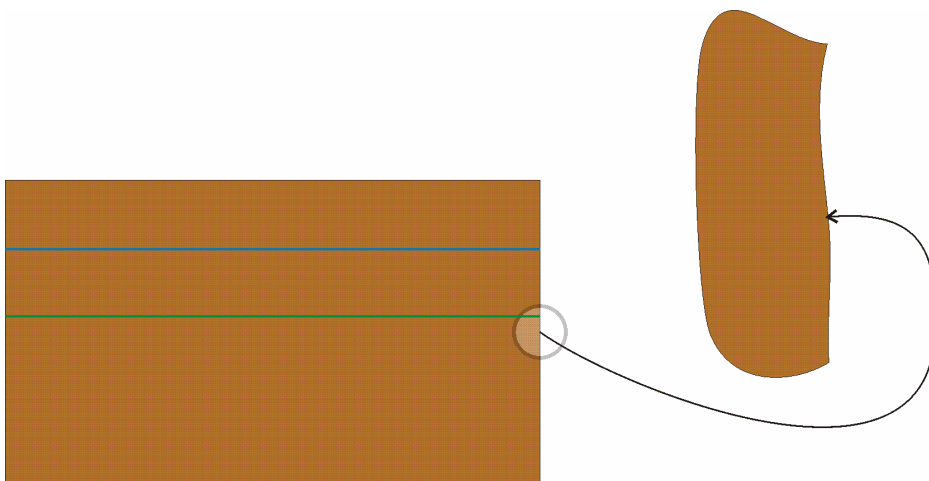


Rysunek 2.10. Skomplikowana maszyneria analizy obrazu czasem daje dziwne wyniki, inaczej mówiąc błędy. Możemy na przykład zobaczyć coś co fizycznie jest niemożliwe. Z lewej strony mamy przykład tzw. figury niemożliwej. Sam układ kresek jest jak najbardziej możliwy. Ale my mamy wrażenie wzrokowe z pozoru prostej figury, której jednak nie sposób zrobić. Z prawej złudzenie Ebbinghausarea (zrealizowane tu na przykładzie tzw. okręgów Titchenera). Oba środkowe okręgi są takiej samej wielkości. Jednak w otoczeniu małych okręgów mamy wrażenie, że widzimy środkowy okrąg jako większy niż w otoczeniu dużych okręgów; źródło rysunku Wikipedia

Wszystkie te kwestie związane ze wzrokiem są niezwykle interesujące i można by jeszcze długo na ich temat rozprawiać. Nie może nam jednak uciec główna konkluzja tych rozważań, a brzmi ona tak: Nawet naturalne pomiary bazują na czymś co jest w naszym mózgu, a co odpowiada teorii, dzięki którym możemy używać, konstruować i skalować przyrządy pomiarowe.

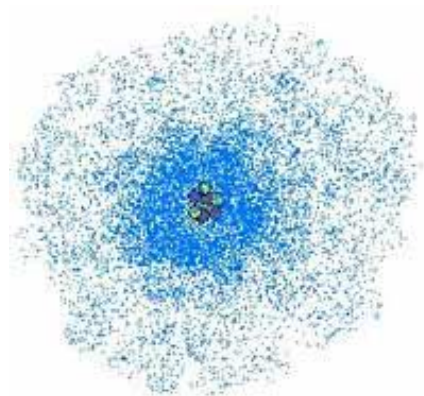
Pomiar ma jeszcze jedną fascynującą cechę, która w jakiś sposób wiąże się faktem, że do prowadzenia pomiarów potrzebujemy teorii. Zacznę od przypomnienia faktu, że każda teoria ma swoje ograniczenia. To znaczy, że z pewnym zakresem zjawisk dobrze sobie radzi, ale jej skuteczność zawsze się gdzieś kończy. Jeżeli kończy się skuteczności teorii, to musi się również kończyć skuteczność pomiarów, które na niej bazują

Wyobraźmy sobie następującą historię. Potrzebujemy stołu do kuchni. Po wymierzeniu kuchni okazało się, że stół powinien mierzyć 160cm długości. Następnie idziemy do sklepu z meblami, oglądamy i mierzymy stoły. Jeden z nich podoba się nam i ma 160cm długości. Na nasze nieszczęście spotykamy znajomego, który jest niesłychanie pedantyczny. Znajomy sceptycznie patrzy na metr krawiecki (rys. 2.11), którym zmierzaliśmy długość stołu. To żadna miarka stwierdza i wyciąga taśmę mierniczą (rys. 2.12), z którą nigdy się nie rozstaje. Mierzy długość stołu, a następnie wyciąga termometr, z którym też się nie rozstaje, i oblicza poprawkę na zmierzoną długość. Poprawka jest potrzebna, bo w zależności od temperatury, taśma miernicza może się skurczyć lub rozszerzyć. Następnie znajomy oświadcza nam, że stół ma 160.7cm zmierzone z dokładnością $\pm 0.17\text{cm}$. Patrząc na nas nieco z góry stwierdza, że nasz pomiar



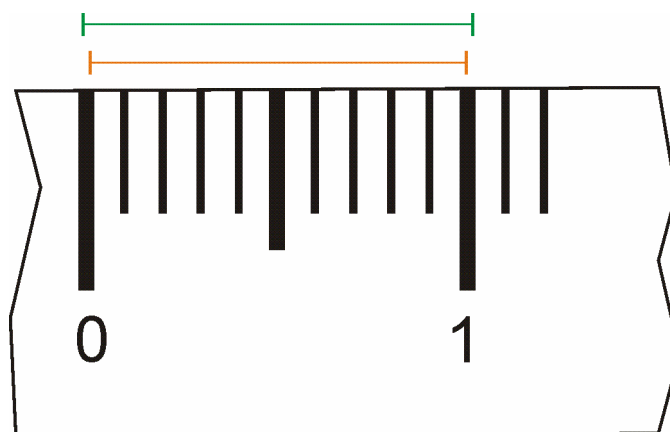
Rysunek 2.13. Z pozoru równa krawędź stołu w powiększeniu okazuje się równą nie być

Znajomy dzwoni tam i dowiadujemy się rzeczy następujących: po pierwsze pomiar długości może zostać dokonany z precyzją $\pm 0.00000006\text{m}$, po drugie trzeba będzie wykonać również charakterystykę zmian długości stołu w zależności od temperatury, po trzecie możliwy jest pomiar tylko średniej długości stołu, gdyż atomy, z których zbudowany jest stół drgają pod wpływem ciepła i długość stołu ciągle się zmienia. Poza tym nie ma co liczyć na jeszcze dokładniejszy pomiar długości, gdyż tak naprawdę nikt nie wie gdzie kończy się atom (rys. 2.14). Chyba, że wybierzemy sobie jedną z definicji rozmiaru atomu i spróbujemy się na niej oprzeć. Ponadto taki pomiar to poważna sprawa. Przygotowanie do niego i jego przeprowadzenia oraz opracowanie wyników dla tak dużego obiektu jak stół, będzie trwało jakieś pięć miesięcy, a rachunek wyniesie jakieś trzy i pół miliona złotych. Ta ostatnie wiadomość działa na nas jak przysłowiowy kubeł zimnej wody. Pukamy się w głowę. I wracamy do sklepu ściskając w kieszeni pocziwy metr krawiecki.



Rysunek 2.14. Atom jest otoczony czymś w rodzaju chmury ładunku elektrycznego. Granice tej chmury nie dadzą się wytyczyć, przez co nie można mówić o jakichś ściśle określonych rozmiarach atomu.

To, do jasnej cholery, ma ten stół jakąś długość czy nie ma? A jeżeli ma to jaką? Moja droga i mój drogi, dokładne długości mogą mieć co najwyżej obiekty matematyczne. W fizyce mówiąc: „długość wynosi tyle i tyle”, stwierdzamy tylko, że jak przyłożymy linijkę do danego obiektu to zaczyna się on przy kresce oznaczonej jako zero, a kończy przy kresce oznaczonej jako powiedzmy 13cm i 3mm. Mówimy wtedy, że obiekt ma 13.3cm długości. Zdajemy sobie jednak sprawę, że pomiar taki nie jest dokładny. Kreski na linijce mają wszak swoją grubość (rys. 2.15), materiał linijki „cierpi” na rozszerzalność cieplną, itd.

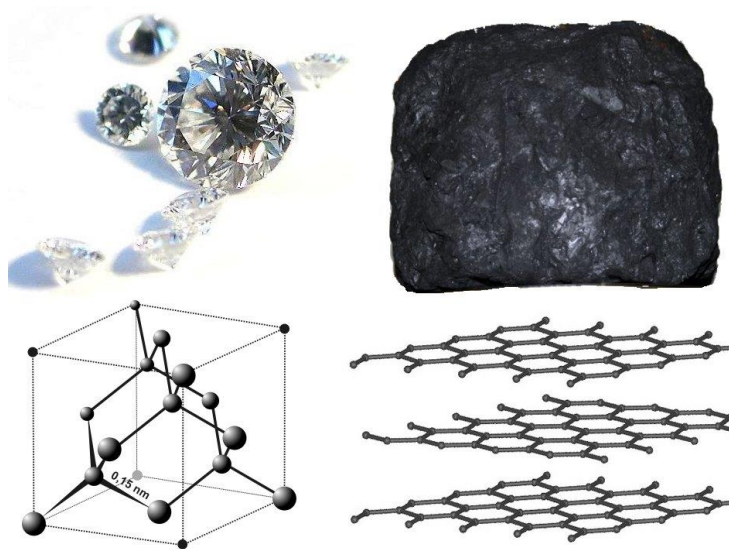


Rysunek 2.15. Ten jeden centymetr to pokazuje pomarańczowy czy zielony odcinek?

Możemy jednak stwierdzić, że z punktu widzenia naszych konkretnych potrzeb można spokojnie przyjąć, że nasz obiekt ma długość i że wynosi ona 13.3cm. A jak to nie wystarczy to trzeba pomyśleć o jakiejś bardziej wyrafinowanej linijce. Ale i ona nie da dokładnej odpowiedzi, a co najwyżej dokładniejszą. Niestety jak się zbyt rozpedzimy z tym coraz dokładniejszym mierzeniem, to stanie się katastrofa. Okaże się, że przy rozmiarach porównywalnych do atomowych w ogóle trudno jest zdefiniować coś takiego jak długość. Co za tym idzie, pomiary długości z dokładnościami subatomowymi nie mają sensu, nawet teoretycznego sensu. Można by rzec, że teorie wpisane w nasz mózg, dzięki którym mamy intuicje takich wielkości jak długość, załamują się w skali atomowej. Co prawda nawet w subatomowej skali mówi się o długości ale trzeba do takich długości podchodzić ostrożnie. Bardziej wynikają one z naszej potrzeby przypisania obiektom subatomowym długości niż z posiadania przez te obiekty cechy, która jest taką naszą normalną długością.

Jak widzisz długość to taka dziwna wielkość fizyczna, która jest bardzo użyteczna, ale jeżeli już jakiś obiekt ma długość, szerokość czy wysokość, to nigdy dokładnie. Pytanie zatem czy długość jest czymś realnym czy nie, jest pytaniem delikatnej natury, a odpowiedź zależy również od przyjętego spojrzenia na świat (czyli światopoglądu). Nie będę się tym tutaj zajmować. Zresztą długość wcale nie jest pod tym względem szczególnie dziwną

wielkością. Wszystkie inne wielkości fizyczne mają tą samą „wadę” (rys. 2.16). W sumie musimy uznać, że długość jest całkiem normalną wielkością. W tej sytuacji, aż dziw bierze, że cokolwiek istnieje. Przyjmijmy więc, że ważne jest to, że długość jest w bardzo wielu przypadkach użyteczną wielkością, tak samo jak twardość (rys. 2.16) i inne wielkości fizyczne. I, że pomimo tych wszystkich znaków zapytania, cała ta maszynieria, którą nazywamy fizyką jakoś działa, czego dowodem jest choćby komputer na którym piszę te słowa. I to jest prawdziwym cudem.



Rysunek 2.16. Diament jest bardzo twardy, a grafit bardzo miękki. Ale i grafit i diament składają się z atomów węgla, tyle że inaczej poukładanych. Przy czym pytanie o twardość pojedynczego atomu węgla nie ma sensu. Zatem choć diament jest bardzo twardy, to jak się odłupie od niego kawałek złożony z kilku atomów węgla, to nie będzie tenże kawałek ani twardy ani miękki. Przy zbyt małych kawałkach materii pojęcie twardości traci sens; źródło rysunku Wikipedia

3. Eksperyment ♦

Eksperymentujemy w fizyce z kilku zasadniczych powodów. Próbuje „przechwycić depezę” od natury, bez której nie powstałaby żadna z fizycznych teorii. Chcemy przetestować zaproponowane przez teoretyków hipotezy. Kiedy modele stają się zbyt złożone aby je analizować numerycznie szukamy potwierdzenia skuteczności przyjętych rozwiązań eksperymentując. Eksperyment służy również wyznaczeniu wartości różnych podstawowych wielkości fizycznych, takich jak stała grawitacyjna. Choć eksperyment pozwala testować różne hipotezy wysuwane przez teoretyków sam również potrzebuje teorii. Już sam fakt, że mierzymy wykorzystując przyrządy takie jak termometr, waga czy woltomierz oznacza, że korzystamy z teorii, które leżą u podstaw działania tych przyrządów. Ale na tym rola teorii w eksperymencie się nie kończy. Powiedzmy, że przyszło nam wyznaczyć wartość ziemskiego przyspieszenia grawitacyjnego. Nie mamy przyrządu do bezpośredniego pomiaru przyspieszenia grawitacyjnego, tu sprawa ma się podobnie jak z temperaturą. Mamy jednak teorię czyli prawo powszechnego ciężenia i drugie prawo dynamiki Newtona, która otwiera nam drogę do pomiaru pośredniego. Z teorii tej wynika, że przyspieszenie grawitacyjne możemy obliczyć ze wzoru

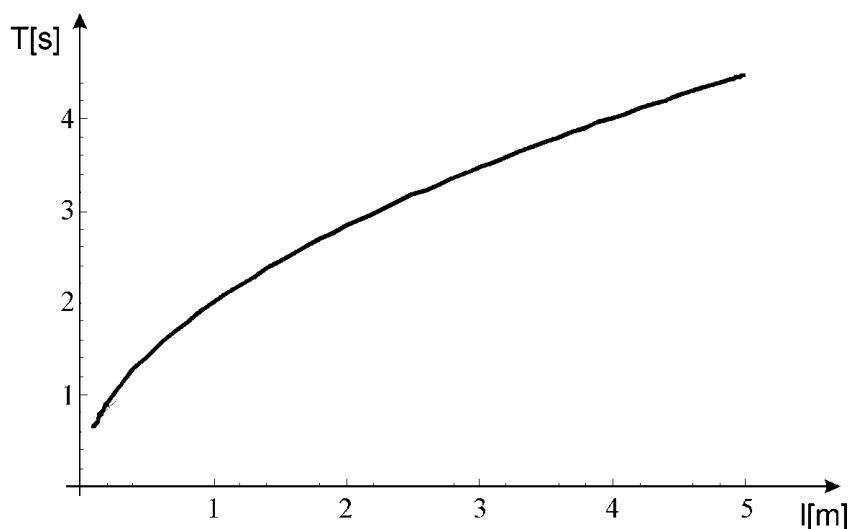
$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow g = \frac{2h}{t^2} \quad 3.1$$

Jak wynika z tego wzoru, aby obliczyć przyspieszenie grawitacyjne g wystarczy zmierzyć czas spadania ciała ze znanej wysokości h . Niestety, tak zaprojektowany eksperyment jest mało wiarygodny. Na spadające ciało działa również siła oporu powietrza. Opór powietrza zmieni czas spadania kulek i obliczone na podstawie wzoru (3.1) i przyspieszenie będzie obarczone dużym błędem. Moglibyśmy spuszczać kulki z małej wysokości, wtedy nabierałaby niewielkich prędkości i opór powietrza nie wnosiłby dużego błędu. Niestety, czas spadania kulki z małej wysokości jest bardzo krótki i taki pomiar obarczony byłby dużym błędem pomiaru czasu. Lekarstwem byłaby pompa próżniowa i odpowiednio wysoka kolumna próżniowa wraz z elektronicznym pomiarem czasu spadku kulki. Ale powiedzmy, że nie mamy ani pompy próżniowej, ani kolumny, ani elektroniki. Czy wtedy pozostanie nam tylko sięść i płakać? Przenigdy, korzystając z tej samej teorii możemy również uzyskać bardziej użyteczny wniosek: okres T wahań wahadła złożonego z nici o długości l i małej kulki zawieszanej na jej końcu wyraża się wzorem.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad 3.2$$

Ten wzór jeszcze wyprowadzę w rozdziale poświęconym drganiom (§TVIII 1.2). Wzór (3.2) ma dwie wielkie zalety, okres drgań wahadła nie zależy ani od masy kulki ani od początkowego kąta wychylenia wahadła. Szczególnie cenna jest ta druga zaleta – pomyśl w eksperymencie nie musimy mierzyć kąta o jaki wychylimy kulkę wahadła, przed puszczeniem go w ruch. Niestety wzór jest przybliżony, i dobrze spisuje się tylko dla małych wychyleń wahadła. Zatem przy puszczeniu wahadła w ruch musimy uważać by nie przesadzić z jego wychyleniem. Ale można to zrobić na oko, bo na oko widać, czy kąt odchylenia jest duży czy mały. Widać również, że im dłuższa nić tym lepiej. Wahadło będzie się wahać wolniej i łatwiej będzie uzyskać małe kąty wychylenia wahadła. Na wahadło działać będą również opory powietrza, ale maksymalna prędkość kulki wahadła, przy małych kątach wychylenia będzie mała, więc wpływ oporów powietrza będzie niewielki.

Bazując na tej teorii możemy przystąpić do działania. Odchylamy wahadło i mierzymy czas jednego okresu. Szybko okaże się, że takie działanie ma swoje słabe punkty. Musimy dokładnie zgrać czas puszczenia wahadła z czasem puszczenia w ruch stopera, a potem dokładnie złapać czas powrotu wahadła. Ten czas nie jest długi nawet dla całkiem długiej nici wahadła (rys. 3.1). Słowem natknęliśmy się na ten sam problem, choć w łagodniejszej formie, jaki pojawił się przy projekcie pomiaru czasu ruchu spadającej kulki. Ale wahadło oferuje nam dodatkowe możliwości. Możemy zmierzyć na przykład czas nie jednego, a dziesięciu wahanień. Wiemy, że na skutek niewielkich oporów ruchu, po każdym wahanieniu wychylenia wahadła nieznacznie maleje (drgania gasną), ale z drugiej strony okres wahań nie zależy od wychylenia początkowego. To ważna własność, która pozwala nam przyjąć, że czas każdego wahanienia będzie taki sam, pomimo malejącego wychylenia.



Rysunek 3.1. Okres wahadła matematycznego w zależności od długości nici; wykres sporządzony ze wzoru (3.2)

Czas zmierzony dla dziesięciu wahań podzielimy przez dziesięć i będziemy mieli czas jednego okresu. Błędy czasu włączenia i wyłączenia stopera popełniamy przy puszczeniu wahadła w ruch i przy złapaniu jego położenia końcowego. Możemy więc się spodziewać, że błąd przy pomiarze dziesięciu wahań będzie podobny do błędu pomiaru czasu pojedynczego wahań. Zatem przy pomiarze dziesięciu wahań na jedno wahań będzie to jedna dziesiąta wartości błędu, który popełniamy przy pomiarze jednego wahań.

Postanowiłem przeprowadzić odpowiednie pomiary dla prostego wahadła pokazanego na rysunku (3.2). Przyznam od razu, że choć pomiary starałem się robić starannie, to nie włożyłem zbyt dużego wysiłku w przygotowanie całego układu.



Rysunek 3.2. Moje wahadło składało się z dość sztywnej linki na końcu której powieszona została tenisowa piłeczka. U góry nić jest przymocowana do framugi drzwi kilkoma paskami mocnej taśmy klejącej.

Poniżej przedstawiłem kilka prób dla wahadła o długości 57.2cm przy pomiarze czasu jednego, pięciu i dziesięciu wahań. Wykorzystując wzór (3.2) mogę zapisać wyrażenie na przyspieszenie ziemskie g .

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l \quad 3.3$$

Tabela (3.1) przedstawia uzyskane wyniki.

lp	czas [sekundy]	g [m/s ²]	lp	czas [sekundy]	g [m/s ²]
1	1.50	10.036	6	1.46	10.594
2	1.50	10.036	7	1.57	9.161
3	1.37	12.031	8	1.49	10.171
4	1.47	10.045	9	1.43	11.043
5	1.44	10.890	10	1.56	9.279

Tabela 3.1. Dziesięć kolejnych pomiarów czasu pojedynczego wahnięcia wahadła z rysunku (3.2). Przyspieszenie g wyznaczone jest ze wzoru (3.3).

Za zmierzony czas możemy przyjąć średnią arytmetyczną z tych dziesięciu pomiarów $T_{z1}=1.479\text{s}$. Przyspieszenie ziemskie g obliczone dla czasu średniego wynosi $g=10.323\text{m/s}^2$. Dokładność może nie nadzwyczajna, ale jak na taki pomiar do przyjęcia. Następne tabele (3.2 i 3.3) pokazują wyniki pięciu serii pomiarowych, w których zmierzyłem czas trwania pięciu oraz dziesięciu wahnięć.

lp	Czas 5 wahnięć [s]	Średni czas na jedno wahnięcie [s]	g [m/s ²]
1	7.85	1.57	9.161
2	7.80	1.56	9.279
3	7.75	1.55	9.399
4	7.60	1.52	9.734
5	7.69	1.538	9.546

Tabela 3.2. Pomiar czasu trwania pięciu kolejnych wahnięć wahadła z rysunku (3.2), oraz wartości przyspieszenia ziemskiego g obliczone ze wzoru (3.3).

Średnia arytmetyczna pomiarów pięciu cykli wynosi (dla jednego wahnięcia) $T_{z5}=1.5476\text{s}$. Przyspieszenie ziemskie g obliczone dla czasu średniego wynosi $g=9.436\text{m/s}^2$. Ten wynik prezentuje się już dużo lepiej.

lp	Czas 10 wahań [s]	Średni czas na jedno wahań [s]	g [m/s^2]
1	15.37	1.537	9.546
2	15.34	1.534	9.596
3	15.25	1.525	9.710
4	15.29	1.529	9.659
5	15.16	1.516	9.826

Tabela 3.3. Pomiar czasu trwania dziesięciu kolejnych wahań wahadła z rysunku (3.2), oraz wartości przyspieszenia g ziemskiego obliczone ze wzoru (3.3).

Średnia arytmetyczna pomiarów czasu dziesięciu cykli wynosi (dla jednego wahań) $T_{z10} = 1.5282\text{s}$. Przyspieszenie ziemskie g obliczone dla czasu średniego wynosi $g = 9.672\text{m/s}^2$. Znowu widać postęp.

