Pomoce Matematyczne

DA

WEKTORY

1. Podstawy

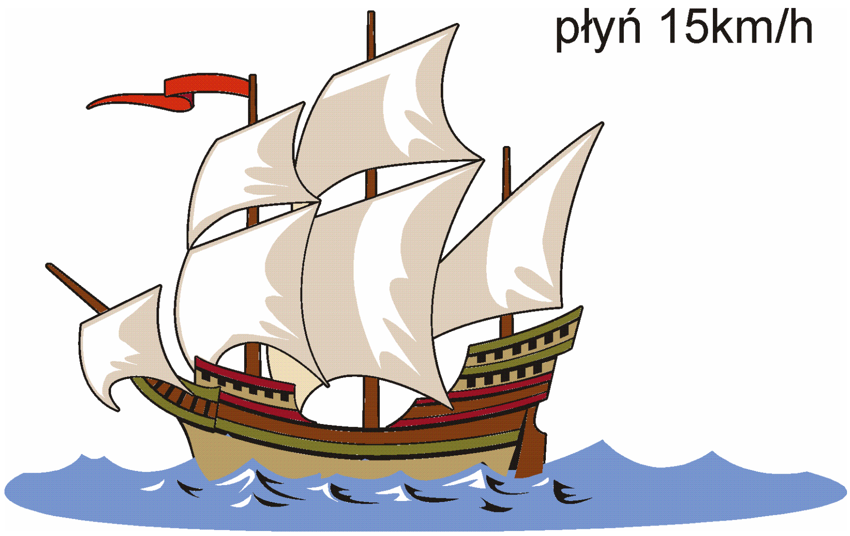
1.1. Graficzna reprezentacja wektorów

Wiele wielkości fizycznych charakteryzujemy liczbą. Przykładem takich wielkości są: masa, temperatura, długość, ciśnienie, energia. Wielkości te nazywamy wielkościami skalarnymi.

Definicja 1.1: Wielkość skalarna (w fizyce)

Wielkość skalarna to taka wielkość fizyczna, którą możemy scharakteryzować skalarem (to jest liczbą)

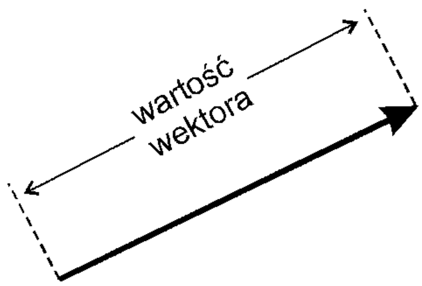
Bez trudu znajdziemy wielkości fizyczne, których nie można opisać liczbą. Przykładem takich wielkości są: prędkość, siła, pęd. Liczbą możemy określić wartość prędkości, jednak wartość prędkości na przykład statku, nie powie nam, w którą stronę ów statek się porusza (rys. 1.1.1).



Rysunek 1.1.1. Polecenie płyń z prędkością 15km/h nie wystarczy sternikowi do trafienia do celu

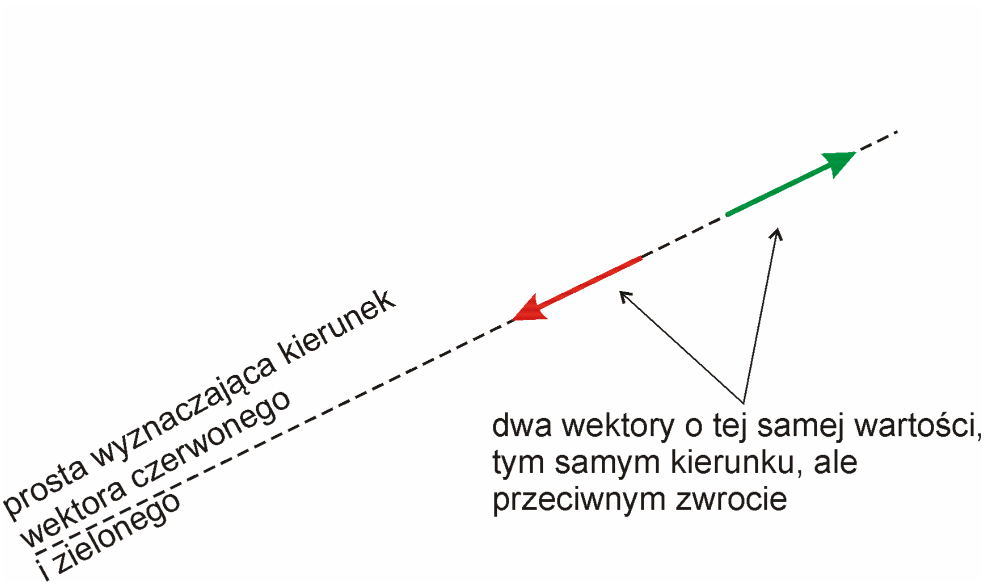
W przykładzie z rysunku (1.1.1) polecenie „płyń z prędkością 15km/h” jest niepełne. Potrzebny jest jeszcze kierunek, w którym należy popłynąć. Aby w pełni oddać charakter takiej wielkości jak prędkość posługujemy się wektorem.

Spotkanie z wektorami zacznę od ich graficznej reprezentacji. Graficznie wektor reprezentowany jest przez strzałkę (rys. 1.1.2); taką strzałkę nazywa się w geometrii odcinkiem skierowanym. Długość strzałki (długość wektora) zawiera informację o wartości wektora, a kierunek strzałki mówi – no właśnie - w jakim kierunku działa owa wielkość.



Rysunek 1.1.2. Długość strzałki (odcinka skierowanego) reprezentuje wartość wektora. Kierunek strzałki wskazuje kierunek działania wielkości wektorowej

Ściślej rzecz biorąc zamiast o samym kierunku powinniśmy mówić o kierunku i zwrocie wektora (rys. 1.1.3). Kierunek wektora wyznacza prosta, w której ten wektor się zawiera. Zwrot wektora określa w którą stronę wektor jest zwrócony.



Rysunek 1.1.3 Dwa wektory o tej samej wartości i tym samym kierunku, ale przeciwnym zwrocie

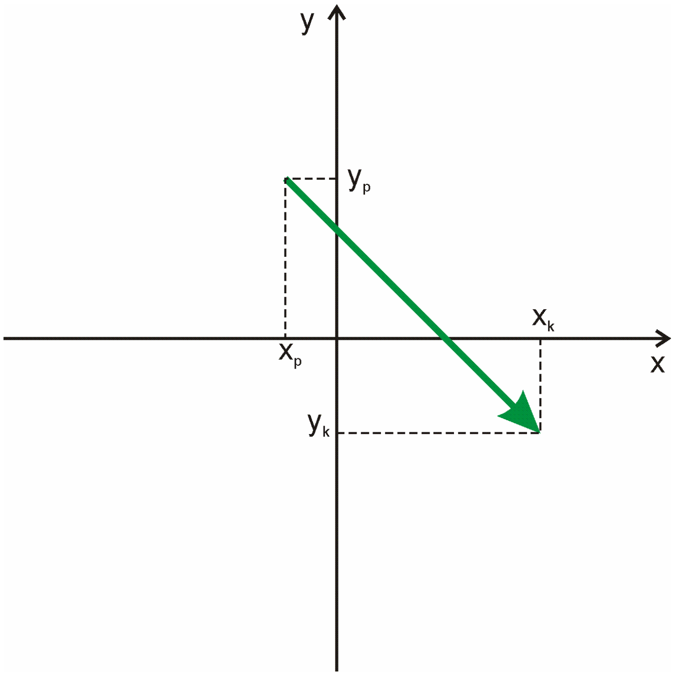
Wracając do przykładu ze statkiem (rys. 1.1.1). Jeżeli podamy wektor prędkości, to znaczy wektor, którego wartość będzie określała wartość prędkości statku a kierunek i zwrot będą określały kierunek w jakim się należy poruszać, to obranie właściwego kursu nie będzie problemem. Prędkość jest wielkością wektorową, to jest taką wielkością, do opisu, której potrzebujemy wektorów.

Rysunek 1.1.4. Teraz sternik już wszystko wie

Szczególnym przykładem wektora jest wektor o zerowej długości – tzw. wektor zerowy. Wektor zerowy jest jedynym wektorem, dla którego nie możemy określić ani kierunku ani zwrotu. Nie mniej jest to wektor, a jego ewentualne wyrzucenie z królestwa wektorów (jako kara za brak kierunku i zwrotu) sprowadziłby na to królestwo wiele nieszczęść.