Wyniki z dziesięciu kolejnych wahań mają jeszcze jedną przewagę nad pozostałymi – mniejszy rozrzut. Różnica między najmniejszą i największą wartością g w tabeli (3.1) jest prawie równa 3m/s^2 , w tabeli (3.2) wynosi nieco ponad 0.6m/s^2 , a w tabeli (3.3) już tylko niespełna 0.3m/s^2 . Wyniki w tabeli (3.3) wyglądają na najmniej przypadkowe. Czy to oznacza, że mierząc czas 100 cykli otrzymalibyśmy jeszcze dokładniejsze wyniki? Poprawa nie byłaby znacząca. Błąd pomiaru czasu jest tylko jednym z błędów obciążających wynik tych pomiarów. Musimy również pamiętać o błędach pomiaru długości wahadła, o tym że piłeczka tenisowa nie jest idealnie symetryczną kulą, o siłach tarcia w zawieszeniu wahadła, o oporach powietrza, o tym, że we wzorze (3.3) przyjąłem przybliżoną wartość $\pi \approx 3.14$, oraz o tym, że wzór (3.2) jest tylko wzorem przybliżonym. Nadmierna walka z jednym źródłem błędów, przy zaniedbaniu innych do niczego dobrego nie prowadzi. W pierwszym kroku należy oczywiście wyeliminować błędy najgrubsze, a potem – potem te, które awansowały do grona najgrubszych i tak aż do momentu uzyskania odpowiednio dokładnych wyników (albo do wyczerpania pomysłów na eliminację błędów). Przyspieszenie ziemskie wynosi w Polsce około $g \approx 9.807\text{m/s}^2$. Widać, że średnia z serii pomiarów czasu dziesięciu wahań różni się od tej wartości o około 0.15m/s^2 . Mój eksperyment należałoby potraktować jako pierwszą przymiarkę do zasadniczego pomiaru – takiego sprawdzianu samej koncepcji pomiaru. Pozytywny wynik przymiarki oznacza, że warto w przygotowanie eksperymentu włożyć więcej wysiłku, co powinno zaowocować dokładniejszymi pomiarami.

Tak w dużym skrócie wygląda praca eksperymentatora. Rzadko kiedy pomiar może być przeprowadzony bezpośrednio. Często trzeba się odwoływać do błyskotliwych chwytów jak ten z wahadłem. Bo musisz przyznać, że pomiar przyspieszenia za pomocą wahadła jest prosty i skuteczny. Na szczęście geniusz eksperymentatorów pozwolił im wymyśleć wiele sprytnych eksperymentów na

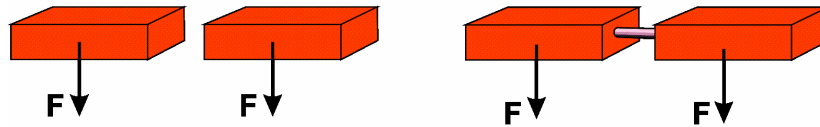
dokładne zmierzenie tego co z początku wydawało się niemierzalne. Ich osiągnięcia budzą nie mniejszy podziw niż ten, który jest udziałem autorów wielkich teorii.

I jeszcze jedno. Możesz nie lubić eksperymentu i czuć się z powołania fizykiem teoretykiem, i to takim, że wszelkie przyrządy pomiarowe na samą Twoją obecność w laboratorium reagują natychmiastową awarią. Nie mniej powinieneś przeprowadzić kilka prostych eksperymentów takich jak ten z wahadłem. Tak, żeby zrozumieć doświadczalników, z którymi większość teoretyków musi mieć jakiś sensowny kontakt. Ale przeprowadzić eksperyment oznacza: dobrze go przemyśleć od strony teoretycznej, w miarę starannie przeprowadzić, opracować wyniki, ocenić źródła błędów i ich wielkość i wyciągnąć wnioski. Dobrym źródłem (choć nie jedynym) na pomysły na domowe eksperymenty są zadania eksperymentalne I stopnia Olimpiady Fizycznej (są na stronie Olimpiady). Każdy może z nich wybrać coś dla siebie.

3.1. Eksperyment myślowy

Jest jeszcze jeden rodzaj eksperymentu, który niewiele ma wspólnego z prawdziwym eksperymentowaniem, ale w historii fizyki, i nie tylko, odegrał niemałą rolę. Mowa o eksperymentcie myślowym. Prawdziwym mistrzem eksperymentu myślowego był Albert Einstein. Wcześniej, z powodzeniem odwoływało się do niego wielu wybitnych uczonych. Eksperyment myślowy polega na wyobrażeniu sobie sytuacji fizycznej (stąd eksperyment myślowy), która w wysoce oczywisty sposób zilustruje tezę, nad którą pracuje autor eksperymentu. Do takich eksperymentów odwoływał się między innymi Galileusz.

Jak już wiesz Galileusz był orędownikiem stwierdzenia, że wszystkie ciała w polu grawitacyjnym spadają z takim samym przyspieszeniem. Obserwowane różnice w prędkości spadania ciał tłumaczył obecnością sił oporu powietrza. Teza ta spotykała się z silną krytyką ze strony zwolenników fizyki Arystotelesa, zgodnie z którą ciała cięższe spadają szybciej od ciał lżejszych, a całe to gadanie o próżni jest bezsensu, bo wytworzenie próżni jest niemożliwe. Aby wzmocnić swoją argumentację Galileusz namawiał słuchaczy (lub czytelników) do wyobrażania sobie różnych eksperymentów. W sprawie spadania powołał się na następujące doświadczenie myślowe. Wyobraźmy sobie dwie spadające cegły (rys. 3.1.1). Gdy cegły są identyczne, jak zakładamy, to spadają tak samo. Gdy je jednak łączymy, na przykład lekkim prętem, to stanowią jedno ciało. Ponieważ dwie cegły są dwa razy cięższe od jednej cegły, to czy układ tak połączonych cegieł spada szybciej niż dwie pojedyncze cegły?



Rysunek 3.1.1. Lewa część rysunku: dwie takie same cegły, puszczone z tej samej wysokości spadają tak samo. Z prawej strony: czy połączenie tych dwóch cegieł w jedno ciało (na przykład lekkim prętem) zmieni siły działające na każdą z tych cegieł? Jeżeli nie, to nie ma powodów aby dwie połączone cegły spadały inaczej niż dwie swobodne cegły, mimo, że dwie połączone cegły stanowią ciało dwa razy cięższe od jednej cegły.

Eksperyment myślowy skłania do wyobrażenia sobie takiej sytuacji fizycznej, która szczególnie klarownie ilustruje myśl, którą chcemy przekazać. Umiejętność wymyślania takich eksperymentów jest sztuką samą w sobie. I podkreślę raz jeszcze, że nie jest tu ważne czy eksperyment myślowy jest technicznie wykonalny czy nie. Autor eksperymentu myślowego nie planuje jego wykonania, w przeciwnym razie nie byłby to eksperyment myślowy, tylko planowany realny eksperyment. Oznacza to, że eksperyment myślowy jest ulubioną zabawką rasowych teoretyków.

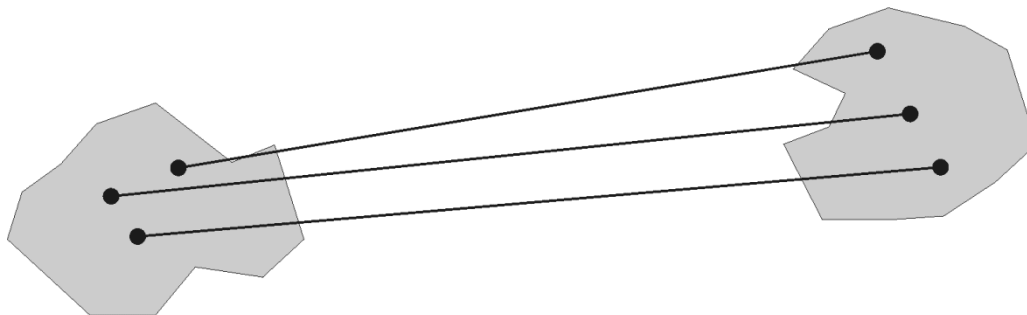
4. Matematyka ♦

Jaka jest rola matematyki w fizyce już wiesz. Krótko mówiąc taka, że pozbycie się matematyki z fizyki, w sensowny sposób, nie jest możliwe. Popatrzmy, na przykładzie, jak matematyka realizuje się w fizyce. Jeden z tematów będzie poświęcony prawu powszechnego ciążenia, które w języku matematyki zapisujemy tak:

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} \quad 4.1$$

Wzór ten pozwala wyznaczyć wektor siły $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ z jaką punktowe ciało o masie m_1 przyciąga punktowe ciało o masie m_2 . Symbol r oznacza odległość między tymi ciałami, G to stała grawitacyjna, a $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ to jednostkowy wektor równoległy do linii łączącej obie masy i skierowany od masy m_2 do masy m_1 . Kłopot z tym prawem polega na tym, że w realnym świecie nie ma czegoś takiego jak masy punktowe. Jest to ciekawa okoliczność. Powszechnie znane i szanowane prawo fizyczne odnosi się do wielkości nierealnych, czyli do punktów materialnych. Co więcej, jest to powszechna przypadłość teorii fizycznych – przez swą matematyczną strukturę operują bytami nierealnymi.

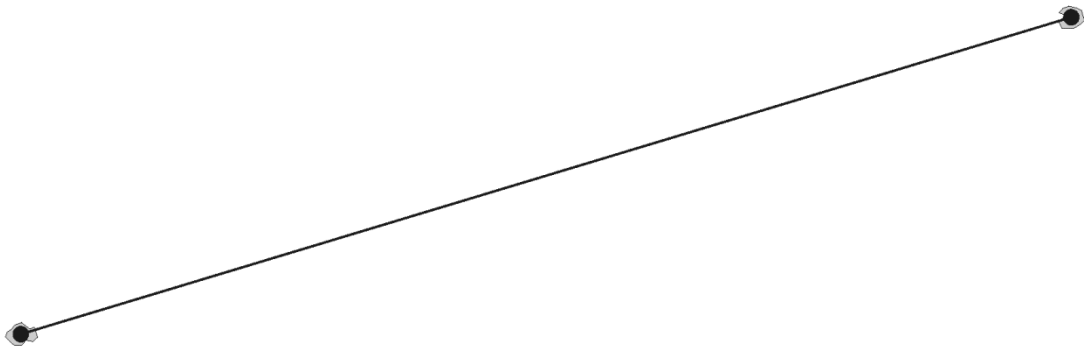
Zauważ, że gdy prawo powszechnego ciążenia chcemy odnieść do obiektów rozciągniętych, to nie bardzo umiemy zdefiniować odległość między tymi ciałami (rys. 4.1).



Rysunek 4.1. Trudno jest podać sensowną, z punktu widzenia prawa powszechnego ciążenia, definicję odległości między dwoma rozciągniętymi ciałami. Na rysunku pokazane są trzy wybrane odległości, spośród nieskończonej ilości innych możliwości.

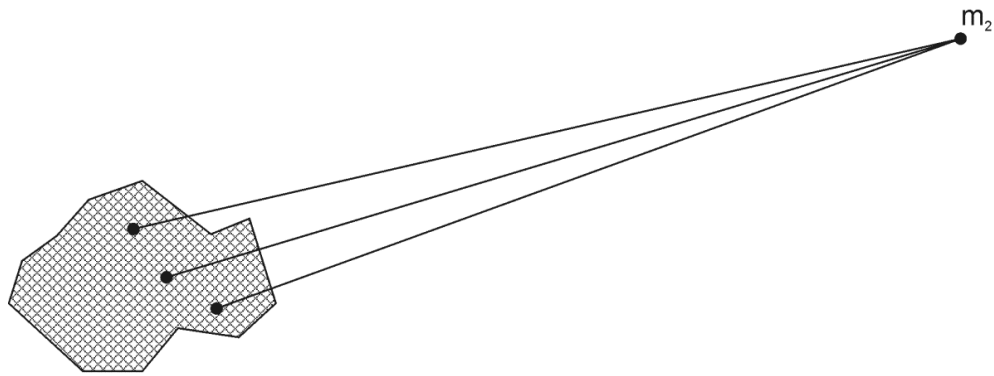
Zauważ również, że masa punktowa ma fatalną cechę. Gęstość masy punktu materialnego o skończonej masie m jest nieskończona. Wynika to z tego, że objętość punktu wynosi zero, a gęstość masy liczymy jako wartość masy przez objętość. Obiekt o nieskończonej gęstości jest czarną dziurą! Czyżby w klasycznej teorii grawitacji były same czarne dziury? No dobrze, rozumie się, że masa punktowa jest tylko pewnym skrótem myślowym. Pojęcie masy punktowej należy rozumieć tak: masa punktowa jest to takie ciało, dla którego

możemy podać szczególny punkt, który z zadowalającą dokładnością może reprezentować jego położenie. Rysunek (4.2) przedstawia jedną z możliwości. Badane ciała mogą być tak małe, w porównaniu z odległością między nimi, że nie ma znaczenia między którymi punktami tych ciał będziemy mierzyli odległości. To nie ma znaczenia oznacza, że wybór między różnymi punktami daje tak bliskie sobie wyniki liczbowe, że różnice między tymi wynikami nie są dla nas istotne.



Rysunek 4.2. Gdy oba ciała są małe w porównaniu z odległością między nimi, możemy wybrać dwa możliwe centralne punkty i liczyć odległość między tymi ciałami, jako odległość między tymi wybranymi punktami. Otrzymane wyniki nie będą dokładne, ale powinny być bliskie dokładnemu rozwiązaniu problemu.

Co ciekawe, gdy ciała są duże ale kuliste to prawo ciążenia działa między nimi tak, jakby cała masa tych ciał skupiona była w ich środku. Pozwala nam to stosować prawo powszechnego ciążenia, dla ciał kulistych, tak jakby były one punktami. A co zrobić kiedy mamy ciało, które nie da się traktować jak punktowe, bo nie jest ani wystarczająco małe ani kuliste? Wtedy zawsze możemy podzielić je na części wystarczająco drobne by każdą z tych części można było uznać za masę punktową (rys. 4.3.). Im drobniej podzielimy ciało tym lepszy wynik, ale też więcej czeka nas obliczeń. W efekcie takich obliczeń powierzchnia ciała przypomina jeża, którego kolce reprezentują działające siły na poszczególne jego małe fragmenty. Należy jednak pamiętać, że takie kolce są również wewnątrz ciała, gdyż nie możemy w naszych obliczeniach zapomnieć o tych kawałkach materii, które znajdują się pod powierzchnią.



Rysunek 4.3. Gdy chcemy policzyć siłę z jaką ciało zbyt rozciągle przyciąga punkt materialny m_2 (czyli takie ciało, które można potraktować jako punktowe w duchu rysunku (4.2)), to możemy podzielić ciało rozciągle na tak małe kawałki (na przykład na małe sześcianiki), że kawałki te można uznać za punktowe. Następnie należy obliczyć siłę z jaką każdy kawałek ciała rozciąłego przyciąga punkt m_2 . Otrzymane siły należy dodać (oczywiście wektorowo). Gdy ciało m_2 jest również zbyt rozciągle, musimy podzielić je na małe kawałki i policzyć siłę z jaką przyciągany jest każdy taki kawałek przez pierwsze zbyt rozciągle ciało.

Matematyka ma w zanadrzu sztuczkę, która pozwala zrobić coś jeszcze. Ta sztuczka nazywa się „wielkości nieskończenie małe”. Dyskusję nad nieskończenie małymi przenieśliśmy do pomocy matematycznych poświęconych różniczkowaniu (DII 4). Tu na szybko określamy je tak. Wielkość nieskończenie mała jest stanem przejściowym między zerem a wielkością skończoną. Prawdę mówiąc o naturze wielkości nieskończenie małych ciągle się dyskutuje, są również metody pozwalające na obchodzenie się bez tego dziwnego pojęcia. Uważam jednak, że dla nas jest to pojęcie wygodne i warte wykorzystania. Za pomocą wielkości nieskończenie małych prawo powszechnego ciążenia możemy napisać tak

$$d\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = G \frac{dm_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} \quad 4.2$$

Literki „d” przy masach i sile oznaczają, że mamy do czynienia z wielkością nieskończenie małą, czyli na przykład nieskończenie małą masą o nieskończenie małej objętości. Powyższy wzór mówi co następuje. Nieskończenie mała masa dm_1 przyciąga punktową masę m_2 z nieskończenie małą siłą $d\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$, która jest równa wyrażeniu po prawej stronie równania (4.2). Możemy teraz w myślach podzielić ciało m_2 na nieskończenie małe fragmenty. Wyznaczając odległość $\mathbf{r}$ między takim nieskończenie małym kawałkiem, a punktową masą m_2 , popełniamy nieskończenie mały błąd, a więc błąd, który z praktycznego punktu widzenia nie ma znaczenia. A teraz prawdziwy hit – istnieje technika, która pozwala posumować wpływy od takich nieskończenie małych fragmentów; ta technika nazywa się całkowaniem (DIII 1). Symbolicznie operację sumowania takich nieskończenie małych przyczynków zapisuje się tak

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \int_V G \frac{dm_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{21}$$

To stylizowane „S”, to znak całkowania czyli sumowania nieskończenie małych przyczynków. Literka V pod znakiem całki czytana jest tak: całkowanie należy wykonać po całej objętości ciała m_1 - jest to symbol wyznaczający granice całkowania. Mimo, że wyrażenie (4.3) wygląda odpychająco, możesz mi wierzyć, że zrobimy z niego użytek. Weźmiemy kulę i punkt materialny. Kulę podzielimy na nieskończenie małe kawałki, a następnie obliczymy, poprzez całkowanie, z jaką siłą grawitacji działa kula na punkt materialny. Efekt tego rachunku będzie bardzo prosty i przyjemny. Okaże się, kula przyciąga punkt z taką siłą jakby cała jej masa była skoncentrowana w jej środku, o czym już wspominałem. Słowem kula zachowuje się, z punktu widzenia prawa powszechnego ciążenia, tak jakby była punktem materialnym! Łatwo będzie uogólnić ten wynik na dwie kule: dwie kule przyciągają się tak jakby ich masy skoncentrowane były w ich punktach środkowych. Mamy tu do czynienia z interesującym przypadkiem. Dla ciała kulistego istnieje taki punkt, który z punktu widzenia prawa powszechnego ciążenia, całkowicie reprezentuje położenie w przestrzeni masy tego ciała.

Zostawię szczegóły tych rozważań do właściwego czasu. Tutaj ważne jest co następuje. Choć reguły fizyki, ze względu na swój matematyczny charakter, operują tak abstrakcyjnymi tworem jak masy punktowe, to z drugiej strony matematyka dostarcza nam narzędzi pozwalających na przejście od tych abstrakcyjnych tworów do bardziej realnych bytów, choć czasem jest to okupione ciężkim wysiłkiem obliczeniowym.

Powiedzmy, że mamy dwa ciała niebieskie na przykład Słońce i Ziemię. W jaki sposób te ciała poruszają się? Aby odpowiedzieć na to pytanie musimy stworzyć model układu fizycznego, korzystając oczywiście z metody krowy. Najpierw zakładamy, że Ziemia i Słońce są idealnymi kulami o masach m_z i m_s . Potem zakładamy, że wpływ innych ciał niebieskich na ruch Ziemi i Słońca możemy pominąć. Te inne ciała niebieskiego to na przykład Księżyc, planety, komety, inne gwiazdy. Musimy jeszcze zmierzyć odległość środek Ziemi – środek Słońca, oraz masy obu ciał. Model układu złożonego z dwóch ciał jest w ten sposób zdefiniowany. Jeżeli jedno z tych ciał jest dużo masywniejsze od drugiego, tak jak jest to w przypadku układu Ziemia-Słońce (Słońce jest ponad 300 000 razy masywniejsze od Ziemi), to możemy przyjąć jeszcze jedno uproszczenie. Możemy sensownie założyć, że wpływ Ziemi na położenie Słońca jest dużo mniejszy niż wpływ Słońca na położenie Ziemi. W konsekwencji zakładamy, że Słońce jest ciałem nieruchomym i wiążemy układ współrzędnych ze środkiem Słońca. Czas na analizę naszego modelu. Do analizy stosujemy matematyczny zapis prawa powszechnego ciążenia (4.1) i drugiego prawa dynamiki Newtona (1.1). Oba prawa pozwalają na zapisanie równania

$$m_z \frac{d^2 \mathbf{r}_{zs}}{dt^2} = -G \frac{m_s}{r_{zs}^2} \hat{\mathbf{r}}_{zs} \quad 4.4$$

Przez $\mathbf{r}_{zs}$ oznaczyłem wektor od środka Słońca do środka Ziemi. Ten sam wektor z daszkiem jest jednostkową wersją wektora bez daszka. Równanie to pozwala na obliczenie zmiany położenia Ziemi względem układu współrzędnych zaczepionego w środku Słońca. Ale uwaga, stwierdzenie to oznacza również, że musimy znać położenie i prędkość Ziemi względem Słońca w jednej wybranej chwili. Prawa fizyki pozwalają na obliczanie przyrostów wielkości fizycznych. Jeżeli wiemy o ile zmieniło się położenie Ziemi (ściślej położenie środka Ziemi) na przykład w ciągu godziny, to żeby wiedzieć, gdzie jest Ziemia (ściślej jej środek) po tej godzinie musimy wiedzieć jakie było położenie Ziemi na początku tejże godziny; a wszystko to w wybranym układzie współrzędnych. Wartości położenia i prędkości w wybranej chwili czasu nazywamy warunkiem początkowym. Powiedzmy zatem, że mamy warunek początkowy, masy obu ciał oraz rozwiązanie równania (4.4), ze względu na położenie Ziemi względem środka Słońca. Pozwala to na obliczenie położenia środka Ziemi w każdej chwili czasu. Tyle, że obliczenia te będą dotyczyły położenia Ziemi w ramach przyjętego modelu. Pozostaje pytanie jak się będzie miało położenie rzeczywistej Ziemi do położenia obliczonego? Niestety nasz model jest bardzo uproszczony. Obliczenia dadzą na krótką metę, wyniki całkiem przyzwoite. Ale astronomie nie lubią krótkich met. Ponadto, gdy chodzi o planowanie ruchu sond kosmicznych tak wyznaczona trajektoria Ziemi jest praktycznie, w każdym okresie czasu, za mało dokładna. Błędy wynikają z uproszczeń przyjętych w modelu. Zanieśliśmy wpływ Księżyca, fakt, że ani Ziemia ani Słońce nie jest idealną kulą, że Ziemia wywiera wpływ na Słońce, wpływ innych planet i tak dalej i tak dalej. Jeżeli chcemy uzyskać dokładniejsze wyniki to trzeba skomplikować model. Wydaje się, że powinniśmy w naszym modelu uwzględnić obecność Księżyca, ruch Słońca oraz fakt, że ani Ziemia ani Słońce nie są idealnymi kulami. Z drugiej strony, już samo uwzględnienie Księżyca znacznie komplikuje całe zagadnienie. Otrzymujemy układ trzech równań, którego rozwiązanie jest złożoną sprawą. Dodanie do tego spłaszczenia Ziemi i Słońca czyni obliczenia jeszcze bardziej złożonymi. Niemniej dziś jesteśmy w stanie takie obliczenia wykonywać. W efekcie możemy precyzyjnie obliczać położenie Ziemi i Słońca na tysiące lat do przodu i do tyłu od wybranej chwili, dla której zostały określone warunki początkowe. Możemy również precyzyjnie planować trajektorie sond kosmicznych. A wszystko to stało się możliwe dzięki szybko liczącym komputerom.