1.2. Współrzędnościowa reprezentacja wektorów

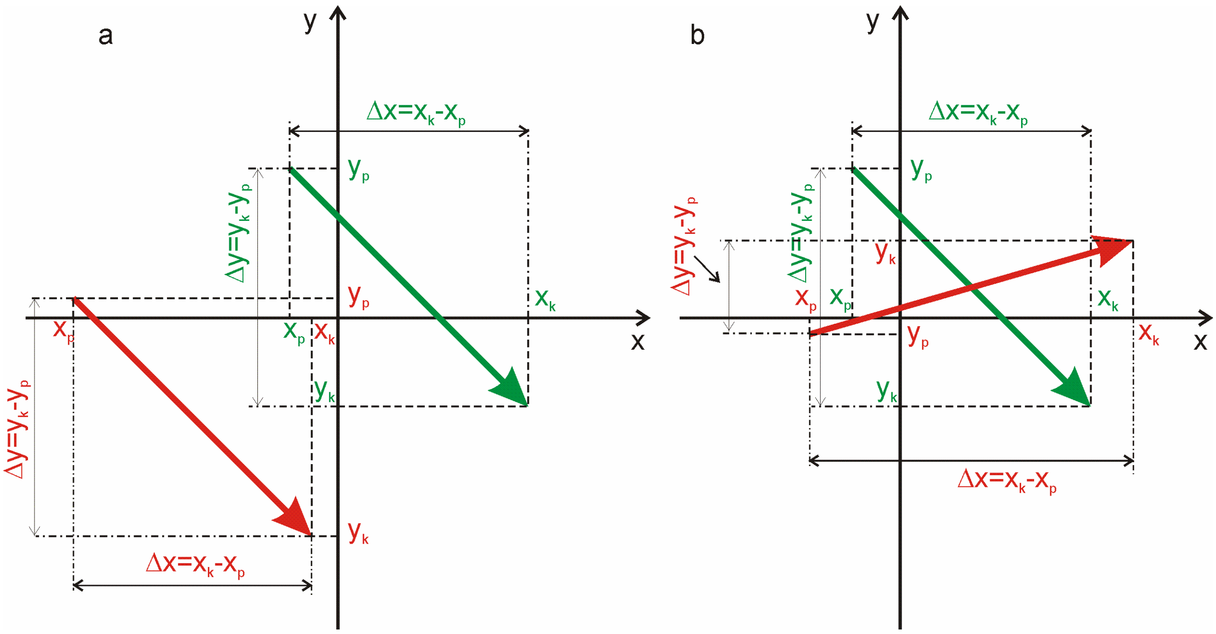
Wektory jako strzałki nie są jedynym sposobem na reprezentacje wielkości wektorowych. W wielu przypadkach wygodniejsza jest reprezentacja współrzędnościowa. Reprezentacja współrzędnościowa wymaga zdefiniowania układu współrzędnych. W danym układzie współrzędnych możemy spróbować określić wektor w sposób przedstawiony na rysunku (1.2.1). Choć pomysł wygląda dobrze nie jest zadowalający. Problem polega na tym, że dwie wzajemnie przesunięte strzałki są dwiema różnymi strzałkami. Jednak z punktu widzenia teorii wektorów obie strzałki reprezentują ten sam wektor; jeżeli przyjmiemy, że tak nie jest to opuścimy królestwo wektorów. Jak widać na rysunku (1.2.2a) dwie przesunięte strzałki mają dwie takie same różnice (Δx, Δy) współrzędnych końców i początków. Dlatego zamiast podawać współrzędne początków i końców strzałek, posługujemy się ich różnicami. Różnice te nazywamy współrzędnymi wektora. Zauważ również, że strzałka obrócona, choć zachowuje swoją długość, zmienia swoje współrzędne (Δx, Δy) (rys. 1.2.2b). I bardzo dobrze bo strzałka obrócona reprezentuje inny wektor.



Rysunek 1.2.1. Wektor na płaszczyźnie możemy spróbować reprezentować współrzędnościowo; przez podanie dwóch par liczb. Pierwsza para liczb (x_p, y_p) określa współrzędne początku wektora, a druga para (x_k, y_k) określa współrzędne końca wektora.

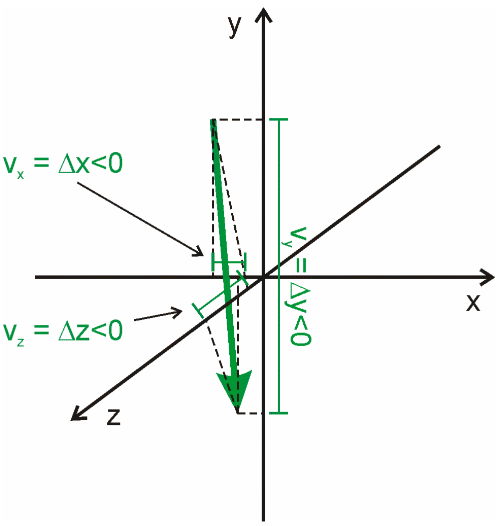
Jak z tego wynika wektor **v** na płaszczyźnie możemy reprezentować przez dwie liczby (v_x=Δx, v_y=Δy) nazywane współrzędnymi tego wektora. Fakt ten będę zapisywał tak: **v**(v_x, v_y). Pogrubiona litera oznacza wektor, a symbole w nawiasach z indeksem x i y oznaczają współrzędne tego wektora w kierunku osi x i y. W przypadku wektora prędkości liczby te mają prostą interpretację fizyczną. Współrzędne wektora prędkości mówią z jaką prędkością porusza się obiekt wzdłuż kierunku wyznaczonego przez oś x, a z jaką wzdłuż kierunku wyznaczonego przez oś y. Ogólnie współrzędne wielkości wektorowej mówią z jaką „intensywnością” działa ta wielkość w kierunku osi x a z jaką w kierunku osi y.

Nie zawsze wektor da się reprezentować za pomocą dwóch współrzędnych. Jeżeli będziemy rozpatrywać prędkość samolotu, to musimy również uwzględnić prędkość wznoszenia lub opadania. W takim przypadku wektory będą miały trzy współrzędne. Choć liczba współrzędnych wzrosła wektory dalej możemy rysować jako strzałki, tyle że w przestrzeni, a nie na płaszczyźnie (rys.1.2.3). Zapis wektora we współrzędnych, w przestrzeni, wygląda tak **v**(v_x, v_y, v_z). Cztery współrzędne **v**(v_x, v_y, v_z, v_s) wskazują, że wektor jest zdefiniowany w przestrzeni czterowymiarowej. Nie potrafimy sobie takiej przestrzeni ani wyobrazić, ani tym bardziej jej narysować. Ale możemy zapostulować, że jest przestrzeń, w której możemy zdefiniować cztery wzajemnie prostopadłe osie (x, y, z, s), i w której wektory mają cztery współrzędne. Tutaj po raz pierwszy ujawniła się przewaga reprezentacji współrzędnościowej nad graficzną. Tylko czy przestrzenie czterowymiarowe mają jakieś fizyczne znaczenie?



Rysunek 1.2.2. a) Dwa wzajemnie przesunięte wektory to te same wektory. Ale dwie przesunięte strzałki to inne strzałki i mają inne współrzędne końców i początków. Widać z tego, że strzałki nie do końca odpowiadają wektorom. Jednak różnice współrzędnych końców i początków strzałek (Δx, Δy) są takie same w obu przypadkach. I to przez te różnice, nazywane współrzędnymi wektora, charakteryzujemy wektory; b) Dwie obrócone strzałki mają różne współrzędne i reprezentują dwa różne wektory.

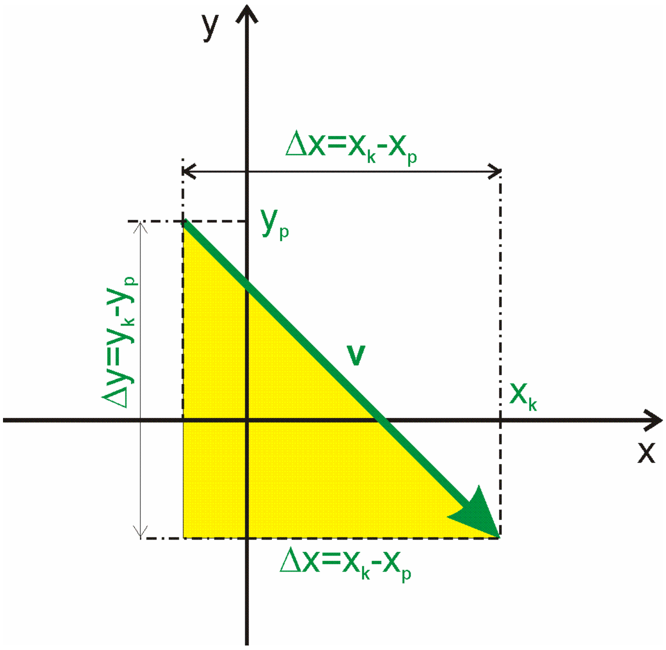
Oczywiście, że tak, fizyczne znaczenie mają przestrzenie bardzo, bardzo wielowymiarowe, nawet nieskończenie wielowymiarowe. Temat ten jest omówiony w ramach wykładów z fizyki.



Rysunek 1.2.3. W trzech wymiarach wektory mają trzy współrzędne.

Jak odczytać wartość (długość) wektora z jego współrzędnych? Odpowiedzią jest twierdzenie Pitagorasa. Długość wektora jest równa (rys.1.2.4)

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad 1.2.1a$$



Rysunek 1.2.4. Do obliczania długości wektora stosujemy twierdzenie Pitagorasa.

Gdy mamy wektory *N*-wymiarowe możemy bez trudu uogólnić powyższy wzór

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} v_i^2} \qquad 1.2.1b$$

W tym wzorze zrezygnowałem z indeksowania współrzędnych przez litery alfabetu *x*, *y*, *z*, …. na rzecz indeksowania kolejnymi liczbami reprezentowanymi przez literę *i*.

Zasadniczą zaletą wielkości wektorowych, czyli takich, które możemy opisać wektorem jest to, że zagadnienie wielowymiarowe możemy sprowadzić do *N*-zagadnień jednowymiarowych. Tutaj *N* jest wymiarem przestrzeni wektorowej. Jeżeli na przykład na jakiś obiekt działa siła **F**, to obliczanie skutków działania tej siły możemy w przestrzeni dwuwymiarowej sprowadzić do niezależnego obliczenia tychże skutków wzdłuż dwóch osi *x* i *y*. Choć postępując w ten sposób musimy rozwiązać *N*-zagadnień zamiast jednego, to te *N* jednowymiarowych zagadnień jest często dużo prostsze od odpowiadającego im jednego zagadnienia *N*-wymiarowego.

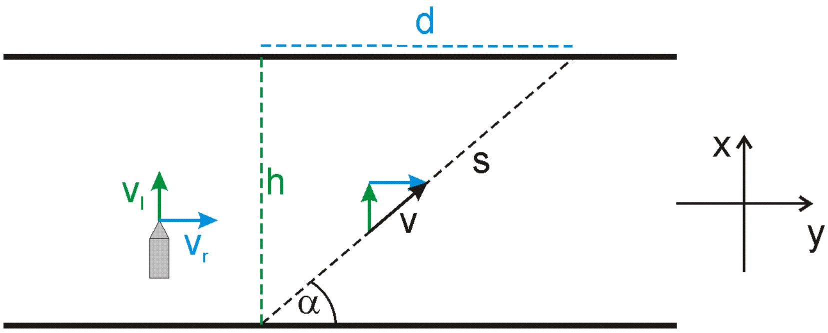
Reguła 1.2.1: Rozkład zagadnienia wektorowego na współrzędne

Jeżeli mamy wielkości wektorowe, a wymiar przestrzeni wynosi N, to skutki fizyczne działania wielkości wektorowych możemy zawsze obliczyć w ten sposób, że obliczamy je niezależnie dla wszystkich N wymiarów a wyniki składamy zgodnie z zasadami rachunku wektorowego. Jeżeli tego się nie da zrobić to albo wielkości z którymi mamy do czynienie nie są wielkościami wektorowymi, albo operacje, które stosujemy są źle zdefiniowane.

Czas na prosty przykład:

Zadanie 1.2.1

Na rzece o szerokości h i prądzie wody o prędkości v_r porusza się motorowa łódka. Silnik łódki pcha ją prostopadle do brzegów z prędkością v_l. Obliczyć czas w jakim łódka przepłynie z jednego brzegu na drugi oraz drogę jaką, w tym czasie, przebędzie wzdłuż brzegu rzeki.



Rysunek 1.2.5. Szkic do zadania 1.2.1

Z treści zadania wynika, że szukamy wielkości *d* (zgodnie z oznaczeniem na rysunku (1.2.5)) oraz czasu przejścia łódki z jednego brzegu na drugi. Zrobię to zadanie na dwa sposoby. W pierwszym podejściu nie będę korzystał z własności wektorów. Z rysunku widać, że

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{d} = \frac{v_l}{v_r} \Rightarrow d = \frac{v_r}{v_l} h \qquad 1.2.2$$

Aby obliczyć czas przejścia musimy wyznaczyć drogę *s* jaką przebędzie łódka oraz jej prędkość wypadkową *v*. Droga *s* jest równa

$$s = \sqrt{h^2 + d^2} = \sqrt{h^2 + h^2 \frac{v_r^2}{v_l^2}} = h\sqrt{\frac{v_r^2 + v_l^2}{v_l^2}} = \frac{h}{v_l}\sqrt{v_r^2 + v_l^2} \qquad 1.2.3$$

Prędkość wypadkowa łódki wynosi

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_l^2} \qquad 1.2.4$$

Czas w jakim łódka przepłynie drogę *s* wynosi

$$t = \frac{s}{v} = \frac{\frac{h}{v_l}\sqrt{v_r^2 + v_l^2}}{\sqrt{v_r^2 + v_l^2}} = \frac{h}{v_l} \qquad 1.2.5$$

W drugiej metodzie rozwiązania zadania potraktuję prędkość łódki i jej przesunięcie jak wektory. W układzie współrzędnych zaznaczonym na rysunku współrzędne tych wektorów wynoszą **v**(v_l; v_r), **s**(d; h). Rozwiążę zadanie rozważając osobno ruch w kierunku osi x i osi y. Czas potrzebny na przejście drogi d z prędkością v_l jest równy

$$t = \frac{h}{v_l} \qquad 1.2.6$$

Jest to zarazem czas w jakim łódka płynie z jednego brzegu na drugi oraz w jakim prąd wody spycha łódkę w dół rzeki. Obliczony czas zgadza się z czasem obliczonym pierwszą metodą (1.2.5). Droga jaką łódka, w tym czasie, przebędzie w dół rzeki jest równa

$$d = t\, v_r = \frac{h}{v_l} v_r = \frac{v_r}{v_l} h \qquad 1.2.7$$

Co zgadza się ze wzorem (1.2.2). Jak widać obie metody dały te same wyniki. Jednak metoda wektorowa jest prostsza. W bardziej złożonych problemach przewaga metody wektorowej jest jeszcze wyraźniejsza.

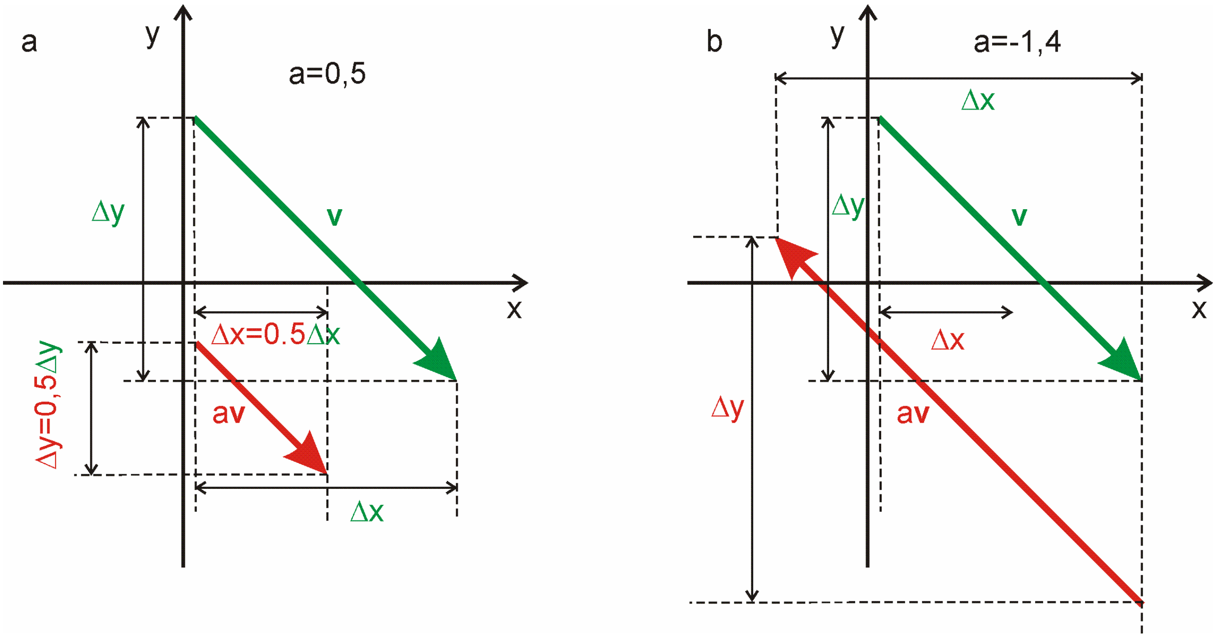
2. Działania na wektorach

2.1. Mnożenie wektora przez liczbę (skalar)

Pierwszym działaniem, które omówię jest mnożenie wektora przez skalar, czyli liczbę. Jak wykonać tę operację? Graficznie przepis jest prosty (rys. 2.1.1).