Zobacz, że fizyka o której tu mówiłem jest w gruncie rzeczy prosta. Prawo powszechnego ciążenia oraz drugie prawo dynamiki Newtona. Model układu Ziemia – Słońce plus ewentualnie Księżyc jest również prosty. Po krótkim kursie sporo z was nie miałoby problemu z pisanem równań takich jak

równanie (4.4). Ale żeby powiedzieć coś konkretnego czy to o mleczości krów, czy torach planet trzeba się nauczyć z takich modeli wyciągać wnioski. W przypadku planet oznacza to rozwiązywanie układów równań typu (4.4). Przy innych zagadnieniach mogą się pojawić jeszcze bardziej złożone wyrażenia. Tej sztuki, poza bardzo prostymi, szkolnymi przypadkami, trzeba się uczyć przez żmudne ćwiczenia, tak jak przyzwoitego opanowania gry na wybranym instrumencie muzycznym. To nas generalnie do fizyki zniechęca i czyni ją nauką hermetyczną. Czytając książki popularnonaukowe dowiadujemy się mnóstwa fascynujących rzeczy. Ale tak naprawdę działa to trochę na zasadzie objawienia. Bo gdybyśmy zapytali skąd to wiadomo usłyszymy, coś w rodzaju: w elegancki sposób wynika to z tego a tego prawa fizyki. A na pytanie w jakiż to sposób to coś wynika z tychże praw, usłyszymy coś w ten deseń. Wystarczy rozwiązać taki oto piękny układ równań. O to jak ten układ równań rozwiązać lepiej już nie pytać. I choć autorzy książek popularnonaukowych wysilają swoją wyobraźnię by znaleźć sposób na przybliżenie laikowi głębin fizyki i dokonują na tym polu cudów, to jednak bez praktycznego zgłębienia języka matematyki nie można przekroczyć pewnego progu jej zrozumienia. Dlatego język matematyki będzie w toku tego wykładu stale obecny, ba czasem będziesz miał wrażenie, że czytasz podręcznik z matematyki. Ale to nie jest wykład popularnonaukowy.

Tym, którzy posiadli umiejętność operowania aparatem matematycznym otwierają się wrota do naukowej chwały. Pozwolę tu sobie opowiedzieć o jednym przykładzie. Planeta Uran została odkryta w 1781 roku przez Williama Herschela. Na podstawie obserwacji prowadzonych w kolejnych latach próbowano wyznaczyć orbitę planety. Próbowano również ją obliczyć. Niestety rezultaty obliczeń nie były zadowalające. Pojawiło się pytanie: Dlaczego matematyczny Uran nie porusza się tak jak rzeczywisty? Możliwe były dwie odpowiedzi. Po pierwsze coś szwankuje w przyjętym modelu układu planetarnego. Po drugie reguły, na których opiera się model i obliczenia, w dużej odległości od Słońca zaczynają ujawniać swoje ograniczenia. Zatem model jest poprawny i wystarczający, trzeba jednak tak skorygować reguły (to jest prawo powszechnego ciążenia lub drugie prawo dynamiki) aby dobrze opisywały zjawiska w pobliżu orbity Urana. Reguły jednak okazały się wystarczające. Wyjaśnienie różnic między obliczeniami a pomiarami dała korekta modelu. Jak jednak należało skorygować model aby wyniki były do przyjęcia? Dwóch astronomów, działających niezależnie, Francuz Urbain Leverrier i Anglik John Adams założyli istnienie za orbitą Urana jeszcze jednej planety i dodali ją do modelu wykorzystywanego do obliczania orbity Urana. Nieznanej planety można byłoby szukać przeczesując niebo. W owym czasie było to zadanie żmudne i trudne, a nikt nie mógł dać gwarancji, że hipoteza nowej planety jest poprawna. Druga droga wiodła przez równania. W skrócie zabieramy się do rzeczy tak. Nieznana planeta powinna odpowiadać za obserwowane odstępstwa w ruchu Urana. Za dane wejściowe weźmy różnice

między obserwowanym a wyliczonym położeniem Urana. Ułożmy równania opisujące wpływ nieznanej planety na ruch Urana. W równaniach tych będą dwie istotne niewiadome: położenie i masa nieznanej planety. Pozostanie pytanie, czy możemy z tych równań wyliczyć obie niewiadome? Okazało się, że jest to możliwe. Od strony technicznej oznaczało to bardzo żmudne obliczenia. Jednak obaj bohaterowie tej historii, po wykonaniu benedyktyńskiej pracy obliczyli położenie i rozmiar nieznanej planety. Na mecie pierwszy był Adams, który zwrócił się do astronomów z obserwatorium z Greenwich z prośbą o potwierdzenie. Jediną rzeczą, której Adams oczekiwał było to, że astronomowie skierują swoje teleskopy we wskazany rejon nieba i spróbują odnaleźć nieznaną planetę. Wygląda jednak na to, że brytyjscy astronomowie niezbyt przejęli się obliczeniami swojego rodaka. W każdym bądź razie do poszukiwania planety nie spieszyli się. Niewiele później swoje obliczenia ukończył Leverrier, który we wrześniu 1846 wysłał list do Obserwatorium Berlińskiego z prośbą o weryfikację wyników obliczeń. W dniu otrzymania listu, to jest 23 września, Johann Galle przystąpił do obserwacji. Tej samej nocy znalazł nieznaną planetę, której położenie różniło się od obliczonego o niespełną minutę kątową. Odkrycie Neptuna była ogromną sensacją, tym bardziej, że nowa planeta wyłoniła się z gąszczu obliczeń. Co ciekawe ten sam Leverrier stwierdził również odstępstwa między obliczonymi a obserwowanymi położeniami Merkurego. Nic dziwnego, że jako lekarstwo na te trudności zaordynował nieznaną planetę, która miała krążyć wewnątrz orbity Merkurego. Nadano jej roboczą nazwę Wulkan. Tym razem jednak próby obliczenia jej orbity nie powiodły się. A wiesz dlaczego? Dlatego, że takiej planety nie ma, a za kłopoty z wyznaczeniem orbity Merkurego odpowiedzialna była teoria. Subtelności ruchu Merkurego wyjaśniono dopiero na gruncie nowej teorii grawitacji – ogólnej teorii względności.

Popatrz jaka jest siła matematycznych praw fizyki. Na papierze możemy odkryć nieznaną planetę! W późniejszych latach odkryto w ten sposób całą masę innych obiektów astronomicznych. Pierwsze pozaziemskie planety odkryto na podstawie analizy kołysania się gwiazdy, wokół których te planety krążyły. Obserwując te niewielkie ruchy gwiazd można było obliczyć parametry obiektów, które je wywołują. Dopiero po jakimś czasie nauczono się metod pozwalających na bardziej bezpośrednią obserwację takich planet. Dziś w fizyce przede wszystkim obliczamy. Dzięki komputerom nasze możliwości obliczeniowe wzrosły niepomniernie, z czego skwapliwie korzystamy. Duża część nowych odkryć pochodzi z obliczania, dopiero potem sprawdza się je eksperymentalnie. Choć dalej pojawiają się ważne odkrycia prosto z laboratorium. Przykładem może być odkrycie tzw. wysokotemperaturowego nadprzewodnictwa. Nawiasem mówiąc odkrycia laboratoryjne bywają niezwykle frapujące. Często obnażają słabość modeli lub nawet teorii. Wspomniane wysokotemperaturowe nadprzewodnictwo ciągle wymyka się teoretycznym opisom. Więc znów powstaje pytanie czy to szwankują modele,

czy też teoria jest nie do końca wystarczająca. Zwykle winę zwalamy na modele i w znamienitej większości wypadków tak właśnie jest. Jednak póki sprawa nie zostanie wyjaśniona obie możliwości pozostają otwarte. Mógłbyś zapytać: co u licha wstrzymuje nas od konstrukcji dobrego modelu nadprzewodnictwa? Otóż wygląda na to, że dobry model, to taki model, który jest, nawet jak na nasze obecne możliwości, zbyt złożony. Póki nie nauczymy się jakiegoś obejścia tego problemu lub nie stworzymy potężniejszych narzędzi matematycznych, póty nadprzewodnictwo wysokotemperaturowe będzie się teoretykom spod pióra wymykało; chyba, że to szwankują reguły, ale w takim przypadku to zupełnie inna piosenka.

Na koniec naplotkuję jeszcze na matematyków. Zacznę od następującej opowieści. W pokoju wybucha pożar. Do pokoju wpada inżynier, który spostrzega że na stole stoi wiadro z wodą, chwyta więc to wiadro i gasi ogień. Co zrobiliby w tej sytuacji matematyk? Zrobiliby dokładnie to samo. Po pewnym czasie sytuacja powtarza się. I znów do pokoju wpada ten sam inżynier, spostrzega że wiadro stoi teraz pod stołem. Chwyta więc wiadro i gasi ogień. Co zrobiliby w takiej sytuacji matematyk? Matematyk spostrzegłszy, że wiadro stoi pod stołem, chwyciłby je i postawił na stole, sprowadzając w ten sposób problem do problemu jaki już kiedyś rozwiązał. Potem chwyciłby wiadro ze stołu i ugasił pożar. Sam się przekonasz, że jest to ulubiony sposób działania matematyków. I, jak to się mówi, w tym szaleństwie jest metoda. Kiedy będę chciał zwrócić waszą uwagę na to, że właśnie jest to miejsce dobrze obrazujące tą metodę, to powiem, że właśnie mamy przykład zastosowania metody „drogi wiadra”.

Definicja 4.1: Droga wiadra

Droga wiadra oznacza metodę rozwiązywania problemu przez sprowadzenie go do problemu uprzednio rozwiązanego

4.1. Mathematikos

Matematyczny opis przyrody nie jest sprawą oczywistą. Sama matematyka ma długą historię. Rozwój cywilizacji wiązał się z opisem świata przez liczby. Rosnące społeczności wytwarzały coraz bardziej skomplikowane struktury organizacyjne. Kiedy cofniemy się do wielkich cywilizacji starożytności znajdziemy już świat wypełniony liczbą. Król i jego dwór nie mógł znać każdego swojego poddanego. Poddani będą kryli się pod pojemnymi abstrakcyjnymi kategoriami, takimi jak rolnicy, pasterze, wojownicy, mieszkańcy prowincji X. Dwór będzie musiał określić wysokość podatków, a do tego potrzebna jest liczba i ujednolicone jednostki miary. Urzędnicy oszacują spodziewaną wielkość plonów z jednostki powierzchni pola. Do tego też potrzebne są liczby. Liczb potrzebować będzie handel, armia i astronomia, która stanie się źródłem kalendarza. Na potrzeby obmiarów gruntów i wytyczania budów rozwinie się geometria. Ówczesna matematyka była rzemiosłem czysto

praktycznym. Co więcej sztuki rachunków na potrzeby handlu nie łączono w jeden system wiedzy ze sztuką geometrii na potrzeby geodezji. Zamiast jednej matematyki było wtedy wiele metod obliczania tworzonych oddzielnie dla różnych praktycznych celów.

Pierwotnie znaczenie słowa „matematyka” było inne niż obecne. Wywodzi się ono od greckiego „manthano” (uczę się) oraz „mathema” (przedmiot nauki). Matematykami byli zatem ci, którzy uczyli się. W czasie późniejszym słowo to nabiera ograniczonego znaczenia. Matematykami są ci, którzy uczą się przedmiotów o podbudowie teoretycznej. Około roku 200 n.e. Sekstus Empiryk w dziele „Pros Mathematikos” („Przeciw Matematykom”) wypowiada się w kolejnych rozdziałach przeciw: gramatykom, mówcom, geometrom, arytmetykom, astronomom i teoretykom muzyki. Inne źródła zaliczają nadto do matematyki mechanikę, optykę i geodezję. Z biegiem wieków znaczenie słowa „matematyka” ulega dalszemu zawężeniu aż do stanu obecnego.

Grecy uczynią z matematyki naukę teoretyczną. Jednocześnie rozwiną ideę świata matematycznego, która pozostała nam do dnia dzisiejszego. Załączki tego procesu znajdziemy w czasach pierwszych filozofów, poczynając od na wpół legendarnej postaci ojca filozofii, Talesa² z Miletu. Wiele zawdzięczamy na tym polu Pitagorejczykom – bractwu religijno-politycznemu założonemu przez Pitagorasa. Dla Pitagorejczyków droga do zbawienia wiodła przez wiedzę, w której prym wiodła wiedza o liczbach i ich stosunkach. Swą przygodę z liczbą miał zacząć Pitagoras od refleksji w czasie gry na jednostrunowym instrumencie monochordzie. Szarpaną część struny na monochordzie możemy skracać poprzez jej dociskanie do gryfu. Gdy strunę przyciśniemy w połowie długości co odpowiada stosunkowi długości 2:1 to interwał (czyli „muzyczna” odległość) między dźwiękami nazywa się oktawą. Odpowiada jej odległość między na przykład sąsiednimi dźwiękami c. Odkrycie Pitagorasa polegało na stwierdzeniu, że dwa dźwięki wydawane przez strunę sprawiają przyjemne wrażenie, gdy stosunki długości struny dla tych dwóch dźwięków wyrażają się przez małe liczby. Kolejna para powstaje wtedy, gdy stosunek ten wynosi 3:2 (naciskamy strunę w 1/3 długości), co odpowiada interwałowi kwinty (na przykład odległość od dźwięku c do dźwięku g). Kolejny przez naciśnięcie struny w jednej czwartej długości, co odpowiada stosunkowi 4:3 i odpowiada interwałowi kwarty (na przykład odległość od dźwięku c do dźwięku f). Postępując w ten sposób Pitagoras ustalił skalę muzyczną, której różne modyfikacje dominowały w muzyce europejskiej aż po czasy współczesne. Miarą harmonii w muzyce były stosunki liczbowe. Pojawiło się pytanie: czy obserwowany porządek w przyrodzie nie jest efektem miary nakładanej przez stosunki liczbowe?

² Tradycja przypisuje mu między innymi znane ze szkoły twierdzenie Talesa

Swoje muzyczno-matematyczne dywagacje rozszerzył Pitagoras na Kosmos. W stosunkach geometrycznych (na przykład w stosunkach wzajemnych odległości między planetami) orbit odnalazł relacje podobne do muzycznej skali. Stąd niedaleko było do wizji Kosmicznej orkiestry – muzyki sfer (harmonia sfer). W systemie Pitagorasa poszczególne planety i sfera gwiazd stałych stały się źródłem takiej muzyki. Harmonia sfer głęboko umocuje się w europejskiej filozofii i kosmologii. Będzie jej jeszcze szukał, w XVIII wieku, między innymi, Johannes Kepler. A i dziś nie brakuje tych, którzy starają się wsłuchać w muzykę Kosmosu.

Skutkiem tych rozważań matematyka, a ściślej rzecz biorąc teoria liczb oraz muzyka zyskała bardzo wysoki status wśród Pitagorejczyków. Słuchanie muzyki i studiowanie relacji liczbowych oraz ezoterycznych znaczeń liczb stało się istotną częścią drogi do oczyszczenia duszy. Ten ścisły związek między matematyką i muzyką wszął się w europejską duszę bardzo głęboko. Zmieniały się doktryny, religia ale matematyka pozostawała bliska muzyce, choć zmieniał się sposób rozumienia tegoż związku. Za podsumowanie tej myśli niech służy wypowiedź Gottfrieda Leibniza

Muzyką to przyjemność, jakiej dusza ludzka doświadcza przez liczenie, nie zdając sobie sprawy, że ma do czynienia z liczeniem

Współcześnie najbardziej rozpoznawalnym znakiem Pitagorejczyków jest twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie to mówi, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej. Wzorem zapisujemy twierdzenie Pitagorasa tak: Niech a i b będą długościami przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym. Niech c będzie długością przeciwprostokątnej w tym trójkącie, wtedy zachodzi relacja

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad 4.1.1$$

Twierdzenie Pitagorasa jest słuszne w drugą stronę. Jeżeli mamy trójkąt, którego boki spełniają relację ze wzoru (4.1.1), to wtedy trójkąt ten jest trójkątem prostokątnym, a kąt prosty jest kątem pomiędzy dwoma krótszymi bokami (przeciwprostokątnymi). Dla konkretnych trójkątów własność ta była znana przed Pitagorejczykami. Od wieków znany był tzw. trójkąt egipski, którego boki miały długość 3, 4, 5 jednostek³. Wiedzano, że w takim trójkącie kąt między bokami o długości 3 i 4 jest kątem prostym. Fakt ten wykorzystywano między innymi przy wznoszeniu budowli i geodezji, czyli przy obmiarach gruntu. Jednak pitagorejczyków nie interesował konkretny trójkąt. Przedmiotem ich zainteresowania była cała klasa trójkątów prostokątnych. Zamiast zatem posługiwać się trójkątem o proporcji boków 3:4:5, pitagorejczycy rozważali klasę trójkątów, którą my dzisiaj określamy nazwą

³ Przez jednostki rozumiem tu przyjęte w danej kulturze i czasie jednostki długości.

„trójkąt prostokątny”. To było matematyczne słowo miejsce, pod które można było podstawić dowolny trójkąt, zawierający kąt prosty. A twierdzenie Pitagorasa odnosiło się do wszystkich takich trójkątów.

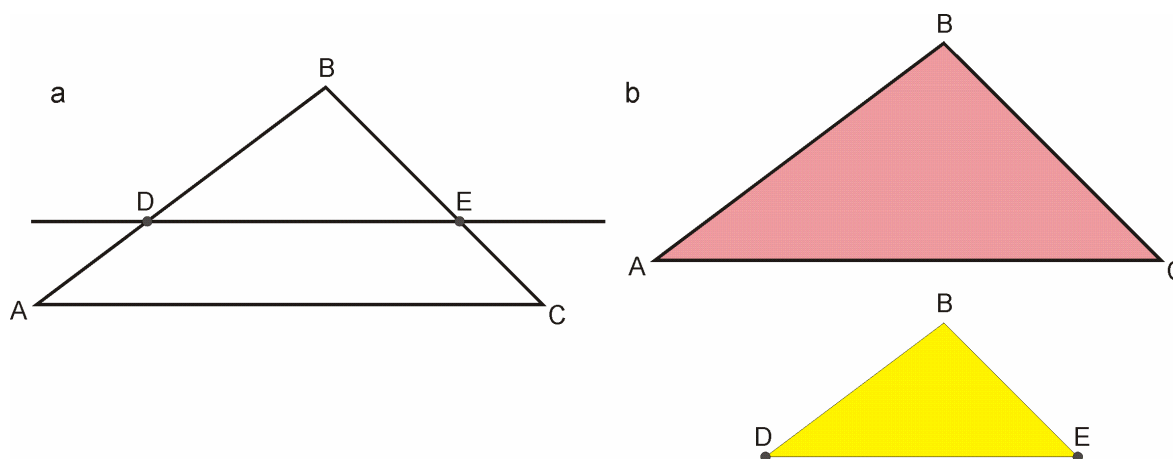
Pitagorejczycy nie tylko sformułowali twierdzenie dla całej klasy trójkątów, ale również je udowodnili. Nie do końca wiemy jak wyglądał ten dowód w swej pierwszej wersji. Mamy jednak pewność, że dowód twierdzenia Pitagorasa miał charakter geometryczny. Na pewno samego dowodu matematycznego pitagorejczycy nie rozumieli tak jak my rozumiemy go dziś. Wszak oni dopiero tworzyli zręby tego pojęcia. Ważne jest jednak to, że podjęli próbę dowiedzenia ogólnego twierdzenia, że wszystkie trójkąty prostokątne spełniają twierdzenie, które dziś nazywamy twierdzeniem Pitagorasa.

Proporcje między liczbami były w centrum zainteresowań Pitagorejczyków. Jest prawdopodobne, że to właśnie oni przeprowadzili pierwszy dowód twierdzenia Talesa (rys. 4.1.1). Dziś wyrażamy to twierdzenie tak:

Twierdzenie 4.1.1: twierdzenie Talesa

Jeżeli ramiona kąta przecięte są prostymi równoległymi, to odpowiednie odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na drugim ramieniu kąta. Z rysunku (4.1.1) na mocy twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{|BD|}{|BE|} = \frac{|DA|}{|EC|} = \frac{|BA|}{|BC|} \quad 4.1.2$$



Rysunek 4.1.1. (a) Ilustracja do twierdzenia Talesa; (b) Z twierdzenia Talesa wynika, że trójkąty ABC oraz DBE są podobne. Oznacza to, że jeden możemy uzyskać z drugiego przez przemnożenie długości wszystkich boków przez tę samą liczbę, przy zachowaniu wartości kątów.

Pitagorejczycy podchodzili do sprawy inaczej. Szukali wspólnej miary dla odcinków CE i BE . Tą wspólną miarę wyznaczał taki odcinek p , dla którego

odcinki CE i BE były całkowitymi wielokrotnościami. To znaczy, że istniały takie liczby naturalne n i m , że

$$n |CE| = m |BE| = p \quad 4.1.3$$

Wynikało z tego, że

$$|BE| = \frac{n}{m} |CE| \quad 4.1.4$$

Stosunek tych dwóch liczb n/m wyrażał harmonię (my dziś mówimy proporcję) pomiędzy odcinkami CE i BE , a odcinek p był miarą tej harmonii. Następnie dowodzili, że ten sam odcinek p jest również miarą dla odcinków AD i BD . Co więcej, że harmonię odcinków AD i BD wyrażają te same liczby n i m . Fakt, że dla obu par odcinków liczby n i m są takie same dowodziło twierdzenia Talesa. Dochodzimy tu do bardzo ważnego pojęcia figur podobnych. Wnioskiem z twierdzenia Talesa jest to, że trójkąty ABC i DBE są trójkątami podobnymi. To, że trójkąty są podobne oznacza, że: po pierwsze kąty tych trójkątów są takie same. Po drugie jeden z nich można uzyskać z drugiego przez przemnożenie długość każdego boku trójkąta wyjściowego przez tę samą liczbę.

Pojęcie podobieństwa figur otwiera nam możliwość tworzenia makiet i planów. Kiedy chcemy zbudować jakiś budynek, możemy najpierw wykonać jego dużo mniejszą makietę. Makietę jest figurą podobną w stosunku do rzeczywistego budynku. To znaczy, że wszystkie kąty są zachowane, a ponadto mnożąc wszystkie odcinki przez tę samą liczbę możemy uzyskać rozmiary rzeczywistej budowli. Korzystamy z tego faktu również przy rysowaniu projektów różnego rodzaju maszyn, konstrukcji, czy choćby szkicując w skali pokój, który chcemy umeblować. Co w tym wszystkim jest niesamowitego? Przecież to każdy z nas wie. Niesamowite jest to, że choć każdy z nas to wie, to wcale nie jest to oczywiste. Wiele starożytnych ludów nie знаło tej oczywistej dla nas zasady i nie korzystało z jej dobrodziejstw. Co nie oznacza, że przed Pitagorasem ludzie nie korzystali z rysunków. Jednak celem tych rysunków nie było odwzorowania realnych obiektów, w mniejszej skali (lub sporządzenia map w naszym sensie rozumienia tego słowa). One symbolizowały owe obiekty według pewnego kodu, który trzeba było znać dla zrozumienia treści rysunku. Kod planu bazującego na podobieństwie geometrycznym jest bardzo prosty i uniwersalny: wszystkie kąty są takie jak na rysunku a długości są zmniejszone o tę samą liczbę. To, że w kulturze Zachodu plan jest sprawą oczywistą zawdzięczamy „rozpanoszeniu” się w niej greckiej geometrii.

Zatrzymajmy się jeszcze przy matematyce. Iloraz dwóch liczb będziemy nazywali ich stosunkiem. Proporcja, taka jak w twierdzeniu Talesa, jest równoważnością stosunków. Oprócz proporcji związanej z twierdzeniem Talesa,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad 4.1.5$$

Gdzie wszystkie liczby a, b, c, d są niezależne (proporcje taką nazywamy proporcją rozłączną) Pitagorejczycy badali inne proporcje. Wśród nich znajdowała się proporcja, którą my dziś nazywamy średnią arytmetyczną. O średniej arytmetycznej mówimy wtedy gdy dla trzech liczb $a \leq b \leq c$ liczba największa c przewyższa liczbę średnią b o tyle o ile liczba średnia b przewyższa liczbę najmniejszą a

$$c - b = b - a \quad 4.1.6$$

Proste przekształcenie prowadzi do bardziej znanego nam wzoru

$$b = \frac{a + c}{2} \quad 4.1.7$$

Kolejna proporcja to proporcja ciągła, odpowiadające średniej geometrycznej. Mówimy o niej, gdy trzy liczby $a \leq b \leq c$ spełniają równanie

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad 4.1.8$$

Proste przekształcenie daje nam bardziej znany wzór na średnią geometryczną⁴

$$b = \sqrt{ac} \quad 4.1.9$$

Na koniec tego krótkiego przeglądu pitagorejskich proporcji zostawiłem złotą proporcję zwaną też boską proporcją, którą oznaczamy często grecką literą φ . Tym razem wystarczą nam dwie liczby $a \geq b$. Z liczb tych skonstruujemy trzecią jako sumę tych dwóch liczb $a+b$. Teraz napiszemy złotą proporcję

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi \quad 4.1.10$$

Ujmując rzecz słowami: Stosunek sumy dwóch liczb do większej z nich jest równy stosunkowi większej liczby do mniejszej liczby. W geometrii możemy zrealizować złotą proporcję dzieląc odcinek tak, że stosunek jego długości do długości większej części jest taki jak stosunek długości większej części do długości mniejszej części. Jest tylko jedna liczba wyrażająca złotą proporcję. Zapiszę lewą stronę (4.1.10) w postaci

$$1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \quad 4.1.11$$

Mnożąc ostatnią równość obustronnie przez φ otrzymujemy

$$\varphi + 1 = \varphi^2 \quad 4.1.12$$

Z powyższego otrzymujemy równanie kwadratowe na φ

$$0 = \varphi^2 - \varphi - 1 \quad 4.1.13$$

⁴ Grecy tak nie pisali, bo nie mieli symbolu ani pojęcia pierwiastka kwadratowego

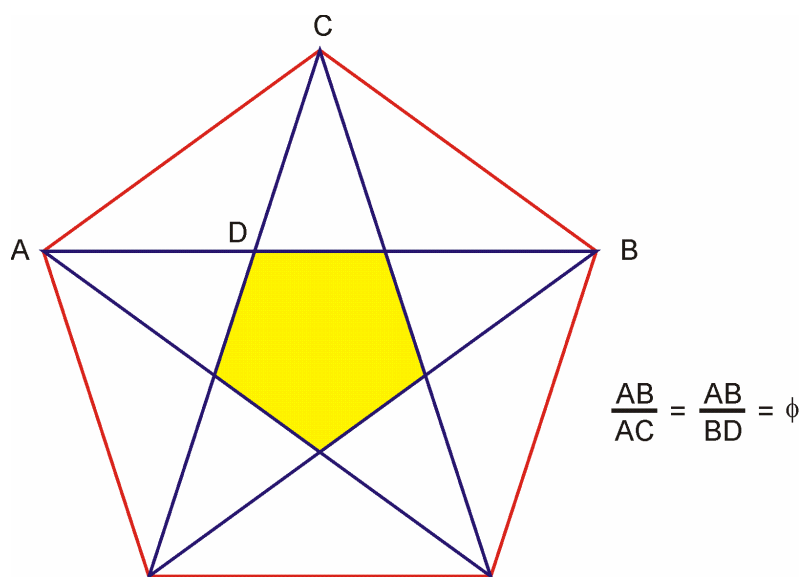
Równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania

$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad 4.1.14$$

Dla nas znaczenie ma rozwiązanie dodatnie

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803399 \quad 4.1.15$$

Czy możesz uwierzyć, że o boskiej proporcji pisano książki (zobacz na przykład Ghyka Matila C., *Złota liczba*, Universitas, Kraków (2001)). A jednak jest to prawda. Zajmuje ona ważne miejsce w matematyce i była główną proporcją greckiej sztuki – można stwierdzić, że grecki kanon piękna był osadzony na jej fundamencie. Po Grekach miłość do boskiej proporcji odziedziczyli Rzymianie a później arabskie i europejskie Średniowiecze, a jeszcze później europejski Renesans. Magia złotej proporcji objawiała się choćby w związku z pięciokątem foremnym (pentagramie), który dla pitagorejczyków miał ścisły związek z ezoterycznie pojmowaną piątką czyli pentadą (rys. 4.1.2)



Rysunek 4.1.2. Pentagram jest ważną figurą w filozofii pitagorejskiej, gdyż jest bezpośrednio związany z ważną liczbą pentadą. Na dodatek w pentagram można wpisać gwiazdę opartą na innym mniejszym pentagramie żółty obszar. Jeszcze bardziej pobudza wyobraźnię fakt, że konstrukcję można prowadzić w nieskończoność. W mniejszy pentagram można wpisać mniejszą gwiazdę opartą na jeszcze mniejszym pentagramie. Zupełne szaleństwo zacznie się wtedy, gdy spostrzeżemy, że harmonia (stosunek) odcinków tak skonstruowanych figur wyznacza złotą proporcję.

Zdominowane przez rozmyślanie o proporcji duchowy świat Pitagorejczyków doświadczył osobliwej klęski. Pitagorejczycy pokazali, że nie wszystkie twory geometryczne mają liczbową miarę, co prowadziło do wniosku, że liczba nie może być uniwersalną miarą dla porządku Kosmosu. Przykładów

nie trzeba specjalnie szukać, wystarczy sięgnąć po przekątną kwadratu o boku jeden. To co pokazali Pitagorejczycy to fakt, który współcześnie możemy sformułować tak: Nie istnieją takie dwie liczby naturalne n i m , że

$$\frac{n}{m} = \frac{a}{s} = 1 \quad 4.1.16$$

Gdzie a to długość boku jednostkowego kwadratu, a s to długość jego przekątnej.

Pitagorejczycy formułowali to tak: Nie można znaleźć takiego odcinka p , który byłby miarą dla boku kwadratu jednostkowego i dla jego przekątnej, czyli zachodziłoby

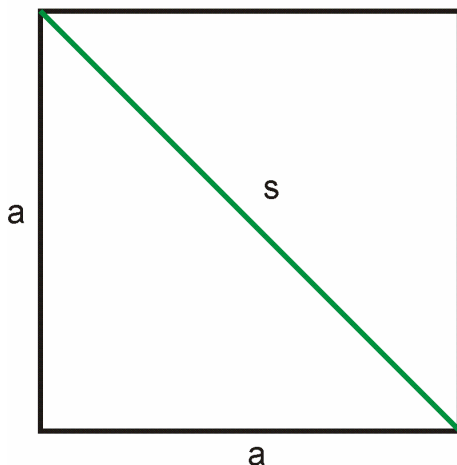
$$n p = a \text{ i } m p = s \quad 4.1.17$$

To pierwsze tak poważne problemy przy próbie zakłęcia porządku świata w liczbie. Ich źródłem nie była obserwacja czy doświadczenie tylko abstrakcyjne matematyczne rozumowanie. Warto zatem dowód tego twierdzenia przytoczyć. Nie wiemy czy dowód pitagorejczyków wyglądał tak samo. Możemy jednak przypuszczać, że szedł podobną ścieżką.

4.1.1. Dowód niewspółmierności długości boku jednostkowego kwadratu i jego przekątnej.

Na początku przyjmijmy, tak na przekór, że istnieją taki odcinek p , dla którego istnieją takie dwie liczby naturalne m i n , że

$$n p = a \text{ oraz } m p = s \quad 4.1.18$$



Rysunek 4.1.3. Kwadrat o boku $a=1$ i przekątnej s . Pitagorejczycy szukali proporcji pomiędzy bokiem a i przekątną s , czyli takiego odcinka p , który byłby miarą zarówno dla boku kwadratu a jak i dla jego przekątnej s . Niestety zamiast znaleźć odnośną miarę udowodnili, że zadania nie da się rozwiązać dla żadnego kwadratu o boku wyrażonym liczbą naturalną lub ogólniej liczbą wymierną.

Wygodnie jest przyjąć odcinek p za jednostkę długości. Wtedy bok kwadratu ma długość równą n takich jednostek, a jego przekątna ma długość m takich jednostek. Dwa boki kwadratu i jego przekątna tworzą trójkąt prostokątny, zatem z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$n^2 + n^2 = m^2 \Rightarrow 2n^2 = m^2 \quad 4.1.19$$

Rozważmy po kolei następujące przypadki:

- a) obie liczby m i n są parzyste,
- b) obie liczby m i n są nieparzyste,
- c) jedna liczba jest parzysta a druga nieparzysta.

Przypadek (b) możemy od razu odrzucić. Widać, że m^2 jest liczbą parzystą – bo daje się przedstawić jako $2 \cdot n^2$. Jeżeli m^2 jest liczbą parzystą, to parzyste musi być również m . Przejdźmy do przypadku (a) - obie liczby m i n są parzyste. Jeżeli tak jest, to każdą z nich możemy zapisać w postaci iloczynu: $n=2n'$ i $m=2m'$, gdzie n' i m' są liczbami naturalnymi. Mamy zatem ciąg wynikających z siebie równości. Zaczynamy od równości (4.1.19)

$$2 \cdot n^2 = m^2 \quad 4.1.20$$

W której liczbę n zamieniamy na równoważną $2n'$, a m na $2m'$

$$2 \cdot (2 \cdot n')^2 = (2 \cdot m')^2 \quad 4.1.21$$

Po obliczeniu potęg mamy

$$2 \cdot 4 \cdot n'^2 = 4 \cdot m'^2 \quad 4.1.22$$

Obie strony równości dzielimy przez 4

$$2 \cdot n'^2 = m'^2 \quad 4.1.23$$

No proszę, równanie (4.1.23) ma taką samą postać jak równanie (4.1.20), od którego zaczęliśmy. Jeżeli zdarzy się, że liczby n' i m' są również parzyste to całą operację możemy powtórzyć. Nie możemy jej powtarzać jednak bez końca. Żadna liczba parzysta nie jest podzielna przez dwa bez końca. Na końcu dzielenia jest zawsze jedynka lub inna liczba nieparzysta. Kolejne dzielenia przez dwa nie mogą sprowadzić jednocześnie n i m do jedynki bo oznaczało by to, że $n=m$. Widać jednak, że przekątna kwadratu jest większa od jego boku mamy więc $m > n$. Tak więc kolejne dzielenia przez dwa doprowadzą nas do sytuacji, w której pozostaną nam dwie liczby naturalne, które oznaczą przez n^* i m^* , a przynajmniej jedna z nich będzie liczbą nieparzystą. Układ liczba parzysta – nieparzysta oznacza przypadek (c). Zatem gdy obie liczby są parzyste to przez kolejne dzielenia przez dwa możemy wyrażenie (4.1.17) sprowadzić do przypadku (c). Przejdźmy zatem do analizy przypadku (c). Ponieważ doszliśmy już do wniosku, że m musi być parzyste (4.1.19), to n musi być nieparzyste. Czyli jeżeli zachodzi przypadek (c), to m jest parzyste, a n jest nieparzyste. Skoro m jest parzyste to zapiszmy je w postaci $m=2k$ i wstawmy do równania (2.6.17).

$$2 n^2 = (2 k)^2 \Rightarrow 2 n^2 = 4 k^2 \Rightarrow n^2 = 2 k^2 \quad 4.1.24$$

Otrzymaliśmy zatem równość

$$n^2 = 2 k^2 \quad 4.1.25$$

Z której jasno wynika, że n^2 jest liczbą parzystą. Z tego wynika, że n jest również liczbą parzystą. Ale dopiero co doszyliśmy do wniosku, że n jest nieparzyste. Ponieważ n nie może być jednocześnie i parzyste i nieparzyste musimy przyjąć, że nie ma takich dwóch liczb naturalnych n i m i odcinka p dla których spełniona jest równość (4.1.17).

Przedstawiony dowód jest tzw. dowodem nie wprost. Popatrz jak przebiegał. Najpierw przyjęliśmy, że spełniona jest równość (4.1.17). Potem pokazaliśmy, że konsekwencją tej równości jest to, że jakaś liczba musi być i parzysta i nieparzysta, co jak wiemy jest niemożliwe. Skoro równość (4.1.17) prowadzi nas do nieprawdziwych wniosków, to sama musi być nieprawdziwa.

W całym tym rozumowaniu nie operowałem na konkretnych liczbach tylko na symbolach m , n , m' , n' , itd., pod które można podstawić wiele liczb spełniających kryteria prowadzonego rozumowania. To jest właśnie, dobrze nam znana, matematyka abstrakcyjna, której fundamenty położyli Grecy. Wnioskuje się na symbolach, pod którymi mogą kryć się często nieskończenie liczne rodziny liczb i figur geometrycznych i innych obiektów matematycznych. Zatem wnioski dotyczą od razu całych wielkich rodzin. Konkrety są tu nieważne, choć zawsze możemy od symbolu przejść do konkretnych liczb czy figur. Przyjmując, że nasz kwadrat nie jest kwadratem o boku jednostkowym ale kwadratem o boku wyrażonym przez dowolną liczbę naturalną lub wymierną, możemy tą samą ścieżką udowodnić, że przekątna takiego kwadratu nie ma wymiernej miary z jego bokiem.

Jaki wypływa wniosek z udowodnionej niemożności. Wiemy, że wybór jednostek długości jest kwestią czysto umowną. Możemy posługiwać się metrami, stopami, łokciami, mikronami czy latami świetlnymi. Mogłoby się wydawać, że gdy mamy kwadrat o danym boku, to zawsze można znaleźć taką jednostkę długości p , że długość boku i przekątnej tego kwadratu wyrazi się przez liczby naturalne. Okazuje się, że nie jest to prawdą. Inaczej jeszcze rzecz ujmując, jeżeli mamy kwadrat o długości boku wyrażonym liczbą naturalną lub wymierną (liczba wymierna to dowolny ułamek a/b , gdzie a i b są dowolnymi liczbami naturalnymi), to długości przekątnej tego kwadratu nie da się wyrazić ani przez liczbą naturalną ani przez liczbę wymierną. W czasach nowożytnych matematycy zdefiniują liczby niewymierne, których jak się okaże jest znacznie więcej niż liczb wymiernych. Przekątna kwadratu o boku jeden ma w dzisiejszych oznaczeniach długość równą $\sqrt{2}$ i jest to liczba niewymierna. Ale czasy Pitagorasa dzieli do liczb niewymiernych długa droga rozwoju matematyki.

Popatrz co zrobiliśmy. Za pomocą prostych środków matematycznych pokazaliśmy, że każdy kwadrat, którego długość boku wyraża się liczbą wymierną, ma przekątną, której długości nie można wyrazić przez liczbę wymierną. Zdolność do wypowiadania i dowodzenia tak zdecydowanych i ogólnych twierdzeń jest elementem, który ciągnął do matematyki rzesze młodych ludzi.

Pisałem już o tym, że wraz z rozwojem cywilizacji ludzki kosmos zaczęły wypełniać liczby. To co się stało za sprawą Pitagorejczyków przekroczyło kolejną miarę w ekspansji liczb na nasz świat. Pitagorejczycy uczynili z liczby jeden z filarów swojej kosmologii. I choć ich koncepcje należą dziś do historii filozofii, to liczba na tym nie straciła, a matematyka jest cichym współwładcą współczesnego świata. Nie dostrzegamy jej siły, bo jej dostrzeżenie wymaga przygotowania, którego zwykle nie mamy. Ponadto jesteśmy ogłuszeni szcękami broni i oślepieni blaskiem pałaców i wielkich fortun. Natomiast armia matematyki, czyli matematycy, jawi się nam jako społeczności ludzi oderwanych od życia, zatopionych w swych niezrozumiałych pasjach i niezbyt zasobnych finansowo. Uważam, że trudno o lepszą armię. Brak dużych zasobów materialnych, wpływów politycznych, uważane za trudne i oderwane od życia abstrakcyjne problemy odstrasza karierowiczów, a przyciągają zapaleńców, którzy w zaciszu gabinetów, na uboczu zgiełku współczesnego świata, dają matematyce olbrzymią siłę oddziaływania na nasze życie.

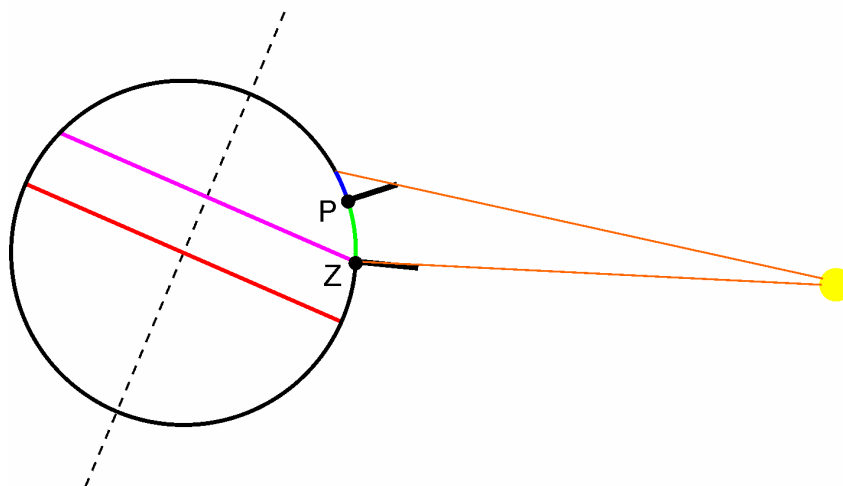
Nie mogę się tu powstrzymać od jeszcze jednego odniesienia do współczesności. Dziś nie wsłuchujemy się co prawda w muzykę kosmicznych sfer, ale oddziaływanie między ciałami niebieskimi potrafi ustawić ich orbitalne czasy obiegu w tzw. rezonansach, które są stosunkami niedużych liczb naturalnych. Rezonanse funkcji falowych otwierają drzwi do czarownego świata mechaniki kwantowej, gdzie być może kryją się kolejne drzwi do tajemnicy życia⁵. I choć współczesna teoria kwantowa czy grawitacji daleko odbiegała od kosmosu pitagorejczyków to znaczenie prostych stosunków częstości w tej kwantowej muzyce bardzo by Pitagorasa ucieszyła.

Podboje Aleksandra Wielkiego wprowadzą Greków na tory imperialne. Stworzone przez Aleksandra imperium szybko rozpadnie się na kilka, rządzonych przez Greków królestw. Tak szerokie otwarcie na świat i zarządzanie wieloma ludami i językami zmieni samych Greków. Przez to zmieni się również sposób w jaki rozwijali filozofię i matematykę. W tym czasie Grecy wejdą na ścieżki bliskie nauce nowożytnej. Wiemy już, że działalność w naukach ścisłych i w części nauk przyrodniczych sprowadza się do formułowania wysoce abstrakcyjnych reprezentacji rzeczywistości zmysłowej, a następnie analizę tych reprezentacji (modeli) za pomocą narzędzi matematycznych. Spójrzmy na sprawę na przykładzie pomiaru obwodu Ziemi przez Eratostenesa⁶. W pierwszym kroku zbudował on abstrakcyjny model układu Ziemia-Słońce. W tym modelu Ziemia i Słońce była kulą. Jakby nie patrzeć Ziemia kulą nie jest. Jest planetą o bogatym wnętrzu, pofałdowanej powierzchni, pokrytej w większej części oceanem. Na tej powierzchni toczy się

⁵ J. Al.-Khalili, J. McFadden, Życie na krawędzi. Era kwantowej biologii, Prószyński i S-ka, 2016

⁶ Eratostenes był greckim matematykiem, astronomem, geografem i poetą. Za rządów Ptolemeusza III był zarządcą Biblioteki Aleksandryjskiej i nauczycielem dzieci faraona, w tym jego następcy Ptolemeusza IV.

życie. Ziemia jest bardzo złożonym układem. Narysowanie tak prostej bryły jak kula i stwierdzenie - to jest Ziemia - wydaje się przesadą graniczącą z szaleństwem. Jednak nas to szaleństwo nie odrzuca. My takiego postępowania uczymy się od wczesnych lat szkolnych. W czasach Eratostenesa było to czymś zupełnie nowym i budzącym sprzeciw. A jednak działanie Eratostenesa było na swój sposób subtelne. Z całego bogactwa Ziemi zostawił tylko to co niezbędne do określenia jej obwodu. Mapa kontynentów, czy ich zalesienie nie jest do tego celu przydatna. To co zostało, jako niezbędne do obliczenia obwodu, okazało się być kulą. Podobnie Eratostenes potraktował Słońce. Sprowadził je do kuli, a w gruncie rzeczy do świecącego punktu. Przyjął również geometryczną, a zatem matematyczną, reprezentację światła jako promieni (linii prostych). Następnie zapomniał o rzeczywistości i zajął się swoim wysoce uproszczonym modelem (rys. 4.1.4). Do jego analizy posłużył się geometrią. Ważne jest by zrozumieć, że po sformułowaniu modelu, zadanie przestaje być związane z przyrodą. Staje się czysto matematyczną zabawą. Po zakończeniu przekształceń matematycznych symboliczny wynik ponownie interpretujemy w kategoriach fizycznych. Dziś nie potrafimy dokładnie odtworzyć metody Eratostenesa. Jednak nie o szczegóły tu chodzi ale o metodologię, która bardzo przypomina postępowanie we współczesnej nauce. Metodologia ta zaczęła się rozwijać w okresie hellenistycznym i objęła między innymi: astronomię, mechanikę, pneumatykę, medycynę, nauki o uprawach. Państwa hellenistyczne upadły na skutek agresji Rymu. Rzymscy komentatorzy mieli kłopot ze zrozumieniem hellenistycznej metodologii odrzucając jej warstwę teoretyczną jako niepotrzebną filozofię. Spuścizna helleńskich uczonych, przez to, że niezrozumiała w znacznej swej części przepadła. Praca Eratostenesa miała sporo szczęścia, gdyż pozostał z niej wynik i uproszczony opis metody pomiaru obwodu Ziemi. Nie mniej okruchy hellenistycznej wiedzy wywierały inspirujący wpływ na rozwój europejskiej nauki aż po XIX wiek. Hellenistyczna geometria była przez długi czas jedyną skuteczną metodą obliczeniową w nauce (np. w astronomii) i technice (np. nawigacja), a matematyzacja nauki na wzór najbardziej zaawansowanych metod Hellenów stała się punktem wyjścia do sukcesu współczesnej nauki. Dziś ta matematyzacja nauki jest daleko bardziej posunięta, a algebraizacja geometrii i pojawienie się analizy matematycznej zaczęły spychać klasyczną geometrię z pozycji głównej metody obliczeniowej. Maszyny matematyczne dopełniły dzieła. Dziś więc obliczamy wykorzystując liczby a nie rysunek.



Rysunek 4.1.4. Aby rozwiązać problem pomiaru obwodu Ziemi, Eratostenes zbudował abstrakcyjną reprezentację (model) układu Ziemia-Słońce. Model ten „zgubił” wszystkie informacje na temat Ziemi, oprócz tego, że jest ona podobna do kuli. Przez Ziemię przechodziła oś obrotu sfery gwiazd stałych, choć nie jest wykluczone, że Eratostenes, przyjmował, że to Ziemia się obraca. Czerwona kreska to równik, a różowa to zwrotnik Raka. Słońce, w modelu Eratostenesa, było świecącym punktem, a światło reprezentowały prostoliniowe promienie. W ten sposób realna sytuacja fizyczna przedstawiona została w postaci matematycznych symboli (ściślej geometrycznych symboli). Teraz przyszła kolej na fakty. Wiadomo, że w dniu przesilenia letniego w południe Słońce „wisi” dokładnie nad głowami mieszkańców okolic zwrotnika Raka, przez co przedmioty nie mają cienia. W tym samym czasie, poza zwrotnikiem przedmioty rzucają tym dłuższy cień im dalej są od tego zwrotnika oddalone (cień reprezentuje niebieski odcinek). Znając odległość ZP (zielony odcinek) między punktem na zwrotniku Z oraz punktem P poza zwrotnikiem, ale leżącym na tym samym południku, oraz mierząc długość cienia w tym drugim punkcie, w samo południe, możemy obliczyć jaką część obwodu Ziemi jest ZP. Stąd możemy obliczyć obwód Ziemi. Aby to zrobić musimy potraktować sytuację pokazaną na rysunku jako zadanie czysto geometryczne.