Definicja 2.1.1: Graficzne mnożenie wektora przez liczbę

*Aby pomnożyć wektor **v** przez liczbę a w reprezentacji graficznej tegoż wektora długość reprezentującej go strzałki mnożymy przez wartość bezwzględną liczby a. Jeżeli liczba a jest ujemna to zmieniamy zwrot wektora.*



Rysunek 2.1.1. Przykład graficznego mnożenia wektora **v** przez liczbę *a* (a) *a*=0,5; (b) *a*=-1,4. Z rysunku widać, że współrzędne wektora czerwonego (otrzymanego przez mnożenie przez liczbę wektora zielonego) są równe współrzędnym wektora zielonego przemnożonym przez daną liczbę, co jest treścią współrzędnościowej definicji mnożenia wektora przez liczbę.

W reprezentacji współrzędnościowej mnożymy przez liczbę wszystkie współrzędne wektora.

Definicja 2.1.2: Współrzędnościowe mnożenie wektora przez liczbę

*Mnożenie wektora **v** o współrzędnych (v_x; v_y; v_z) przez liczbę a daje w wyniku wektor **w**, którego współrzędne są równie iloczynowi liczby a i odpowiednich współrzędnych wektora **v** (wzór (2.1.1)).*

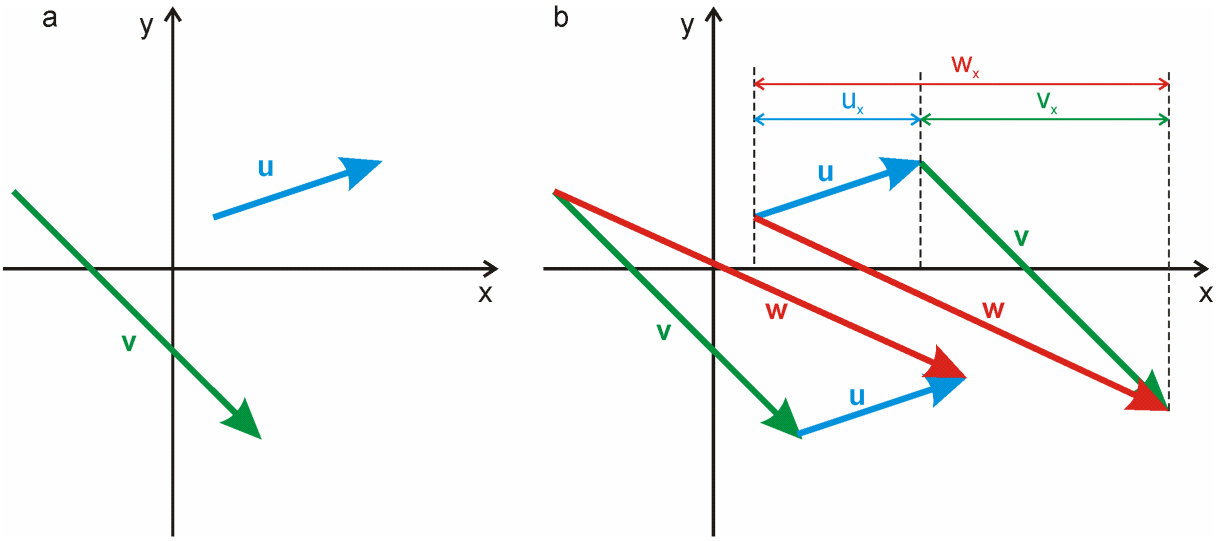
$$a\,\mathbf{v}(v_x;\ v_y;\ v_z) = \mathbf{w}(av_x;\ av_y;\ av_z) = \mathbf{w}(w_x;\ w_y;\ w_z) \qquad 2.1.1$$

2.2. Dodawanie wektorów

Drugim działaniem, które omówię jest dodawanie wektorów. Dodając do siebie dwa wektory **u** i **v** dostajemy trzeci wektor **w**. Graficznie dodawanie realizujemy w następujący sposób (rys. 2.2.1).

Definicja 2.2.1: Graficzne dodawanie wektorów

*Aby dodać dwa wektory **u** i **v** należy strzałkę reprezentującą jeden z nich przenieść równolegle tak aby jej początek został zaczepiony na końcu drugiej strzałki. Sumę wykreślamy rysując strzałkę od początku nieprzesuniętego wektora do końca przesuniętego wektora.*



Rysunek 2.2.1. Przykład graficznego dodawania wektorów: a) dwa przykładowe wektory **u** i **v**; b) sumę wektorów **u** i **v** można utworzyć albo przesuwając wektor **v** (góra rysunku) albo przesuwając wektor **u** (dół rysunku). Czerwona strzałka reprezentuje sumę **w**=**u**+**v**. Przypominam, że dwie strzałki, które można nałożyć na siebie przez przesunięcie reprezentują ten sam wektor. Zatem dwie strzałki czerwone na części (b) rysunku to ten sam wektor.

Jak widać z rysunku (2.2.1) dodawanie wektorów jest przemienne.

Fakt 2.2.1

Dodawanie wektorów jest przemienne

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \qquad 2.2.1$$

Definicja 2.1.4: Dodawanie wektorów we współrzędnych

*Aby dodać dwa wektory **u** i **v** należy dodać ich odpowiednie współrzędne. Sumy współrzędnych określają współrzędne wektora **w** będącego sumą wektorów **u** i **v** (wzór (2.2)).*

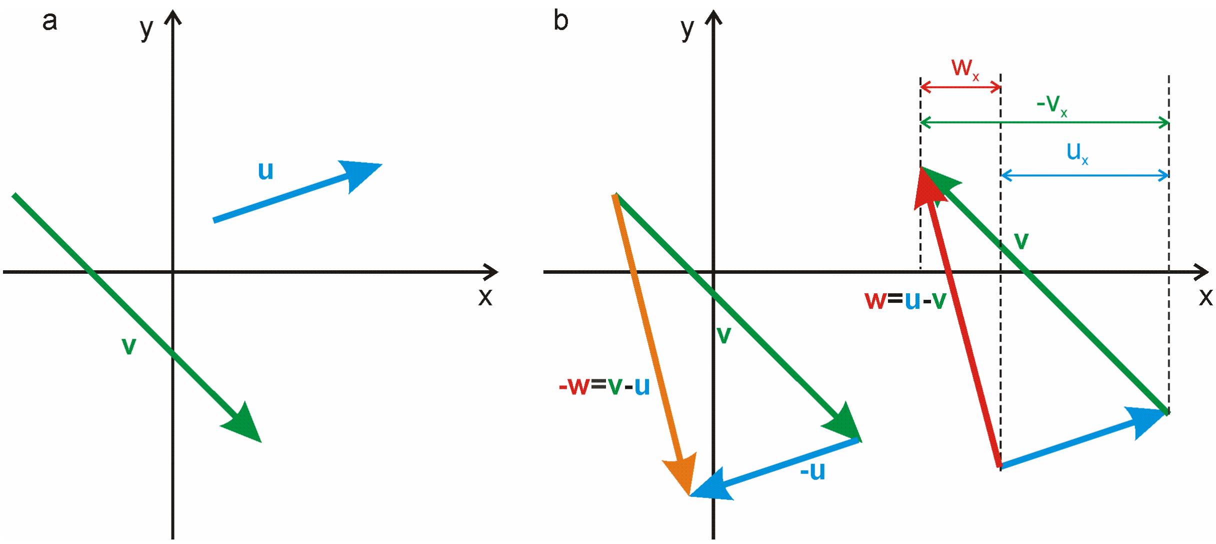
$$\mathbf{u}(\mathrm{u_x};\ u_y;\ \mathrm{u_y}) + \mathbf{v}(v_x;\ v_y;\ v_z) = \mathbf{w}(u_x + v_x;\ u_y + \mathrm{v_y};\ u_z + v_z) = \mathbf{w}(w_x;\ w_y;\ w_z) \qquad 2.2.2$$

2.3. Odejmowanie wektorów

Skoro wiemy już jak mnożyć wektory przez liczbę oraz jak je dodawać bez trudu poradzimy sobie z odejmowaniem wektorów. Skorzystamy tu z prostej zależności

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v} \qquad 2.3.1$$

Zatem aby od wektora **u** odjąć wektor **v**, wektor **v** mnożymy przez liczbę -1 i tak przemnożony wektor dodajemy do wektora **u**. Rysunek (2.3.1) przedstawia przykład takiej operacji.



Rysunek 2.3.1. Przykład odejmowania dwóch wektorów **u** i **v**. W części (b) mamy pokazane dwie różnice **w**=**u**-**v** oraz –**w**=**v**-**u**.