4.2. Abstrakcje

Budując model układu fizycznego przenosimy go w świat matematycznych abstrakcji. A kiedy już jesteśmy w świecie matematycznej abstrakcji, to wszystko co się w jego ramach dzieje oderwane jest od fizycznej rzeczywistości. Dopiero, pod koniec biegu matematycznych procedur, powracamy do fizycznej interpretacji matematycznych symboli. W rzeczywistości rozdział na część matematyczną i fizyczną nie zawsze jest taki czysty. Przekształcając wyrażenia matematyczne fizycy potrafią wspomóc się intuicją fizyczną, która czasem pozwala przeskoczyć trudne lub żmudne rachunki. Ja również będę się w ten sposób wspomagał w rachunkach. Można by rzec, że jest to skok poza przestrzeń matematyczną, który pozwala na pójście z przekształceniami

matematycznymi na skróty. Po takim skoku ponownie wracamy do świata czystej matematyki.

Powiedzmy, że przetłumaczyliśmy jakieś zagadnienie fizyczne Z_1 na język matematyki. Oznacza to, że osadziliśmy nasz problem fizyczny w pewnej matematycznej abstrakcji, którą oznaczę przez A . Mamy n symboli matematycznych $s_1, \dots, s_n$, które wiążą się z n wielkościami fizycznymi $f_1, \dots, f_n$. Zwykle okazuje się, że wiele różnych zagadnień fizycznych daje się osadzić w tej samej matematycznej abstrakcji. Powiedzmy, że symbolom $s_1, \dots, s_n$ naszej matematycznej abstrakcji odpowiadają również symbole $g_1, \dots, g_n$ reprezentujące jakieś inne wielkości fizyczne dotyczące innego zagadnienia fizycznego Z_2 . Powiedzmy, że przenosząc się w świat matematyki doszliśmy do wniosku, że wielkość matematyczna s_3 nie może być ujemna. Ale to oznacza, zarazem, że w pierwszym zagadnieniu fizycznym Z_1 wielkość f_3 nie może być ujemna jak i również w drugim zagadnieniu fizycznym Z_2 wielkość g_3 nie może być ujemna. Co więcej w każdym zagadnieniu fizycznym, które da się przetłumaczyć na abstrakcję A , wielkość fizyczna odpowiadająca wielkości matematycznej s_3 nie może być ujemna. Ma to doniosłe znaczenie. Na przykład mogę się zupełnie nie znać na medycynie, ale jeżeli przebieg jakiegoś badania medycznego da się opisać poprzez abstrakcję A , i lekarz powie, że w wyniku badania okazało się, że jakiś parametr medyczny, nazwijmy go *mixus pixus*, wyszedł ujemny co jest niespotykanym i niepokojącym objawem, to przyjmę to z pokorą i niepokojem. To lekarz się w końcu na tym zna, a ja może nawet nie wiem jakie jest znaczenie tego *mixus pixus*. Ale jeżeli dowiem się, że aparat do badań został zaprojektowany w oparciu o abstrakcję A i parametr *mixus pixus* odpowiada wielkości s_3 w abstrakcji A , to zaprotestuję. Wiem, że w abstrakcji A wielkość s_3 nie może być ujemne, a co za tym idzie *mixus pixus* też nie może być ujemne. I nie ma to znaczenie czy wiem co to jest *mixus pixus* czy nie. Jeżeli *mixus pixus* wyszło ujemne to oznacza, że badanie zostało wykonane niepoprawnie, lub co gorsza, że cała metodologia badań jest zawodna, bo zastosowany do niej przyrząd opiera się o abstrakcję A , która wyklucza taką możliwość. Skoro takie wyniki jednak się pojawiają to abstrakcja A jest niewłaściwie dobrana. Tak czy inaczej wynik badań jest niewiarygodny, albo dla mnie, bo wykonujący badania był niedbały, albo dla wszystkich badanych w ten sposób, bo abstrakcja, na której opiera się badanie jest w jakimś istotnym zakresie błędnie dobrana. Jak widzisz siła rażenia abstrakcji matematycznych może być bardzo duża.

Określmy przykładową prostą abstrakcję matematyczną, krótko abstrakcję.

Definicja 4.2.1: Abstrakcja liniowa czterech wielkości.

Cztery wielkości a , b , x i y związane są abstrakcją liniową, gdy spełniona jest zależność

$$y = ax + b \quad 4.2.1$$

Przykładami abstrakcji liniowej jest związek między drogą s , punktem startowym s_0 , prędkością stałą i czasem: $s = s_0 + vt$. Inny znany przykład to prawo Ohma wiążące napięcie U , natężenie prądu I oraz opór elektryczny R : $U = RI$. Nie ma tu wielkości odpowiadającej czynnikowi b ze wzoru (4.2.1), co oznacza, że jest on równy zero. Jeszcze inny przykład to teoria, która posłużyła do skalowania termometru rtęciowego. Przy jego konstrukcji założono, że związek między temperaturą T a rozszerzalnością liniową rtęci jest liniowy: $T = L_0 + aL$. Parametr a określa rozszerzalność liniową rtęci i jest równy przyrostowi długości, któremu odpowiada jednostkowa zmiana temperatury. Wymiarem parametru a jest temperatura/długość. L_0 jest początkową długością słupa rtęci, czyli długością jaką ma ten słup, w wybranej temperaturze początkowej. Zależności liniowe wydają się proste, ale wkrótce się okaże, że ich szersze rozumienie otwiera drogę do bardzo pojemnych matematycznych modeli układów fizycznych.

Bardziej zaawansowaną abstrakcją jest abstrakcja kwadratowa.

Definicja 4.2.2: Abstrakcja kwadratowa pięciu wielkości.

Pięć wielkości a , b , c , x i y jest związanych abstrakcją kwadratową, gdy spełniona jest zależność

$$y = ax^2 + bx + c \quad 4.2.2$$

Przykładem abstrakcji kwadratowej jest związek między drogą s , stałym przyspieszeniem a , położeniem początkowym x_0 i czasem t : $s = x_0 + vt + 1/2at^2$.

Jeszcze innym przykładem abstrakcji jest metoda Eratostenesa z rysunku (4.1.4). Tutaj obiekty fizyczne reprezentowane są przez obiekty klasycznej geometrii. Nie użyłem słowa wielkości, gdyż w tej abstrakcji mamy obiekty. Na przykład Ziemię nie określamy przez takie wielkości fizyczne jak masa czy promień tylko przez obiekt – czyli okrąg o szukanym obwodzie. Słońce to punkt, a światło z źródła punktowego to pęk linii prostych. Ten rodzaj abstrakcji nazwę abstrakcją Eratostenesa

Definicja 4.2.2: Abstrakcja Eratostenesa.

W abstrakcji Eratostenesa obiekty danego modelu układu fizycznego przyporządkowane są obiektom należącym do geometrii Euklidesa.

Z abstrakcją Eratostenesa mamy do czynienia, kiedy dane zagadnienie fizyczne rozwiązujemy metodami klasycznej geometrii.

I jeszcze jedna uwaga. Wprowadzone tu nazewnictwo, a ściślej rzecz biorąc słowo „abstrakcja” to mój wymysł. Nie spotkacie takiego określenia w innych książkach. Ale jak sądzę będzie ono nam dalej dobrze służyło.

4.3. Pewna podstawowa technika matematyczna

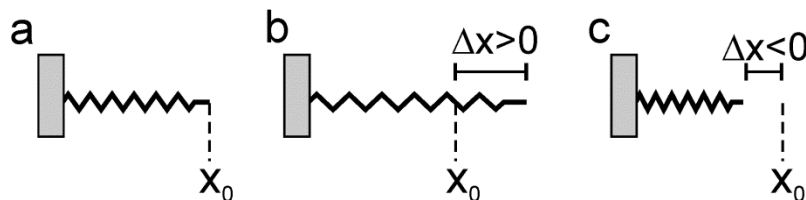
Nie ma jednej recepty na budowanie abstrakcji matematycznych wiążących wielkości charakteryzujące dany układ fizyczny. Nie mniej można wskazać pewne częściej niż inne wykorzystywane metody. Tutaj chcę skupić się na metodzie, która polega na zastąpieniu szerokiej klasy funkcji przez kombinację obiektów elementarnych. Przykładem takiej procedury są tzw. szeregi Taylora. Definicję szeregu Taylora znajdziesz w (§DB 3). Okazuje się, że szeroką klasę funkcji możemy na pewnym przedziale $[a,b]$ przedstawić w postaci nieskończonego szeregu

$$f(x) = f(x_0) + \alpha_1(x - x_0) + \dots + \alpha_n(x - x_0)^n + \dots \quad 4.3.1$$

Gdzie x_0 jest wybranym punktem, w którym wyrażenie (4.3.1) sprowadza się do postaci.

$$f(x_0) = f(x_0) \quad 4.3.1a$$

Mówimy, że funkcja f jest rozwinięta w szereg Taylora wokół punktu x_0 . Stałe $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ zależą od wyboru punktu x_0 . Szereg Taylora wskazuje na pewien sposób postępowania. Dobrym przykładem jest tu opis relacji między siłą napinającą a rozciągnięciem sprężyny. Ustawmy punkt początkowy układu współrzędnych przy końcu luźnej sprężyny (rys. 4.3.1)



Rysunek 4.3.1. Trzy stany sprężyny. a) swobodna; b) naciągnięta; c) ściśnięta
Pewna siła rozciągnęła tę sprężynę o długość Δx . W naszym układzie współrzędnych $\Delta x = x - 0 = x$. Nie wiemy jak dokładnie wygląda relacja między siłą naciągu a wielkością $\Delta x = x$, wiemy natomiast, że możemy ją opisać funkcją $F = f(x)$. Rozwińmy tę funkcję w szereg Taylora wokół punktu $x_0 = 0$. Może nie wiesz jak to się robi, ale to nie szkodzi. Prowadzimy rozważania natury ogólnej, więc nie musisz umieć liczyć. Podstawimy po prostu do wzoru (4.3.1) wartość $x_0 = 0$.

$$f(x) = f(0) + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n + \dots \quad 4.3.2$$

Widać przy tym, że w naszym konkretnym przypadku $f(0) = 0$, gdyż dla rozciągnięcia równego zero $\Delta x = 0$ potrzebna jest zerowa siła. Mamy zatem

$$f(x) = \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n + \dots \quad 4.3.3$$

A teraz ważna uwaga, im bliżej jesteśmy punktu x_0 , tym mniej wyrazów szeregu Taylora jest potrzebne do opisanie funkcji f z zadaną dokładnością. W szczególności dla odpowiednio małych Δx zupełnie wystarczy wyraz liniowy

$$f(x) = \alpha_1 x \Rightarrow F(x) = \alpha_1 x \quad 4.3.4$$

Wzór (4.3.4) wyraża prawo Hooke’a. W prawie Hooke’a $\alpha_1 = k$, gdzie k jest tzw. stałą sprężystości. Wzór (4.3.4) przechodzi w

$$F(x) = kx \quad 4.3.5$$

Zauważ, że nie wiedziałem jak wyraża się siła sprężystości. Ale korzystając z rozwinięcia Taylora, doszedłem do wniosku, że przy niezbyt dużych naciągnięciach musi to być funkcja liniowa. To taki model kulistej krowy dla sprężyny. Dalej nie wiem jaka jest wartość stałej k dla konkretnej sprężyny. To jest wielkość, którą muszę zmierzyć, lub odczytać w danych technicznych dostarczonych przez producenta. Nawiasem mówiąc dla dobrej sprężyny model liniowy jest całkiem dobry, bo dobre sprężyny powinny mieć dobrze liniową zależność między naciągnięciem a siłą naciągającą, w roboczym zakresie rozciągnięć. A jak liniowa zależności okazuje się za słaba, to zawsze możemy spróbować zależność kwadratową

$$f(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \quad 4.3.6$$

Może nawet sześcienną.

Powiedziałem, że dobre sprężyny powinny mieć „dobrze liniową zależność między naciągnięciem sprężyny a siłą naciągającą”. Co oznacza, w tym kontekście, słowo „dobrze”.

Wyjaśnienie 4.3.1: dobrze coś

Zwrot dobrze coś, oznacza, że jakieś przybliżenie, na przykład liniowe (dobrze liniowe), wystarczająco dokładnie opisuje problem, w zadanym zakresie zmienności parametrów, z punktu widzenia teorii lub zastosowań praktycznych.

Jeszcze jedna uwaga. Pierwszorzędowe rozwinięcie Taylora postaci

$$f(x) = f(x_0) + \alpha_1 (x - x_0) \quad 4.3.7$$

Definiuje abstrakcję liniową dla danego problemu. Mamy więc uniwersalny sposób budowania abstrakcji liniowej (def. 4.3.1). Drugorzędowe rozwinięcia Taylora da nam abstrakcję kwadratową (def. 4.3.2). Kiedy przyjdzie nam budować pierwszy model danego układu (taki model kulistej krowy), zaczniemy od liniowej części rozwinięcia w szereg Taylora, co oznacza że cały problem, lub jego część sprowadzimy od strony matematycznej do abstrakcji liniowej. Nie zawsze można się oprzeć na szeregu Taylora. Czasem rozsądnie jest odwołać się do szeregów zbudowanych z funkcji trygonometrycznych (tzw. szeregi Fouriera są omówione w §TVIII 3), czasem do jeszcze innej metodologii, na przykład do klasycznej geometrii. Ale zobaczysz, że opisana tu procedura bazująca na szeregu Taylora będzie przez nas często

wykorzystywana. Nie tylko przez nas. Często wykorzystują ją również profesjonalni fizycy.

Musimy jeszcze nadać nazwę, która będzie identyfikowała opisaną tu metodologię. Nazwą ją metodą klocków lego, gdyż bardzo szeroką gamę funkcji pozwala przedstawić jako sumę pewnego zbioru funkcji elementarnych. Idąc w drugą stronę możemy stwierdzić, że z pewnego zbioru funkcji elementarnych możemy zbudować szeroką gamę różnych funkcji, tak jak z klocków lego możemy zbudować szeroką gamę różnych konstrukcji.

Definicja 4.3.1: Metoda klocków Lego

Metoda klocków Lego polega na zastąpieniu szerokiej klasy funkcji przez kombinację liniową pewnego zbioru funkcji podstawowych

5. Mathematica ♦

Żyjemy w czasach, w których komputer stał się nieodzownym kompanem człowieka. Na uczelni życie bez komputera jest praktycznie niemożliwe. Ściągam przez sieć literaturę, komunikuję się z kolegami po fachu, piszę, ale również liczę. W roku 2012 na mojej uczelni studenci stracili tradycyjne indeksy na rzecz indeksów elektronicznych. Przyznam (ale raczej niechętnie), że w wielu aspektach komputerowego życia studenci mają nade mną przewagę. Stykając się z komputerem od pieluszki nabrali nawyków, których ja nie mam. Zacząłem używać prostych ośmiobitowych komputerów w czasie studiów, w czasach gdy coś takiego jak Internet z rzadka śnił się wizjonerom świata IT. Ubolewam nad faktem, że mimo tego obycia, tak wielu moich studentów nie potrafi dobrze wykorzystać komputera do liczenia. A możliwości ku temu są dziś ogromne. Dla wąsko określonych zadań mamy do dyspozycji specjalizowane oprogramowanie, bywa, że dostępne za darmo (przynajmniej w podstawowej wersji). Można również samemu napisać odpowiedni program na przykład w języku C++, czy Python. Ale aby ten program był szybki i pewny w działaniu trzeba sporo wiedzy na temat metod numerycznych. Obliczenia, które nie wymagają wielkiej mocy obliczeniowej, lub pierwsze przymiarki do rozwiązania problemu warto przeprowadzić z użyciem pakietów matematycznych. Dostarczają one ogromnej liczby narzędzi, opracowanych przez specjalistów, i działających względnie szybko, a co nie mniej ważne pewnie. Przykładem takich pakietów jest Mathematica, Maple i Matlab. Są również inne pakiety o mniejszych możliwościach lub mniejszej pewności obliczeń. Przykładem jest MathCad, Derive, Maxima. Niektóre z nich są darmowe (np. Maxima, Yacas), co zwykle oznacza kłopoty z instalacją i mniej dopracowany interfejs użytkownika oraz mniejszy zasób narzędzi.

Ja w swojej praktyce używam pakietu Mathematica. Ze wszystkich dostępnych pakietów Mathematica jest najbardziej wymagająca, ze względu na strukturę języka (omawiane tu pakiety to w gruncie rzeczy języki programowania) odbiegającą od takich standardów jak język C czy Pascal. Z drugiej strony język pakietu Mathematica jest najbardziej elastyczny. Omówienie wszystkich możliwości pakietu Mathematica (Maple, Matlab, etc.) zajęłoby setki stron tekstu i przekracza moje możliwości. Przekażę jednak garść podstawowych informacji, tym bardziej, że pewne przykłady będę opracowywał z użyciem tego pakietu. Więcej informacji o pakiecie możesz znaleźć na stronie producenta www.wolfram.com.

Samo posługiwanie się jakimkolwiek pakietem matematycznym wymaga opanowania struktury języka tego pakietu. Prostych operacji można nauczyć się w dwie, trzy godziny. Ale używanie wielkich kombajnów do prostych prac mija się z celem. Przyzwoite opanowanie struktury języka takiego pakietu jak Mathematica wymaga niestety znacznie większego nakładu pracy, ale daje

przepustkę do efektywnego wykorzystania jego możliwości. Możliwości każdego z pakietu można poukładać w szereg kategorii tematycznych. Poniżej wymienię kilka z istotnych dla większości użytkowników.

5.1. CAS

CAS to skrót od Computer Algebra System, czyli system algebry komputerowej. Mówiąc krótko, komputer może liczyć na wzorach. I tak szukając rozwiązania całki możesz próbować liczyć ją sam, poszukać rozwiązania w tablicach całek, lub posłużyć się pakietem CAS. Żadna z tych metod nie gwarantuje sukcesu, ale każda daje szansę na znalezienie rozwiązania. Aby nie być gołosłownym posłużę się przykładem. Mam nadzieję, że całka postaci

$$\int x e^{ax^2} dx \quad 5.1.1$$

nie sprawiłaby wam problemu. Dla pakietu Mathematica to bułka z masłem

$\text{Integrate}[x \text{Exp}[ax^2], x]$	polecenie obliczenia tej całki
$\frac{e^{ax^2}}{2a}$	wynik
Mat 5.1.1. Do symbolicznego obliczania całek służy instrukcja <i>Integrate</i> .	

Z tą całką macie prawo mieć problemy

$$\int \sqrt{x} \sqrt{1+x} dx \quad 5.1.2$$

ale nie Mathematica

$\text{Integrate}[\text{Sqrt}[x] \text{Sqrt}[1 + x], x]$	polecenie obliczenia tej całki
$\frac{1}{4}(\sqrt{x} \sqrt{1+x}(1+2x) - \text{ArcSinh}[\sqrt{x}])$	wynik
Mat 5.1.2. Kolejny przykład całkowania symbolicznego w pakiecie Mathematica	

Z taką całką mogą mieć problemy nawet osoby, które na całkowaniu dobrze się znają

$$\int (\tan(x))^n dx \quad 5.1.3$$

Mathematica daje radę

$\text{Integrate}[\text{Tan}[x]^n, x]$	polecenie obliczenia tej całki
$\frac{\text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1+n}{2}, 1, 1 + \frac{1+n}{2}, -\text{Tan}[x]^2\right] \text{Tan}[x]^{1+n}}{1+n}$	wynik
Mat. 5.1.3. Tym razem w rozwiązaniu pojawiła się funkcja specjalna	

Wynik został obliczony z użyciem funkcji specjalnej, tzw. uogólnionej funkcji hipergeometrycznej. Ta, z pozoru prosta, całka

$$\int x e^{ax+bx^2+cx^4} dx \quad 5.1.4$$

okazuje się dla pakietu Mathematica za trudna, dla mnie zresztą też. Co nie oznacza, że nie ma dla niej rozwiązania. Żaden pakiet nie policzy wszystkich możliwych całek, które gdzieś ktoś kiedyś policzy, lub dla których stworzono narzędzia do policzenia. Wiedza matematyczna jest dziś zbyt obszerna by mogły ją objąć nawet tak rozrośnięte w tym względzie pakiety jak Mathematica, czy Maple.

$\text{Integrate}[x \text{Exp}[ax + bx^2 + cx^4], x]$	polecenie obliczenia całki
$\int e^{ax+bx^2+cx^4} x dx$	przepisanie całki oznacza, brak wyniku
Mat. 5.1.4. Gdy system nie potrafi obliczyć całki zwraca wyniki w postaci wejściowego wzoru	

Używając systemów CAS nie musimy ograniczać się do obliczania całek. Możemy liczyć sumy wyrazów; oto przykład

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^6} \quad 5.1.5$$

Wynik tej nieskończenie wieloczynnikowej sumy jest skończony

$Sum[1/i^6, \{i, 1, Infinity\}]$	polecenie sumowania wyrazów typu $1/i^6$, gdzie i zmienia się od jednego do nieskończoności
$\frac{\pi^6}{945}$	wynik
Mat 5.1.5. Instrukcji <i>Sum</i> używamy, gdy chcemy symbolicznie zsumować kolejne wyrazy szeregu	

Możemy liczyć granice funkcji, na przykład

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

5.1.6

$Limit[\sin(x)/x, x \rightarrow 0]$	polecenie obliczenia wartości funkcji $\sin(x)/x$ dla $x \rightarrow 0$
1	wynik
Mat. 5.1.6. Instrukcja <i>Limit</i> służy do liczenia granic	

Rozwijając funkcje w dopiero co wspomniane szeregi Taylora; na przykład możemy rozwinąć funkcję $\cos(x)/x$, wokół punktu $x=0$, z dokładnością do dziesięciu wyrazów.

$Series[\cos(x)/x, \{x, 0, 10\}]$	polecenie rozwinięcia w szereg Taylora funkcji $\cos(x)/x$, wokół punktu $x=0$. Wynik ma zostać obcięty na wyrazach rzędu większego niż dziesięć.
$\frac{1}{x} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^5}{720} + \frac{x^7}{40320} - \frac{x^9}{3628800} + O[x]^{11}$	wynik
Mat 5.1.7. Instrukcja <i>Series</i> pozwala na obliczanie rozwinięć w szeregi potęgowe	

Możemy rozwijać wyrażenia algebraiczne

$Expand[(1 + x + y)(2 - x)^3]$	polecenie rozwinięcia wyrażenia w nawiasie kwadratowym
$8 - 4x - 6x^2 + 5x^3 - x^4 + 8y - 12xy + 6x^2y - x^3y$	wynik
Mat 5.1.8. Instrukcja <i>Expand</i> pozwala rozwijać wyrażenia	

lub je zwijać

Simplify[$\frac{1}{3(1+x)} - \frac{-1+2x}{6(1-x+x^2)}$ $+ \frac{2}{3(1+\frac{1}{3}(-1+2x)^2)}$]	polecenie uproszczenia wyrażenia w nawiasie kwadratowym
$\frac{1}{1+x^3}$	wynik
Mat 5.1.9. Instrukcja <i>Simplify</i> , to jedna z instrukcji pozwalająca na skracanie wyrażeń	

Rozwiązywać równania różniczkowe; na przykład takie równanie

$$\frac{dy(x)}{dx} + y(x) = a \sin(x) \quad 5.1.7$$

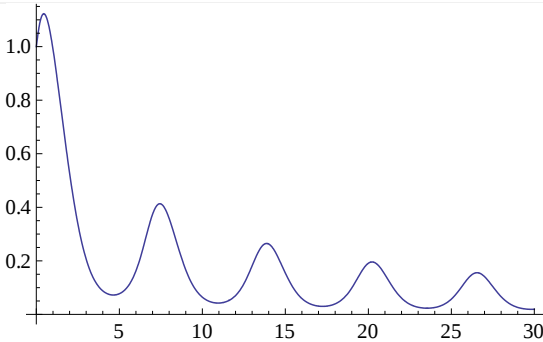
$DSolve[y'[x] + y[x] =$ $= aSin[x], y[x], x]$	polecenie rozwiązywania równania różniczkowego
$\{\{y[x] \rightarrow e^{-x}C[1] + \frac{1}{2}a(-Cos[x]$ $+ Sin[x])\}\}$	wynik
Mat. 5.1.10. Równania różniczkowe możemy rozwiązywać używając instrukcji <i>DSolve</i>	

i robić wiele innych rzeczy.

5.2. Obliczenia numeryczne

Na obliczeniach symbolicznych możliwości pakietów matematycznych nie kończą się. Użytkownik ma do dyspozycji bogaty zbiór procedur numerycznych. Wiele równań różniczkowych nie sposób rozwiązać symbolicznie. Można je jednak obliczyć numerycznie; na przykład możemy numerycznie rozwiązać takie równanie różniczkowe

$$\frac{dy(x)}{dx} = y(x)\cos(x + y(x)) \quad 5.1.8$$

$s = \text{NDSolve}[\{y'[x] == y[x]\text{Cos}[x + y[x]], y[0] = 1\}, y, \{x, 0, 30\}]$	polecenie rozwiązywania numerycznego równania różniczkowego.
$\text{Plot}[\text{Evaluate}[y[x]/.s], \{x, 0, 30\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$	Tak można wykreślić otrzymane rozwiązanie w zakresie zmienności x od zera do trzydziestu
	i mamy gotowy rysunek
Mat. 5.2.1. Instrukcja <i>NDSolve</i> pozwala na numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych. Następna instrukcja pozwala na sporządzenie wykresu rozwiązania w zadanym przedziale zmiennej x .	

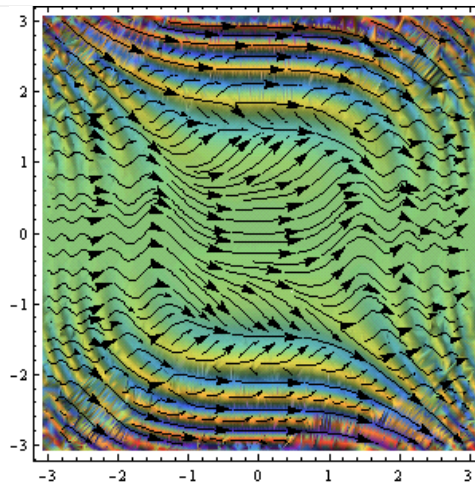
Obliczenia można prowadzić z dowolną precyzją, choć oczywiście gdy wykraczamy poza standardową precyzję oferowaną przez komputer trwają one wyraźnie dłużej

$N[\pi, 70]$	polecenie obliczenia liczby π z dokładnością do 70 cyfr
3.141592653589793238462643383279 50288419716939937510582097494459 2307816	wynik
Mat. 5.2.2. Tutaj wartość liczby π obliczona jest z dokładnością do 70 cyfr	

5.3. Grafika

Każdy szanujący się pakiet matematyczny oferuje bogatą bibliotekę instrukcji do sporządzania grafiki. Oto kilka przykładów z pakietu Mathematica.

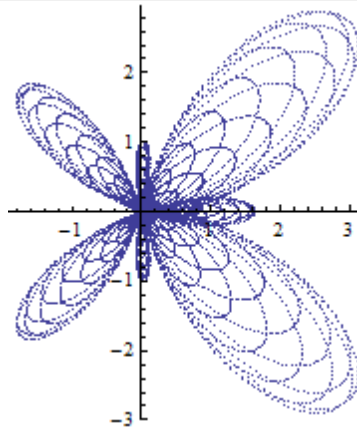
```
vf  
= {1, Sin[x3  
+ y3]]; StreamDensityPlot[Evaluate[{vf, div[vf]}], {x, -3, 3}, {y, -3, 3},  
StreamPoints → Fine, StreamScale → Large, ColorFunction  
→ "Rainbow", MaxRecursion → 2, LightingAngle  
→ Automatic, StreamStyle → Black]
```



Mat. 5.3.1. U góry mamy dwie instrukcje (instrukcje są przedzielane znakiem ";"). Pierwsza definiuje dwuwymiarowe pole wektorowe oznaczone jako vf, druga instrukcja nakazuje wyrysowanie tego pola na tle pola skalarnego wyliczonego jako dywergencja pola wektorowego vf.

Funkcje graficzne pozwalają uzyskać wiele ciekawych efektów, takich jak na przykład wykres w postaci motyla

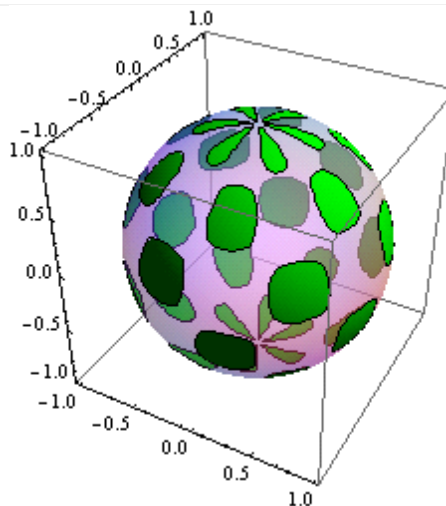
```
ListPolarPlot[Table[{θ, (Exp[Cos[θ]]
- 2Cos[4θ])Sin[λθ]^4}, {θ, 0, 2Pi, p}], o, PlotRange
→ All, PlotStyle → PointSize[Tiny]]
```



Mat. 5.3.2. Motyl wyrysowany we współrzędnych biegunowych

W zaawansowanych pakietach można znaleźć możliwości, które zwykle nie są obecne w słabszych programach.

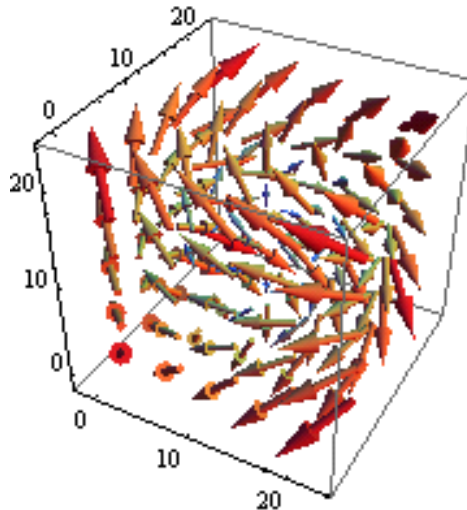
```
ParametricPlot3D[{Cos[φ]Sin[θ], Sin[φ]Sin[θ], Cos[θ]}, {φ, 0, 2π}, {θ, 0, π}, Me
→ {Function[{x, y, z, φ, θ}, Sin[6φ]Sin[6θ]], Mesh → {{1/4}}, PlotPoints
→ 50, MeshShading → {Opacity[0.5], Green}}
```



Mat. 5.3.3. Fantazyjnie narysowana sfera

Przykład pola wektorowego w trzech wymiarach

```
data = Table[{y, -x, z}, {x, -1, 1, .1}, {y, -1, 1, .1}, {z, -1, 1, .1}];
ListVectorPlot3D[data, PlotRange → All, VectorPoints
→ 5, VectorColorFunction → "Rainbow", VectorStyle
→ "Arrow3D"]
```



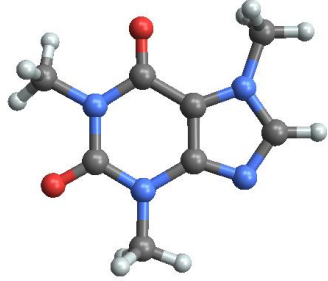
Mat. 5.3.4. Pole wektorowe w trzech wymiarach o fantazyjnych strzałkach

5.4. bazy danych

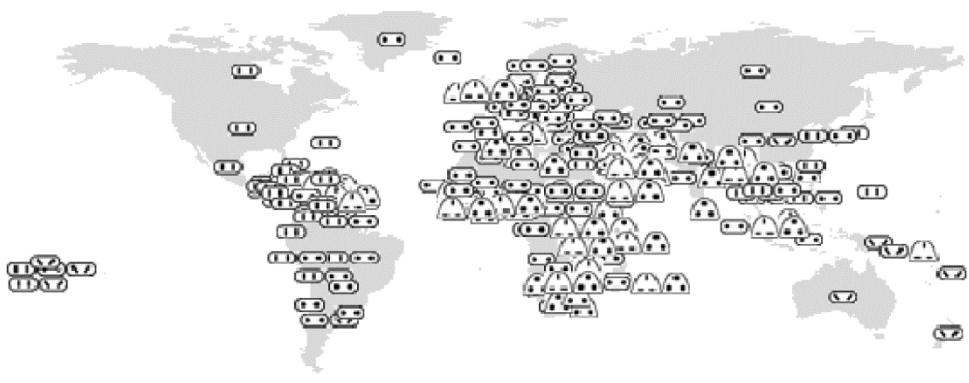
Zwykle duże pakiety zapewniają również dostęp do baz danych zawierających informacje z zakresu nauki i nie tylko. Pod tym względem pakiet Mathematica należy do najlepszych.

Take[Sort[{GenomeData[#, "SequenceLength"], #}& /@GenomeData[]], 5]	pytanie o pięć najkrótszych genów z ludzkiego genomu
{{11, "IGHD727"}, {16, "IGHD411"}, {16, "IGHD417"}, {16, "IGHD44"}, {17, "IGHD11"}}	oto one
Mat. 5.4.1. Bazy danych obejmują między innymi informacje o ludzkim genomie	

Przykład wykorzystując dane z bazy zawierającej informacje o związkach chemicznych

ChemicalData["Caffeine", "MoleculePlot"]	jak wygląda cząsteczka kofeiny?
	tak wygląda
Mat. 5.4.2. Jedna z form obrazowania struktury cząsteczki chemicznej, w tym wypadku cząsteczki kofeiny	

A teraz coś na deser, czyli mapa świata z zaznaczonym kształtem wtyczek obowiązującym w poszczególnych krajach

<pre>Graphics[{LightGray, CountryData[#, "SchematicPolygon"]& /@CountryData[], Inset[Row[Show[#, ImageSize → 15]&/@(CountryData[#, "ElectricalGridPlugImages"] /._Missing → {})], Reverse[CountryData[#, "CenterCoordinates"]]]& /@CountryData[]}]</pre>	
	
Mat. 5.4.3. Na tle mapy świata wykreślone zostały kształty wtyczek jakie używane są w poszczególnych regionach	

Jak z tego widać możliwości pakietów matematycznych są ogromne (a pokazałem tu tylko niewielką część z nich) i prawdę mówiąc nazwa „pakiet matematyczny” jest już dziś historyczna. Możliwości tych pakietów wykraczają poza matematykę i są zbyt duże by mógł je wszystkie ogarnąć jeden

użytkownik. Ale nie o to w końcu chodzi. Warto opanować te z tych wszystkich narzędzi, które pomogą nam w naszej pracy.

6. Jednostki miar układu SI ♦

Jeszcze w pierwszej połowie XX wieku powszechnie stosowano kilka różnych układów jednostek miar. W 1958 zaproponowano wprowadzenie jednego tzw. międzynarodowego układu jednostek miar, oznaczanego literami SI (francuskie - *Le Systeme International d'Unites*; angielskie - *International System*). Podstawą do zdefiniowania układu SI był starszy układ MKSA (metr, kilogram, sekunda, amper).

Na jedenastej Generalnej Konferencji Miar (GKM) w 1960 układ SI został zatwierdzony. Podczas następnych posiedzeń GKM wprowadzała do układu SI uzupełnienia; na przykład na trzynastym posiedzeniu GKM zmieniono nazwę jednostki „stopień kelwina” [°K] na nazwę „kelwin” [K]. Na 14 posiedzeniu GKM (1971 r.) zaliczono jednostkę liczności materii – „mol”, do jednostek podstawowych.

Zalecenie GKM co do upowszechnienia układu SI jest często źle rozumiane. Interpretuje się go jako administracyjny nakaz konsekwentnego zastępowania starych jednostek jednostkami nowymi, należącymi do układu SI. Zalecenie to należy rozumieć jako próbą, jak się okazało skuteczną, ustanowienia układu SI jako bazy dla wszystkich innych jednostek. I tak trudno się spodziewać, że fizycy zrezygnują z jednostki energii *elektronowolta* stosowanego w fizyce atomowej i jądrowej. Jednak jeden elektronowolt może być definiowany jako pewna część dżula, w ten sposób układ SI działa jak solidny fundament do definicji wszystkich innych, wygodniejszych w danej sytuacji, jednostek. Nie należy się również spodziewać, że lekarze zaczną mierzyć ciśnienie krwi w paskalach. Strach pomyśleć ilu pacjentów przypłaciłoby taką reformę życiem, w tzw. okresie przejściowym. Pozostaną pewnie przy swoich milimetrach słupa rtęci, ale ciśnienie jednego milimetra słupa rtęci jest zdefiniowane jako odpowiednia część paskala. Są również takie dziedziny, w których następuje przejście na jednostki z układu SI. I tak od pewnego czasu ciśnienie powietrza w prognozach pogody podaje się w hektopaskalach. Dlaczego w hektopaskalach a nie paskalach? Ciśnienie atmosferyczne wyrażone w hektopaskalach oscyluje wokół wartości 1000hPa (jeden hektopaskal to sto paskali). Jest to wartość bliska tej wartości, do której ludzie byli przyzwyczajeni w starych jednostkach ciśnienia. W ten sposób próbuje się nawiązywać do tradycji, aby przejście do nowego układu było jak najmniej bolesne.

Ale dlaczego układ jednostek SI ma być fundamentem dla wszystkich innych jednostek? Poprawne zdefiniowanie jednostki wielkości fizycznej na potrzeby dzisiejszej nauki i techniki jest bardzo trudnym i skomplikowanym zadaniem. Dziewiętnastowieczna definicja metra oparta o metalowy wzorzec przechowywany w budynku Międzynarodowego Biura Miar i Wag Sèvres pod Paryżem jest obecnie dalece niewystarczająca. Dziś jednostkę metra definiuje

się w oparciu o podstawową stałą fizyczną jaką jest prędkość światła w próżni (więcej o tym poniżej). Tak zdefiniowana jednostka jest znacznie dokładniejsza, a jej wzorzec (stała fizyczna) jest znacznie mniej wrażliwy na warunki zewnętrzne i upływ czasu. Ponadto prędkość światła w próżni może być wyznaczona z dużą dokładnością. Zdefiniowanie jednostki wielkości fizycznej wymaga dużego wysiłku wielu specjalistów oraz badań w laboratoriach wyposażonych w drogi sprzęt. Tu nie można sobie pozwolić na błąd, gdyż każdy błąd jest potencjalnie bardzo kosztowny. Zwykle więc przed wprowadzeniem nowego wzorca dyskutuje się nad nim przez wiele, wiele lat i prowadzi wiele testów i badań. Dopiero, gdy propozycja przejdzie przez ogień dyskusji i badań może zostać zaaprobowana. Od tej strony układ SI nie ma konkurencji. Nie ma sensu aby równie solidne i kosztowne procedury wprowadzić przy definicji cala, elektronowolta, czy kilograma siła. Można te wszystkie jednostki zdefiniować jako odpowiednie części jednostek układu SI. Na przykład obecnie cal (tzw. cal międzynarodowy) definiuje się tak:

$$1 \text{ cal} = 0.0254 \text{ m} \quad 6.1$$

Taka definicja cala wynika z faktu, że 1 lipca 1959 Stany Zjednoczone i kraje Wspólnoty Brytyjskiej zdefiniowały jeden jard jako

$$1 \text{ yard} = 0.9144 \text{ m} \quad 6.2$$

czyli odnieśli swoje jednostki długości do jednostek układu SI. Nawiasem mówiąc ze wzorów (6.1 i 6.2) widać, że jeden cal to 1/36 yarda. Jako ciekawostkę podam, że cal był bardzo rozpowszechnioną jednostką w wieku XIX. Ale cal calowi nie był równy, co ilustruje poniższa tabela.

1 cal angielski około 1820 roku	25,40mm
1 cal polski (staropolski)	24,80mm
1 cal nowopolski (1819-1848)	24,00mm
1 cal pruski	26,17mm
1 cal francuski	27,07mm
1 cal reński	26,15mm
1 cal rosyjski	25,40mm
1 cal wiedeński	26,34mm
Tabela 6.1. Przykład różnych wartości cala używanego w Europie w wieku XIX. Nie są to wszystkie cale jakie wówczas były używane. Długość jednego cala odpowiada z grubsza długości końcowej części kciuka dorosłego człowieka.	

Handel międzynarodowy wymagał szybkiego przeliczania różnych cali. Pomoc dla kupców stanowiły takie oto tablice

Rysunek 6.2. XIX wieczna tablica używana do konwersji różnych cali; źródło Wikipedia

Wielkości fizyczne dzielimy na wielkości podstawowe i pochodne. Wielkości podstawowe są to te wybrane wielkości fizyczne, które uważa się, w danym układzie jednostek, za podstawowe. Wielkości pochodne wyraża się przez wielkości podstawowe. Które wielkości są podstawowe, a które nie jest kwestią wyboru. Głównym kryterium wyboru jest to, żeby wszystkie jednostki pochodne można było, w możliwie najprostszy sposób, wyrazić przez jednostki podstawowe. Cóż to jednak jest ta wielkości fizyczna?

Definicja 6.1: Wielkość fizyczna

Jest to ta właściwość obiektu lub zjawiska fizycznego, którą można określić ilościowo

To taka operacyjna definicja wielkości fizycznej, ale dla nas zupełnie wystarczająca. Co to jest wymiar wielkości fizycznej?

Definicja 6.2: Wymiar wielkości fizycznej

Wymiarem wielkości fizycznej jest jej przedstawienie poprzez wybrany układ wielkości podstawowych.

Takim wybranym układem wielkości podstawowych jest siedem wielkości układu SI. W układzie SI za wielkości podstawowe przyjęte zostały długość L , masa M , czas T , natężenie prądu elektrycznego I , temperaturę termodynamiczną θ , licznosc materii N , światłość J . Odpowiadającymi tym wielkościom jednostkami układu SI są: metr, kilogram, sekunda, amper, kelwin, mol, kandela. Przykładowo wielkość fizyczna jaką jest prędkość wyrażamy w układzie SI jako długość/czas. Zatem wymiarem prędkości w układzie SI będzie iloraz długości i czasu. Zwracam uwagę tu na fakt, że wymiar wielkości fizycznej można określić tylko w odniesieniu do wybranego układu wielkości podstawowych. Gdyby w jakimś innym układzie wielkości podstawowych,

prędkość została wybrana jako jedna z wielkości podstawowych, to w tym układzie wymiarem prędkości byłaby prędkość.

Wielkości podstawowe układu SI zostały wybrane tak, aby inne wielkości fizyczne można było przedstawić w postaci

$$[X] = L^{w1} M^{w2} T^{w3} I^{w4} \theta^{w5} N^{w6} J^{w7} \quad 6.3$$

Tutaj $w1-w7$ są liczbami całkowitymi nazywanymi wykładnikami wymiarowymi wielkości fizycznej X . Zbiór wielkości podstawowych układu SI wybrano tak aby wykładniki wymiarowe były niewielkimi liczbami całkowitymi.

Wartość danej wielkości X wyraża się przez liczbę x i jednostkę miary $[X]$

$$X = x [X] \quad 6.4$$

Na przykład siła F o wartości 10 N to

$$F = 10 [N] \quad 6.5$$

Jednostka określająca wartość liczbową danej wielkości fizycznej jest jej wzorcową miarą, pozwalającym na wyrażenie wartości tej wielkości w postaci konkretnej liczby

Definicja 6.3: Jednostka miary wielkości fizycznej

Jednostką miary wielkości fizycznej jest wzorcową miarą danej wielkości fizycznej, względem, której określamy wartość tej wielkości.

Możemy na przykład stwierdzić, że stalowy pręt o długości takiej jaka jest długość mojej stopy jest jednostką miary długości, o nazwie „stopa Jana”; symbol sJ. Jeżeli teraz mamy pręt, który jest 3.5 razy dłuższy od mojej stopy, to powiemy, że pręt ten ma długość 3.5sJ. Wielkość fizyczna jaką jest długość pręta ma teraz, w przypadku owego pręta przyporządkowaną liczbę (czyli 3.5), która określa jej wartość względem wybranej jednostki. Widać, że ciągle kręcimy się wokół greckich proporcji. Nie możemy stwierdzić, że masa jakiego obiektu wynosi 4. Zawsze musimy dopowiedzieć czego; na przykład cztery metry (4m). Liczba cztery określa teraz proporcję rozłączną (xxx). Niech jakiś pręt ma długość cztery stopy Jana. Mamy proporcję

$$\frac{sJ}{1} = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{x}{sJ} = \frac{4}{1} \Rightarrow x = 4sJ \quad 6.7$$

Podsumowując: wielkości fizyczne to te cechy obiektów lub zjawisk fizycznych, dla których istnieje sensowna metoda przyporządkowania im konkretnych wartości w konkretnych przypadkach. Wymiar wielkości fizycznej wymaga określenia wielkości podstawowych, względem których ten wymiar wyrażamy. Aby przyporządkować wielkości fizycznej liczbę potrzebujemy jednostek miary, względem których te liczby określamy. Przejdę do krótkiego omówienia jednostek miary wielkości podstawowych układu SI

6.1. Metr

Jeden metr został zdefiniowany w 1889 r. jako jedna dziesięciomilionowa część długości ćwiartki paryskiego południka. W 1889 roku wykonano platyniowy wzorzec metra (rys. 6.1.1), który jest przechowywany w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres pod Paryżem (rys. 6.1.2).



Rysunek 6.1.1. Wzorzec jednego metra z lat 1889-1960. Źródło zdjęcia Wikipedia



Rysunek 6.1.2. Budynek Międzynarodowego Biura Miar i Wag w Sèvres pod Paryżem. Źródło zdjęcia Wikipeda

Dokładniejsze pomiary wykazały, że wykonany wzorzec jest o 0.0228% mniejszy od założonej wartości. W efekcie zrezygnowano z definicji opartej o długość południka, opierając się na wykonanym wzorcu. Jednak dokładność wzorca platyniowego również nie była wystarczająca. Na drugiej GKM, w 1895 roku zaproponowano przyjęcie, że metr jest równy 1553164,13 długości fali czerwonej linii widmowej kadmu. Z dużą precyzją odpowiadało to długości wzorca platyniowego. Trudności techniczne z tak zdefiniowanym wzorcem metra spowodowały znaczne opóźnienie w przyjęciu tej propozycji. Ostatecznie na jedenastej GKM, w 1960 roku, przyjęto, definicję metra opartą o długość fali linii widmowej kryptonu $^{86}_{36}\text{Kr}$, odpowiadającej przejściu z poziomu $2p_{10}$ na poziom $5d_5$. Przyjęta obecnie definicja metra oparta jest o wartość stałej

fizycznej – prędkości światła w próżni. Definicja ta została przyjęta na siedemnastej GKM w 1983 roku.

Definicja 6.1.1: metr

Jeden metr to długość drogi przebytej w próżni przez światło w czasie $1/299792458$ sekundy.

Nazwa metr pochodzi od greckiego *métron* – miara.