We współrzędnych wygląda to tak

$$\mathbf{u}(\mathrm{u_x};\ u_y;\ \mathrm{u_y}) - \mathbf{v}(v_x;\ v_y;\ v_z) = \mathbf{w}(u_x - v_x;\ u_y - \mathrm{v_y};\ u_z - v_z) = \mathbf{w}(w_x;\ w_y;\ w_z) \qquad 2.3.2$$

Fakt 2.3.1

Odejmowanie wektorów jest antyprzemienne, to znaczy

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \Longrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{u} = -\mathbf{w} \tag{2.3.3}$$

2.4. Iloczyn skalarny wektorów

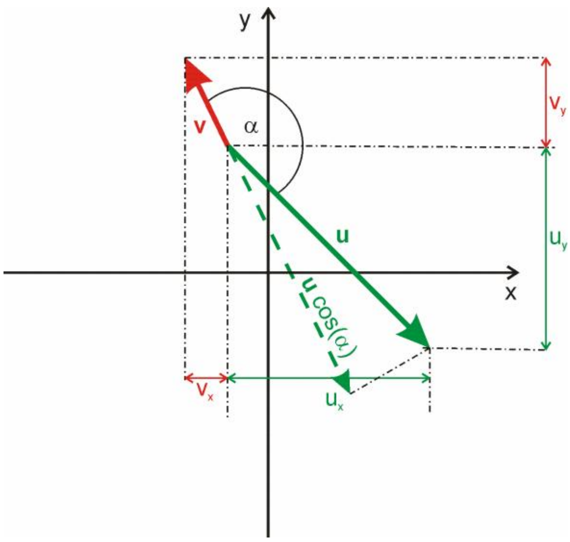
Czas na bardziej złożoną operację – iloczyn skalarny wektorów. Iloczyn skalarny przyporządkowuje dwóm dowolnym wektorom liczbę, czyli skalar; stąd jego nazwa. Szkolna definicja iloczynu skalarnego wygląda tak:

Definicja 2.4.1: Szkolna definicja iloczynu skalarnego dwóch wektorów

*Iloczyn skalarny wektor **u** i **v**, oznaczany przez **u·v**, przyporządkowuje tym wektorom następującą liczbę*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos(< (\mathbf{u}, \mathbf{v})) \tag{2.4.1}$$

Tutaj <(**u**,**v**) oznacza kąt między wektorem **u** i **v** (rys. 2.4.1)



Rysunek 2.4.1. Iloczyn skalarny wektora **u** i **v** jest równy |**u**| |**v**| cos(α) według szkolnej reguły, a we współrzędnych wyraża się wzorem $u_x v_x + u_y v_y$.

We współrzędnych kartezjańskich iloczyn skalarny dwóch wektorów wyraża się jako suma iloczynu ich kolejnych współrzędnych.

Definicja 2.4.2: Iloczyn skalarny dwóch wektorów we współrzędnych

*Iloczyn skalarny wektor **u**(u_x; u_y; u_z) i **v**(v_x; v_y; v_z), oznaczany jako **u·v**, przyporządkowuje tym wektorom liczbę będąca sumą iloczynów kolejnych współrzędnych tych wektorów (wzór (2.4.2))*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_\mathrm{x} v_\mathrm{x} + u_\mathrm{y} v_\mathrm{y} + u_\mathrm{z} v_\mathrm{z} \tag{2.4.2}$$

Ze wzoru (2.4.2) widać, że iloczyn skalarny jest przemienny

Fakt 2.4.1

Iloczyn skalarny wektorów jest przemienny

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \qquad 2.4.3$$

Fakt 2.4.2

Iloczyn skalarny dwóch wzajemnie prostopadłych wektorów jest równy zeru

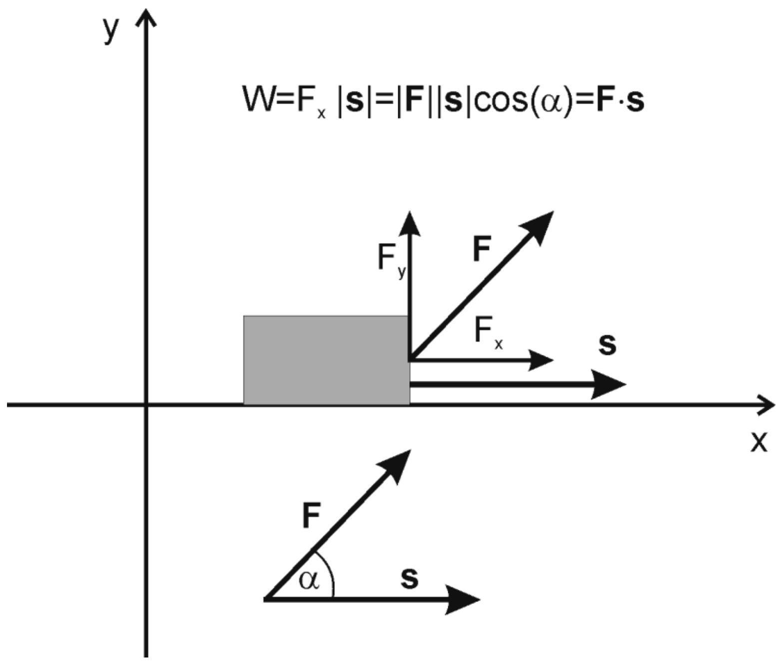
Fakt (2.4.2) wynika z tego, że kąt między dwoma prostopadłymi wektorami jest równy kątowi prostemu, a cosinus kąta prostego jest równy zeru. Stąd dla dwóch prostopadłych wektorów cosinus we wzorze (2.4.1) jest równy zeru.
Mając dane dwa wektory możemy w łatwy sposób obliczyć cosinus kąta między nimi. W tym celu przekształcamy równanie (2.4.1)

Fakt 2.4.3

Cosinus kąta między dwoma wektorami dany jest wzorem

$$\cos(< (\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \qquad 2.4.4$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów ma prostą interpretację fizyczną. Powiedzmy, że wektor **s** wyznacza przesunięcie ciała pod wpływem działania siły opisanej wektorem **F**. Gdy wektor **s** jest równoległy do wektora **F**, to praca *W* siły włożona w przesunięcie ciała wyraża się jako iloczyn długości **s** i **F**; $W=|\mathbf{F}||\mathbf{s}|$. Jednak, gdy siła nie jest równoległa do przesunięcia, tak jak jest to pokazane na rysunku (2.4.2), to wtedy musimy wyznaczyć tą część siły **F**, która działa zgodnie z przesunięciem **s**. Oznaczymy ją przez $\mathbf{F}_x$. Z rysunku widać, że $\mathbf{F}_x = |\mathbf{F}| \cos<(\mathbf{s},\mathbf{F})$. Ponieważ wektor $\mathbf{F}_x$ jest równoległy do wektora przesunięcia **s** praca wyrazi się jako iloczyn wartości tych wektorów $W = |\mathbf{F}|\ |\mathbf{s}| = |\mathbf{F}|\ |\mathbf{s}| \cos<(\mathbf{s},\mathbf{F})$; jest to szkolna postać (2.4.1) wzoru na iloczyn skalarny dwóch wektorów **F** i **s**.



Rysunek 2.4.2. Jeżeli siła **F** nie działa równolegle do przesunięcia **s**, to obliczając pracę musimy wyznaczyć jaka część siły **F** działa w kierunku przesunięcia **s**. Przy obliczaniu pracy wykorzystujemy tą zgodną z kierunkiem przesunięcia składową siły. W najprostszy sposób możemy to zrobić wykorzystując iloczyn skalary wektora siły i wektora przesunięcia.

Dyskusja 2.4.1: O składowych wektorów

Na rysunku (2.4.2) przedstawiłem składowe wektora siły F_x i F_y poprzez strzałki, czyli tak jak wektory. Czy składowe są wektorami czy liczbami? Cóż, sprawa nie jest jednoznaczna. Ale zwykle ta niejednoznaczność nie powoduje nieporozumienia, gdyż z kontekstu wynika czy traktujemy składową jak liczbę czy jak wektor. Ja również czasem będę traktował składowe jak wektory, a czasem jak liczby.

2.5. Iloczyn wektorowy wektorów

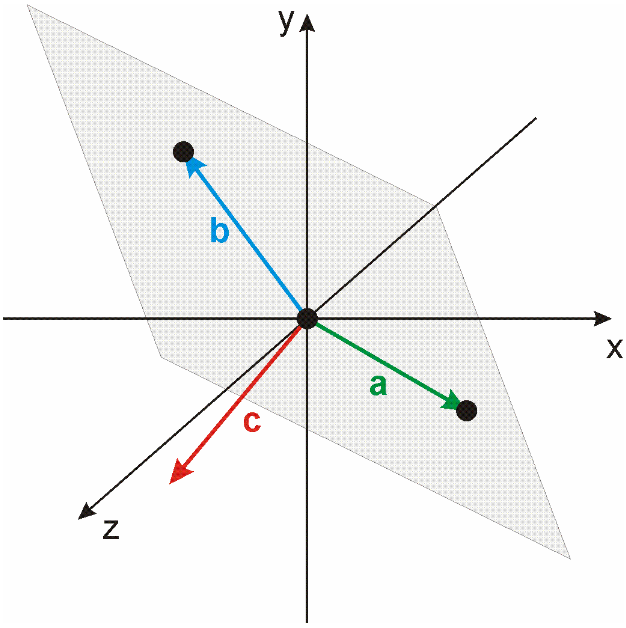
Iloczyn wektorowy dwóch wektorów przyporządkowuje każdej parze wektorów wektor. Iloczyn wektorowy **c** wektora **a** i **b** oznaczamy