6.2. Kilogram

W 1901 na trzeciej GKM przyjęto, że jeden kilogram jest równy masie 1dm^3 wody w temperaturze 4°C . Wzorzec kilograma wykonano ze stopu platynowo-irydowego składającego się w 90% z platyny i w 10% z irydu. Dokładniejsze pomiary wykazały, że masa wzorca jest większa o 0.28g od masy 1dm^3 wody. W efekcie postanowiono pozostać przy wzorcu, który jest przechowywany w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres pod Paryżem.

Definicja 6.2.1: Kilogram

Jest to masa międzynarodowego wzorca tej jednostki masy przechowywanego w Międzynarodowym Biurze Miar i Wag w Sèvres

Kopie wzorca są podstawą do wzorcowania na przykład odważników w narodowych centrach miar.

Przyjęta definicja kilograma jest obecnie wysoce niewystarczająca. Sam wzorzec, z upływem czasu zmienia swoją masę w nieakceptowalnym obecnie zakresie. Dzieje się to między innymi na skutek absorpcji cząstek z otoczenia. W październiku 2010, podczas spotkania komisji CIPM⁷ zasugerowano kolejnej GKM rozważenie przyjęcia nowej definicji kilograma. Nowa definicja bazuje na stałej Plancka i innych dobrze określonych stałych fizycznych. Sugestia została zaakceptowana podczas 24 GKM.

⁷ Skrót od francuskiej nazwy Comité international des poids et mesures, (Międzynarodowy Komitet Miar i Wag)

6.3. Sekunda

Z czasem zawsze były kłopoty. Do jego pomiaru potrzebujemy stale i równomiernie powtarzającego się zjawiska. Największy kłopot jest z tą równomiernością. Za najstarsze zegary służyły ludziom zjawiska astronomiczne. Zjawiska astronomiczne, a ściślej ruch dobowy Ziemi, stał się podstawą pierwszej definicji sekundy. Zgodnie z tą definicją jedna sekunda to $1/86400$ część średniej doby słonecznej. Co to jest ta średnia doba słoneczna? Jak już się coś próbuje dokładnie zdefiniować, to okazuje się, że nawet taka doba nie jest sprawą oczywistą. Mamy kilka definicji dób różniących się między sobą nawet o kilka minut. Doba słoneczna jest tą dobą, na której opiera się nasza rachuba czasu.

Definicja 6.3.1: doba słoneczna

Doba słoneczna – okres pomiędzy dwoma kolejnymi górowaniami Słońca.

Początek doby słonecznej wypada w tym samym momencie dla wszystkich miejsc leżących na tej samej długości geograficznej. Jednak w przeciągu roku długość doby nieco się zmienia, stąd w definicji sekundy mamy średnią dobę. Średnia długość, przyjęta umownie za wartość stałą wynosi 24 godziny. Niestety średnia doba słoneczna jest coraz dłuższa i wydłuża się średnio o około $16 \mu\text{s}$ rocznie. Jak na współczesne potrzeby średnia doba słoneczna jest zbyt niestała. Następna definicja sekundy oparła się o rok zwrotnikowy. Z rokiem kłopotów nie jest wcale mniej niż z dobą. Ale ponieważ jest ponad 365 razy dłuższy od doby, błąd definicji sekundy jest mniejszy.

Definicja 6.3.2: rok zwrotnikowy

Rok zwrotnikowy (tropikalny, tropiczny, słoneczny) – to czas pomiędzy dwoma kolejnymi przejściami Słońca przez punkt równonocy wiosennej (punkt Barana).

Rok zwrotnikowy wydłuża się o 0.53 sekundy na sto lat ($5.3 \mu\text{s}$ na rok). Zgodnie z definicją opartą o rok, sekunda to $1/1556925,9747$ część roku zwrotnikowego z 1900 roku. Przełom nastąpił wraz z wprowadzeniem atomowych wzorców czasu. W 1964 roku odbyła się trzynasta GKM, na której po raz pierwszy, przyjęta definicja jednostki czasu nie była związana z ruchem ciał niebieskich.

Definicja 6.3.3: sekunda

Jest to czas równy 9 192 631 770 okresom promieniowania odpowiadającego przejściu między dwoma poziomami $F = 3$ i $F = 4$ struktury nadsubtelnej stanu podstawowego $^2S_{1/2}$ atomu cezju ^{133}Cs (definicja odnosi się do atomu cezju w spoczynku w temperaturze 0 K)

Niewiele z tej definicji rozumiesz? Nie szkodzi mam nadzieję, że pod koniec tych spotkań z fizyką będzie ona dużo bardziej zrozumiała.

6.4. Amper

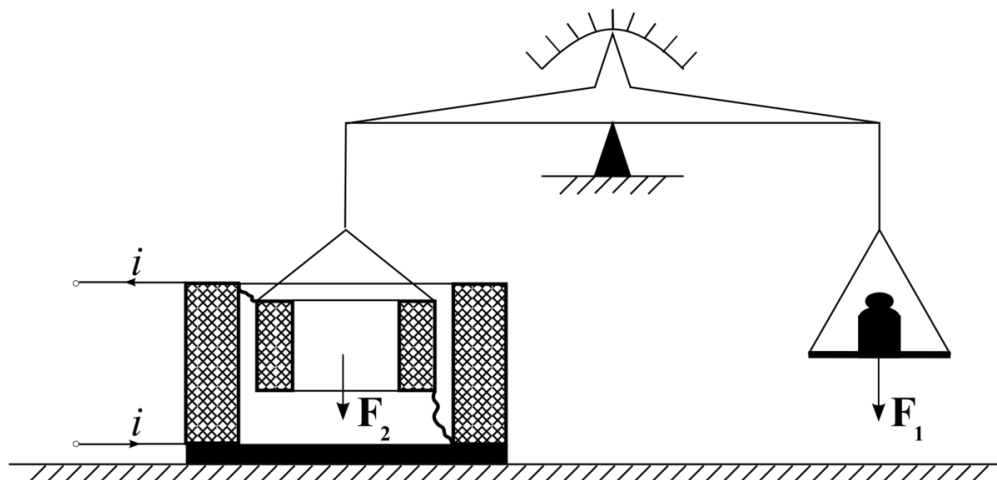
Amper jest jednostką natężenia prądu. Definicja ampera opiera się na prawie Ampère'a dotyczącym oddziaływania dwóch nieskończonych prostoliniowych, wzajemnie równoległych przewodów z prądem o takim samym natężeniu.

Definicja 6.4.1: Amper

Jeden amper to prąd elektryczny stały, który płynąc przez dwa równoległe nieskończone przewody o kołowym przekroju, znikomo małym, umieszczone w próżni w odległości jednego metra wywołałby siłę $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ na każdy metr długości tych przewodów.

O samym prawie Ampère'a będzie bliżej, kiedy przejdziemy do działu elektrodynamika. Nazwa jednostki pochodzi od nazwiska francuskiego fizyka i matematyka André Marie Ampère, znanego z prac w zakresie elektrodynamiki.

Wzorca ampera nie można oprzeć na jego definicji. Główną trudnością są występujące w tej definicji nieskończone długie przewody. Wzorzec ampera został zbudowany na bazie wagi prądowej (rys. 4.4.1), której wynalazcą był William Thomson (Lord Kelvin). Co ciekawe współczesne wersje wagi prądowej są używane do precyzyjnych pomiarów masy wzorca kilograma i jego kopii.



Rysunek 4.4.1. Schemat wagi prądowej. Waga obciążona jest z prawej strony odważnikiem a z lewej małą cewką. Mała cewka znajduje się wewnątrz dużej cewki. Obie cewki połączone są szeregowo i zasilane źródłem prądowym. W chwili początkowej waga jest w stanie równowagi. Płynący przez cewki prąd o natężeniu I powoduje dodatkową siłę F_2 działającą na lewą stronę wagi. Aby zrównoważyć wagę z prawej strony trzeba dodać odważnik masie m , który przyciągany jest siłą F_1 . Wzór na równowagę ma postać $I = \sqrt{mg/c}$. Wartość stałej c zależy od geometrii cewek. Niepewność wyznaczenia wartości tej stałej jest największym źródłem błędów wagi prądowej; źródło Wikipedia, licencja: Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported

Przez pewien czas obowiązywała definicja ampera (tzw. amper międzynarodowy) oparta o zjawisko elektrolizy.

Definicja 6.4.2: Amper międzynarodowy

Jedne amper to natężenie prądu elektrycznego, który w procesie elektrolizy roztworu azotanu srebra powoduje wydzielenie masy 1.118 miligrama srebra na sekundę.

Ta definicja jest prostsza od strony technicznej. Nie ma tu abstrakcyjnych nieskończenie długich przewodów, ale całość oparta jest o dobrze mierzalne zjawiska związane z elektrolizą. Starano się oczywiście aby nowa definicja ampera była jak najbliższa definicji (6.4.1). Z czasem okazało się jednak, że amper międzynarodowy ma mniejszą wartość od ampera „prawdziwego” o 0.015% i w roku 1948 nastąpił powrót do „prawdziwego” ampera”.

Dokładność wagi prądowej starszego typu jest rzędu 10 μA . Taka dokładność nie jest wystarczająca na obecne potrzeby. Dlatego ciągle poszukuje się innego wzorca ampera, dokładniejszego i wygodniejszego w użyciu. Konkurencją dla wagi prądowej są tzw. kalibratory prądu (rys. 4.4.2), które są wygodniejsze w użyciu i pozwalają (urządzenia z najwyższej półki) osiągnąć dokładność rzędu 0,1 μA . Kalibratory stosowane są tam, gdzie potrzebne są łatwo dostępne wzorce prądowe, czyli poza laboratoriami wzorcowymi. Wagi prądowe jednak się nie poddają.



Rysunek 4.4.2. Przykład poręcznego kalibratora prądu dostępnego w cenie ok. 2000zł. Takie urządzenia pozwalają na zadawanie prądów rzędu kilkudziesięciu miliamperów, z dokładnością kilkudziesięciu mikroamperów. Systemy z górnej półki cenowej (znacznie większe gabarytowo od tego ze zdjęcia) pozwalają osiągnąć dokładność poniżej jednego mikroampera; źródło materiały firmowe

6.5. Kelwin

Temperatura jest chyba najbardziej kłopotliwą, z powszechnie mierzonych, wielkości fizycznych. Aby ustalić skalę temperatur musimy dysponować jakimś punktem odniesienia. W historii takich punktów odniesienia było wiele. Mogła to być temperatura ciała zdrowego człowieka, temperatura topnienia lub wrzenia wody, albo innej substancji. Obecnie takim stanem odniesienia jest tzw. punkt potrójny wody, to jest stan, w którym w równowadze termodynamicznej istnieją trzy stany skupienia wody: lód, ciecz i para. Zaletą punktu potrójnego wody jest to, że istnieje dokładnie jedna temperatura i jedna wartość ciśnienia, przy której taka równowaga jest możliwa. Przykładowo temperatura wrzenia wody istotnie zależy od ciśnienia, nie zawsze jest to 100°C . Temperatura punktu potrójnego wody wynosi zawsze $0.0100^{\circ}\text{C}=273,16\text{ K}$. Stan odpowiadający punktowi potrójnemu otrzymuje się w specjalnych naczyniach nazywanych komorami punktu potrójnego.

Definicja 6.5.1: Kelwin

Jeden kelwin jest to $1/273.16$ temperatury termodynamicznej punktu potrójnego wody.

Jednostka została nazwana na cześć irlandzkiego fizyka Williama Thomsona (później Lord Kelvin), znanego między innymi z badań nad termodynamiką. Na trzynastej GKM zrezygnowano z określenia „stopień kelwina” na rzecz samego „kelwin”. Dlatego mówimy 100 kelwinów, a nie 100 stopni kelwinów i piszemy odpowiednio 100K, a nie 100°K . Możliwe, że już nie długo jednostka temperatury zostanie oparta o stałą Boltzmanna. Jest to oczywiście spowodowane niewystarczającą precyzją obecnej definicji w świetle potrzeb współczesnej techniki i nauki.

6.6. Kandela

Kandela jest jednostką światłości, wprowadzoną podczas 9 GKM. Kandela jest wielkością określającą zdolność emisji promieniowania przez ciała materialne. Jej definicja opiera się na teorii ciała doskonale czarnego. Ciało doskonale czarne to takie ciało, które nie odbija promieniowania. Oznacza to, że promieniowanie emitowane przez takie ciało jest całkowicie jego promieniowaniem własnym.

Definicja 6.6.1. Kandela

Jedna kandela jest to światłość, jaką ma w określonym kierunku źródło emitujące promieniowanie monochromatyczne o częstotliwości $540\cdot 10^{12}\text{ Hz}$, i którego natężenie w tym kierunku jest równe $1/683\text{ W/sr}$.

W powyższej definicji skrót „sr” oznacza jednostkę kąta bryłowego steradian. Nazwa jednostki światłości pochodzi od łacińskiego słowa „candle” – świeca.

6.7. Mol

Mol jest jednostką liczności materii. Ponieważ materia, w naszym środowisku, składa się z cząsteczek, które złożone są z atomów wygodnie jest, w wielu sytuacjach (np. w chemii), posługiwać się jednostką liczności zamiast jednostką masy.

Definicja 6.7.1: Mol

Mol jest to liczność materii, występująca gdy liczba cząstek jest równa liczbie atomów zawartych w masie 0,012 kg $^{12}_6\text{C}$. Przy czym zakłada się, że atomy węgla są w stanie niezwiązanym chemicznie, w spoczynku i w stanie podstawowym.

W jednym molu znajduje się $(6,02214179 \pm 0,00000030) \cdot 10^{23}$ cząstek. Liczba ta jest nazywana stałą Avogarda. Nazwa mola pochodzi od niemieckiego **molekül**.

6.8. Inne układy jednostek

Przed wprowadzeniem układu SI w użyciu były inne, układy jednostek. Jeszcze na początku XIX wieku kwestia jednostek była wysoce nieuporządkowana. Rozwój techniki, przemysłu i współpracy międzynarodowej sprawił, że wprowadzenie międzynarodowego układu jednostek fizycznych stało się wyraźnie dostrzeganą potrzebą. Pierwszym układem, który można określić jako „międzynarodowy” był układ CGS (centymetr, gram, sekunda). Propozycja przyjęcia układu CGS wyszła w 1832 roku od niemieckiego matematyka Carla Friedricha Gaussa. W 1874 układ został poszerzony o jednostki związane ze zjawiskami elektromagnetycznymi. Jedną z wad układu CGS było to, że część jednostek, takich jak na przykład jednostka ładunku elektrycznego wyrażała się poprzez ułamkowe potęgi trzech jednostek podstawowych. Nadto w życiu częściej posługujemy się jednostkami większymi czyli metrem i kilogramem. Układ CGS upowszechnił się w nauce nie zyskując większego uznania w technice. W efekcie pod koniec XIX wieku układ CGS zaczął tracić na znaczeniu na rzecz układu MKS (metr, kilogram, sekunda). Za rozwój układu MKS odpowiedzialność wzięło Międzynarodowe Biuro Miar i Wag. Rozszerzenie systemu MKS przez GKM stało się podstawą do definicji układu SI.

6.8.1. Jednostki w starożytności

Zagadnienie miar było ściśle związane z handlem, finansami, gospodarką oraz techniką. Rozwój państw, handlu i pieniądza kruszcowego wymusił uporządkowanie systemu podstawowych miar. Sprawa zrobiła się na tyle poważna, że pojawiła się grupa urzędników odpowiedzialnych za miary. Od nich zależała między innymi skuteczności ściągania podatków. Urzędnicy ci

stanowili personel czegoś, co można uznać za protoplastę dzisiejszych urzędów miar i wag. Przed nastaniem pieniądza kruszcowego wiele ludów wyrażało należności czy wartość towaru względem wybranej wzorcowej miary ilości zboża, soli (sól była popularnym środkiem płatniczym wśród Słowian) lub innych towarów. Władza polityczna starała się narzucić na podległych obszarach jednolity system miar długości, objętości i ciężaru. Dużym problemem było takie zdefiniowanie wzorca dla jednostek miar by był on powszechnie dostępny i dokładny.

Babilończycy przyjęli za jednostkę wagi 180 ziaren jęczmienia; jednostka miała nazwę sykl. Ziarna jęczmienia są mniej więcej takie same, a jeżeli weźmie się ich odpowiednio dużą liczbę, to średnio rzecz biorąc każde 180 ziaren będzie ważyło, z dużą dokładnością, tyle samo. Chyba, że się kombinuje i specjalnie wybiera małe, lub duże ziarna. Pomijając jednak złą wolę, tak zdefiniowana jednostka miary masy w ówczesnej praktyce gospodarczej sprawdzała się. Sykl był masą równą około 8.4g. Sześćdziesiąt sykli dawało minę, a sześćdziesiąt min dawało talent. Jednak ludzie jak mogą zrobić bałagan to go na pewno zrobią. Tak więc obok miny ważącej sześćdziesiąt sykli (tzw. pospolitej), wynoszącej około 505g była również w obiegu duża mina o masie około 1010g. Dodajmy, że istniały jeszcze inne miny pospolite – lekka o masie około 491g i ciężka o masie około 982g. Mina pospolita krążyła w codziennym obiegu. Przy rozliczeniach z królem lub świątynią obowiązywała mina bardziej masywna – mina królewska. Jednostki sykl, mina i talent przejęły inne kultury w tym również Starożytny Izrael.

Liczenie ziaren nie było wygodną metodą w codziennym użyciu. Rozwiązaniem problemu było wprowadzenie kamiennych odważników o masie odpowiadającej jednej minie lub jej części (na przykład połowie miny). Niestety nie wiemy w jaki sposób dbano o to by masa tych odważników odpowiadała wadze na przykład jednej miny. Wprowadzenie powszechnie akceptowanych, na danym terenie, wzorców masy pozwoliło na szerokie wprowadzenie nowego wzorca wartości towarów – kruszcu. Należności regulować można było w złocie, srebrze lub miedzi. Przy regulacji płatności należało po prostu odważyć odpowiednią ilość kruszcu (na przykład 20 sykli srebra). Z miarami wiąże się oczywiście odwieczna walka z ich fałszowaniem. W Starym Testamencie stosowanie fałszywej wagi czy efy (hebrajska jednostka objętości) jest częstym przedmiotem nagany ze strony proroków. Co ciekawe w wielu królestwach przyjęto, że stosunek wartości złota do srebra jest jak 1:13.5. Jest to tyle ile wynosi stosunek długości roku słonecznego do długość miesiąca księżycowego. Złoto od czasów archaicznych kojarzono ze Słońcem, a srebro z Księżycem.

6.9. No i mamy problem

W 2019 roku GKM zrobiła mi spory problem. W zasadniczy sposób przeddefiniowała podstawowe jednostki układu SI i cały mój wysiłek włożony w omówienie aktualnego stanu układu SI stał się nieaktualny. Oczywiście, podane powyżej informacje są prawidłowe, tyle że dotyczą starego układu SI. Nowy układ, od strony definicji jednostek, wygląda już inaczej. Od strony praktycznej wprowadzona zmiana ma znaczenie dla wyrafinowanych pomiarów w technice i nauce. Dla tych mniej wyrafinowanych działań, że nie wspomnę o życiu codziennym nowa definicja niczego nie zmienia. Nie mniej nie pozostaje mi nic innego jak dopisać notkę na temat nowego układu. Będzie to notka, gdyż definicja jednostek podstawowych w nowym układzie SI opiera się na wyrafinowanej fizyce, do której jeszcze nie jesteśmy przygotowani. Dokładniejsze informacje pojawiają się w toku wykładu.

Zasadniczym celem reformy układu SI było oparcie definicji jednostek na fundamentalnych stałych przyrody. Taka jest na przykład dotychczasowa definicja metra względem stałej c (prędkość światła w próżni). Powiedzmy zatem, że prędkość światła w próżni wynosi $c=299792458\text{m/s}$, wyrażona w metrach zdefiniowanych w jakiś niezależny od prędkości światła sposób. Taka wartość wychodzi nam z pomiarów. Możemy jednak pójść w drugą stronę i przyjąć, że prędkość światła w próżni wynosi dokładnie $c=299792458\text{m/s}$. Nie potrafimy dokładnie zmierzyć prędkości światła, ale za to możemy przyjąć, że metr jest taką jednostką miary długości, że prędkość światła wynosi dokładnie $c=299792458\text{m/s}$. Jak za 50 lat będziemy w stanie dokładniej zmierzyć prędkość światła, to jej wartości nie zmieni się na jotę, natomiast zmieni się nieco długość wzorcowego metra, tak aby zawsze było $c=299792458\text{m/s}$. Stoi za tym przekonanie, że prędkość światła w próżni jest stałą uniwersalną, to jest taką, która nie zależy od takich czynników jak na przykład upływ czasu czy zmiana położenia układu pomiarowego w przestrzeni. A jeżeli nawet zależy to w bardzo niewielkim stopniu. Na przykład w czasie miliona lat zmienia się w zupełnie dla nas niezauważalnym stopniu.

Pomysł oparcia jednostek podstawowych wielkości układu SI o stałe przyrody został zaakceptowany przez 21 GKM w 1999 roku. Oczywiście wcześniej był intensywnie dyskutowany. Kolejne kilkanaście lat zajęły badania i pomiary związane z jego realizacją. Głównym zadaniem było takie wyznaczenie wartości stałych istotnych dla definicji nowego układu SI, aby wynikająca stąd niepewność pomiaru była nie większa niż przy użyciu dotychczasowych wzorców jednostek wielkości podstawowych. Zadanie to zostało zakończone w 2017 roku. W efekcie Komisja przyjęła wynikające z pomiarów wartości wybranych stałych za wartości dokładne, tak jak to wcześniej było z prędkością światła. Przyjęto, że stała Plancka ma wartość $h=6.62607015 \cdot 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$, ładunek elementarny (ładunek elektronu) ma wartość $e=1.602176634 \cdot 10^{-19}\text{C}$, stała Boltzmanna ma wartość $k=1.380649 \cdot 10^{-23}\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$,

stała Avogadro ma wartość $N_A = 6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Na 26 GKM (listopad 2018) zatwierdzono nowy układ jednostek wielkości podstawowych układu SI z datą wprowadzenia w życie ustaloną na 20 maja 2019r. Zgodnie z tą rezolucją jednostki zdefiniowane są w następujący sposób

Sekunda: jest zdefiniowana przez przyjęcie wartości liczbowej częstotliwości przejścia między nadsubtelnymi poziomami stanu podstawowego atomu cezu 133, wynoszącej $\Delta\nu_{Cs} = 9192631770 \text{ Hz}$, kiedy wyrażona jest w Hertzach. Korzystamy tu z faktu, że Hz odpowiada odwrotności sekundy.

Metr: jest zdefiniowany przez przyjęcie wartości liczbowej prędkości światła w próżni c wynoszącej 299 792 458, kiedy wyrażona jest w jednostce m/s, gdzie sekunda zdefiniowana jest jak wyżej

Kilogram: jest zdefiniowany przez przyjęcie wartości liczbowej stałej Plancka wynoszącej $6.62607015 \cdot 10^{-34}$, kiedy wyrażona jest w jednostkach J·s, równej $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, gdzie metr i sekunda zdefiniowane są jak wyżej.

Amper: jest zdefiniowany przez przyjęcie wartości liczbowej ładunku elektrycznego e wynoszącej $1.602176634 \cdot 10^{-19}$, kiedy wyrażona jest w jednostce C (kulomb), która jest równa A·s, gdzie sekunda zdefiniowana jest jak wyżej

Kelwin: jest zdefiniowany przez przyjęcie wartości liczbowej stałej Boltzmann wynoszącej $1.380649 \cdot 10^{-23}$, kiedy wyrażona jest w jednostce J·K⁻¹, która jest równa $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, gdzie kilogram, metr i sekunda zdefiniowane są jak wyżej.