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \qquad 2.5.1$$

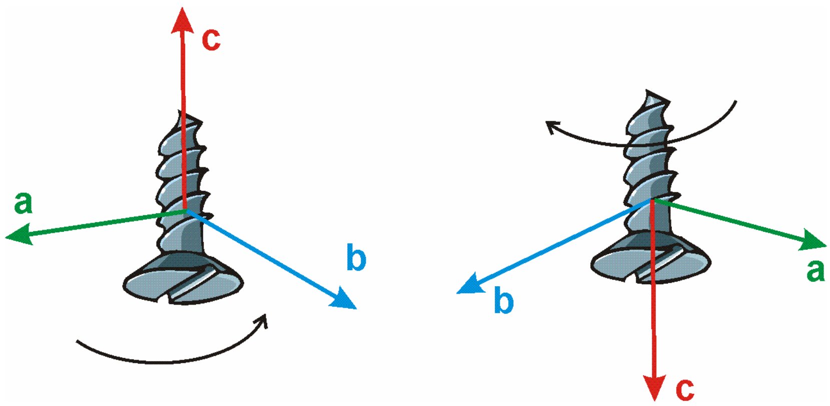
Szkolna konstrukcja wektora **c** będącego iloczynem wektorowym wektora **a** i **b** wygląda tak: Długość wektora **c** jest równa iloczynowi długości wektora **a** i **b** i sinusa kąta między nimi.

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(<\mathbf{a},\mathbf{b}) \qquad 2.5.2$$

Kierunek wektora **c** zdefiniowany jest jako prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory **a** i **b**, zaczepione w tym samym punkcie. Dwa niezerowe i nie mające tego samego kierunku wektory zaczepione w tym samym punkcie wyznaczają trzy nie leżące na tej samej linii punkty: wspólny punkt zaczepienia i dwa końce tych wektorów. Trzy takie punkty wyznaczają jednoznacznie płaszczyznę (rys. 2.5.1). Wektor **c** jest prostopadły do tej płaszczyzny; pozostaje pytanie o zwrot wektora **c**. Tu z pomocą przychodzi nam reguła śruby prawoskrętnej. Aby wyznaczyć zwrot wektora **c** będącego wynikiem iloczynu wektorowego wektora **a** i **b** musimy kręcić śrubę prawoskrętną od wektora **a** do wektora **b**, kierunek ruchu tej śruby wskaże nam zwrot wektora **c** (rys. 2.5.2).



Rysunek 2.5.1. Dwa niezerowe wektory **a** i **b** o różnych kierunkach wyznaczają płaszczyznę. Wektor **c** jest prostopadły do tej płaszczyzny.



Rysunek 2.5.2. Zwrot wektora **c** będącego wynikiem iloczynu wektorowego wektora **a** i **b** wyznaczamy za pomocą reguły śruby prawoskrętnej

Podsumuję dotychczasowe informacje

Definicja 2.5.1: Iloczyn wektorowy dwóch wektorów; szkolna definicja

*Iloczyn wektorowy wektorów **a** i **b** - **a**×**b**, przyporządkowuje tym wektorom wektor **c**, którego długość jest równa iloczynowi długości wektorów **a** i **b** oraz sinusa kąta między tymi wektorami, kierunek wektora **c** jest kierunkiem prostopadłym do* *płaszczyzny wyznaczonej przez wektory* ***a*** *i* ***b****, a zwrot jest wyznaczony przez ruch śruby prawoskrętnej obracanej od wektora* ***a*** *do wektora* ***b****.*

Jeżeli wektory **a** i **b** mają ten sam kierunek (są równoległe, albo antyrównoległe), to ich iloczyn wektorowy jest równy wektorowi zerowemu (sinus kąta zero lub π) jest równy zeru.

Fakt 2.5.1.

Iloczyn wektorowych dwóch wektorów o tym samym kierunku jest równy wektorowi zerowemu.

Co się stanie gdy zamienimy kolejność w iloczynie wektorowym, to znaczy zamiast **a**×**b** będziemy mieli **b**×**a**? Jedyną zmianą jaka nastąpi jest to, że śruba prawoskrętna będzie się przesuwała w przeciwną stronę. Oznacza to, że

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \tag{2.5.3}$$

Iloczyn wektorowy jest antyprzemienny.

Fakt 2.5.2.

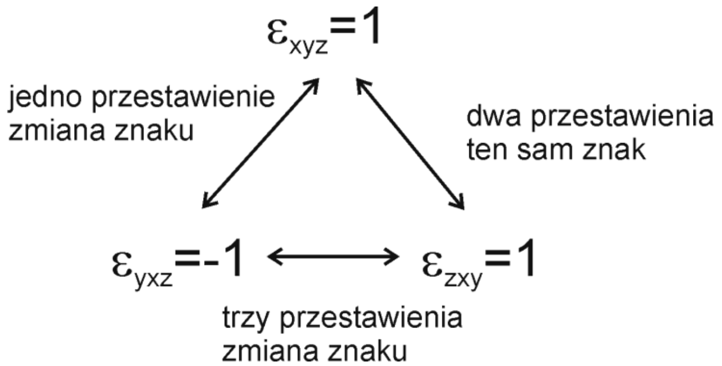
Iloczyn wektorowych dwóch wektorów jest antyprzemienny

Podam teraz definicję iloczynu wektorowego dwóch wektorów opartą o współrzędne. W tym celu wprowadzę nowych symbol ε_{xyz}. Jak widać symbol ε ma trzy indeksy x, y, z i następujące własności

Definicja 2.5.2: Symbol ε

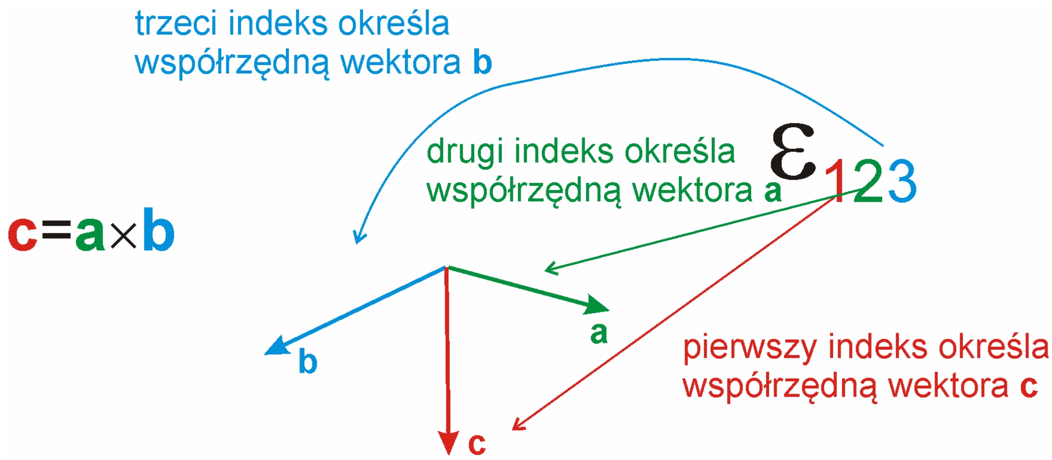
Niech $\varepsilon_{xyz}=1$, Wtedy przy parzystej liczbie przestawień indeksów symbol ε zachowuje wartość 1, a przy nieparzystej przyjmuje wartość -1.

Na przykład przejście od ε_{xyz} do ε_{yxz} zmienia znak ε, gdyż jedno przestawienie jest nieparzystą liczbą przestawień. Natomiast ε_{zxy} dalej jest równe jeden bo mamy dwa przestawienia (najpierw z przeskoczyło y, a potem x). Jednak przejście od ε_{yxz}=-1 do ε_{zxy}=1 wymaga nieparzystej liczby przestawień dlatego wartości symbolu ε różnią się w tym przypadku znakiem (rys.2.5.3)



Rysunek 2.5.3. Przykłady zachowania się symbolu ε przy różnych przestawieniach indeksów

Dokonam przyporządkowania indeksów symbolu ε, współrzędnym kolejnych wektorów w iloczynie wektorowym **c**=**a**×**b**. Pierwszy indeks oznacza współrzędną wektora **c**, drugi indeks oznacza współrzędną wektora **a**, a trzeci indeks oznacza współrzędną wektora **b** (rys. 2.5.4).



Rysunek 2.5.4. Przypisanie indeksom symbolu ε indeksów poszczególnych wektorów w iloczynie wektorowym.

Jeżeli chcemy obliczyć jakąś współrzędną wektora **c**; powiedzmy współrzędną drugą (y-kową) to w symbolu ε przestawiamy współrzędną y-kową na pierwsze miejsce. W ten sposób otrzymamy dwa możliwe uporządkowania pozostałych indeksów: ε_{yxz}=-1 oraz ε_{yzx}=1. Pierwszej możliwości odpowiada iloczyn współrzędnych a_xb_z a drugiej a_zb_x. Każdemu iloczynowi przyporządkujemy znak równy znakowi odpowiadającemu mu symbolowi ε. Tak więc na drugą współrzędną wektora **c** otrzymamy wzór

$$c_x = a_z b_x - a_z b_x \tag{2.5.4}$$

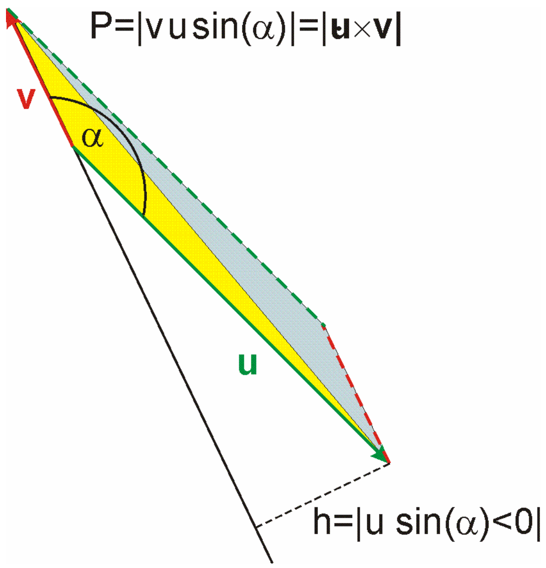
Postępując w ten sam sposób możemy wyznaczyć wszystkie składowe wektora **c**.

$$\mathbf{c}\left(\underbrace{a_y b_z - a_z b_y}_{\mathrm{c_x}};\ \underbrace{a_z b_x - a_z b_y}_{\mathrm{c_y}};\ \underbrace{a_x b_y - a_y b_x}_{\mathrm{c_z}}\right) \tag{2.5.5}$$

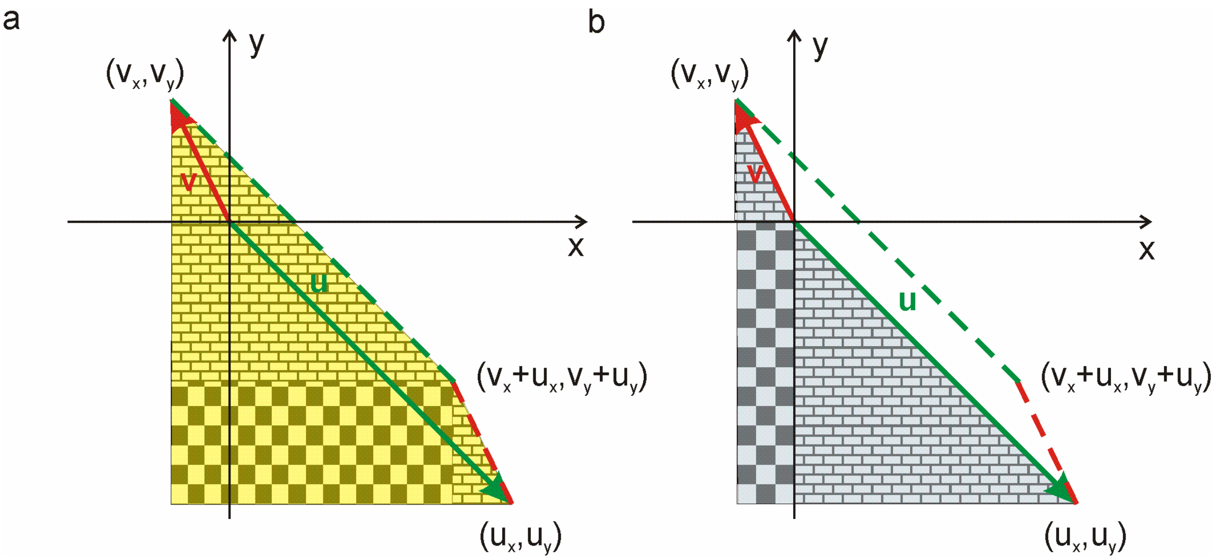
Iloczyn wektorowy dwóch wektorów ma prostą interpretację geometryczną. Iloczyn wektorowy wektora **a** i **b** jest równy co do wartości polu równoległoboku skonstruowanego z tych wektorów (rys. 2.5.5). Łatwo jest również pokazać równoważność szkolnej definicji iloczynu wektorowego z definicją współrzędnościową (rys. 2.5.6). Podany wyżej fakt jest również prawdziwy w trójwymiarowym przypadku. Wynika to z tego, że dwa niezerowe wektory o różnych kierunkach wyznaczają płaszczyznę. Zawsze możemy wybrać tak układ współrzędnych, że jego dwie osie, powiedzmy osie x i y będą leżały w tej płaszczyźnie. Wtedy równoległobok utworzony z tych dwóch wektorów również będzie leżał w tej płaszczyźnie i całość sprowadzimy do przypadku dwuwymiarowego. Skorzystaliśmy tu z ważnego faktu, że pole powierzchni figury nie może zależeć od układu współrzędnych, czyli we wszystkich poprawnie określonych układach współrzędnych pole musi być takie samo. Podsumowując ostatnią dyskusję mamy

Fakt 2.5.3.

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest liczbowo równy polu powierzchni równoległoboku utworzonego z tych wektorów.



Rysunek 2.5.5. Pole równoległoboku wyznaczonego przez dwa wektory **u** i **v** liczymy jako sumę pól dwóch trójkątów zaznaczonych na rysunku na żółto i szaro. Pole każdego trójkąta wyraża się tym samym wzorem $1/2\, h\, v = 1/2\, u\, v \sin(\alpha)$. Zatem pole równoległoboku jest równe $P = u\, v \sin(\alpha)$. Ale wzór ten wyznacza również wartości wektora **c** będącego iloczynem wektorowym wektora **u** i **v**; $P = |\mathbf{c}| = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$.



Rysunek 2.5.6. Pole równoległoboku utworzonego przez wektory **u** i **v** jest równe różnicy pól żółtej figury na rysunku (a) i szarej figury na rysunku (b). Pole żółtej figury to suma pól prostokąta i dwóch trójkątów. Pole prostokąta wynosi -$v_y u_x$ pole trójkątów wynoszą: małego (-1/2 $v_x v_y$), dużego 1/2$u_x u_y$. Pole żółtej figury wynosi –($v_y u_x$+1/2$v_x v_y$+1/2$u_x u_y$). Znak minus wstawiony jest przy współrzędnych o ujemnych wartościach, tak aby pola poszczególnych części żółtej figury były dodatnie. Pole szarej figury wynosi –($v_x u_y$+1/2 $v_x v_y$+1/2$u_x u_y$). Różnica wartość pól figury żółtej i szarej to -$v_y u_x$+ $v_x u_y$. Iloczyn wektorowy wektora **u** i **v** wynosi **v**×**u**=-**v**×**u** =**c**(0;0; -$v_y u_x$+ $v_x u_y$). Trzecia składowa jest co do wartości taka sama jak obliczone tu pole figury wyznaczonej przez wektoru **u** i **v**. Otrzymaliśmy zatem wzór na wartość iloczynu wektorowego wektora **u** i **v** we współrzędnych.

Dla iloczynu wektorowego udowodniono wiele użytecznych twierdzeń. Przytoczę tu, bez dowodu, te które będą dla nas użyteczne. Ich dowody można znaleźć w większości podręczników z algebry.

Twierdzenie 2.5.1: Iloczyn wektorowy trzech wektorów

*Jeżeli **a**, **b**, **c** są wektorami w przestrzeni o wymiarze 3, to spełniona jest zależność*

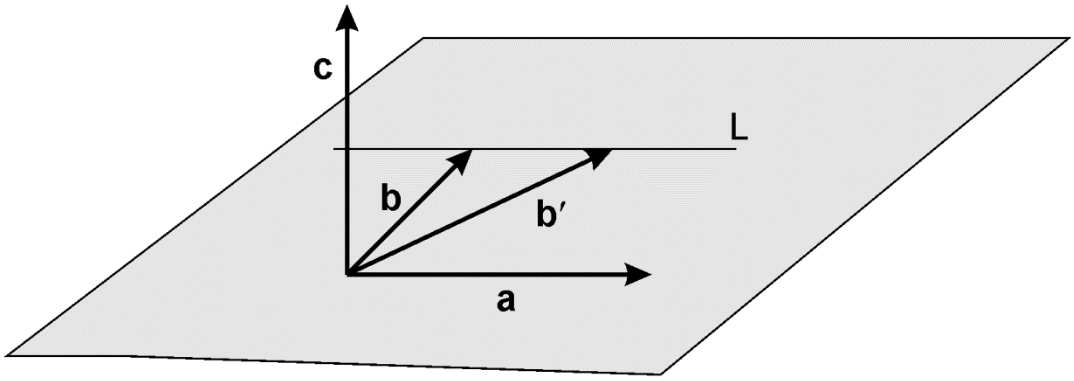
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \qquad 2.5.6$$

Twierdzenie to pozwala na wyrażenie iloczynu wektorowego trzech wektorów przez kombinację ich iloczynów skalarnych.