Mol: jest zdefiniowany przez przyjęcie wartości liczbowej stałej Avogadra wynoszącej $6.02214076 \cdot 10^{23}$ cząstek, kiedy wyrażona jest w jednostce mol^{-1} .

Kandela: jest zdefiniowany przez wartość liczbową natężenia światła monochromatycznego promieniowania o częstotliwości $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$, która wynosi 683, kiedy jest wyrażona w jednostce $\text{lm} \cdot \text{W}^{-1}$, która jest równa $\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3$, kiedy kilogram, metr i sekunda zdefiniowane są jak wyżej, a sr to steradian (czyli jednostka miary kąta bryłowego).

Podkreślę raz jeszcze, że nowe definicje niczego nie zmieniają przy precyzji z jaką mierzymy różne wielkości fizyczne w życiu codziennym (np. wzrost), lub w większości zastosowań w nauce i technice. Ich znaczenie ujawnia się przy wyrafinowanych pomiarach.

6.10. Analiza wymiarowa

Analiza wymiarowa jest jednym z podstawowych narzędzi formalnych w fizyce, chemii i naukach pokrewnych. Zgodnie z równaniem (6.3) każda wielkość fizyczna ma swój wymiar, który może zostać wyrażony przez jednostki podstawowe układu SI (lub innego spójnego układu jednostek). Analiza wymiarowa jest rachunkiem na symbolach reprezentujących wymiary poszczególnych jednostek. Na przykład obliczając prędkość v jako przyrost przebytej drogi ΔL w czasie Δt piszemy

$$v\{\text{prędkość}\} = \frac{\Delta L\{\text{długość}\}}{\Delta t\{\text{czas}\}} \quad 6.10.1$$

Wymiary będę ujmował w nawiasy klamrowe. W wyniku obliczeń pojawiła się nowa wielkość fizyczna, której wymiar wyraża iloraz długości i czasu. Wielkość tą nazywamy prędkością. W układzie SI jednostką prędkości jest metr na sekundę. Jednostka prędkości nie ma osobnej nazwy. Jednak często się zdarza, że jednostkom wielkości fizycznych, które są wyrażone przez jednostki podstawowe danego układu jednostek (tzw. jednostkom pochodnym), nadaje się specyficzne nazwy. Przykładem jest jednostka siły, która w układzie SI ma nazwę „niuton”. Ogólnie siła ma wymiar

$$\{siła\} = \left\{ \frac{\text{masa} \cdot \text{długość}}{\text{czas} \cdot \text{czas}} \right\} \quad 6.10.2$$

Przez jednostki podstawowe układu SI jeden niuton wyraża się

$$1[N] = \frac{1[kg] \cdot 1[m]}{1[s^2]} = 1 \left[\frac{kg \cdot m}{s^2} \right] \quad 6.10.3$$

Przykładem jednostki siły spoza układu SI jest dyna. Dyna jest określona w układzie CGS jako

$$1[\text{dyna}] = 1 \left[\frac{g \cdot cm}{s^2} \right] \quad 6.10.4$$

W rachunku wymiarowym obowiązują inne reguły niż w rachunkach na liczbach. Poniżej przedstawione są przykłady podstawowych działań na wymiarach (nie jednostkach) wielkości fizycznych:

Suma wymiarów dwóch takich samych wielkości daje wymiar tejże wielkości

$$\{wielkość_A\} + \{wielkość_A\} = \{wielkość_A\} \quad 6.10.5$$

Błędem jest zapis

$$\{wielkość_A\} + \{wielkość_A\} = 2 \cdot \{wielkość_A\} \quad 6.9.6$$

Na przykład 10 metrów + 2 metry to jest 12 metrów a nie 12 dwu metrów.

Różnica wymiarów dwóch takich samych wielkości daje wymiar tejże wielkości

$$\{wielkość_A\} - \{wielkość_A\} = \{wielkość_A\} \quad 6.9.7$$

Błędem jest zapis

$$\{wielkość_A\} - \{wielkość_A\} = 0 \quad 6.9.8$$

Na przykład 10 metrów mniej 2 metry to jest 8 metrów a nie 8 zero metrów.

Suma wymiarów dwóch różnych wielkości nie powinna nam się przytrafić

$$\{wielkość_A\} + \{wielkość_B\} = \text{poważny błąd} \quad 6.9.9$$

Cóż to jest 10 metrów dodać 2 sekundy? Podobnie jak różnica wymiarów dwóch różnych wielkości

$$\{ wielkość_A \} - \{ wielkość_B \} = \text{poważny błąd} \quad 6.9.10$$

Cóż to jest 10 metrów mniej 2 ampery? Ogólnie kiedy w wyniku rachunku na wymiarach otrzymasz sumę lub różnicę dwóch różnych wielkości fizycznych, to oznacza, że rachunek jest błędny. Iloczyn wymiarów dwóch takich samych wielkości, daje nową wielkość, której wymiar oznaczamy jako wielkość wyjściowa do kwadratu

$$\{ wielkość_A \} \cdot \{ wielkość_A \} = \{ wielkość_A^2 \} \quad 6.9.11$$

Na przykład pole prostokąta to iloczyn długości dwóch boków; w układzie SI, to jest $[m] \cdot [m] = [m^2]$.

Iloczyn wymiarów dwóch różnych wielkości daje nową wielkość, której wymiarem jest iloczyn wymiarów wyjściowych wielkości

$$wielkość_A \cdot wielkość_B = wielkość_{AB} \quad 6.9.12$$

Iloraz wymiarów dwóch takich samych wielkości daje nową wielkość, która nie ma wymiaru (wielkość bezwymiarowa)

$$\frac{wielkość_A}{wielkość_A} = \text{bez wymiaru} \quad 6.9.13$$

Iloraz wymiarów dwóch różnych wielkości daje nową wielkość, której wymiarem jest iloraz wymiarów wyjściowych wielkości

$$\frac{wielkość_A}{wielkość_B} = \frac{wielkość_A}{wielkość_B} \quad 6.9.14$$

Ogólnie wielkości fizyczne spełniają relacje

$$wielkość_A^n \cdot wielkość_A^m = wielkość_A^{n+m} \quad 6.9.15$$

$$wielkość_A^n \cdot wielkość_B^m = wielkość_A^n \cdot wielkość_B^m \quad 6.9.16$$

$$\frac{wielkość_A^n}{wielkość_A^m} = wielkość_A^{n-m} \quad 6.9.17$$

$$\frac{wielkość_A^n}{wielkość_B^m} = \frac{wielkość_A^n}{wielkość_B^m} \quad 6.9.18$$

Zdarzają się wielkości, które nie mają wymiaru. Wielkości takie nazywamy wielkościami bezwymiarowymi. Przykładem takiej wielkości jest miara kąta, którą zwykle wyrażamy w stopniach lub radianach. Zatem kąt ma swoją jednostkę, ale nie ma wymiaru. Radian jest zdefiniowany jako stosunek długości łuku określonego na okręgu przez kąt zaczepiony w środku tego okręgu do promienia tego okręgu – zatem zgodnie z tą definicją mamy: $[długość]/[długość] = [\text{bez wymiaru}]$ (równanie (6.9.13)). Generalnie kiedy operujemy stosunkami dwóch takich samych wielkości, to mamy do czynienia

z wielkością bezwymiarową. Wielkość taka może być używana w dowolnym układzie jednostek bez żadnych przeliczeń. Na przykład jeżeli jeden samochód jedzie z prędkością 20[m/s] a drugi z prędkością 10[m/s], to stosunek prędkości pierwszego samochodu do drugiego wynosi 2[bez wymiaru]. Liczbę dwa otrzymamy również wyrażając prędkości tych samochodów w [km/h], [milach/tydzień], czy [wiorstach/minutę].

Dygresja 4.9.1

Rachunek jednostek jest jedną z szybszych metod analizy poprawności rozwiązania zadania z fizyki. Pierwszą rzeczą, którą robię sprawdzając rozwiązania zadań, jest określenie jednostki otrzymanego wyniku. Jeżeli okaże się, że na przykład prędkość wyszła komuś w [kg/s], lub wynik jest sumą (różnicą) dwóch różnych wielkości (co jest ciężkim grzechem), to wiem, że: po pierwsze zadanie zrobione jest źle, a po drugie i gorsze piszącego takie bzdury nie ruszają. Mnie ruszają, a to ja wystawiam oceny. Wychodzę z założenia, że lepiej jest nie pisać w ogóle niż pisać ewidentne bzdury.

Pierwszym uczonym, który jawnie pisał i stosował analizę wymiarową był Jean Fourier, który znany jest przede wszystkim z analizy fourierowskiej (o tym będzie w tematach drgania, fale i nie tylko). Pisał o niej w pracy *Analityczna teoria ciepła* opublikowanej w 1822 roku. Fourier podkreślał jej zalety, jako prostej metody na sprawdzenie poprawności obliczeń. Warto dodać, (o tym nie pisał Fourier), że analiza wymiarowa pozwala na odtworzenie pewnych prostych wzorów, których nie pamiętamy. Oto dwa przykłady. Jak wiąże się ze sobą częstotliwość fali f , długość fali λ i jej prędkość v ? Częstotliwość ma wymiar jeden przez czas. Istnieje tylko jedna kombinacja długości fali λ (która ma wymiar długości) i prędkości v , która daje wielkość jeden przez czas, jest to

$$\frac{v}{\lambda} \Rightarrow \left[\frac{\frac{m}{s}}{m} \right] = \left[\frac{1}{s} \right] \quad 6.9.19$$

Możemy zatem przyjąć

$$f = \alpha \frac{v}{\lambda} \quad 6.9.20$$

Gdzie α jest bezwymiarową stałą, której nie da się określić z analizy wymiarowej (bo jest bezwymiarowa). Zwykle jednak wiemy czy taka stała jest potrzebna czy nie. Drugim przykładem jest wzór (3.2) na okres wahadła matematycznego. W prostym modelu mamy trzy parametry: masę wahadła m , długość wahadła L , przyspieszenie ziemskie g . Pomijamy inne czynniki; na przykład opory ruchu. Ponownie istnieje tylko jedna kombinacja tych wielkości prowadząca do wielkości o wymiarze czasu. Jest nią wzór (3.2)

$$T = \alpha \sqrt{\frac{L}{g}} \quad 6.9.21$$

$$\alpha = 2\pi \quad 6.9.21a$$

Bezwymiarowej stałej α nie uzyskamy z analizy wymiarowej.

Na tym się bynajmniej wartość analizy wymiarowej nie kończy się. Za jej pomocą możemy znajdować ścieżki do nieznanymi wcześniej zależności, użytecznych z technicznego punktu widzenia, lub wręcz dokonywać naukowych odkryć. Na przykład pod koniec lat sześćdziesiątych XX wieku J. Bjorken wysunął hipotezę, na bazie analizy wymiarowej, dotyczącej procesu rozpraszania elektronów na nukleonach (składnikach jądra atomowego). W latach 70-tych XX wieku hipoteza ta została potwierdzona doświadczalnie.

Na koniec zasadnicza uwaga. Cały czas mówimy o analizie wymiarowej, którą czasem błędnie nazywa się rachunkiem jednostek. Weźmy taki przykład. Prędkość kątową ω możemy wyrazić jako iloraz przyrostu kąta $\Delta\varphi$ w czasie Δt :

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad 6.9.22$$

W fizyce najczęściej stosowaną jednostką kąta jest radian. Radian jest wielkością bezwymiarową (podobnie jak i inne jednostki kąta). Oznacza to, że wymiarem prędkości kątowej jest odwrotność czasu.

$$\{\omega\} = \frac{1}{\{\text{czas}\}} \quad 6.9.23$$

Natomiast jednostką prędkości kątowej ω jest w układzie SI radian na sekundę

$$[\omega] = \frac{[rad]}{[s]} \quad 6.9.24$$

Mieszanie pojęcia wielkości fizycznej i jednostki tej wielkości może prowadzić do nieporozumień. Na przykład przyspieszenie dośrodkowe działające na masę punktową, w ruchu po okręgu o promieniu r z prędkością kątową ω wyraża się wzorem:

$$a = \omega^2 r \quad 6.9.25$$

Wymiar przyspieszenia to oczywiście długość na czas do kwadratu. Przeprowadźmy analizę wymiarową, ale na jednostkach, wzoru (6.9.25).

$$[a] = \left[\frac{rad}{s^2} \right] [m] = \left[\frac{mrad}{s^2} \right] \quad 6.9.26$$

Wyszło nam metr razy radian przez sekundę do kwadratu. Coś jest nie tak. Zwykle się w takich przypadkach dodaje, że radian jest wielkością bezwymiarową i go pomija. Ale radian nie jest wielkością tylko jednostką miary kąta; wielkością jest kąt! Więc taki komentarz jest niepoprawny. Jeżeli prowadzimy analizę wymiarową to róbmy to konsekwentnie na wymiarach a nie na jednostkach

$$\{a\} = \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} \{m\} = \left\{ \frac{m}{s^2} \right\} \quad 6.9.27$$

I nie ma żadnego problemu. Wymiarem przyspieszenia jest długość na czas do kwadratu.

Obok analizy wymiarowej warto również popatrzeć jak wygląda to na jednostkach. Może się okazać, że dostaniemy na przykład taki wzór na przyspieszenie

$$[a] = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \text{ cm}} \right] \quad 6.9.28$$

Od strony wymiaru wszystko jest w porządku. Na górze mamy metr kwadrat, czyli długość do kwadratu, a na dole mamy centymetr, czyli też długość oraz sekundę do kwadratu. Po przejściu od jednostek do wymiarów i po skróceniu otrzymamy na górze długość a na dole sekundę do kwadratu, czyli poprawny wymiar przyspieszenia. Ale jak podzielimy powiedzmy jeden metr do kwadratu przez 10 centymetrów, to dostaniemy jedną dziesiątą metra kwadrat na centymetr. Poprawną wartość ale w cośkolwiek dziwnej jednostce długości: metr kwadrat na centymetr. W czasie obliczeń możemy o tym łatwo zapomnieć i napisać po prostu 0.1m, co będzie już złą wartością liczbową. Zamieniając owe 10cm na 0.1metra otrzymamy 10metrów, czyli poprawną wartość liczbową wyrażoną w metrach. Więc zapis (6.9.28), choć nie stanowi analizy wymiarowej, pozwala nam zobaczyć, że mieszamy na przykład różne jednostki długości, co zwykle prowadzi do błędów w wartościach liczbowych (a nie w wymiarze uzyskanego wyniku). Nie mniej zapis (6.9.29) nie jest poprawnym zapisem analizy wymiarowej.

7. Tabele

7.1. Przedrostki wielokrotne układu SI

Przedrostki, to krótkie słowa dodawane na początku nazwy jednostki. Dzięki nim liczby, którymi operujemy nie są zbyt duże. Zamiast mówić że przejechaliśmy odległości stu dwudziestu pięciu tysięcy metrów (125000m), wolimy powiedzieć, że przejechaliśmy odległość 125 kilometrów (125km). Zamiast mówić, że nasz dysk ma pojemność 250 miliardów bajtów (250 000 000 000B) wolimy powiedzieć, że nasz dysk ma pojemność 250 gigabajtów (250GB). Poniżej zamieściłem tabelę przedrostków zwiększających wartość jednostek.

Nazwa mnożnika	Mnożnik	Przedrostek	
		Nazwa	Symbol
dziesięć	10^1	deka	da
sto	10^2	hekto	h
tysiąc	10^3	kilo	k
milion	10^6	mega	M
miliard	10^9	giga	G
bilion	10^{12}	tera	T
biliard	10^{15}	peta	P
trylion	10^{18}	eksa	E
tryliard	10^{21}	zetta	Z
kwadrylion	10^{24}	jotta	Y

Tabela 7.1.1. Przedrostki wielokrotne układu SI

Uwaga: W USA miliard to nasze sto milionów - 10^8 , bilion to nasz miliard - 10^9 , a trylion to nasz bilion czyli 10^{12} . Jako ciekawostkę podam, że z greckiego pochodzą następujące nazwy: deka od dekas – dziesięć; hekto od hekato – sto; mega od megas – wielki; giga od gigas – olbrzymi; tera od teras – sięgający nieba. Z łaciny mamy: peta od peto – dążący do, oraz ekxa od eks – na zewnątrz. Zetta pochodzi od łacińskiego septo – siedem, gdyż zetta to 1000^7 . Jotta pochodzi od greckiego okto – osiem, gdyż jotta to 1000^8 . Zetta i jotta zostały dodane do oficjalnej tabeli przedrostków układu SI w 1991.

7.2. Przedrostki podwielokrotne układu SI

Przedrostki podwielokrotne służą do zmniejszania wartości jednostek. I tak zamiast mówić, że średnica śruby ma trzy tysięczne metra (0.003m), wolimy powiedzieć, że ma trzy milimetry (3mm). Nieco problemu jest z kilogramem. Jak widać jednostka podstawowa układu SI to tysiąc gram (1000g), czyli jeden kilogram (1kg). Dlatego powiemy, że dzienna dawka leku to 5 miligramów (5mg), a nie 5 mikrokilogramów (5μkg). A tysiąc kilogramów (1000kg) to nie jeden kilokilogram (1kkg), tylko jedna tona (1T) lub jeden megagram (1Mg). Cóż, ze względów historycznych nazewnictwo nie zawsze jest konsekwentne, o czym się jeszcze nieraz przekonacie.

Nazwa mnożnika	Mnożnik	Przedrostek	
		Nazwa	Symbol
dziesiąta	10^{-1}	decy	d
setna	10^{-2}	centy	c
tysięczna	10^{-3}	mili	m
milionowa	10^{-6}	mikro	μ
miliardowa	10^{-9}	nano	n
bilionowa	10^{-12}	piko	p
biliardowa	10^{-15}	femto	f
trylionowa	10^{-18}	atto	a
tryliardowa	10^{-21}	zepto	z
kwadrylionowa	10^{-24}	jokto	Y

Tabela 7.2.1. Przedrostki podwielokrotne układu SI

Jako ciekawostkę podam, że z łaciny mamy: decy od decem – dziesięć; centy od centum – sto; mili od mille – tysiąc, a z greki: mikro od mikros – mały; z włoskiego: nano od nano – karzełek; piko od piccolo – maleńki; z szwedzkiego: femto od femton – piętnaście oraz atto od atton – osiemnaście. Zepto wzięło się od francuskiego sept i/lub łacińskiego spetem – siedem, gdyż Zepto to 1000^{-7} . Jokto wzięło się z greckiego okto – osiem, gdyż okto to 1000^{-8} . Zepto i okto zostały dodane do oficjalnej tabeli przedrostków układu SI w 1991 roku.

7.3. Alfabet grecki

Litery alfabetu greckiego są nader chętnie wykorzystywane jako symbole wielkości i stałych fizycznych. Na przykład na oznaczenie kąta często wykorzystuje się takie greckie litery jak α , θ , φ . Warto więc mieć pod ręką tabelę z greckim alfabetem.

litera	wymowa		litera	wymowa
A, α	alfa		N, ν	ni
B, β	beta		Ξ, ξ	ksi
Γ, γ	gamma		O, o	omikron
Δ, δ	delta		Π, π	pi
E, ϵ	epsilon		P, ρ	ro
Z, ζ	dzeta		Σ, σ	sigma
H, η	eta		T, τ	tau
Θ, θ	teta		Y, υ	ipsilon
I, ι	jota		Φ, ϕ, φ	fi
K, κ	kappa		X, χ	chi
Λ, λ	lambda		Ψ, ψ	psi
M, μ	mi		Ω, ω	omega

Tabela 7.3.1. Alfabet grecki. Na zielono zaznaczone są te litery, które są często wykorzystywane w podręcznikach do fizyki i matematyki. Pozostałe są zbytnio podobne do liter alfabetu łacińskiego.

7.4. Inne oznaczenia

Obok greckich liter w użyciu mamy również inne oznaczenia. Poniższa tabela przedstawia te z nich, które są wykorzystywane w dalszej części wykładów.

symbol	Opis	wymowa
∞	symbol nieskończoności	-
$\hbar$	Stała Plancka dzielona przez 2π	h-kreślone
$\text{\AA}$	Angstrom jednostka używana w fizyce atomowej. $1 \text{\AA} = 10^{-10} \text{m}$	angstrom
∇	Operator różniczkowy	nabla
Tabela 7.4.1. Wykaz wybranych pozostałych symboli używanych w tekście wykładu		

7.5. Wartości stałych fizycznych

Wartości stałych fizycznych jakie pojawią się w dalszej części wykładów zebrane są w poniższej tabeli. Wartości stałych podane są zgodne z najnowszą definicją układu SI. Na zielono oznaczone są stałe leżące u podstaw definicji układu SI.

nazwa	symbol	wartość
elementarny ładunek elektryczny	e	$1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{C [C]; [A} \cdot \text{s]}$
magneton Bohra	μ_B	$9.274400949 \cdot 10^{-24} \left[\frac{\text{J}}{\text{T}} \right]; [\text{A} \cdot \text{m}^2]$
masa spoczynkowa elektronu	m_e	$\approx 9.1093826 \cdot 10^{-31} [\text{kg}]$
masa spoczynkowa neutronu	m_n	$\approx 1.67262171 \cdot 10^{-27} [\text{kg}]$
masa spoczynkowa protonu	m_p	$\approx 1.67492728 \cdot 10^{-27} [\text{kg}]$
prędkość światła w próżni	c	$299792458 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
promień atomu Bohra	r_B	$5,2917720859 \cdot 10^{-11} [\text{m}]$
przenikalność elektryczna próżni	ϵ_0	$\approx 8.854187817 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{F}}{\text{m}} \right]; \left[\frac{\text{A}^2 \text{s}^4}{\text{kg m}^3} \right]$
przenikalność magnetyczna próżni	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{H}}{\text{m}} \right]; \left[\frac{\text{kg m}}{\text{A}^2 \text{s}^2} \right]$
stała Avogadra	N_A	$6.02214076 \cdot 10^{23}$
stała Boltzmanna	k	$1.380649 \cdot 10^{-23} \left[\frac{\text{J}}{\text{K}} \right]; \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{K s}^2} \right]$
stała gazowa	R	$\approx 8,314472 \left[\frac{\text{J}}{\text{mol K}} \right]; \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{mol K s}^2} \right]$
stała grawitacji	G	$\approx 6,67428 \cdot 10^{-11} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \right]$
stała Plancka	h	$6.62607015 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s [J s]; } \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \right]$
stała Rydberga	R	$\approx 1,09677 \cdot 10^7 \left[\frac{1}{\text{m}} \right]$

Tabela 7.5.1 Wartości wybranych stałych fizycznych. Wartości podane są w układzie SI. Przy niektórych podane są dwie jednostki przedzielone średnikiem. Pierwsza jednostka, to jednostka zwykle używana dla danej wielkości. Druga jest wyrażona przez jednostki podstawowe układu SI.

7.6. Wartości wybranych wielkości fizycznych

Tabela (7.6.1) przedstawia wartości wybranych wielkości fizycznych, które są wielokrotnie przeze mnie wykorzystywane. Większość z nich podana jest z dokładnością mniejszą od tej, które można znaleźć w tablicach. Jest to zgodne z celem do jakiego używam tych wartości, to jest do przykładowych obliczeń mających na celu pokazanie zakresu wartości z jakimi, w danym zagadnieniu mamy do czynienia.

nazwa	symbol	wartość
Ciśnienie atmosferyczne (średnie na poziomie morza)	<i>brak</i>	101.3 kPa
Masa Ziemi	M_Z	5.972×10^{24} kg
Promień Ziemi (średni)	R_Z	6371 km
Przyspieszenie ziemskie	g	9.807 m/s^2
Tabela 7.6.1 Wartości wybranych parametrów fizycznych. Wartości podane są w układzie SI. W kolumnie symbol przedstawione są powszechnie przyjęte symbole, jeżeli takie są.		