Twierdzenie 2.5.2: Niejednoznaczność iloczynu wektorowego

*Niech **a**, **b**, **c** będą wektorami w przestrzeni o wymiarze 3 i **c**=**a**x**b**. Z faktu, że znamy wektory **c** i **a** nie wynika w jednoznaczny sposób postać wektora **b**.*

Własność tą ilustruje rysunek (2.5.7)



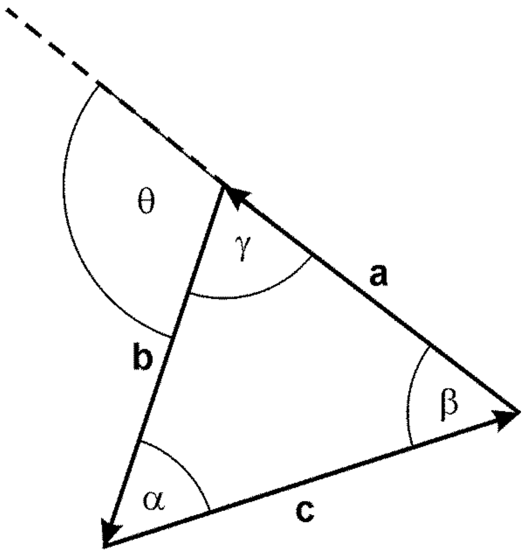
Rysunek 2.5.7. Jeżeli **c**=**a**×**b**, to również **c**=**a**×**b′**. Prosta L jest równoległa do wektora **a**. Łatwo jest to wykazać korzystając ze szkolnej definicji iloczynu wektorowego. Jak z tego widać, wektorom **c** i **a** może odpowiadać wiele wektorów **b** takich, że **c**=**a**×**b**

Wykorzystują rachunek wektorowy w łatwy sposób można udowodnić wiele twierdzeń znanych ze szkoły. Oto przykład

Twierdzenie 2.5.3: Twierdzenie cosinusów

W dowolnym trójkącie na płaszczyźnie, kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków, pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi

Trójką na płaszczyźnie wyznacza trzy wektory (rys. 2.5.8)



Rysunek 2.5.8. Trzy wektory tworzące trójkąt sumują się do zera

Spełniona jest zależność

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{c} = -(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \qquad 2.5.7$$

Skoro **c**=-(**a**+**b**), to lewą stronę możemy przemnożyć skalarnie przez wektor **c**, a prawą przez wektor –(**a**+**b**).

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \Rightarrow |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta) \qquad 2.5.8$$

Patrząc się uważnie na rysunek (2.5.8) widać, że

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta) \qquad 2.5.9$$

2.6. Cosinusy kierunkowe

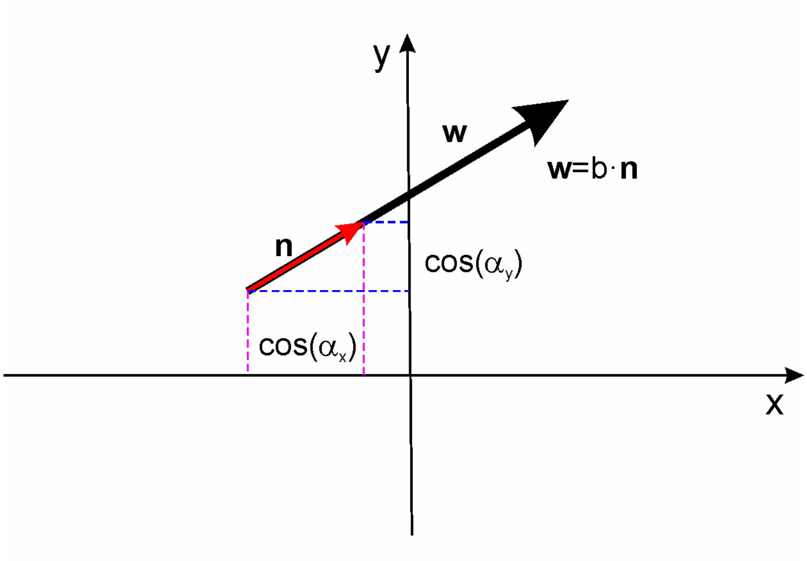
Wyrysujmy wektor na płaszczyźnie w zadanym układzie współrzędnych (rys. 2.6.1). Możemy go reprezentować jako wektor jednostkowy przemnożony przez liczbę równą długości tego wektora. Przez wektor jednostkowy rozumiem tu wektor równoległy do danego, o długości jeden i skierowany zgodnie z danym wektorem. Współrzędne takiego jednostkowego wektora są równe jego rzutom na osie układu współrzędnych. Ponieważ jednak wektor ma długość jeden, rzuty te są równe cosinusom odpowiednich kątów. Możemy zatem wektor jednostkowy zapisać tak

$$\mathbf{n}\{\cos(\alpha_x);\ \cos(\alpha_y)\} \qquad 2.6.1$$

Widać z tego, że cosinusy kątów wektora jednostkowego są zarazem jego współrzędnymi. Ponieważ wskazują kierunek wektora nazywamy je cosinusami kierunkowymi wektora. Wszystkie wektory równoległe do danego wektora jednostkowego możemy zapisać tak

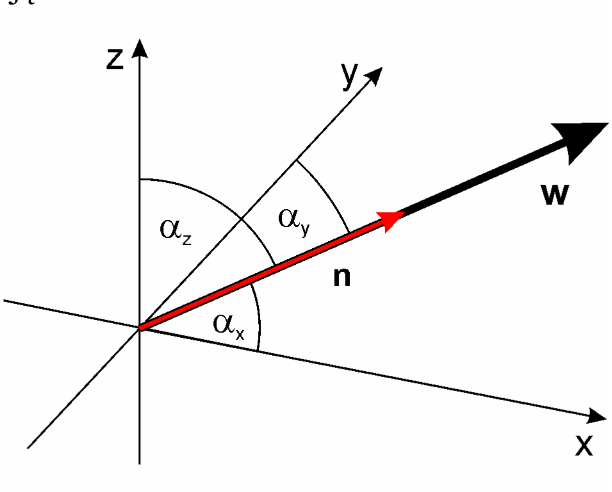
$$\mathbf{w} = b\mathbf{n} = \mathbf{w}\{b\cos(\alpha_x);\ b\cos(\alpha_y)\} \qquad 2.6.2$$

Tutaj b jest liczbą dodatnią wskazującą ile razy dany wektor jest dłuższy (krótszy) od wektora jednostkowego, który jest do niego równoległy. Wynika z tego, że cosinusy kierunkowe możemy użyć do określenia dowolnego wektora.



Rysunek 2.6.1. Wektor **w** możemy przedstawić poprzez jego cosinusy kierunkowe. Cosinusy kierunkowe wektora **w** to po prostu współrzędne wektora jednostkowego równoległego do wektora **w**. Tutaj wektor jednostkowy jest narysowany na czerwono.

To samo możemy zrobić w trzech wymiarach (rys.2.6.2) jak i N wymiarach, czego już nie narysuję.



Rysunek 2.6.2. W trzech wymiarach współrzędne wektora jednostkowego (wektory czerwony) wyrażają się przez trzy cosinusy kierunkowe

Współrzędne dowolnego wektora **w** w przestrzeni trójwymiarowej możemy wyrazić, w danym układzie współrzędnych, przez jego cosinusy kierunkowe.

$$\mathbf{w}\{|\mathbf{w}|\cos(\alpha_x);\ |\mathbf{w}|\cos(\alpha_y);\ |\mathbf{w}|\cos(\alpha_z)\} \Leftrightarrow \mathbf{w} = |\mathbf{w}|\cos(\alpha_x)\,\mathbf{e_x} + |\mathbf{w}|\cos(\alpha_y)\,\mathbf{e_y} + |\mathbf{w}|\cos(\alpha_z)\,\mathbf{e_z} \qquad 2.6.3$$

Ogólnie w N-wymiarowej przestrzeni wektorowej, w danej bazie, każdy wektor możemy wyrazić przez jego cosinusy kierunkowe.

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{N} |\mathbf{w}| \cos(\alpha_i)\, \mathbf{e_i} = |\mathbf{w}| \sum_{i=1}^{N} \cos(\alpha_i)\, \mathbf{e_i} \qquad 2.6.4$$

Teraz poszczególne wymiary oznaczyłem indeksami liczbowymi: i=1,2,3…,N. Ponieważ cosinusy kierunkowe są współrzędnymi wektora o długości jeden, spełniona jest zależność

$$\sum_{i=1}^{N} \cos^2(\alpha_i) = 1 \qquad 2.6.5$$

W trójwymiarowej przestrzeni warunek ten ma postaci

$$\cos^2(\alpha_x) + \cos^2(\alpha_y) + \cos^2(\alpha_z) = 1 \qquad 2.6.6$$